С.Л. Катречко

МАТЕМАТИКА КАК «РАБОТА» С АБСТРАКТНЫМИ ОБЪЕКТАМИ: ОНТОЛОГО–ТРАНСЦЕНДЕНТАЛЬНЫЙ СТАТУС МАТЕМАТИЧЕСКИХ АБСТРАКЦИЙ[1]

В статье[2] из сборника Московского семинара по философии математики 2014 г. был представлен трансцендентальный анализ математики. Здесь я попробую, опираясь на уже полученные результаты, провести комплементарный по отношению к предыдущему концептуальный анализ математического познания как работы с абстрактными объектами[3] и последующим «подключением» кантовской мысли с целью прояснения тезиса Е. Вигнера о «*непостижимой эффективности математики...*».

* * *

Начнем с вопроса о дифференциации разных типов познания с тем, чтобы выявить специфику математического способа познания. Первая классификация наук восходит к Платону[4], однако более прозрачным и релевантным для целей нашего анализа выступает подход Аристотеля, который в своем трактате «О душе» различает *физический*, *математический* и *метафизический* (т.е. философский)

---

[1] Данное научное исследование выполнено при поддержке Российского гуманитарного научного фонда (гранты № 12-03-00503а, 15-03-00866а), а также поддержано программой «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2014/2015 гг. (гранты № 14-01-0195, 14-09-0199).

[2] *Катречко С.Л.* Трансцендентальный анализ математической деятельности: абстрактные (математические) объекты, конструкции и доказательства // Доказательство: очевидность, достоверность и убедительность в математике, 2014. С. 86–120.

[3] Впервые такое понимание математики было представлено в моих докладах на Московском семинаре по философии математики «*Мета-философский подход к философии математики: математика как “работа” с абстрактными объектами*» (18.06.2010) и «*Трансцендентальный анализ математического знания: математика как “работа” с абстрактными объектами* (*Платон, Аристотель, Кант, Фреге, Гильберт, Гудстейн, Хинтикка, Залта*)» (18.03. 2011).

[4] О платоновском понимании математики (в рамках его концепта «четырехчастного отрезка») мы будем говорить ниже.

способы познания[1]. Согласно Аристотелю, *физик* (*рассуждающий о природе*) изучает «состояния такого-то тела и такой-то материи», например «что дом состоит из камней, кирпичей и бревен», т.е. реально существующие, или *конкретные*, объекты (со стороны их *материи* (химия) и/или *движения* (физика)), в то время как *математик* изучает «свойства, которые хотя и неотделимы от тела, но, поскольку они не состояния определенного тела и берутся отвлеченно от тела», или *формы* тела (в их «отвлечении» от материи/движения), например *геометрические формы*, т.е. *абстрактные объекты*, а *метафизик* изучает *сущее как таковое*, «отделенное же от всего телесного». Тем самым можно выделить *три* типа «объектов», конституирующие соответствующие типы познания: 1) *конкретные* объекты «физики»; 2) *абстрактные* объекты «математики»; 3) *идеальные* метафизические концепты. Нас здесь будет интересовать статус математических предметов в их отличии от физических объектов.

Трансцендентализм [Канта], который выступает как исследование, «*занимающееся не столько предметами, сколько способами* (в том числе и *математическим. — К.С.*) *нашего познания предметов как возможными a priori*» [B 25][2] в целом принимает это различение, хотя вместе с тем и уточняет его, и обосновывает его. В составе нашего способа познания (resp. сознания как познавательной способности) Кант выделяет два основных «ствола познания»: чувственность и рассудок, определенное сочетание которых и задает специфику того или иного вида познания. И если *опытное естествознание* начинается с *чувственного созерцания* (resp. эмпирического предмета), которое (который) впоследствии осмысляется рассудком посредством понятий (соответственно, схема естествознания такова: «чувственность (созерцаемый предмет) + рассудок (понятие о нем)»), то математику Кант конституирует как «познание посредством конструкции [из] понятий» [B 741], что указывает на совместную работу *рассудка* и *воображения*, но в обратном по отношению к естествознанию порядке. Тем самым Кант выделяет два типа *предметного* познания: «физику» как эмпирическое познание и «математику» как формально-абстрактное познание. Предметом изучения первой выступают *конкретные* предметы (природы), а предметом второй — *абстрактные объекты-конструкты*, которые *создаются* человеческим умом, поскольку в самой «природе нет *кругов*, *квадратов*»

[1] *Аристотель.* О душе // Аристотель. Сочинения. М.: Мысль, 1975. Т. 1. С. 374.

[2] *Кант И.* Критика чистого разума // Кант И. Соч.: В 8 т. Т. 3. М.: Чоро, 1994. С. 56.

(Галилей), — которые имеют разный онтологический статус[1]. Это платоно—аристотелевско—кантовское различение представляется чрезвычайно важным для понимания сути математического познания, которое, при всей своей природной направленности, все же не представляет собой познание природы самой по себе.

Обратимся к *проблеме* абстрактных объектов, которые во многом предопределяют специфику математики. *Проблема* же состоит в том, что предложенный Аристотелем и закрепленный в этимологии термина «абстрактный» его смысл как отвлечения от конкретного (реально существующего) содержания, хотя феноменологически и фиксирует различие между конкретным и абстрактным, но предполагает при этом уж слишком наивный способ генезиса абстрактного. Те же математические *квадраты*, *круги* или *точки* и т.п. не являются непосредственным результатом абстрагирования/отвлечения, поскольку *идеальных* геометрических фигур типа «круг», а тем более *точек*, в природе не существует. Сам язык подсказывает нам, что *абстрактное* является, скорее, результатом не абстрагирования/отвлечения, а *идеализации*. Хотя и термин *идеализация* тоже не совсем точен, поскольку и он предполагает первичным эмпирически-конкретное, которое затем каким-то, более сложным по сравнению с абстрагированием, образом идеализируется или преобразуется в идеальное. Конечно, подобная эмпирическая предопределенность абстрактного/идеального позволяет тривиально решить поставленную Кантом проблему обоснования адекватности наших представлений (понятий), т.е. их возможность использования в опыте, однако ее простота не является решающим аргументом в пользу принятия подобного *наивного эмпиризма*. По крайней мере, *возможна* и противоположная концепция соответствия, пусть даже это лишь такая возможность, которая впоследствии будет опровергнута. Она предполагает, что используемые в познании средства, каковыми выступают в том числе и интересующие нас математические *абстрактные* концепты, являются в общем случае *произвольно-априорными* (в самом слабом, этимологическом смысле), т.е. взятыми не из опыта, а придуманные нами самими; или *идеальными* (но неидеализированными), не-эмпирическими. Конечно, при этом проблема соответствия (или обоснования) встает в свой полный рост, но зато у нас появляется возможность, поставив под вопрос теорию «отражения» во всех ее разновидностях, рассмотреть разные механизмы генезиса абстрактного и выбора среди них наиболее обоснованного.

[1] Если существование *конкретных объектов* удостоверяется нами путем их восприятия, то подобное удостоверение существования *абстрактных объектов* невозможно, и для них надо предложить другой онтологический критерий.

Вместе с тем *проблема абстрактного* имеет и еще одну, возможно, не менее фундаментальную трудность, которая связана с тем, что изначально абстрактное (уже на уровне логического рассмотрения) определяется как нечто неконкретное, т.е. полагается негативно. И возникает вопрос: чем же является абстрактное в позитивном смысле? Современный анализ этой проблемы, данный, например, в российской «Новой философской энциклопедии» [М. Новоселов[1]] или on-line энциклопедии Стэнфордского университета (Rosen[2]), показывает, что: 1) существуют разные «типы» абстрактного[3], которые нельзя подвести под одно определение, поскольку абстрактное представляет собой довольно размытое понятие типа «семейного сходства» Витгенштейна; 2) для всего многообразия абстрактного не удается предложить единого [универсального] критерия его выделения (Розен[4]). «Прототипом» (Дж. Лакофф) для абстрактного выступают, прежде всего, математические концепты типа *числа*, *множества*, *бесконечности* и т.д., и эта взаимосвязь концептов *математического* и *абстрактного* вселяет определенный оптимизм в поисках критерия абстрактного, по крайней мере в сфере математического[5].

* * *

Начнем наше обсуждение математического способа познания с анализа одной аналогии Р. Гудстейна (1912—1985), выражающей новое понимание математики как «работы» с абстрактными объектами, которое начинает складываться в конце XIX в. в работах Г. Кантора (1845—1915), Г. Фреге (1848—1925), Ф. Клейна (1849—1925), а чуть позже — в работах Д. Гильберта (1862—1943) и др., и являющейся на наш взгляд определяющим трендом в развитии современной математики (теория множеств, «проект» Бурбаки, теория категорий)[6].

[1] См.: http://iph.ras.ru/elib/0019.html/

[2] См.: http://plato.stanford.edu/entries/abstract-objects/

[3] Так, Новоселов [*Новоселов М.М.* Логика абстракций. М.: ИФРАН, 2000], выделяет абстракцию неразличимости, абстракцию индивидуации, изолирующую абстракцию (Аристотель), абстракцию отождествления и др.

[4] В статье Г. Розена «Абстрактные объекты» рассматриваются различные критерии абстрактного: абстрактное как непространственно-невременное, абстрактное как каузально неэффективное и др. и показывается их неуниверсальность.

[5] Далее мы будем развивать принцип абстракции Юма—Фреге (http://en.wikipedia.org/wiki/Hume's_principle).

[6] Заметим, что в первом советском сборнике по философии математики (ред. С.А. Яновской 1936 г.) указанная тенденция к повышению абстрактности математики фиксируется как изменение стиля математического знания и переход к «новой» (теория множеств — П. Александров) или «современной» (аксиоматический метод — А. Колмогоров) математике.

В своей «Математической логике»[1] Гудстейн, проясняя вопрос о природе концепта *числа*, сравнивает математику с игрой в шахматы и, используя эту аналогию, риторически вопрошает: могут ли *предметом* правил шахматной игры быть *материальные* шахматные фигурки (например, *король*), т.е. «куски дерева определенной формы»? Отвечая на этот вопрос, Гудстейн пишет: «Предварительный ответ таков, что *правило* не может относиться к определенному куску дерева, так как мы могли бы потерять этот кусок дерева и все же играть в шахматы, заменив его куском сахара... Но если шахматный король не есть определенный предмет на определенной доске, то что же он такое? Если число два не есть цифра "2", то что же оно такое? Или — чтобы придать вопросу другое направление — благодаря чему определенный предмет в определенной шахматной игре становится королем? Это не внешний вид фигуры... и не положение фигуры в игре [на шахматной доске]. Нет, то, что делает фигуру королем, — это *те ходы, которые она совершает*. Так что мы можем сказать, что шахматный король — это одна из *ролей*, которую фигура играет в шахматной партии [так же как Король Лир — это роль в драме Шекспира; актер, играющий Короля, является королем в силу той роли, которую он исполняет[2]]... Точно так же различные роли, которые цифры играют в языке, это и есть числа. Арифметические правила, аналогично шахматным правилам, формулируются в терминах дозволенных **преобразований числовых знаков**. Так, например, правило, что сумма двух и трех есть пять, является формулировкой — в терминах ролей — того факта, что формула "2 + 3 = 5" доказуема в арифметике. Если же мы поменяем ролями цифры 2 и 5, так что каждая будет играть роль другой, то доказуемой будет формула "5 + 3 = 2", которая по-прежнему будет выражением правила, что сумма двух и трех есть пять. — *и далее Гудстейн заключает, что* — Формулировка в терминах ролей вскрывает те **инвариантные факторы**[3], которые при других формулировках

[1] *Гудстейн Р.Л.* Математическая логика. М.: ИЛ, 1961.

[2] Вставка в [...] взята из другого изложения метафоры: *Гудстейн Р.Л.* Рекурсивный математический анализ. М., 1970. С. 88.

[3] С.А. Яновская (ред. перевода) замечает в этой связи, что «суть дела [математики] все же не в самом числовом знаке... а в «инвариантном факторе», который скрывается за правилами оперирования с цифрами и позволяет отражать с помощью цифр различные (прежде всего, количественные) соотношения вещей» [Гудстейн, 1961. С. 22]. Здесь обратим внимание на концептуальное соотнесение абстрактности и инвариантности, которое составляет основание для так называемого «нового логицизма», который специфицирует математическое знание как «работу» с инвариантными структурами (тезис Тарского—Шер).

скрыты под покровом меняющихся обозначений»[1] (выделено полужирным мной. — *К.С.*).

Прежде чем переходить к собственно анализу данной аналогии, заметим, что она удивительным образом коррелирует с известным афоризмом Д. Гильберта, в которой он поясняет суть *аксиоматического метода* в математике говоря о том, что «справедливость аксиом и теорем ничуть не поколеблется, если мы заменим привычные термины “точка, прямая, плоскость” другими, столь же условными: “стул, стол, пивная кружка”!»[2]. А этот афоризм в свою очередь отсылает к известному замечанию Г. Фреге о том, что «мы никогда не сможем посредством наших определений (принципа абстракции Юма. — *К.С.*) решить, соответствует ли [некоторому] понятию число *Юлий Цезарь* или является числом этот знаменитый покоритель галлов или же нет»[3], которое получило название *проблемы Юлия Цезаря*. Приведем также в этой связи цитату из работы С. Клини «Введение в метаматематику» (написанную в том же 1957 г.): «Если об объектах системы мы ничего не знаем, кроме соотношений, имеющихся между ними в системе, то такая система называется *абстрактной*. В этом случае устанавливается только структура системы, а природа ее объектов остается неопределенной во всех отношениях, кроме одного, — что они согласуются с этой системой. Всякая дальнейшая спецификация природы объектов дает *представление* (или *модель*) этой абстрактной системы, т.е. систему объектов, удовлетворяющих соотношениям абстрактной системы и, кроме того, обладающих, вообще говоря, и другими свойствами. [Причем] эти объекты не обязаны быть более конкретными, потому что они могут быть выбраны из некоторой другой абстрактной системы (или даже из той же самой, но при новой

[1] [Гудстейн, 1961. С. 22—23]. Эта же метафора приводится Гудстейном в книге «Рекурсивный математический анализ». Изложение там практически совпадает с анализируемым нами пассажем из «Математической логики» (оба написаны в 1957 г.), они различаются деталями, хотя и немаловажными, о чем мы здесь не можем говорить подробно. Главное концептуальное различие этих двух описаний — два подчеркнутых нами фрагмента. Для нас более важен второй из них, в котором формулируется *платонистический* тезис о выражаемых посредством математических абстракций «инвариантных факторах», в то время как во фрагменте из «Рекурсивного математического анализа» (см. первое подчеркивание) Гудстейн развивает, скорее, номиналистическую мысль о том, что природа числа (как абстрактного предмета) связана с «игрой» под названием математика, а «объектом» в рекурсивной теории чисел является не само число, а «правила преобразования числовых знаков» (т.е. цифр) [Гудстейн, 1970. С. 88].

[2] Абстрактность «новой» математики как раз и связана с используемым в ней *аксиоматическим методом*.

[3] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. Томск: Водолей, 2000. С. 83.

интерпретации соотношений)»[1]. В нашем дальнейшем анализе будем учитывать приведенные выше корреляции и уточнения.

Первым важным и лежащим на поверхности смыслом предпринятого Гудстейном соотнесения математики с игрой в шахматы является то, что для математики важна не *материя*, а *форма* используемых ею объектов, посредством которой выражаются скрытые «под покровом обозначений... *инвариантные факторы*», или «правила преобразования числовых знаков»», что и составляет настоящий предмет математической деятельности. Так, используемые в математике *цифры* (resp. *чертежи*) — это *символы* чисел (resp. геометрических фигур), а те в свою очередь, по Гудстейну (с чем можно и не согласиться), — *символы* скрытых за ними математических отношений. Но именно подобное отвлечение от *материи* и есть решающий признак абстрактности по Аристотелю.

Следствием такой отвлеченности выступает условность (resp. *конвенциональность*) используемых в математике *предметов*. Математика имеет дело не с какими-то определенными — конкретными — объектами, а с *неопределенными* или *недоопределенными* (т.е. абстрактными) (квази)объектами, которые в процессе математической работы различным образом доопределяются (= конкретизируются) и понимаются вполне определенным образом. Соответственно, возникает вариабельность возможных интерпретаций (моделей), что в современной математике фиксируется/эксплицируется посредством *теоремы Лёвенгейма—Сколема*. Это важный с философской (методологической) точки зрения результат, проясняющий, наряду с теоремами Геделя и др. результатами (теорема Тарского, Россера, Тьюринга, Черча)[2], природу математического знания, суть которого состоит в том, что синтаксис теории не предопределяет однозначно ее семантику (интерпретацию), а его парадоксальность связана с тем, что система аксиом, изначально предназначенная для описания некоторой системы математических объектов, не выполняет (точнее: перевыполняет) свое предназначение, поскольку любая система аксиом (согласно данной теореме) допускает существенно больше разных возможных интерпретаций (или нестандартных моделей),

[1] *Клини С.* Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957. С. 30 (§ 8 «Системы объектов»).

[2] Теорему Левенгейма—Сколема можно рассматривать как «оборотную сторону» теоремы Геделя о неполноте математики: поскольку формальная арифметика и реальность не совпадают, то можно предложить не только разные, хотя и неполные, системы формализации, но и разные (равноправные) неизоморфные интерпретации (модели) формальной системы.

чем допускалось при ее создании[1], т.е. математика в общем случае *некатегорична* (ср. с *проблемой Юлия Цезаря*). В частности, фраза «Кошка находится (сидит) на коврике» может обозначать не только описанную в этой фразе ситуацию, т.е. *стандартную* интерпретацию: *кошка сидит на коврике*[2], но иметь также и *нестандартную* интерпретацию, а именно значить: *вишня находится (висит) на дереве* (пример Х. Патнэма[3]). Более того, неопределенность математического присуща не только аксиоматическим формализмам, но и математическим предметам, которые по своей природе являются не индивидуальными, а безличными. Геометр, например, рассуждает о геометрической точке вообще, которая неотличима от любой другой, а арифметик отождествляет между собой разные записи/цифры одного и того же числа.

Более того, если придерживаться аристотелевской теории абстрагирования, то имеет место *двойная неопределенность* математических объектов. Во-первых, неопределенность присуща самому акту абстрагирования, в результате которого мы получаем некий абстрактный объект, который в принципе мог бы быть и другим. И поэтому связь между абстрактным и конкретным не является однозначной, о чем и говорит теорема Лёвенгейма—Сколема. Во-вторых, вариабельность/условность абстрактного проявляется и в ходе в каком-то смысле обратного по отношению к абстрагированию процесса, который может быть назван *реализацией* или *конкретизацией* абстрактного объекта, о чем собственно и говорит Гудстейн: число *два* в рамках той или иной формальной системы не обязательно обозначается стандартным «кодирующим» числовым знаком, каковым для нас выступает цифра «2», а может быть заменено другой ее реализацией[4].

[1] Излагается по: *Клайн М.* Математика. Утраты определенности. М.: Мир, 1984. С. 316.

[2] Эта стратегия в современной математике/логике фиксируется посредством восходящей к аристотелевскому пониманию истины как корреспонденции, концепция истины А. Тарского как простого «раскавычивания» синтаксических выражений.

[3] О философском значении и «выводах» из теоремы Лёвенгейма—Сколема см. работы Х. Патнэма (его концепцию «внутреннего реализма»). См. также обзор результатов Патнэма и обсуждение теоремы Лёвенгейма—Сколема в работе В.В. Целищева «Философия математики», в которой автор сетует на то, что она, хотя и сопоставима по своей значимости с теоремами Геделя, не получила должного освещения в современной философии математики.

[4] Отмеченное нами указание на двойную неопределенность математического позволяет избежать двух крайностей в ее понимании, представленное, например, в недавней полемике В. Арнольда и Ю. Манина (см.: *Арнольд В.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2008. Одна из этих тенденций (эмпирическая), представленная В. Арнольдом, излишне офизичивает математику, другая из них (формалистское и номиналистическое понимание математики), представленная

В последнем отношении метафора Гудстейна отсылает к основополагающей интуиции понимания природы математического, которая впервые была эксплицирована Платоном. Речь идет о его концепте «четырехчастного отрезка» (*the Divided Line*) из кн. 6 «Государства», который выступает не только концептуальным основанием известного мифа о пещере, но и квинтэссенцией платоновского учения в целом. С третьей частью данной *Линии* Платон соотносит рассудочное познание (διάνοια), основным модусом которого выступает математическое познание (геометрия). Вот как Платон определяет его суть:

«Те, кто занимается геометрией, счетом и тому подобным, предполагают в любом своем исследовании, будто им известно, что такое чет и нечет, фигуры, три вида углов и прочее... [И] когда *они пользуются чертежами и делают отсюда выводы, их мысль обращена не на чертеж, а на те фигуры, подобием которых он служит* [чертеж же является «образным выражением [подобием] того, что можно видеть не иначе как мысленным взором» (там же)]. *Выводы свои они делают только для четырехугольника самого по себе и его диагонали, а не для той диагонали, которую они начертили...*» [510c — 511a; вставки и выделение курсивом мои. — *С.К.*][1].

Здесь хотелось бы обратить особое внимание на то, что отношение между конкретным (физическим) и абстрактным (математическим) у Платона, по сути, переворачивается: абстрактно-математические предметы являются не отвлечением от конкретно-физических вещей, но, если не онтологически первичными, то, по крайнем мере, 1) самостоятельными и 2) *реализуемыми* посредством особого рода конкретно-наглядного, каковым выступают математические чертежи. Тем самым *предметный* характер математического способа познания имеет более сложный характер по сравнению с физическим, поскольку нужно различать собственно математические предметы: фигуры сами по себе (Платон) или «инвариантные факторы» (Гудстейн) и их *конкретно-предметные реализации*, причем двойного типа: 1) ментальные реализации («образы») и 2) квази-физические реализации пространственно-временного типа чертежей или цифр, каждую из которых можно ошибочно принять за собственно математические предметы, что характерно, соответственно, для интуиционистского и формалистического взгляда на природу математики. Хотя, конечно, это переворачивание не означает, что математические абстракты «порождают» физические объекты: речь идет, скорее, о

Ю. Маниным, слишком сближает математику с лингвистикой (математика представляет собой «игру» со знаками). Обе эти крайности, на наш взгляд, неверны.

[1] Подробнее см.: *Катречко С.Л.* Платоновский четырехчастный отрезок (линия): Платон и Кант о природе (специфике) математического знания // Вестник РХГА. Т. 14. Вып. 3. 2013. С. 172—177.

том, что математические абстрактные объекты имеют особый статус своего *существования* и *со-существуют* со своими ментальными и квази—физическими реализациями, а не порождаются в результате аристотелевского абстрагирования.

Вместе с тем современная мысль (в лице, например, того же Гудстейна) делает два существенных уточнения по сравнению с концепцией математики Платона. Первое из них связано с тем, что математический предмет (например, треугольник сам по себе) и его реализация (чертеж треугольника) не обязательно находятся, как пишет Платон, в отношении *подобия*, которое представляет собой лишь простейший случай взаимосвязи математического предмета и его реализации, а в общем — связь между ними носит условно-знаковый характер, и, более того, современные концепты не всегда допускают существование соответствующего чувственно-ментального образа: как, например, представить себе четырех или более n-мерное пространство (ср. с замечанием Декарта о невозможности ментального представления хилигиона)? Второе — математические абстракции (в силу их принципиального [онтологического] отличия от реально-конкретного) не должны необходимо мыслиться как объекты, т.е. представлять собой те же *фигуры*, но взятые в своем идеально-абстрактном, отвлеченном от пространства, модусе[1]. В нашем языке абстрактное фиксируется, скорее, не посредством выражения «треугольник сам по себе», а посредством термина «треугольность», которую вряд ли можно трактовать как *объект*[2]. Тот же Гудстейн мыслит математическую абстракцию как символ скрывающегося за ним инвариантного фактора, что концептуально точнее соотнести уже с категорией не *объекта*, а *отношения*.

Остановимся на этом подробнее, ибо «*Философия математики... есть онтология математических объектов*» (Э. Бет)[3]. В современной литературе, посвященной онтологическому статусу математических абстракций, можно найти целый спектр их различных трактовок. Для их упорядочивания можно использовать разные основания, но для целей нашего анализа выберем онтолого-категориальную тройку «объект — свойство — отношение», которая, заметим, определенным образом коррелирует с различением «действительное — возможное — фиктивное», а также с тройкой возможных решений проблемы универсалий «реализм — концептуализм — номинализм».

Первая из них может быть названа «полнокровным [математическим] платонизмом/реализмом», которая представлена, например, взглядами К. Геделя и П. Бернайса или Р. Пенроуза. В ней математические предметы понимаются как особые объекты, существующие в особом [идеальном] мире (например, в уме Бога), которые даются нам посредством особой математической интуиции. С философско-методологической точки зрения эта позиция выглядит достаточно слабой, поскольку у нас нет достаточных оснований (аргументов) приписывать такой сильный онтологический модус существования математическим абстракциям и/или соотносить математическое с божественным.

Примыкает к нему и современный *неологицизм* (*неофрегеанство*)[1], который можно рассматривать как ослабленный вариант реализма. Логико-математические «объекты» рассматриваются в нем не как результат абстракции (отвлечения) от эмпирических объектов, а как образованные по *принципу абстракции Юма*[2]*—Фреге*, который можно выразить формулой:

$$\textit{для любых } (\alpha)(\beta)\ [(\Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta)) \leftrightarrow (\alpha \approx \beta)],$$

где $\Sigma(\alpha)/\Sigma(\beta)$ обозначает вновь вводимый абстрактный объект с помощью символа метаязыка Σ[3]. Парадигмальным здесь выступает фрегевский пример образования нового понятия «*направление* (прямой)», обозначаемого посредством $D(\alpha)/D(\beta)$, которое «получается» из [уже известной] понятийной конструкции более низкого уровня «*параллельность* прямых а и в»: $D(\alpha) = D(\beta) \leftrightarrow$ прямая α параллельна прямой β. Однако и при таком введении/понимании математических предметов возникает ряд методологических трудностей, связанных с упрощенной трактовкой математических предметов как полноценных объектов по аналогии с реально существующими объектами.

Перейдем теперь к обсуждению других концептуальных вариантов математического. Хотелось бы обратить особое внимание на оригинальную трактовку математических абстракций Э. Залты и

[1] Обратим внимание на то, что в своем диалоге «Парменид» Платон предостерегает «молодого Сократа» от трактовки идеальных предметов как аналогов физических вещей, например от трактовки общей идеи как объемлющей «парусины».

[2] В силу этого точнее называть математические абстракции не объектами, а предметами.

[3] *Beth E.* Mathematical Thought. Dordrecht; Reidel, 1965. P. 176.

[1] Представителями современного неологицизма/неофрегианства выступают К. Райт, Р. Хэйл, Дж. Булос и др. В Стэнфорде функционирует Лаборатория метафизических исследований (http://mally.stanford.edu) с целью исследования метафизических (= математических) объектов.

[2] Вот его изначальная формулировка: «Когда два числа составлены таким образом, что каждая единица в одном из них всегда отвечает каждой единице в другом, мы признаем их равными...» [*Юм Д.* Трактат о человеческой природе // Юм Д. Сочинения: В 2 т. М.: Мысль, 1965. Т. 1. С. 128 (ч. 1, гл. 3)].

[3] Посредством скобок $(\alpha)/(\beta)$ в формуле обозначается квантор всеобщности.

В. Линского, которая может рассматриваться как ослабленная версия платонизма[1]. В ней абстрактные объекты полагаются как субстантивированные наборы *свойств*[2], что, однако, оставляет открытым вопрос о том, свойствами *чего* являются математические абстракции, каковыми, видимо, неявно полагаются (физические) объекты. Безусловно заслуживающим внимания в этой концепции (и проясняющим природу абстрактного в отличие от конкретного) представляется восходящее к Э. Малли[3] и эксплицированное Э. Залтой следующее «расщепление» стандартной предикации на два типа: *экземплификацию* и *кодирование*. Стандартным образом предикация «x есть F» выражает экземплификацию предиката (свойства) F в [физическом] объекте x: [объект] x обладает свойством F, т.е. *экземплифицирует* (проявляет) его. Соответственно, этот тип предикации может быть записан как $F(x)$. В случае же с абстрактными объектами, к которым, помимо математических, можно отнести также персонажи литературных произведений типа *Шерлока Холмса*, дело обстоит иначе. С одной стороны, эти объекты *неполны* (или *недоопределены*), поскольку у них нет полного набора свойств, характеризующих конкретные объекты[4]. С другой — выражение «x есть F» представляет собой *кодирование* свойства F посредством вводимого объекта x[5]. Так, выражение «2 есть простое число» следует понимать как введение объекта «2» (двойки), который *кодирует* свойство «быть простым числом», что можно записать посредством $(x)F$. Если «двойка» вводится по определению как *простое четное число*, то никаких других характеристик, кроме задаваемых в определении (таковыми являются свойства простоты

[1] *Linsky B., Zalta E.* Naturalized Platonism versus Platonized Naturalism // Journal of Philosophy. 1995. XCII. N 10. P. 525–555.

[2] Именно так мы и понимаем платонизм: платоновские идеи являются не чем иным как свойствами, а причастность вещей к идеям означает обладание вещью того или иного свойства.

[3] См.: *Mally E.* Gegenstandstheoretische Grundlagen der Logik und Logistik. Leipzig, 1912.

[4] Указание на неполноту математических абстракций представляет интерес с точки зрения отличения универсалий от абстракций. Абстрактные объекты являются не общими, а неопределенными a-объектами (здесь a — неопределенный артикль) и моделируются в математике посредством переменных, которая, в конечном итоге, должна быть заменена индивидом, т.е. полноценным определенным the-объектом. В «Основоположениях арифметики» Фреге соотносит такие логико-математические «объекты» как числа с *неопределенными предметами*, т.е. a-объектами, каковым выступает понятие (точнее его «объем»).

[5] Ср. с замечанием Гудстейна о том, что математические «объекты» (например, числа) служат для выражения скрывающихся за ними глубинных инвариантных факторов. Вместе с тем по своей структуре и функционалу «кодирование» Залты напоминает введение некоторой сущности по определению и/или по принципу Юма—Фреге.

и четности) у «двойки» нет: содержание абстрактных сущностей беднее, чем конкретных предметов, зато все их «закодированное» содержание *полностью* содержится в их дефиниции. А сами абстрактные «объекты» представляют собой, скорее, не предметы, а созданные человеческим умом *инструменты познания*, выражающие (кодирующие) собой свойства или отношения.

Наконец, самой многочисленной по количеству публикаций выступает концепция *математического структурализма*, активно развиваемая во второй половине XX в. (Л. Витгенштейн, П. Бенацерраф, М. Резник, С. Шапиро[1] и др.), которая выдвигает тезис о квазиобъектном, или даже без-объектном характере математического знания: предметом математики являются не *объекты*, а *структуры*, которые и определяют относительное место/позицию/функциональную роль математических (квази)объектов в составе структур, а собственно математических объектов как полноценных сущностей *нет*. Так, например, *тройка* — это не самостоятельный математический объект (resp. число), а функциональное «место» между двойкой и четверкой[2]. Причем такое слабое онтологическое понимание математических абстракций вполне достаточно для решения главной задачи математической деятельности, а именно: выполнения математических операций, например ответ на вопрос типа «тройка больше двойки?»[3]. Понятно, что при этом математические объекты трактуются в модусе не действительности *возможности* (Дж. Хеллман[4] и др.). В своих же радикальных версиях структурализм выдвигает тезис о том, что математика и вовсе может обойтись даже без структур (Х. Филд, Дж. Хеллман, Дж. Берджес[5] и др.), что сближает его с крайним *номинализмом*, *инструментализмом* и даже *фикционализмом* (Х. Филд[6]). Тем самым в структурализме представлена третья возможная трактовка математических абстрактов в качестве не *объектов* или *свойств*, а *отно-*

[1] *Shapiro S.* Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology. New York: Oxford University Press, 1997.

[2] Подобную трактовку числа предложил П. Бенацерраф, автор известной статьи «Чем числа не могут быть» (*Benacerraf P.* What Numbers Could not Be), которая стала манифестом структуралистского подхода в 70-е гг. XX в.

[3] Заметим, что к структуралистской концепции близок и Р. Гудстейн в разбираемом выше фрагменте.

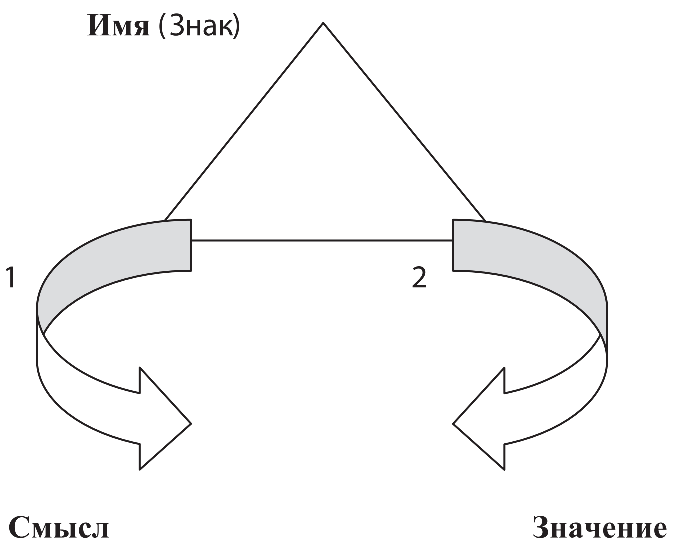
[4] *Hellman G.* Mathematics Without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation. New York: Oxford University Press, 1989.

[5] *Field H.* Science without Numbers: a Defense of Nominalism. Blackwell, 1980; *Hellman G.* Structuralism without Structures // Philosophia Mathematica (3). Vol. 4. N 2 (May 1996). P. 100–123; *Burgess J., Rosen G.* A Subject with No Object: Strategies for Nowinalistic Interprefation of Mathematics. New York: Oxford University Press, 1997.

[6] *Field H.* Realism, Mathematics & Modality. Blackwell, 1989.

шений[1]. Это приводит и к изменению «языка (resp. базового уровня) математики»: вместо развиваемой с конца XIX в. в качестве таковой *теории множеств*, которая предполагает «объектный» взгляд на мир (объекты + их свойства), а с середины XX в. на это претендует более релевантная для онтологии отношений *теория категорий*. При этом во всех своих вариациях структурализм тяготеет к *антиреализму*: или *номиналистское* понимание математических структур как структур нашего языка (формализм), или их *концептуалистское* понимание как наших ментальных конструкций (интуиционизм).

Для того чтобы прояснить особый онтологический статус абстрактных объектов воспользуемся еще одной идеей Г. Фреге. В своей работе «Смысл и значение»[2] он вводит так называемый *семиотический треугольник* (в лингвистике его называют также треугольником Огдена—Ричардса), согласно которому с каждым знаком (именем) можно соотнести две его характеристики: смысл и денотат (значение знака).



Можно сказать, что в этом треугольнике абстрактный (математический) объект соответствует смыслу знака, в то время как конкретный (физический) объект — его денотату. Или другими словами, в случае эмпирически-конкретного объекта (в пределе, обозначаемого

[1] Подробнее от этом типе онтологии см.: *Katrechko S.* Ding-Ontology of Aristotle vs. Sachverhalt-Ontology of Wittgenstein // Papers of the 31st International Wittgenstein Symposium (Band XVI). Kirchberg am Wessel (Austria), 2008. P. 169—172.
[2] *Frege G.* Uber Sinn und Bedeutung. 1892.

именем собственным) данный треугольник вырождается (по стрелке 2) в бинарную конструкцию «имя — значение» (без смысла), а в случае абстрактного объекта — вырождается (по стрелке 1) в бинарную конструкцию «имя — смысл» (без значения). Подобное соотнесение относительно независимых абстрактных и конкретных объектов как соотнесение смысла и значения можно рассматривать как своеобразный «коперниканский переворот», преодолевающий эмпирический взгляд, в рамках которого абстрактный объект понимается как результат абстрагирования (отвлечения) от конкретного объекта. Более того, здесь допустима и более сильная трактовка: не предмет (значение знака) определяет смысл знака (понятие о предмете), а смысл знака в некотором роде «задает» значение (предмет) знака. Хотя не надо приписывать области смысла самостоятельного онтологического статуса типа платоновского мира идей. Скорее это мир *возможности*, чем действительности, а абстрактные объекты — возможностные объекты-инструменты нашего осмысления (познания) действительности, без которых «нам некуда будет направить свою мысль»[1]. Вместе с тем, как мы показали выше, абстрактные предметы не только выполняют эпистемологическую функцию, но и обладают особым онтологическим статусом, который фиксируется, например, в концепции «трех миров» К. Поппера и/или в концепции «интенциональной реальности» Э. Гуссерля.

Методологическая же сложность анализа математического (по)знания, как, впрочем, и любого другого теоретического знания, использующего абстрактно-идеальные теоретические конструкты, связана с использованием в нем абстракций, или абстрактных объектов, которые как бы обрамлены, с одной стороны, их реализациями посредством каких-то конкретных объектов (пример-аналогия: персонажа Шерлока Холмса играет какой-то актер), выступающими в данном случае не в своем изначальном модусе конкретности, а в качестве *символов* абстрактного (что приводит к их *произвольному* (Фреге) или конвенцилальному (Гильберт, Пуанкаре) характеру), а с другой — скрывающимся за них смыслом, что, в свою очередь, делает их самих символами этого смысла, или «инвариантного [математического] содержания». Собственно, абстрактные объекты выступают как *объективированный* (в некотором предмете) смысл (ср. с кодированием Залты) и занимают промежуточное положение между именами и собственно объектами (денотатами) и было ошибочно отождествлять их как с языковыми, так и с реальными сущностями.

Предлагаемый нами «коперниканский переворот» в понимании абстрактных «объектов» требует серьезного пересмотра концепций

[1] *Платон*. Парменид.

генезиса абстрактного, восходящих к теории абстракции Аристотеля. Наиболее интересными альтернативами выступают здесь *принцип абстракции* Юма и *концепция кодирования* Залты, в которых фиксируется тот факт, что абстрактные «объекты» представляют собой объектное кодирование некоторого [абстрактного] свойства или отношения: см. уже приводившийся фрегевский пример образования понятия «направление» или его же концепцию числа как числовой характеристики всех «равномощных» множеств или «объемов» понятий. Однако эти концепции оставляют в стороне вопрос о психологическом «механизме» генезиса абстрактного. Ответ на этот вопрос можно найти у Э. Гуссерля, который постулирует, если говорить в общем, особую «эйдетическую интуицию» для схватывания подобных, прежде всего математических, смысловых сущностей или «инвариантных факторов».

Речь идет о гуссерлевской теории абстракции, развиваемой им, прежде всего, в его «Логических исследованиях», хотя к данному вопросу он обращается постоянно и в своей более поздней работе «Идеи—I»[1], и в небольшом манускрипте «О варьировании», включенном в посмертно изданный сборник «Опыт и суждение»[2]. В главе 2 из «Логических исследований» «Идеальное единство вида и современные теории абстрагирования» Гуссерль подробно рассматривает различные теории абстрагирования (Локка, Беркли, Юма, Дж.С. Милля и др.) и показывает, что все подобные концепции, имеющие эмпирическую направленность (восходящую к теории абстракции Аристотеля), неудовлетворительны. Генезис абстракции нельзя объяснить ни *обобщением* (локковская теория «общего треугольника»), ни *индуктивным обобщением* (Юм), ни *вниманием*, которое выделяет «главное» и отвлекается от второстепенного (Ст. Лесневский). Точнее, подобные теории предполагают в качестве своей предпосылки уже осуществленный акт абстрагирования как узрения некоего эйдоса (вида). Психологический же механизм подобного узрения эйдоса, или эйдетической интуиции, или «метода прояснения сущности» [«Идеи—I», § 69] состоит в *процедуре варьирования* (или *свободном фантазировании*) [«Идеи—I», § 70]. Она предполагает анализ данного предмета (или группы предметов, образующих «вид»), различение в его составе главных («самостоятельных») и вспомогательных («несамостоятельных») частей и варьирование последних, что и позволяет нам «схватить» эйдос данного предмета (или его платоновскую идею, или в терминологии Гудстейна/Яновской его глубинный «инвариантный фактор»). Например, если нам дан какой-то конкретный треугольник, то, варьируя такие его второстепенные характеристики, как размеры сторон и величину углов, мы сможем схватить *эйдос* треугольника, или *треугольность как таковую*. Хотелось бы особо подчеркнуть, что процедура варьирования иллюстрируется Гуссерлем на математических предметах, которые выступают для него парадигмой абстрактного.

[1] *Гуссерль Э.* Идеи к чистой феноменологии и феноменологической философии. Т. 1. М.: ДИК, 1999.

[2] *Гуссерль Э.* О варьировании // Воображение в свете философских рефлексий. М.: Полиграф-Информ, 2008. С. 327—365.

* * *

Анализ метафоры Р. Гудстейна, который позволил нам ответить на вопрос о специфике математики как работе с абстрактными объектами, вплотную подвел нас к кантовской концепции математики. Здесь мы будем опираться на последний раздел *Критики* «*Трансцендентальное учение о методе*» (глава «*Дисциплина чистого разума в догматическом применении*»), в котором Кант дает подробный анализ математической деятельности, «основательность [которой] зиждется на *дефинициях, аксиомах и демонстрациях*»[1].

Остановимся подробнее на первом члене этой триады — *математических дефинициях*, которые «***создают*** само [математическое] понятие»[2], и, тем самым, «дают *первоначальное* и *полное* изложение вещи [т.е. действительного предмета] в его *границах*»[3], а не только *объясняют* его, как это происходит в естествознании и философии. Это гарантирует *математическим понятиям* их полное соответствие с [математическими] *предметами*, в то время как *эмпирические понятия* [естествознания] и *априорные понятия* [метафизики] таким соответствием в общем случае не обладают: в естествознании вещи как правило «богаче» своих понятий (например, *стол* и *понятие о столе* не совпадают, а понятие о столе не может передать всю информацию о реальном столе, о всех нюансах его существования), а метафизические понятия (категории) — «богаче» своего эмпирического применения, поскольку могут применяться не только к предметам нашего чувственного созерцания, т.е. *вещам-для-нас*, но и к «вещам вообще». Основанием для такого полного соответствия является тождество математических *предметов* и *понятий*, поскольку первые задаются, или «создаются», посредством вторых (resp. дефиниций). Вместе с тем это проясняет «измененный метод мышления» (resp. коперниканский переворот) Канта, суть которого состоит в том, «что мы a priori познаем о вещах лишь то, что́ вложено в них нами самими»[4]: если по

[1] *Кант И.* Критика чистого разума // Кант И. Соч.: В 8 т. Т. 3. М.: Чоро, 1994. С. 536.

[2] Там же. С. 537.

[3] Там же. С. 537, прим.

[4] Там же. С. 24.

отношению к природным (физическим) объектам [восприятия] кантовский тезис кажется слишком уж радикальным, то по отношению к математическими предметам-понятиям он является тривиальным. Наше знание математических предметов подобно «знанию» мастера, который создает ту или иную вещь. Вместе с тем любая математическая дефиниция имеет *конструктивный* характер, содержащая в себе способ порождения своего объекта, или, как говорит Кант, «содержащая в себе произвольный синтез, который может быть конструирован a priori (...в созерцании)»[1]. В главе о схематизме Кант уточняет, что в «основе наших *чистых чувственных* [т.е. математических! — *К.С.*] понятий лежат не образы предметов, а *схемы*...., [которые] не могут существовать нигде, кроме как в *мысли*, и означают *правило синтеза воображения* [например, геометрических предметов как фигур в пространстве. — *К.С.*]»[2]. Тем самым в основе математической деятельности лежат некие *ментальные действия* сознания, а математические понятия представляют собой *схемы*, задаваемые конструктивно. Так, например, *окружность* определяется Кантом с помощью *конструктивной дефиниции* как «линия, все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от центра»[3].

По сути дела, Кант своим введением математических объектов через дефиниции специфицирует их в противовес *конкретным* (физическим) объектам в качестве *абстрактных*, т.е. получаемых посредством *принципа абстракции Юма—Фреге* (см. его формулировку выше). На сходство принципа абстракции с [кантовской] дефиницией указывает то, что мы можем записать его в форме (квази)определения: для любых $(\alpha)(\beta)((\Sigma(\alpha)=\Sigma(\beta))$ [Dfd] $=_{df}$ $(\alpha\approx\beta)$ [dfn]); и даже в виде стандартного определения $\Sigma(\alpha/\beta) =_{df} (\alpha\approx\beta)$, правда с потерей части информации о том, как этот объект конструируется. Тем самым принцип абстракции Юма—Фреге представляет собой некоторый модус кантовской дефиниции (и поэтому может быть назван принципом абстракции Юма—Канта—Фреге), в котором эксплицируется *способ* конструирования (генезиса) абстрактного объекта и информация о чем является определяющей при осуществлении [кантовского схематического] конструирования понятия. Так, если снова обратиться к кантовской дефиниции *окружности*, то она представляет собой метаобъект — *линию*, составленную из объектов более низкого уровня — *точек*, равноудаленных от центра, где *признак* «равноудаленности от центра» является *основанием* или дефиниенсом (в формуле: $\alpha \approx \beta$) для порождения этой [новой] абстракции (resp. нового дефиниендума *Dfd* окружности; в формуле: $\Sigma(\alpha)$).

[1] *Кант И.* Критика чистого разума. С. 538.
[2] Там же. С. 158.
[3] Там же. С. 540.

Однако в принципе абстракции не прояснены два важных момента: механизм образования вводимой новой абстракции, т.е. вопрос о том, что (= какое действие?) скрывается за выражением «$\alpha \approx \beta$» (ср. с теорией абстрагирования Гуссерля, которая также решает эту проблему), и вопрос об эпистемологической специфике получаемых таким образом математических понятий. Ответы на эти вопросы дает [кантовский] трансцендентализм, направленный на анализ сознательных «механизмов», лежащих в основе такого вида нашего представления, как абстракция. Можно сказать, что в отличие от преобладающего в настоящее время *логико-формального* подхода к анализу математики Кант развивает *прагматический* подход, направленный на выявление специфики математики как человеческой деятельности, «математики с человеческим лицом».

Кантовский подход к пониманию математических абстракций существенно отличается от стандартных теорий абстрагирования, в том числе и от «эйдетической интуиции» Гуссерля, основанной на процедуре варьирования. Точнее, варьирование у Канта тоже присутствует в качестве одной из основных операций, но (и в этом состоит первая кантовская новация) это варьирование принципиально другого типа.

Математические предметы, вводимые посредством кантовской дефиниции, представляют особый тип предметов, отличный от стандартных абстракций [естественных наук], которые, судя по всему, получены отвлечением (абстрагированием) от тех или иных характеристик конкретных объектов (Аристотель), или посредством эйдетической интуиции (Гуссерль), или путем кодирования того или иного свойства (Э. Залта). В общем, любое понятие, по Канту, представляет собой *синтез*, объединение в своем составе многих сходных предметов (по той или иной его характеристике) и *обобщение* этого сходства именно в данном *понятии*. Специфика же математики (по Канту) состоит в том, что ее «чистые чувственные понятия», каковыми являются математические абстракции, представляют собой *обобщения по сходству действия* (resp. отношения). В общем случае *первичным* математическим действием, обозначаемое символом $\approx$ в формальной записи, является отношение типа равенства («равно», «тождественно», «изоморфно», «конгруэнтно» и т.д.), в основе которого лежит *операция сравнения*. Соответственно, в случае с фрегевским *«направлением»* таковым является *действие* по проверке (или обнаружению) *параллельности* прямых, а в случае с кантовской *окружностью* — *действие* по проверке (обнаружению) *равноудаленности* точек от центра.

Кант определяет такие [математические] понятия как *схемы*. Вот что он пишет по этому поводу: «*Так, если я полагаю пять точек одну за другой... то это образ числа пять. Если же я мыслю только число вообще, безразлично, будет ли это пять или сто, то такое мышление есть скорее представление о методе* (*каким представляют в одном образе множество, например тысячу*) *сообразно некоторому понятию, чем сам этот образ, который в последнем случае, когда я мыслю тысячу, вряд ли могу обозреть и сравнить с понятием. Это представление об общем способе* [т.е. алгоритме построения. — *К.С.*]... *я называю схемой этого понятия*»[1]. При этом в полученной абстракции/схеме это действие как бы «угасает», перемещается с поверхностного (Dfd) на глубинный (Dfn) уровень[2], однако для человека, который не только читает математическую символику, но и практикует математическую деятельность, за этой символикой угадывается образующее его математическое действие. Например, в [натуральном] числе — это *сумма* его единиц или *произведение* его множителей и т.д.

Основанием для этой революционной новации Канта в понимании абстракции является его трансцендентализм, одна из главных предпосылок и тезисов которого — выделение в составе нашей познавательной способности двух «основных стволов познания»: чувственности и рассудка, принципиально не сводимых друг к другу. В данном случае это означает, что за любым результатом познания, каковым и является рассудочное понятие, мы должны искать некоторое (ментальное) «действие», возможно уже относящееся к чувственности (воображению), как его трансцендентальное условие или основание. И поэтому абстракция является не операцией по отвлечению от некоторых признаков исходного понятия с целью получения более абстрактного понятия, схожей по своему действию с операцией логического обобщения (принцип абстракции Юма—Фреге), и не эйдетической интуицией Гуссерля[3], а некоторым пред-рассудочным [ментальным] *действием*[4], связанным с построением созерцательного аналога пред-понятия — кантовской *схемы*. Так, в основе (образования) математической абстракции *окружности* (которые, как мы вслед за Галилеем помним, в «природе не встречаются») лежит некоторое действие по равноудаленному расположению точек от центра окружности. Тем самым Кант вместо *логического подхода* к анализу математики (в том числе и к образованию математических абстракций), характерного для современных — логизированных — программ обоснования математики (логицизма, формализма, конструктивизма и даже структурализма; интуиционизм в этот список не входит!) предлагает (в рамках своего трансцендентализма) *трансцендентально-прагматический* подход, суть которого выражается следующей максимой: за каждым рассудочным концептом ищи соответствующее, т.е. обосновывающее ее [ментальное] действие. Правомерность вводимых математических абстрактов обосновывается Кантом не посредством *аксиоматического метода* (хотя о нем Кант применительно к математике также говорит), за счет чего неявно задаются свойства абстрактного объекта, а посредством поиска лежащих в основании той или иной абстракции «[ментальных] действий» по ее построению: характеристики и область применения той или иной абстракции обусловливаются *возможными действиями* с той или иной абстракцией и/или запретом тех [математических] действий, которые невозможны, т.е. несовместимы-дефиницией абстракции. [И здесь опять можно указать на сходство кантовской мысли с античным (нео)платонизмом, с подходом к обоснованию математики неоплатоника Прокла, который впервые поставил и рассмотрел вопрос об особом статусе математических объектов, неприменимости к ним физических действий и необходимостью постулировать для «работы» с ними особые «фантазийные» действия: например, геометрическая точка не может двигаться обычным физическим образом и для нее необходимо постулировать особый механизм движения путем истечения[1].]

Обратим внимание на то, что по своей прагматической направленности трансцендентализм Канта схож с программой *эрлангенского конструктивизма* (как одной из программ обоснования математики: П. Лоренцен[2] и другие), но его принципиальное отличие в статусе «действий»: это не какое-то физическое действие («конструкция»), обосновывающее то или иное математическое понятие, например соотнесение «прямой» с лучом света, а некий ментальный способ процедурной развертки декларативного понятия под именем схем. При этом можно показать, что кантовский трансцендентализм лежит в основе известных программ обоснования математики XX в.: формализма (формальное задание объектов), конструктивизма и интуиционизма (опора на чувственные созерцания), — хотя концептуально

[1] *Кант И.* Критика чистого разума. С. 158.

[2] Ср. с различением «поверхностная vs. глубинная информация» Хинтикки [*Хинтикка Я.* Поверхностная информация и глубинная информация // Хинтикка Я. Логико-эпистемологические исследования. М.: Прогресс, 1980. С. 182—228].

[3] Заметим, что Кант отвергает любые типы интеллектуальной интуиции и оставляет только чувственную интуицию, хотя гуссерлевская процедура («действие») варьирования вполне вписывается в кантовский *трансцендентальный прагматизм*.

[4] Рассудок, по Канту, «работает» с уже готовыми понятиями и суждениями.

[1] См.: *Гайденко П.П.* История греческой философии в ее связи с наукой. М.: ПЕР СЭ, 2000. С. 154.

[2] *Lorenzen P.* Konstruktive Wissenschaftstheorie. Frankfurt, 1974.

наиболее близок математическому *интуиционизму*[1]. Хотя, как мы покажем ниже, трансцендентализм отличается от интуиционизма в одном важном отношении, поскольку по своему онтологическому статусу *трансцендентальное* отличается не только от эмпирически-объективного (трансцендентного), но и от субъективно-ментального (имманентного).

Еще одной новацией Канта, выступающей продолжением и следствием первой, и проявлением его трансцендентально-прагматического подхода является его трактовка математики в качестве «*познания посредством конструирования понятий*»[2].

Важнейшая в этой связи глава «Критики» — «*Об основании различения всех предметов вообще на phaenomena и noumena*»[3] [особенно, фрагменты В 298—300 и далее], где в концентрированном виде излагается суть как трансцендентализма в целом, так и кантовская позиция относительно «семантики» математического способа познания. Здесь Кант подчеркивает, что без *предмета* (resp. эмпирического созерцания) *понятия*, в том числе и «чистые чувственные» понятия математики, «не имеют никакого смысла (объективной значимости) и совершенно лишены содержания» [В 298], поскольку они «суть лишь игра воображения или рассудка своими представлениями» [там же]. И потому «необходимо сделать *чувственным всякое* **абстрактное понятие** (выделено полужирным мной. — *К.С.*), т.е. показать соответствующий ему объект в созерцании, так как без этого понятие... было бы *бессмысленным*, т.е. лишенным значения» [В 299]. И Кант продолжает: «...математика выполняет это требование, конструируя фигуру, которое есть явление, принадлежащее нашим чувствам, хотя и созданное a priori» [В 299; ср. с фрагментом В 741 ниже]. А ключевым является следующий фрагмент, на который мы уже неявно опирались выше:

«Математическое знание есть знание посредством конструирования понятий. Но конструировать понятие — значит показать a priori соответствующее ему созерцание. Следовательно, для конструирования понятия требуется не эмпирическое созерцание, которое, стало быть, как созерцание есть единичный объект, но тем не менее, будучи конструированием понятия (общего представления), должно выразить в представлении общезначимость для всех возможных созерцаний, подходящих под одно и то же понятие... Единичная нарисованная

[1] См.: *Катречко С.Л.* Кантовы основания программ обоснования математики // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15—16 июня 2007. М.: Издатель Савин С.А., 2007. С. 69—71.

[2] Там же. С. 528.

[3] Там же. С. 234—248.

фигура эмпирична, но тем не менее служит для выражения понятия без ущерба для его **всеобщности**[1], так как в этом эмпирическом созерцании я всегда имею в виду только **действие по конструированию понятия**[2], для которого многие определения, например величины сторон и углов, совершенно безразличны, и потому я отвлекаюсь от этих разных [определений], не изменяющих понятия треугольника» [В 741][3].

Для прояснения своего тезиса Кант в качестве примера приводит доказательство теоремы о равенстве суммы углов треугольника 180 градусам[4]. При этом исходное (декларативное) понятие треугольника уже как предмета (= фигуры, состоящей из трех углов) «разлагается» на свои составляющие: отрезки прямых и углы, — что позволяет осуществить дополнительное построение (проведение прямой через одну из его вершин) и привлечь для доказательства информацию о равенстве углов. За счет этого введения новых объектов и действий с ними[5] удается синтезировать новое знание о треугольнике, т.е. доказать искомую теорему о том, что сумма углов произвольного треугольника [на евклидовой плоскости] равна 180 градусам. Вслед за И. Лакатосом[6] имеет смысл различать собственно *доказательство* [как набор математических действий] и его *логическое оформление*, которое есть последовательность шагов, каждый из которых или представляет собой аксиому, или получен из предшествующих по одному из правил вывода (определение логического вывода по Гильберту). Однако первое нельзя полностью сводить ко второму, поскольку задачей логического «*образа*» доказательства является не непосредственное моделирование собственно математической деятельности (resp. реального процесса доказательства), а лишь обеспечение логической *правильности* его осуществления. Поэтому следует различать

[1] Ср. с пониманием специфики математики у Платона выше.

[2] Ср. с кантовскими «действиями чистого рассудка (мышления)» [В81]; трансцендентальный прагматизм.

[3] Кант наряду с описанным *остенсивным* конструированием, опирающимся на пространственную интуицию, выделяет *символическое конструирование* (алгебра), в основе которого лежит априорное время. Оно имеет более абстрактный характер, что связано использованием в нем 1) особых символов для арифметических операций (в том время как геометрические построения производятся реально) и 2) особого «языка *x-ов* и *y-ов*» (переменных).

[4] Там же. С. 528.

[5] В своем анализе Кант говорит, что при доказательстве геометр руководствуется только «созерцанием» [там же, с. 530], что представляется не совсем корректным. Точнее надо бы сказать, что созерцание является одним из необходимых условий осуществления математических действий: геометрических построений и последующих усмотрений [равенств].

[6] См.: *Лакатоса И.* Доказательства и опровержения. М.: Наука, 1967.

структуру реального процесса [математического] доказательства и его логическое оформление в некотором формальном метаязыке.

При обсуждении метафоры «математика как шахматы» мы уже выяснили, что отличительной чертой математики является то, что она работает со своими абстракциями (понятиями) не напрямую, а посредством их *реализации* в каком-то чувственном материале, т.е. математика «работает» с математическими *предметами* (что, собственно, и позволяет отнести математику, наряду с физикой, к модусу *предметного познания*). Приведенный кантовский тезис о необходимости «конструирования [математических] понятий», наряду с приведенным выше платоновским замечанием из «Государства», говорят, по сути, о том же. Однако характер этой реализации, который не является, по Канту, чем-то условным и/или конвенциальным (как это полагают более современные мыслители-математики Фреге, Гильберт, Гудстейн и др.), принципиально иной, ибо, как это требует Кант, необходимо «сделать *чувственным всякое* **абстрактное понятие**» [B 298—300] или (уточняет Кант) «сконструировать» понятие посредством общезначимого созерцания (каковым выступает кантовская *схема*), т.е. представить рассудочное понятие в качестве предмета в созерцательной среде. Задача такой реализации — эксплицировать заложенный (скрытый) в понятии «инвариантный фактор», или процедурный смысл, задаваемый посредством кантовской «абстрактной» дефиниции, что делает возможным производить над этим математическим предметом те или иные [математические] действия (например, алгебраические вычисления или геометрические построения), которые имеют теперь не единичный, а универсально-всеобщий характер. Понятно, что в ходе математической деятельности (в этой среде) исходный математический предмет может претерпевать порой существенные преобразования и/или дополняться «конструированием» других предметов, что позволяет (в общем случае) говорить о синтетическом, а не аналитическом характере этих действий, поскольку в ходе подобной «работы» происходит приращение информации, что выражается в получении некоторого [математического] результата.

Тем самым математика полагается Кантом в качестве *сложного* двухуровневого (и двухкомпонентного) способа познания. Она начинается с создания посредством дефиниций «чистых чувственных понятий», которые как представления рассудка отличаются и от эмпирических понятий теоретического естествознания, и от чистых рассудочных понятий метафизики. Их сущностная специфика состоит в том, что они образованы посредством «произвольного [свободного]

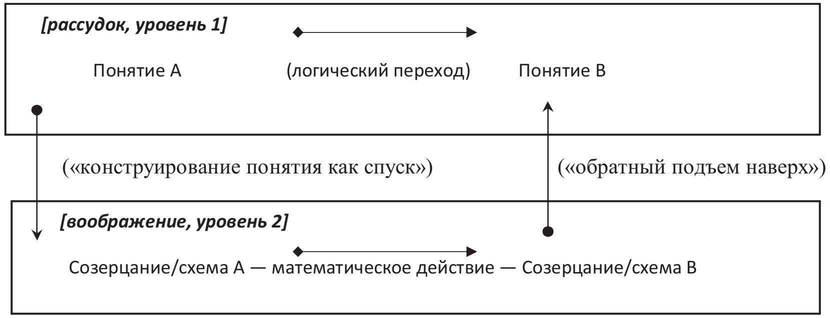
синтеза [нашего ума]»[1], т.е. содержат в себе некоторое *математическое* [ментальное] *действие*. Далее, при *конструировании понятий* осуществляется ***спуск*** на уровень (квази)чувственности (или воображения; уровень «глубинной информации») и соотнесение понятия с общезначимым созерцанием — *схемой*. Здесь, как бы при обратном прочтении (слева направо) принципа абстракции, происходит *декодирование* понятия: оно представляется как набор объектов более низкого уровня, находящихся в некоторой [пространственно-временной] *среде* и связанных между собой отношением типа «равенства». При этом возможно, что процесс спуска/декодирования будет осуществляться несколько раз (в зависимости от уровня абстрактности понятия и поставленной задачи[2]). Причем именно здесь и совершается *творческая* математическая деятельность соответствующего типа: геометрические построения, алгебраические вычисления или логико-математические доказательства, каждая из которых в свою очередь представляет некоторую совокупность допустимых в этой среде локальных действий-операций (типа проведения прямых, деление чисел или применение правила *modus ponens* в логическом выводе). Можно сказать, что на этом этапе задействуется пространственная и/или временная чувственная *интуиция*. За счет этого происходит выход за пределы первоначального понятия и [синтетическое] приращение знаний, поскольку любое [динамическое] *действие* (в отличие от статичных понятий и созерцаний) представляет собой *синтез*, по крайней мере, двух представлений[3]. А результат этого синтеза путем

[1] Там же. 538 [B757]; вставки в квадратных скобках мои. — *К.С.* Ср. с гуссерлевским варьированием!

[2] Соответственно, и конкретизирующие эти абстракции «спуски» также будут многоуровневыми, причем промежуточные «спуски» будут спусками на уровень не чувственности (воображения), а предшествующий рассудочный уровень: см. фрагмент [A 109]. Однако в конечном итоге необходимо «сделать чувственным всякое абстрактное понятие» [B 298], т.е. осуществить «спуск» на уровень чувственного созерцания, т.е. к единичному ментальному образу или к геометрическому чертежу.

[3] Трансцендентальный прагматизм проясняет тезис Канта о синтетическом характере математических суждений. Структурно любое действие может быть представлено как пара «начальное состояние — конечное состояние». Поэтому любое действие синтетично. В частности, синтетично суждение «5 + 7 = 12» как результат операции сложения двух чисел. Его синтетичность связана именно с действием сложения, которое объединяет в единое целое (сумму) члены сложения: «действие» [сложение] и придает сумме синтетический характер. Поэтому нельзя, как это делает Фреге (см. его «Основоположения арифметики») трактовать запись «5 + 7 = 12» лишь как формальное равенство [рассудка], поскольку за ним скрыто реальное [ментальное] действие по конструированию понятия, или сложение, которое происходит на уровне [чувственного] созерцания как объединение единиц, содержащихся в 5 и 7. В этом смысле математический знак «=» означает не равенство левой и правой части формулы, а переход (= действие сло-

обратного возврата (*подъема*) на рассудочный (понятийный) уровень фиксируется как формальный результат построения, вычисления или доказанной теоремы. Схематически математическую деятельность, по Канту, можно представить так:



Обратим еще раз внимание на важное различие кантовской прагматико-конструктивной концепции и современного логизированного подхода к пониманию математики. На приведенной схеме мы различили собственно математическую деятельность (т.е. реальный процесс математического построения, вычисления или доказательства) как «действие» в созерцательных средах (пространства и времени) в нижней части схемы и ее *логическое оформление*, которое может быть представлено в верхнем блоке схемы как формально-логический переход от понятия (формулы) A к понятию (формуле) B, причем первое нельзя полностью свести ко второму. Заметим также, что кантовское *конструирование понятий* как отсылка к выполнению некоторых (допустимых!) действий над математическими предметами, в ходе которых они могут преобразовываться согласно математическим правилам, привлекательно и в следующем отношении. Спектр логических действий с *понятиями* ограничен: они могут изменяться лишь *логически* в небольшом диапазоне (разделение, пересечение и объединение понятий), а кантовский «спуск» на уровень созерцаний (как процедура «конструирования» понятий) позволяет расширить спектр возможных действий или преобразований с уже математическими предметами: например, поделить треугольник пополам или провести через одну из его вершин прямую, а также соотнести его с другими предметами-созерцаниями или разложить исходный предмет на составные части.

жения) от левой части математического выражения к ее правой части (как результата этого действия). На приведенной ниже схеме переход от понятия **А** к понятию **В** является аналитическим на «поверхностном» (логическом) уровне, но является синтетическим на «глубинном» уровне математических действий.

* * *

Проведенный анализ математической деятельности позволяет предложить трансцендентальное решение проблемы онтологического статуса математических абстракций. Наивно реалистическая (= эмпиристская) онтология полагает существующим лишь то, что воспринимается (либо посредством наших органов чувств, либо посредством приборов) и может быть выражена максимой «существовать — значит быть воспринимаемым» (Дж. Беркли и др.). Однако, как мы уже отмечали выше, этот онтологический критерий не может претендовать на статус универсального, поскольку он не применим ни к математическим абстракциям, ни к теоретическим абстракциям современной науки. Кроме того, трансцендентальный анализ показывает, что само по себе *восприятие*, т.е. обнаружение на «экране» нашего сознания тех или иных содержаний [сознания], еще не гарантирует *объективного существования* этого содержания, поскольку для подобного приписывания мы должны быть уверены, что наше восприятие является результатом «внешнего» воздействия, а не (само)воздействием на нашу способность восприятия активных компонентов нашего сознания (каковым, по Канту, является рассудок). Тем самым возникает проблема отличения *объективного* (resp. *реального*) от *субъективного* (resp. *воображаемого*), поскольку, возможно, что мы выдаем за объективно-воспринятое порождения собственной фантазии. Причем здесь идет речь о родовом недостатке любого *восприятия*, в том числе и с помощью физического *прибора* (например, осциллографа), на экране которого вместо изображения *внешних* сигналов может быть представлен результат некоторой *внутренней* (*a la* субъективной) активности самого прибора, например результат сбоя его работы. Это означает, что одного критерия воспринятости для решения онтологической проблемы [существования предметов, в том числе и математических] недостаточно и он должен быть дополнен критерием отличения восприятия от псевдовосприятия, сна от яви (Декарт), или явлений реальных от воображаемых (Лейбниц).

Более того, в непосредственном восприятии нам не дан *объект* как таковой. Воспринимая, например, то, что мы именуем *камнем*, мы не воспринимаем *объект* под именем *камень*, поскольку наши органы чувств/приборы предназначены для восприятия не *объектов* [т.е. сущностей], а [их] *свойств*. Как говорит Кант, мы воспринимаем *чувственное многообразие*, которые при познании мы *интерпретируем* как восприятие [одного] объекта. [*Объективное*] существование *объекта* постулируется нами, а условием этого выступает *трансцендентальное единство апперцепции*, «благодаря которому все данное в созерцании многообразное объединяется в понятие об объекте»[1]. Точнее, трансцендентальным условием нашего *предметного* (или «объектного») способа познания выступает, по Канту, *трансцендентальный предмет*, благодаря которому, по меткому выражению Э. Кассирера, «*мы познаем* не предметы, но познаем явления предметно!», т.е. трансцендентальный предмет выступает *предметной функцией*, посредством которой мы воспринимаем окружающий мир как состоящий из предметов.

Вместе с тем признание *a la субъективного* (необъективного) характера нашего восприятия не приводит с неизбежностью к субъективному идеализму берклиевского типа, т.е. к полной субъективации всех наших чувственных данных (проблема «первичные vs. вторичные качества»), ибо, как пишет Кант в § 19 2-го изд. «Критики», «связка *есть* имеет в суждении своей целью отличить **объективное единство данных представлений** от субъективного»[2]. Тем самым совокупный опыт, зафиксированный в структуре нашего языке, говорит нам об *объективном* [= объектном] существовании содержаний наших восприятий и поэтому причина нашей неудачи состоит в неверном выборе онтологического критерия, неявно принимаемом наивной мыслью (реализмом), который полагает, что для существования чего-либо достаточно постулировать возможность его *восприятия*.

Следуя интенции коперниканского переворота, предложим другой критерий *объективного существования*, возможно кардинально отличающийся от точки зрения обыденного рассудка с его наивно-реалистическим тезисом: «существовать — значит быть объектом возможного восприятия, т.е. быть в принципе воспринимаемым». Суть трансцендентализма Канта состоит в анализе нашего знания, а «всякое знание требует понятия... [которое] по своей форме есть нечто общее, служащее *правилом*»[3]. Реализуя этот кантовский подход, выберем в качестве парадигмы «объекта» не природные (физические) объекты (которые рассматривала в качестве парадигмальных вся предшествующая метафизика (как мета-физика), а математические объекты, которые имеют *конструктивный* способ своего *существования*. Соответственно, должен измениться и критерий объективного/объектного существования, который теперь будет звучать так: **существовать — значит быть конструируемым предметом**, т.е. построенным по некоторому правилу. Заметим, что этот критерий универсален, поскольку он применим к любым объектам, в том числе

[1] Там же. С. 130, 132, 628—632.
[2] Там же. С. 133.
[3] Там же. С. 628.

и к физическим предметам/феноменам, которые с коперниканским переворотом Канта не *даны*, а *заданы*.

В тексте «Критики» есть немало примеров подобных конструкций[1], но парадигмальным выступает следующий пример, посредством которого Кант иллюстрирует вводимый концепт трансцендентального предмета (resp. предмета/объекта вообще), который наряду с системой кантовских категорий лежит в основании трансцендентальной онтологии: «Так, мы мыслим треугольник как **предмет**, когда сознаем сочетание трех прямых линий согласно **правилу**, соответственно которому такое созерцание всегда может быть показано»[2]. И именно этот критерий конструируемости — правилосообразности (со смысловым акцентом на втором термине) Кант и кладет в основу *объективности*: *объективно значимым* выступает то, что является *правилосообразным* [т.е. подчиняется некоторому *правилу*], или *всеобще—необходимым*. Явным образом Кант говорит об этом в своих «Пролегоменах»: «Таким образом, *объективная значимость и необходимая общезначимость* (*для каждого*) *суть взаимозаменяемые понятия*, и хотя мы не знаем объекта самого по себе, но когда мы рассматриваем суждение как общезначимое и, стало быть, необходимое, то под этим мы разумеем объективную значимость»[3], — эта мысль проходит красной нитью через всю кантовскую «Критику»[4].

При этом в трансцендентализме существенно пересматривается смысл понятия *объективного/объектного* [существования]: *объективным* (= имеющим место в объекте) является *общезначимое*, т.е. имеющее место не только для нас, нашего единичного [субъективного] сознания, но для «*сознания вообще*» (= *трансцендентального* сознания). Таковыми выступают *формальные объекты-конструкции*, парадигмальным примером которых и являются математические абстракции. При этом трансцендентализм (resp. *трансцендентальный конструктивизм*) представляет собой разновидность *формальной онтологии* как науки об объектах вообще, которая получила свое дальнейшее развитие в феноменологии (Мейнонг, Гуссерль) и, более того, новый тип онтологии.

[1] Там же. С. 423—430, 124—125, 103, 112 и др.
[2] Там же. С. 630.
[3] *Кант И.* Пролегомены ко всякой будущей метафизике, которая может появиться как наука // Кант И. Соч.: В 8 т. Т.4. М.: Чоро, 1994. С. 56. И далее Кант продолжает: «Объект сам по себе всегда остается неизвестным; но когда связь представлений, полученных от этого объекта нашей чувственностью, определяется рассудочным понятием как общезначимая, то предмет определяется этим отношением и суждение объективно».
[4] Ср. с: «Эти представления связаны в объекте, т.е. безотносительно к состояниям субъекта» [*Кант И.* Критика чистого разума. С. 134 (В 142)]; см. также: [там же, с. 95, 97, 102, 104, 105, 132—133, 155, 183 и др.].

Вместе с тем трансцендентальный подход не является феноменализмом (субъективным идеализмом) берклиевского типа. Трансцендентальное — это не индивидуально-субъективное, а транс-субъективное. Тем самым в онтологическом отношении трансцендентальное занимает промежуточное положение между трансцендентным (объективным) и имманентным (субъективным), что сближает кантовское трансцендентальное с *интенциональной реальностью* Э. Гуссерля или *третьим миром* [знания] К. Поппера (Г. Фреге).

Достаточно точно онтологический статус трансцендентального выражает восходящая к Г. Фреге аналогия с телескопом (или другим измерительным прибором). Допустим, что у нас есть телескоп, посредством которого мы наблюдаем какую-то звезду. Реальная звезда будет соответствовать кантовской вещи-самой-по-себе, наш ментальный образ звезды, воспринятый с линзы телескопа, — эмпирически-субъективному представлению (образу) звезды. А вот каков статус изображения звезды на линзе («экране») телескопа? Понятно, что это и не объективно существующая звезда, но и не ее субъективное представление нашей психики. Она обладает трансцендентальным статусом, имеющим объективную значимость: кантовская вещь-для-нас, которая представляет вещь-саму-по-себе (т.е. саму звезду), выступает способом ее феноменальной данности для нашего сознания. Тем самым кантовская вещь-для-нас — это не некая самостоятельно существующая вещь, а та же реальная вещь (= вещь-сама-по-себе), хотя и данная нам посредством познавательной способности уже как вещь-для-нас: за являющейся нам вещью-для-нас «просвечивает» реальная вещь, причем она не «скрывается» от нас этим феноменом, а именно дается нам, правда, с помощью *посредника*, каковым у Фреге является телескоп, а у Канта — познавательный «инструмент» в качестве нашей «способности». При этом нужно иметь в виду, что телескоп в познании выполняет двоякую функцию: он является и познавательным орудием и средством представления результата познавательного акта. Последнее мы соотнесли с кантовской вещью-для-нас, а собственно трансцендентальное можно соотнести с «орудийной» составляющей нашей познавательной способности. В данном случае важно подчеркнуть ее особый онтологический статус. Например, если мы (как действующие субъекты) копаем землю, то *объектом* при этом выступает земля, а статус используемого нами орудия (лопаты) будет a la трансцендентальным, поскольку орудие [познавательного] действия концептуально не является ни «объектом» или «субъектом» познания, а выступает связующим звеном между ними. Правда, в отличие от телескопа или лопаты наши познавательные «орудия», прежде всего кантовские априорные формы (в том числе и математические абстракции), изначально ментальны, а не объективны[1]. И точно так же, как телескоп или лопата превращаются из объектов в орудия, наши познавательные способности: чувственность, воображение, рассудок (и его сердцевина: апперцепция), — приобретают в ходе познания не эмпирико-психический, а транс-субъективный, или трансцендентальный статус.

Подобным трансцендентально-инструментальным статусом обладают и математические абстрактные предметы. С одной стороны, они принципиально отличаются от более привычных для нас конкретно-физических объектов и не должны рассматриваться как отвлеченные от них «копии». С другой стороны, это и не наши произвольные выдумки (фантазии), а своеобразные *инструменты познания*, посредством которых мы познаем мир и которые обеспечивают [вполне постижимую с точки зрения трансцендентализма] *эффективность математики в естественных* [и других] *науках a la* Вигнер.

Подытожим наше исследование, сформулировав «максиму» трансцендентального решения проблемы Вигнера о «*непостижимой эффективности математики...*»: математические абстракции/предметы являются не аналогами (или «копиями») физических объектов, а созданными нашим сознанием [трансцендентальными] особыми «ключами», посредством которых мы можем «вскрывать» замки природы (проблема соответствия наших *представлений предметам* реальности) и тем самым адекватно познавать ее.

Библиографический список

«Абстракция», «абстрактный объект»: статьи из «Новой философской энциклопедии»: http://iph.ras.ru/elib/0019.html

Аристотель. О душе // Аристотель. Сочинения. М.: Мысль, 1975. Т. 1.

Арнольд В.И. Что такое математика? М.: МЦНМО, 2008.

Гайденко П.П. История греческой философии в ее связи с наукой. М.: ПЕР СЭ, 2000.

Гудстейн Р.Л. Математическая логика. М.: Изд-во ИЛ, 1961.

Гудстейн Р.Л. Рекурсивный математический анализ. М.: Наука, 1970.

Гуссерль Э. О варьировании // Воображение в свете философских рефлексий. М.: Полиграф—Информ, 2008. С. 327—365.

Гуссерль Э. Идем к чистой феноменологии и феноменологической философии. М.: ДИК, 1999.

Кант И. Критика чистого разума // Кант И. Соч.: В 8 т. Т. 3. М.: Чоро, 1994.

Кант И. Пролегомены ко всякой будущей метафизике, которая может появиться как наука // Кант И. Соч.: В 8 т. Т. 4. М.: Чоро, 1994.

Катречко С.Л. Платоновский четырехчастный отрезок (Линия): Платон и Кант о природе (специфике) математического знания // Вестник РХГА. Т. 14. Вып. 3. 2013. С. 172—177.

[1] В этом состоит некоторая неточность данной метафоры: трансцендентальное «происходит» не из сферы реально-объективного, а из сферы ментально-субъективного.

Катречко С.Л. Трансцендентальный анализ математической деятельности: абстрактные (математические) объекты, конструкции и доказательства // Доказательство: очевидность, достоверность и убедительность в математике. М.: КД, «ЛИБРОКОМ», 2014. С. 86—120.
Катречко С.Л. Кантовы основания программ обоснования математики // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15—16 июня 2007. М.: Издатель Савин С.А., 2007. С. 69—71.
Клини С. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957. С. 30.
Клайн М. Математика. Утраты определенности. М.: Мир, 1984.
Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. М.: Наука, 1967.
Новоселов М.М. Логика абстракций (методологический анализ). М.: ИФРАН, 2000.
Сборник статей по философии математики / Под ред. С.А. Яновской. М., 1936.
Фреге Г. Основоположения арифметики (логико-математическое исследование понятия числа). Томск: Изд. «Водолей», 2000.
Целищев В.В. Философия математики. Новосибирск: Наука, 2002.
Хинтикка Я. Поверхностная информация и глубинная информация // Хинтикка Я. Логико-эпистемологические исследования. М.: Прогресс, 1980.
Юм Д. Трактат о человеческой природе // Юм Д. Сочинения: В 2 т. М.: Мысль, 1965. Т. 1.
Benacerraf P. What Numbers Could not Be // The Philosophical Review. Vol. 74. N 1 (Jan. 1965).
Beth E. Mathematical Thought. Dordrecht, Reidel, 1965.
Burgess J., Rosen G. A Subject with No Object: Strategies for Nominalistic Interpretation Mathematics. New York: Oxford University Press, 1997.
Field H. Science without Numbers: a Defense of Nominalism. Blackwell, 1980.
Field H. Realism, Mathematics & Modality. Blackwell, 1989.
Frege G. Uber Sinn und Bedeutung // Zeitschrift fur Philosophie und philosophische Kritik. Leipzig, 1892.
Hellman G. Mathematics Without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation. New York: Oxford University Press, 1989.
Hellman G. Structuralism without Structures // Philosophia Mathematica (3). Vol. 4. N 2 (May 1996). P. 100—123.
Katrechko S. Ding-Ontology of Aristotle vs. Sachverhalt-Ontology of Wittgenstein // Papers of the 31st International Wittgenstein Symposium (XVI). Kirchberg am Wessel, 2008. P. 169—172.
Linsky B., Zalta E. Naturalized Platonism versus Platonized Naturalism // Journal of Philosophy. 1995. XCII. N 10. P. 525—555.
Mally E. Gegenstandstheoretische Grundlagen der Logik und Logistik. Leipzig, 1912.
Rosen G. Abstract Objects: http://plato.stanford.edu/entries/abstract-objects/.
Shapiro S. Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology. New York: Oxford University Press, 1997.

С.М. Кускова

ПРОБЛЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

Различные программы обоснования математики выявляют аргументацию, предваряющую введение, изменение или отмену того или иного принципа математической теории. Философский анализ этих аргументов, устанавливающий их истинность, связь с некоторыми эпистемологическими и онтологическими подходами, внутренний или внешний для математики характер, помогает видеть общую картину развития соответствующего раздела математики.

Следует разграничить философские проблемы математики, дающие материал для развития новых направлений научной философии, но решаемые средствами математики; и проблемы философии, обнаруживаемые с помощью значимого математического положения, для самой математики не создающего никаких проблем. Они должны решаться средствами философии. К проблемам второго рода относится вопрос о единственности натурального ряда.

Например, в трансцендентальной эпистемологии единственность натурального ряда обеспечивается схематизмом деятельности рассудка, опирающегося на созерцание чистой формы чувственности. Для построения порядкового числа недостаточно одних логических средств, нужны также формы созерцания. Априорные свойства этих форм придают необходимый характер синтетическим утверждениям математики. Необходимость трёх измерений пространства — не предубеждение, а закономерное следствие использования свойств созерцания трансцендентального субъекта. Варьируя эти свойства, можно получить иное созерцание пространства как предмет альтернативной геометрической теории, не выходя за рамки трансцендентализма. Не выполняется это лишь потому, что трансцендентальная философия считает вариативными только эмпирические свойства, а априорные — и аналитические, и синтетические — постоянными. Заслуга этой эпистемологии — отделение формальных (логических и полученных из чистого созерцания) свойств математических предметов от привходящих свойств эмпирической интерпретации. Так, существование единственного ряда натуральных чисел обосновано не