ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2013. Том 20, № 6. С. 59–76

УДК 519.178

КРИТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ГРАФОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ О РЁБЕРНОМ СПИСКОВОМ РАНЖИРОВАНИИ *)

Д. С. Малышев

Аннотация. Задача о рёберном списковом ранжировании является обобщением классической задачи о раскраске рёбер графа и математической моделью протекания ряда параллельных процессов. В настоящей работе исследуется вычислительная сложность этой задачи для замкнутых относительно изоморфизма и удаления вершин множеств графов (наследственных классов). Описываются все конечно определённые и минорно замкнутые случаи, для которых эта задача полиномиально разрешима. Выявляется вся совокупность «критических» классов графов, включение которых в конечно определённый класс эквивалентно «труднорешаемости» задачи о рёберном списковом ранжировании в этом классе. По-видимому, это вообще первый результат о полном таком описании для неискусственных NP-полных задач на графах. Конструктивно доказывается, что для этой задачи среди минимальных по включению наследственных случаев «труднорешаемости» имеется всего пять конечно определённых классов и один минорно замкнутый класс.

Ключевые слова: вычислительная сложность, наследственный класс, граничный класс, минимальный сложный класс, полиномиальный алгоритм, задача о рёберном списковом ранжировании.

Введение

Статья является продолжением цикла [1–7] и во многом завершает его. В [1–7] изучается разбиение семейства наследственных классов графов на «простые» и «сложные» элементы по трудоёмкости задач о списковом ранжировании. Суть исследования — выявление «критических»

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11–01–00107–а и 12–01–00749–а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2012 гг.» (гос. контракты 16.740.11.0310, 14.B37.21.0393 и соглашение 8861), лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ, гранта Правительства РФ (дог. 11.G34.31.0057), гранта Президента РФ МК–1148.2013.1 и программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» 2013–2014 гг. (проект № 12–01–0035).

классов графов, т. е. классов, играющих особую, определяющую роль при анализе вычислительной сложности.

Классом графов называется любое множество обыкновенных графов, замкнутое относительно изоморфизма. Класс графов $\mathcal{X}$ называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Любой наследственный класс (и только наследственный) графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещённых порождённых подграфов $\mathcal{S}$. В этом случае принята запись $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{S})$. Минимальное по включению множество $\mathcal{S}$ с таким свойством существует и единственно, оно обозначается через $\mathrm{Forb}(\mathcal{X})$. Наследственный класс $\mathcal{X}$ называется *конечно определённым*, если $\mathrm{Forb}(\mathcal{X})$ конечно. Семейство наследственных классов континуально и включает такие известные подсемейства, как совокупности монотонных и минорно замкнутых классов графов. Наследственный класс называется *монотонным*, если он замкнут и относительно удаления рёбер. Монотонный класс называется *минорно замкнутым*, если он замкнут относительно стягиваний рёбер его графов.

Задача о ранжировании (ранжированной раскраске) вершин (рёбер) для заданного графа состоит в том, чтобы определить минимальное число цветов (натуральных чисел), в которые можно покрасить его вершины (рёбра) так, что любой путь, соединяющий две одноцветные вершины (два одноцветных ребра), содержит вершину (ребро) с бо́льшим цветом. Задача о ранжированной раскраске вершин имеет приложения в параллельном вычислении разложения Холецкого [12], проектировании СБИС [11], а задача о ранжировании рёбер — в параллельной обработке запроса к базе данных [13], к сборке изделия, состоящего из нескольких модулей [9]. Задачи о списковом ранжировании являются обобщениями задач о ранжированной раскраске. В нашей работе рассматривается рёберный вариант задачи о списковом ранжировании. Его постановка состоит в следующем.

Заданы граф G с множеством рёбер E и множество $\mathfrak{L} = \{L(e) \mid e \in E\}$, где $L(e)$ — конечное множество натуральных чисел (цветов, в которые разрешается покрасить ребро e). *$\mathfrak{L}$-ранжированием рёбер* графа G называется раскраска c его рёбер такая, что (i) $c(e) \in L(e)$ для любого ребра e; (ii) если $c(e_1) = c(e_2)$, $e_1 \neq e_2$, то каждый путь, соединяющий e_1 и e_2, содержит ребро e_3 такое, что $c(e_3) > c(e_1)$.

Задача о рёберном списковом ранжировании (задача РСР) состоит в определении по данным G и $\mathfrak{L}$, существует ли $\mathfrak{L}$-ранжирование рёбер графа G. Исследования по сложности данной задачи потенциально могут быть использованы на практике, поскольку списковость более адекватно моделирует параллелелизм. Нам эта задача в первую очередь интересна тем, что для неё полностью удаётся описать все «критические» классы некоторых типов.

Пусть П — какая-либо NP-полная задача на графах. Наследственный класс графов называется П-*простым*, если задача П в этом классе полиномиально разрешима. Уточним, что под PCP-простым классом графов далее понимается такой наследственный класс, что задача PCP для графов из этого класса решается за полиномиальное время при любом множестве $\mathfrak{L}$. П-*сложным* называется наследственный класс графов, не являющийся П-простым. Считается, что P$\neq$NP, и это условие явно не включается в формулировки утверждений. Наследственный класс графов $\mathcal{B}$ называется П-*предельным*, если существует бесконечная последовательность $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2 \supseteq \ldots$ из П-сложных классов графов такая, что $\mathcal{B} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$. Минимальный по включению П-предельный класс называется П-*граничным.* Значение этого понятия раскрывает

Теорема 1 [8]. *Конечно определённый класс графов* П*-сложен тогда и только тогда, когда он содержит какой-нибудь* П*-граничный подкласс.*

Из теоремы 1 следует, что полная информация о структуре П-*граничной системы* (т. е. множества всех П-граничных классов графов) позволяет полностью описать все конечно определённые П-простые классы. К сожалению, до результатов настоящей работы ни для одной задачи на графах не удавалось получить полного описания всех граничных классов. Такое описание для задачи PCP является одним из основных результатов нашей работы. Показано, что PCP-граничную систему образуют десять конкретных классов графов, и полностью описаны все PCP-простые минорно замкнутые классы графов.

Итак, П-граничные классы являются «критическими» классами, а все другие критические классы — *минимальными* П*-сложными классами*, т. е. минимальными по включению П-сложными классами графов. В [2] найдены первые примеры этих классов и показано, что для некоторых задач П минимальных П-сложных классов не существует (в [8] доказано, что П-граничные классы существуют всегда). Последнее, например, верно для вершинного и рёберного вариантов задачи о k-раскраске при любом $k > 2$. В настоящее время известны только шесть минимальных PCP-сложных случаев. Возможно, что других таких классов нет. В настоящей работе доказано, что пять конкретных классов образуют всю совокупность конечно определённых минимальных PCP-сложных классов и что некоторый класс является единственным минорно замкнутым минимальным PCP-сложным случаем.

1. Обозначения, определения и некоторые цитируемые результаты

Введём следующие обозначения:

kG — бессвязное объединение k экземпляров графа G;

P_n — простой путь с n вершинами;

K_n — полный граф с n вершинами;

$K_{p,q}$ — полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой;

Comb_i — граф, получающийся добавлением к $K_{2,i}$ ребра, инцидентного обеим вершинам степени i;

S_i — граф, получаемый подразбиением каждого ребра графа $K_{1,i}$;

Cam_i — граф, получаемый соединением рёбрами вершины степени i графа S_i со всеми его листьями;

Com_i — граф, получаемый отождествлением одной из концевых вершин пути P_i с вершиной степени i графа $K_{1,i}$.

Наследственным замыканием класса $\mathcal{X}$ (обозначаемым через $[\mathcal{X}]$) называется множество графов, порождённых подграфами в графах из $\mathcal{X}$. *Аддитивным замыканием класса* $\mathcal{X}$ называется множество графов, каждая компонента связности которых принадлежит $\mathcal{X}$.

Введём также следующие обозначения для классов графов:

$\mathcal{C}lique$ — класс полных графов;

$\mathcal{B}at = \left[\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{K_{2,i}\}\right]$;

$\mathcal{C}omb = \left[\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{\mathrm{Comb}_i\}\right]$;

$\mathcal{S}tar = \left[\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{S_i\}\right]$;

$\mathcal{C}amomile = \left[\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{\mathrm{Cam}_i\}\right]$;

$\mathcal{C}omet = \left[\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{\mathrm{Com}_i\}\right]$;

$\widetilde{\mathcal{T}}$ — наследственное замыкание аддитивного замыкания множества графов, которые получаются добавлением вершины к некоторому пути и ребра, инцидентного добавленной вершине и некоторой вершине пути;

$\widetilde{\mathcal{D}}$ — наследственное замыкание аддитивного замыкания множества графов, которые получаются добавлением вершины к некоторому пути и рёбер, инцидентных добавленной вершине и некоторым двум последовательным вершинам пути;

$\widehat{\mathcal{T}}$ — наследственное замыкание аддитивного замыкания множества графов, которые получаются добавлением вершины к некоторому пути и рёбер, инцидентных добавленной вершине и некоторым двум вершинам пути, отстоящим в пути друг от друга на расстояние 2;

$\widehat{\widehat{\mathcal{D}}}$ — наследственное замыкание аддитивного замыкания множества графов, которые получаются добавлением вершины к некоторому пути и рёбер, инцидентных добавленной вершине и трём последовательным вершинам пути.

В [1–7] установлено, что $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile, \mathcal{C}lique, \widetilde{\mathcal{T}}$, $\widetilde{\mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{T}}$ и $\widehat{\mathcal{D}}$ являются PCP-граничными классами, причём первые шесть минимальные PCP-сложные. Отметим, что в [7] класс $\mathcal{B}at$ обозначался через $\mathcal{B}C$, класс $\mathcal{C}omb$ — через $\mathcal{B}C'$, а в [6] класс $\widetilde{\widetilde{\mathcal{T}}}$ — через $\mathcal{T}_1$.

Один из основных результатов настоящей работы — утверждение, что $\{\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile, \mathcal{C}lique, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{D}}\}$ — PCP-граничная система, другой — что существует ровно пять конечно определённых минимальных PCP-сложных классов $\mathcal{C}lique, \mathcal{B}at, \mathcal{C}omb, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}amomile$ и один минорно замкнутый минимальный PCP-сложный класс $\mathcal{C}omet$.

2. Оценки числа вершин, степеней вершин и диаметров графов из некоторых классов

Напомним, что множество попарно не смежных вершин графа называется *независимым*, а попарно смежных вершин графа — *кликой*. *Паросочетанием* в графе называется множество попарно не смежных рёбер. Паросочетание называется *порождённым*, если нет ребра, смежного с двумя различными рёбрами паросочетания.

Лемма 1. *Любой граф G с n вершинами без изолированных вершин и максимальной степени Δ содержит порождённое паросочетание с $\lceil \frac{n}{2\Delta^2} \rceil$ рёбрами.*

Доказательство. 2-*Сферой* B_e с центром в ребре $e \in E(G)$ графа G назовём множество рёбер G, которые в рёберном к G графе отстоят от вершины e на расстояние не более чем 2. Ясно, что 2-сфера B_e для любого $e \in E(G)$ содержит не более чем

$$1 + 2(\Delta - 1) + 2(\Delta - 1)^2 = \xi \stackrel{\Delta}{=} 2\Delta(\Delta - 1) + 1 < 2\Delta^2$$

элементов. Отсюда следует, что любая компонента связности H графа G содержит порождённое паросочетание с $\lceil |E(H)|/\xi \rceil$ рёбрами, которое может быть построено методом первого подходящего. Если H — не дерево, то $|E(H)| \geqslant |V(H)|$, поэтому $\lceil |E(H)|/\xi \rceil \geqslant \lceil |V(H)|/\xi \rceil \geqslant \lceil |V(H)|/(2\Delta^2) \rceil$. Пусть H — дерево. Покажем, что

$$\lceil |E(H)|/\xi \rceil = \lceil (|V(H)|-1)/\xi \rceil \geqslant \lceil |V(H)|/(2\Delta^2) \rceil.$$

Действительно, пусть $k = \lceil (|V(H)|-1)/\xi \rceil$ и $\lceil |V(H)|/(2\Delta^2) \rceil \geqslant k+1$. Тогда $|V(H)| \geqslant 2\Delta^2 k + 1$ (из последнего неравенства), тем самым

$$\lceil (|V(H)|-1)/\xi \rceil \geqslant \lceil (2\Delta^2 k + 1 - 1)/\xi \rceil \geqslant \lceil 2\Delta^2 k/\xi \rceil.$$

Заметим, что $\lceil 2\Delta^2 k/\xi \rceil = \lceil k + k(2\Delta - 1)\xi \rceil \geqslant k+1$, так как $2\Delta > 1$ и $k \in \mathbb{N}$ (поскольку $|V(H)| > 1$); противоречие.

Итак, каждая компонента связности H графа G содержит порождённое паросочетание с $\lceil |V(H)|/(2\Delta^2) \rceil$ рёбрами. Отсюда следует, что и сам граф G содержит порождённое паросочетание с $\lceil \frac{n}{2\Delta^2} \rceil$ рёбрами (напомним, что $\lceil x_1 \rceil + \ldots + \lceil x_k \rceil \geqslant \lceil x_1 + \ldots + x_k \rceil$ для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$). Лемма 1 доказана.

По теореме Рамсея любой граф с достаточно большим числом вершин содержит либо независимое множество, либо клику с заданными мощностями. Обозначим наименьшее число вершин в графе, обязательно содержащем либо независимое множество с a вершинами, либо клику с b вершинами, через $R(a, b)$.

Лемма 2. *Пусть* $G \in \mathrm{Free}(\{K_i, K_{2,i}, \mathrm{Comb}_i, S_i, \mathrm{Cam}_i\})$ $(i \geqslant 2)$ *и* $x \in V(G)$. *Тогда вершина* x *имеет менее* $2iR^2(i,i) + R(iR(i,i), i)$ *нелистовых соседей.*

Доказательство. Рассмотрим $N(x)$ и удалим из $N(x)$ все листья графа G. Оставшееся множество разобьём на два подмножества N_1 и N_2. Подмножество N_1 составляют вершины y такие, что $N(y) \subseteq N(x) \cup \{x\}$. Подмножество N_2 образуют вершины, имеющие хотя бы одного соседа, не смежного с x.

Каждая вершина из $N(x)$ имеет не более чем $R(i, i-1) - 1$ соседних вершин в $N(x)$. Действительно, если бы существовала вершина $y \in N(x)$ с не менее чем $R(i, i-1)$ соседями из $N(x)$, то $N(y) \cap N(x)$ содержала бы либо независимое множество размера i, либо клику с $i-1$ вершинами. Но тогда G содержал бы либо Comb_i, либо K_i в качестве порождённого подграфа. В множестве N_2 рассмотрим подмножество N_2' вершин, смежных хотя бы с одной вершиной из N_1. Подграф H графа G, порождённый множеством вершин $N_1 \cup N_2'$, не содержит изолированных вершин, причём степень каждой его вершины не превосходит $R(i, i-1) - 1$. Поэтому множество $N_1 \cup N_2'$ содержит не более чем

$2(i-1)(R(i,i-1)-1)^2 < 2iR^2(i,i)$ вершин, так как в противном случае по лемме 1 имеются $2i$ вершин из $N_1 \cup N_2'$, порождающих в G паросочетание (и G содержит порождённый подграф Cam_i). Значит, $|N_1| < 2iR^2(i,i)$.

Рассмотрим множество N_2. Через $N_2^{(1)}$ обозначим наибольшее независимое подмножество N_2, и пусть

$$N_2^{(2)} = \{z \mid \exists y \in N_2^{(1)},\ z \in N(y) \setminus (N(x) \cup \{x\})\}.$$

Рассмотрим минимальное по включению подмножество

$$V = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subseteq N_2^{(2)},$$

доминирующее $N_2^{(1)}$ (т. е. $N_2^{(1)} \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{k} N(u_j)$). Такое множество обязательно существует, так как каждая вершина множества $N_2^{(1)}$ смежна хотя бы с одной вершиной из $N_2^{(2)}$. Ввиду минимальности V существуют вершины $v_1, v_2, \ldots, v_k \in N_2^{(1)}$ такие, что для любого $s \in \overline{1,k}$ вершина v_s принадлежит множеству $N(u_s) \setminus \bigcup\limits_{j=1,\, j\neq s}^{k} N(u_j)$. Ясно, что любая вершина V смежна с не более чем $i-1$ вершинами из $N_2^{(1)}$ (так как $G \in \mathrm{Free}(\{K_{2,i}\})$), поэтому $k = |V| \geqslant \frac{|N_2^{(1)}|}{i-1}$. Множество V содержит не более $R(i,i)-1$ элементов, поскольку в противном случае оно содержит независимое множество размера i, вершины которого вместе со смежными им вершинами из $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ и вершиной x порождают в G подграф S_i. Значит, $k < R(i,i)$ и $\left|N_2^{(1)}\right| < iR(i,i)$. Понятно, что $|N_2| \leqslant R\big(\left|N_2^{(1)}\right| + 1, i-1\big) - 1$, тем самым $|N_2| < R(iR(i,i),i)$. Объединяя полученную оценку с оценкой на мощность N_1, заключаем, что x имеет не более чем $2iR^2(i,i) + R(iR(i,i),i)$ нелистовых соседей. Лемма 2 доказана.

Напомним, что *диаметром* графа называется максимальное из попарных расстояний между его вершинами.

Лемма 3. *Пусть G — связный граф из $\mathrm{Free}(\{\mathrm{Com}_i\})$ и $i \geqslant 3$. Тогда либо диаметр G не превосходит $2i-3$, либо каждая вершина G имеет не более чем $i-1$ соседних листьев.*

Доказательство. Пусть диаметр G не менее чем $2i-2$ и некоторая вершина x имеет i соседних листьев. Пусть y и z — две вершины, расстояние между которыми не менее чем $2i-2$. По неравенству треугольника существует такая вершина $x' \in \{y, z\}$, что расстояние между ней и x не менее $i-1$. Ввиду связности G существует порождённый путь P, соединяющий x и x' и содержащий не менее чем i вершин. Путь P не содержит ни одного листового соседа x, так как его длина не менее чем 2. Некоторые вершины P и некоторые соседние с x листья G порождают подграф, изоморфный Com_i; противоречие. Лемма 3 доказана.

Будем говорить, что граф G является *надграфом* графа H, если H является порождённым подграфом G. Вершину степени 2 в графе назовём *внутренней*, если её соседи несмежны.

Лемма 4. *Пусть* $H_1 \in \widetilde{\mathcal{T}}$, $H_2 \in \widetilde{\mathcal{D}}$, $H_3 \in \widehat{\mathcal{T}}$, $H_4 \in \widehat{\mathcal{D}}$ *и* G *— связный граф без внутренних вершин с не менее чем тремя вершинами, принадлежащий классу* $\mathrm{Free}(\{H_1, H_2, H_3, H_4\})$. *Тогда* G *имеет не более чем* $\frac{\Delta^{8n(n+2)}-1}{\Delta-1}$ *вершин, где* Δ *— максимальная из степеней вершин графа* G, *а* $n = \max(|V(H_1)|, |V(H_2)|, |V(H_3)|, |V(H_4)|)$.

Доказательство. Предположим противное. Поскольку G является связным графом и содержит не менее трех вершин, то $\Delta \geqslant 2$. Легко показать, что любой связный граф с диаметром d и наибольшей из степеней вершин $\Delta' > 1$ имеет не более чем $1+\Delta'+\Delta'^2+\ldots+\Delta'^d = \frac{\Delta'^{d+1}-1}{\Delta'-1}$ вершин. Из этого и сделанного предположения следует, что диаметр G не менее $8n(n+2)$. Рассмотрим две вершины x и y графа G и порождённый путь между этими вершинами, длина которого равна диаметру G. Удалим крайние вершины этого пути и получим путь $P = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$. Понятно, что $k \geqslant (8n-1)(n+2)+n+1$. Каждая вершина пути P смежна хотя бы с одной вершиной из $V(G)\setminus V(P)$ (поскольку G не содержит внутренних вершин и P является порождённым путём). Обозначим через V множество тех вершин из $V(G)\setminus V(P)$, которые смежны хотя бы с одной вершиной пути P. Для каждой вершины $v \in V$ рассмотрим множество $I_v = \{i \mid (v, u_i) \in E(G)\}$. Покажем, что I_v для любого $v \in V$ состоит из не более чем трёх подряд идущих индексов. Рассмотрим произвольную вершину u_i, смежную с v. Предположим, что есть вершина u_j, смежная с v, где $j > i+2$. Тогда граф G содержит путь $(x, u_1, \ldots, u_i, v, u_j, \ldots, u_k, y)$ длины не более чем k, что меньше диаметра G; противоречие.

Рассмотрим вершины $u_{n+2}, u_{3n+6}, \ldots, u_{(8n-1)(n+2)}$. Для $u_{(2i-1)(n+2)}$ найдётся смежная с ней вершина $v_i \in V$. Все вершины $v_1, v_2, \ldots, v_{4n}$ попарно различны (по рассуждениям из конца предыдущего абзаца), нетрудно видеть, что все они попарно не смежны (иначе диаметр G не более чем k). Для любого $i \in \overline{1,4n}$ множество $V_i = \{v_i, u_{(2i-1)(n+2)-n-1}, \ldots, u_{(2i-1)(n+2)}, \ldots, u_{(2i-1)(n+2)+n+1}\}$ существует (поскольку $k \geqslant (8n-1) \times (n+2)+n+1$) и порождает в графе G подграф, являющийся надграфом любой компоненты связности некоторого графа $H^i \in \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$. Граф G не содержит ребра, инцидентного двум вершинам из разных таких множеств. По принципу Дирихле среди $v_1, v_2, \ldots, v_{4n}$ существуют вершины $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}$ такие, что множества $V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_n}$ порождают графы, являющиеся надграфами любой компоненты связности некоторого графа $H \in \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$. Объединение этих надграфов является надграфом H, поэтому G содержит H в качестве порождённого подграфа; противоречие с исходным предположением. Лемма 4 доказана.

Граф H будем называть *стяжкой* графа G, если G получается подразбиениями рёбер H и H содержит минимальное количество вершин. Ясно, что стяжка любого графа G существует и единственна. Пусть $\mathcal{X}$ — некоторый класс графов. Обозначим через $\mathcal{X}_c$ множество стяжек графов из $\mathcal{X}$.

Лемма 5. *Пусть наследственный класс $\mathcal{X}$ не включает ни одного из классов $\widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{D}}, \mathcal{C}omet$. Тогда $[\mathcal{X}_c]$ тоже не включает ни одного из них.*

Доказательство. Покажем, что если $\mathcal{Y} \subseteq [\mathcal{X}_c]$ для некоторого $\mathcal{Y}$ из $\{\widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{D}}, \mathcal{C}omet\}$, то для некоторого $\mathcal{Y}' \in \{\widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{D}}, \mathcal{C}omet\}$ справедливо $\mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{X}$, что влечёт утверждение леммы. Подразбиение любых рёбер произвольного графа из $\mathcal{C}omet$ (или из $\widetilde{\mathcal{T}}$) приводит к его надграфу. Отсюда и из наследственности $\mathcal{X}$ следует истинность утверждения для случаев $\mathcal{Y} \in \{\mathcal{C}omet, \widetilde{\mathcal{T}}\}$ (здесь $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y}$). Рассуждения в оставшихся трёх случаях аналогичны, поэтому приведём доказательство только для случая $\mathcal{Y} = \widetilde{\mathcal{D}}$. Именно, докажем, что если $\widetilde{\mathcal{D}} \subseteq [\mathcal{X}_c]$, то $\mathcal{X}$ включает хотя бы один из классов $\widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{T}}$.

Предположим противное. Пусть $G_k^{(1)}$ — результат добавления вершины к пути P_{2k+1} и ребра, инцидентного добавленной вершине и средней вершине пути. Пусть $G_k^{(2)}$ — результат отождествления двух концов двух путей P_{k+1} с двумя различными вершинами треугольника. Пусть $G_k^{(3)}$ — результат отождествления двух концов двух путей P_{k+1} с двумя несмежными вершинами цикла длины 4. Отметим, что при любом k справедливо $G_k^{(1)} \in \widetilde{\mathcal{T}}$, $G_k^{(2)} \in \widetilde{\mathcal{D}}$, $G_k^{(3)} \in \widehat{\mathcal{T}}$. Существует такое k', что $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Free}\big(\{k'G_{k'}^{(1)}, k'G_{k'}^{(2)}, k'G_{k'}^{(3)}\}\big)$. По определению класса $\mathcal{X}_c$ и ввиду наследственности $\mathcal{X}$ для любого k существует граф $H_k \in \mathcal{X}$ с $3k$ компонентами связности, из которого серией стягиваний рёбер можно получить граф $3kG_k^{(2)}$. Заметим, что каждая компонента связности H_k является надграфом либо $G_k^{(1)}$, либо $G_k^{(2)}$, либо $G_k^{(3)}$. Поэтому есть $i_k \in \overline{1,3}$ такое, что $kG_k^{(i_k)}$ является порождённым подграфом H_k. Пусть $k > k'$.

Значит, $kG_k^{(i_k)} \in \mathcal{X}$ и $k'G_{k'}^{(i_k)} \in \mathcal{X}$ (из наследственности $\mathcal{X}$); противоречие. Лемма 5 доказана.

3. Случаи полиномиальной разрешимости задачи о рёберном списковом ранжировании

Теорема 2 [10]. *Для любого фиксированного C задача* РСР *полиномиально разрешима в классе графов, у которых не более чем C нелистовых вершин.*

В [7] введено понятие poly-класса. Будем говорить, что класс графов является poly-*классом*, если любой его связный граф G с n вершинами имеет не более чем $p(n)$ подмножеств множества $V(G)$, каждое из которых порождает в G связный подграф, где $p(n)$ — некоторый полином переменной n. Интерес к понятию poly-класса раскрывает

Теорема 3 [7]. *Задача* РСР *полиномиально разрешима для графов из любого* poly-*класса.*

В [7] показано, что классы графов специального вида являются poly-классами.

Лемма 6. *Для любых фиксированных d и k класс графов с со степенями всех вершин не более чем d и имеющих не более чем k вершин со степенями больше 2 является* poly-*классом.*

4. Строение всех конечно определённых и минорно замкнутых случаев эффективной разрешимости задачи РСР и РСР-«критические» классы графов

Граф H называется *минором* графа G, если H получается стягиванием рёбер некоторого подграфа графа G. Класс графов, замкнутый относительно перехода к минорам его графов, называется *минорно замкнутым.* Любой минорно замкнутый класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещённых миноров $\mathcal{S}$, что записывается в виде $\mathcal{X} = \mathrm{Free}_m(\mathcal{S})$. По известной теореме Робертсона и Сеймура минимальное (по отношению «быть минором графа») множество запрещённых миноров является конечным для любого минорно замкнутого класса. Например, для класса планарных графов данное множество совпадает с $\{K_{3,3}, K_5\}$ по критерию Понтрягина — Куратовского.

Лемма 4 для минорно замкнутых классов формулируется и доказывается несколько проще.

Лемма 7. *Пусть G — связный граф из* $\mathrm{Free}_m(\{\mathrm{Com}_i\})$ $(i \geqslant 2)$ *с не менее чем тремя вершинами, Δ — наибольшая из степеней вершин G. Тогда стяжка графа G имеет не более чем $\frac{\Delta^{4i+1}-1}{\Delta-1}$ вершин.*

Доказательство. Предположим противное. Ясно, что $\Delta > 1$. Пусть H — стяжка графа G. Если G — простой путь, то $H = K_2$. Для такого графа G неравенство справедливо. Пусть G не является простым путём. Понятно, что H не содержит внутренних вершин, причём степени всех вершин H не превосходят Δ и степень некоторой вершины H равна в точности Δ. Рассмотрим в графе H порождённый путь P длины, равной диаметру H. Этот путь содержит не менее чем $4i+2$ вершин (напомним, что любой связный граф с диаметром d и наибольшей из степеней вершин $\Delta' > 1$ имеет не более чем $\frac{\Delta'^{d+1}-1}{\Delta'-1}$ вершин). Каждая неконцевая вершина P смежна хотя бы с одной вершиной из $V(H) \setminus V(P)$, причём каждая вершина из $V(H) \setminus V(P)$ смежна с не более чем тремя вершинами P. Рассмотрим множество V_1 первых $3i$ неконцевых вершин P. Существует множество V_2, состоящее из i вершин множества $V(H) \setminus V(P)$, каждая из которых смежна хотя бы с одной вершиной из V_1. Рассмотрим подграф H' графа H, образованный всеми неконцевыми рёбрами P и i произвольными рёбрами, каждое из которых инцидентно одной вершине из V_2 и одной вершине из V_1, причём в совокупности все i этих рёбер инцидентны всем вершинам из V_2. Легко видеть, что из H' стягиванием некоторых его рёбер можно получить граф Com_i. Значит, H содержит Com_i в качестве минора; противоречие. Лемма 7 доказана.

Класс графов $\mathcal{X}$ будем называть *минором класса* $\mathcal{Y}$, если для любого графа $H \in \mathcal{X}$ существует такой граф $G \in \mathcal{Y}$, что H — минор графа G. Класс $\mathcal{X}$ будем называть *сильным минором класса* $\mathcal{Y}$, если для любого графа $H \in \mathcal{X}$ существует такой граф $G \in \mathcal{Y}$, что H — минор графа G, причём количество вершин в G ограничено сверху некоторым полиномом от числа вершин H. Оказывается, что понятие сильного минора класса графов позволяет полностью описать все случаи эффективной разрешимости задачи РСР в некотором семействе классов графов, содержащем все конечно определённые и минорно замкнутые классы. По-видимому, это вообще первый результат о полном таком описании для неискусственных NP-полных задач на графах.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{X}$ — класс графов, для которого задача* РСР *не является полиномиально разрешимой. Тогда таким свойством обладает любой класс, для которого $\mathcal{X}$ является сильным минором.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}$ — сильный минор класса $\mathcal{Y}$. Покажем, что задача PCP для графов из $\mathcal{X}$ полиномиально сводится к той же задаче для графов из $\mathcal{Y}$. Отсюда будет следовать справедливость теоремы.

Пусть $H \in \mathcal{X}$ и $\mathfrak{L}$ — входные данные задачи PCP, C — максимальный цвет в множествах из $\mathfrak{L}$. Пусть G — граф, существование которого для H постулируется в определении сильного минора класса. Граф H получается из G удалением вершин и рёбер и последующим стягиванием некоторых рёбер. Существует множество рёбер G, которые становятся рёбрами графа H. Пусть E — множество таких рёбер G, E_1 — множество рёбер G, которые в процессе построения H стягиваются, а $E_2 = E(G) \setminus (E \cup E_1)$. Построим множество $\mathfrak{L}'$ назначений допустимых цветов рёбрам G следующим образом. Если $e \in E$, то положим $L'(e)$ равным объединению цветов из $L(e)$, увеличенных на $|E_1|$. Пронумеруем все рёбра из E_1 числами от 1 до $|E_1|$. Для ребра $e \in E_1$ с номером i положим $L'(e) = \{i\}$. Пронумеруем все рёбра из E_2 числами от 1 до $|E_2|$. Для ребра $e \in E_2$ с номером i положим $L'(e) = \{C + |E_1| + i\}$. Очевидно, что $\mathfrak{L}'$-ранжирование рёбер графа G существует тогда и только тогда, когда существует $\mathfrak{L}$-ранжирование рёбер графа H. Вместе с тем, длина входных данных пары $(G, \mathfrak{L}')$ ограничена сверху некоторым полиномом от длины входных данных пары $(H, \mathfrak{L})$. Отсюда следует обозначенное ранее полиномиальное сведéние. Теорема 4 доказана.

Теорема 4 позволяет по уже известным PCP-сложным случаям строить новые PCP-сложные случаи. Это особенно полезно при выявлении новых минимальных PCP-сложных классов. Так, на основе PCP-сложности классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ в [5, 7] похожим образом установлено, что классы $\mathcal{C}omb$, $\mathcal{C}amomile$ и $\mathcal{C}lique$ PCP-сложные. На множестве всех минимальных PCP-сложных классов можно ввести отношение «быть сильным минором класса», такое отношение обязательно является квазипорядком (оно рефлексивно и транзитивно). Можно проверить, что на множестве $\{\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile, \mathcal{C}lique\}$ данное отношение является порядком. Диаграмма Хассе этого порядка представлена на рис. 1.

Далее показано, что классы $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}omb$, $\mathcal{C}amomile$ и $\mathcal{C}lique$ образуют полную совокупность конечно определённых минимальных PCP-сложных классов. Тем самым для таких классов представленная диаграмма (без класса $\mathcal{C}omet$) является полной.

Введём в рассмотрение семейство $\mathcal{M}$ классов графов. Наследственный класс графов $\mathcal{X}$ принадлежит $\mathcal{M}$, если выполняется одно из условий:

(i) ни один из классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ не является минором $\mathcal{X}$;

(ii) если хотя бы один из классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ является минором $\mathcal{X}$, то хотя бы один из них является и сильным минором $\mathcal{X}$.

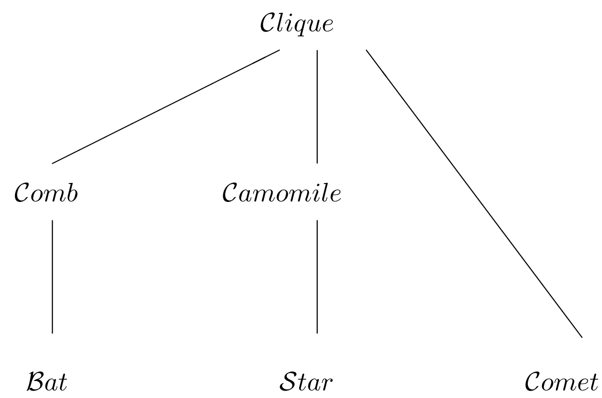

Рис. 1

Очевидно, что все минорно замкнутые классы принадлежат семейству $\mathcal{M}$. Далее доказано, что и все конечно определённые классы принадлежат $\mathcal{M}$.

Лемма 8. *Каждый конечно определённый класс принадлежит* $\mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}$ — конечно определённый класс, для которого хотя бы один из классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ является минором. Можно считать, что $\mathcal{X}$ не включает ни один из шести классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile, \mathcal{C}lique$, так как иначе один из классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet$ является сильным минором $\mathcal{X}$. Обозначим через N сумму количеств вершин в графах из $\mathrm{Forb}(\mathcal{X})$. Рассмотрим граф $G_{i,j}$, где $i \in \overline{1,4}$ и $j \in \mathbb{N}$, формируемый следующим образом. Возьмём путь с $(j+1)N+j\delta_i$ вершинами, где $\delta_i = i$ для $i \in \overline{1,3}$ и $\delta_4 = 3$. Пронумеруем вершины этого пути числами от 1 до $(j+1)N + j\delta_i$ последовательно от одного конца к другому и добавим к нему j новых вершин, которые также пронумеруем числами от 1 до j. Для любого $k \in \overline{1,j}$ рассмотрим добавленную вершину с номером k. Соединим её ребром с вершиной пути с номером $kN + (k-1) + 1$, если $i = 1$, рёбрами с вершинами пути с номерами

$$kN + 2(k-1) + 1 \text{ и } kN + 2(k-1) + 2, \quad \text{если } i = 2,$$

$$kN + 3(k-1) + 1,\ kN + 3(k-1) + 2 \text{ и } kN + 3(k-1) + 3, \quad \text{если } i = 3,$$

$$kN + 3(k-1) + 1 \text{ и } kN + 3(k-1) + 3, \quad \text{если } i = 4.$$

Пусть $\mathcal{Z}_i = \left[\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\{G_{i,j}\}\right]$. Ясно, что для любого $i \in \overline{1,4}$ класс $\mathcal{C}omet$ является сильным минором класса $\mathcal{Z}_i$. Поэтому можно считать, что каждый из этих четырёх классов не включён в $\mathcal{X}$. Заметим, что для любого $i \in \overline{1,4}$ любой граф с N вершинами из $\mathcal{Z}_i$ принадлежит либо $\widetilde{\mathcal{T}}$ (если $i = 1$), либо $\widetilde{\mathcal{D}}$ (если $i = 2$), либо $\widehat{\mathcal{D}}$ (если $i = 3$), либо $\widehat{\mathcal{T}}$ (если $i = 4$). Поэтому в множестве $\mathrm{Forb}(\mathcal{X})$ существуют графы, принадлежащие каждому из множеств $\widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{D}}$. По исходному предположению это верно также и для классов $\mathcal{B}at, \mathcal{S}tar, \mathcal{C}omet, \mathcal{C}omb, \mathcal{C}amomile, \mathcal{C}lique$.

По леммам 2 и 3 существуют такие константы C_1 и C_2 (зависящие от графов из $\mathrm{Forb}(\mathcal{X})$, принадлежащих $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}omet$, $\mathcal{C}omb$, $\mathcal{C}amomile$, $\mathcal{C}lique$), что для любого связного графа $G \in \mathcal{X}$ либо степени всех вершин не больше C_1, либо диаметр G не больше C_2. Пусть $\mathcal{X}_1$ — множество связных графов из $\mathcal{X}$ со степенями всех вершин не более чем C_1. Пусть $\mathcal{X}_2$ — множество связных графов из $\mathcal{X}$ с диаметром не более чем C_2. Стяжка любого графа не содержит внутренних вершин. Поэтому по леммам 4 и 5 существует такая константа C_3 (также зависящая от графов из $\mathrm{Forb}(\mathcal{X})$, принадлежащих $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}omet$, $\mathcal{C}omb$, $\mathcal{C}amomile$, $\mathcal{C}lique$, $\widetilde{\mathcal{T}}$, $\widetilde{\mathcal{D}}$, $\widehat{\mathcal{T}}$, $\widehat{\mathcal{D}}$), что стяжка любого графа из $\mathcal{X}_1$ имеет не более чем C_3 вершин. По лемме 2 существует константа C_4 (зависящая от графов из $\mathrm{Forb}(\mathcal{X})$, принадлежащих $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}omet$, $\mathcal{C}omb$, $\mathcal{C}amomile$, $\mathcal{C}lique$) такая, что любой граф из $\mathcal{X}_2$ имеет не более чем C_4 нелистовых вершин.

Очевидно, что существует лишь конечное число графов из

$$\{K_{2,i} \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{S_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathrm{Com}_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

являющихся минорами хотя бы одного графа из $\mathcal{X}_1$ (иначе последовательность, составленная из количеств вершин стяжек графов из $\mathcal{X}_1$, неограниченна). Это же верно и для класса $\mathcal{X}_2$, поскольку любой граф, для которого хотя бы один из графов $K_{2,i}, S_i, \mathrm{Com}_i$ является минором, содержит не менее чем $i - 1$ нелистовых вершин. Тем самым ни один из классов $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}omet$ не может быть минором $\mathcal{X}$; противоречие. Лемма 8 доказана.

Теперь всё готово для доказательства критерия эффективной разрешимости задачи PCP в семействе $\mathcal{M}$.

Теорема 5. *Задача* PCP *для класса* $\mathcal{X} \in \mathcal{M}$ *полиномиально разрешима тогда и только тогда, когда ни один из классов* $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}omet$ *не является минором* $\mathcal{X}$.

Доказательство. Напомним, что все три класса $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}omet$ PCP-сложные. Отсюда и из теоремы 4 следует, что если хотя бы один из классов $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}omet$ является сильным минором класса $\mathcal{X}$, то задача РСР не полиномиально разрешима в классе $\mathcal{X}$. Пусть теперь ни один из этих трёх классов не является сильным минором $\mathcal{X}$. Тогда по определению семейства $\mathcal{M}$ ни один из них не является минором $\mathcal{X}$. Поэтому существуют графы $H_1 \in \mathcal{B}at$, $H_2 \in \mathcal{S}tar$, $H_3 \in \mathcal{C}omet$ такие, что ни один из этих трёх графов не является минором ни одного графа из $\mathcal{X}$. Значит, $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Free}_m(\{H_1, H_2, H_3\})$. Существует $i = i(\mathcal{X})$ такое, что

$$\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Free}(\{K_i, K_{2,i}, \mathrm{Comb}_i, S_i, \mathrm{Cam}_i, \mathrm{Com}_i\}).$$

Действительно, если такого i нет, то класс $\mathcal{X}$ включает один из классов $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}omet$, $\mathcal{C}omb$, $\mathcal{C}amomile$, $\mathcal{C}lique$ (ввиду наследственности $\mathcal{X}$), тем самым один из классов $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}omet$ — сильный минор $\mathcal{X}$.

По аналогии со второй частью доказательства леммы 8 (с использованием лемм 2, 3 и 7) можно показать существование константы C (зависящей от i и от H_3) такой, что каждый связный граф из $\mathcal{X}$ либо имеет не более чем C нелистовых вершин, либо его стяжка содержит не более чем C вершин. Пусть $\mathcal{X}_1$ — множество связных графов из $\mathcal{X}$ с не более чем C нелистовыми вершинами, а $\mathcal{X}_2$ — множество связных графов из $\mathcal{X}$, стяжки которых содержат не более C вершин. Из теоремы 2 следует, что задача РСР полиномиально разрешима для графов из $\mathcal{X}_1$. По лемме 6 и теореме 3 задача РСР полиномиально разрешима в классе $\mathcal{X}_2$. Ранжирование рёбер несвязного графа есть ранжирование рёбер каждой из его компонент связности. Принадлежность любого графа из $\mathcal{X}$ каждому из классов $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ можно проверить за полиномиальное от числа вершин время. Поэтому задача РСР полиномиально разрешима в классе $\mathcal{X}$. Теорема 5 доказана.

Теорему 5 удобно применять, когда имеется некоторое правило, позволяющее определять, является ли хотя бы один из классов $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}omet$ минором заданного класса из $\mathcal{M}$. Это легко можно сделать для минорно замкнутых классов, поскольку необходимо только проверить, имеются ли в конечном множестве запрещённых миноров графы, принадлежащие $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}omet$. Вместе с тем, применение теоремы 5 к конечно определённым классам вызывает некоторые трудности. Но тут помогают РСР-граничные классы графов, полное описание которых представлено далее.

В [3] доказан следующий критерий.

Теорема 6. Π-*граничные классы* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_k$ *образуют* Π-*граничную систему тогда и только тогда, когда класс* $\mathrm{Free}(\{G_1, G_2, \ldots, G_k\})$ *для любых* $G_1 \in \mathcal{B}_1, G_2 \in \mathcal{B}_2, \ldots, G_k \in \mathcal{B}_k$ Π-*прост.*

Теорема 7. PCP-*граничная система совпадает с* $\{\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}omet$, $\mathcal{C}omb$, $\mathcal{C}amomile$, $\mathcal{C}lique$, $\widetilde{\mathcal{T}}$, $\widetilde{\mathcal{D}}$, $\widehat{\mathcal{T}}$, $\widehat{\mathcal{D}}\}$.

Доказательство. Напомним, что каждый из 10 классов $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}omet$, $\mathcal{C}omb$, $\mathcal{C}amomile$, $\mathcal{C}lique$, $\widetilde{\mathcal{T}}$, $\widetilde{\mathcal{D}}$, $\widehat{\mathcal{T}}$ и $\widehat{\mathcal{D}}$ PCP-граничный [1–7]. Применим утверждение теоремы 6. Пусть $\mathcal{X}$ — произвольный наследственный класс графов, не включающий ни одного из десяти указанных граничных классов. Покажем, что $\mathcal{X}$ является PCP-простым. По лемме 5 стяжка любого графа из $\mathcal{X}$ принадлежит $\mathrm{Free}(\{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5\})$ для некоторых $H_1 \in \widetilde{\mathcal{T}}$, $H_2 \in \widetilde{\mathcal{D}}$, $H_3 \in \widehat{\mathcal{T}}$, $H_4 \in \widehat{\mathcal{D}}, H_5 \in \mathcal{C}omet$. Дальнейшие рассуждения по доказательству PCP-простоты класса $\mathcal{X}$ аналогичны доказательству теоремы 5 и опираются на леммы 2–4, 6 и на теоремы 2, 3. Теорема 7 доказана.

Критерии эффективной разрешимости задачи PCP для минорно замкнутых классов и конечно определённых классов связаны между собой. Именно, хотя бы один из классов $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}omet$ является (сильным) минором некоторого конечно определённого класса графов тогда и только тогда, когда он включает хотя бы из один классов $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}omet$, $\mathcal{C}omb$, $\mathcal{C}amomile$, $\mathcal{C}lique$, $\widetilde{\mathcal{T}}$, $\widetilde{\mathcal{D}}$, $\widehat{\mathcal{T}}$ и $\widehat{\mathcal{D}}$. Это следует из теорем 5 и 7, леммы 8 и определения семейства $\mathcal{M}$.

При помощи теорем 5 и 7 нетрудно перечислить все конечно определённые минимальные PCP-сложные классы и все минорно замкнутые минимальные PCP-сложные классы.

Теорема 8. *Существует ровно пять конечно определённых минимальных* PCP-*сложных классов*: $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}lique$, $\mathcal{C}omb$, $\mathcal{C}amomile$. *Единственным минорно замкнутым минимальным PCP-сложным классом является* $\mathcal{C}omet$.

Доказательство. Классы $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}lique$, $\mathcal{C}omb$, $\mathcal{C}amomile$ конечно определённые. Соответствующие множества запрещённых порождённых подграфов описаны в [3–7]. Нетрудно видеть, что классы $\mathcal{C}omet$, $\widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{D}}$, $\widehat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathcal{D}}$ бесконечно определённые (для каждого из этих классов все простые циклы длины 5 и более принадлежат минимальному множеству запрещённых порождённых подграфов). Пусть $\mathcal{X}$ — PCP-сложный конечно определённый класс, не включающий классы $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}lique$, $\mathcal{C}omb$, $\mathcal{C}amomile$. По теоремам 1 и 7 класс $\mathcal{X}$ включает хотя бы один из классов $\mathcal{C}omet$, $\widetilde{\mathcal{T}}$, $\widetilde{\mathcal{D}}$, $\widehat{\mathcal{T}}$, $\widehat{\mathcal{D}}$. Поскольку они не конечно определённые, а $\mathcal{X}$ таков, $\mathcal{X}$ не совпадает ни с одним из них. Стало быть, $\mathcal{X}$ содержит граф G, не принадлежащий хотя бы одному классу $\mathcal{C}omet$, $\widetilde{\mathcal{T}}$, $\widetilde{\mathcal{D}}$, $\widehat{\mathcal{T}}$, $\widehat{\mathcal{D}}$. Тогда класс $\mathcal{X} \cap \mathrm{Free}(\{G\})$ PCP-сложный по теореме 1, поэтому класс $\mathcal{X}$

не является минимальным PCP-сложным.

По теореме 5 любой минорно замкнутый PCP-сложный класс обязательно включает хотя бы один из классов $\mathcal{B}at$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}omet$. Среди них только $\mathcal{C}omet$ минорно замкнут. Поэтому он является единственным минорно замкнутым минимальным PCP-сложным классом. Теорема 8 доказана.

Возможно, множество всех минимальных PCP-сложных классов описывается классами $\mathcal{C}lique$, $\mathcal{B}at$, $\mathcal{C}omb$, $\mathcal{S}tar$, $\mathcal{C}amomile$ и $\mathcal{C}omet$.

Автор выражает благодарность рецензенту за предложенные идеи по упрощению формулировок и доказательств лемм 4 и 7.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Малышев Д. С.** О минимальных сложных элементах решетки наследственных классов графов // Мат. VII молодеж. науч. школы по дискрет. математике и её прил. — М: Изд-во ИПМ РАН. — С. 12–17.
2. **Малышев Д. С.** О минимальных сложных классах графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 6. — С. 43–51.
3. **Малышев Д. С.** Исследование границ эффективной разрешимости в семействе наследственных классов графов: Дисс. . . . канд. физ.–мат. наук: 01.01.09. — Нижний Новгород, 2009. — 113 с.
4. **Малышев Д. С.** Последовательные минимумы решётки наследственных классов графов для задачи о рёберном списковом ранжировании // Вестн. Нижегородск. ун-та им. Н. И. Лобачевского. — 2010. — № 4. — С. 133–136.
5. **Малышев Д. С.** Минимальные сложные классы для задачи о рёберном списковом ранжировании // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 1. — С. 70–76.
6. **Малышев Д. С., Алексеев В. Е.** Граничные классы для задач о списковом ранжировании относительно лесов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 6. — С. 61–70.
7. **Малышев Д. С.** Анализ сложности задачи о рёберном списковом ранжировании для наследственных классов графов с не более чем тремя запретами // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т. 19, № 1. — С. 74–96.
8. **Alekseev V. E.** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Appl. Math. — 2004. — Vol. 132. — P. 17–26.
9. **Dereniowski D.** Edge ranking of weighted trees // Discrete Appl. Math. — 2006. — Vol. 154. — P. 1198–1209.
10. **Dereniowski D.** The complexity of list ranking of trees // Ars Comb. — 2008. — Vol. 86. — P. 97–114.

11. **Leiserson C.** Area-efficient graph layout (for VLSI) // Proc. 21st Ann. IEEE Symp. Foundations of Computer Science. — Syracuse: IEEE, 1980. — P. 270–281.
12. **Liu J.** The role of elimination trees in sparse factorization // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 1990. — Vol. 11. — P. 134–172.
13. **Makino K., Uno Y., Ibaraki T.** Minimum edge ranking spanning trees of threshold graphs // Lect. Notes Comput. Sci. — 2002. — Vol. 2518. — P. 428–440.

Малышев Дмитрий Сергеевич,
e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

Статья поступила
6 августа 2012 г.

Переработанный вариант —
14 марта 2013 г.