

ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 15, № 3



2013

СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. П. ОГАРЁВА

Журнал Средневолжского математического общества

ТОМ 15, № 3

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: В. Ф. Тишкин (главный редактор),
М. Т. Терехин (зам. главного редактора),
Л. А. Сухарев (ответственный секретарь),
П. А. Шаманаев (зам. отв. секретаря),
И. В. Бойков, П. А. Вельмисов, В. К. Горбунов,
В. З. Гринес, Ю. Н. Дерюгин, А. Ф. Зубова,
Е. Б. Кузнецов, Б. В. Логинов, С. И. Спивак,
В. А. Треногин

САРАНСК

2013

«Журнал Средневолжского математического общества» публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредитель — Межрегиональная общественная организация «Средневолжское математическое общество», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 15, № 3

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.

Корректоры: Егорова Д. К., Пескова Е. Е.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва

Адрес редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевистская, 68, НИИ математики (комн. 210).

Тел.: (834-2) 23-32-05

E-mail для статей: journal@svmo.ru

E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru

Web: <http://www.svmo.ru>

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

Содержание

РЕДАКЦИОННАЯ СТРАНИЦА	6
-----------------------------	---

Б. В. Логинов, Ю. Б. Руссак, Л. Р. Ким-Тян

Вырожденные дифференциальные уравнения с переменным оператором вырождения	8
1. Introduction.	8
2. Jordan chains of multiparameter operator-functions	9
3. Jordan chains along directions.	12
4. Degenerate differential equations.	14

В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев

О существовании сепараторов магнитных полей в шаровом слое плазмы	21
1. Введение и формулировка основных результатов	21
2. Доказательство основных результатов	23

И. П. Рязанцева

Итеративный метод первого порядка для аккретивных включений в банаховом пространстве	29
--	----

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

Л. Р. Абзалилова, С. И. Спивак

Математическое моделирование реакции циклоалюминирования олефинов и ацетиленов триэтилалюминием	35
1. Введение	35

Л. Д. Блистанова, В. И. Зубов, И. В. Зубов, С. А. Стрекопытов, М.

В. Стрекопытова Устойчивость неограниченных решений	41
1. Введение	41
2. Постановка задачи	41
2.1. Случай нескольких пар чисто мнимых корней	44
3. Выводы	48

П. А. Вельмисов, В. А. Судаков, А. В. Анкилов

Математическое моделирование динамики защитного экрана при взаимодействии со сверхзвуковым потоком газа	49
1. Введение	49
2. Постановка задачи	50
3. Численно - аналитическое решение задачи	53

В. А. Воробьев, Ю. В. Березовская, А. Ю. Кочнев

Каузальные модели исторических процессов	58
1. Введение	58
2. Пролог математической истории	58
3. Каузальное моделирование социальных систем	60
4. Трудовая К-модель народонаселения в эпоху экодефицита	61
5. К-модель демографического кризиса в эпоху эконопаузы	62
6. К-модель этногенеза	64
7. Результат	66

М. Р. Еникеев, М. А. Малеева, И. М. Губайдуллин

Исследование механизма развития коррозионных поражений с использованием компьютерного зрения	70
1. Введение	70
2. ФР в коррозионных экспериментах	71
2.1. Формирования изображения	71
2.2. Сегментация	71
3. Анализ характеристик	72
4. Заключение	74

С. Х. Капкаева

Реализация градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхностях посредством автоморфизмов трехцветных графов	76
1. Основные понятия и формулировка результатов	76
2. Свойства трехцветного графа $(T_f; P_f)$	79
3. Реализация (Доказательство теоремы 1.2.)	84

О. А. Кузенков, Е. А. Рябова

Некоторые аспекты оптимизации самовоспроизводящихся систем	89
1. Описание модели авторепродукции	90
2. Формулировка результатов	91
2.1. Предельное поведение системы авторепродукции	91
2.2. Оптимальное управление системой авторепродукции при неограниченном времени управления	92
3. Доказательство результатов	93

А. А. Кяшкин, Б. В. Логинов, П. А. Шаманаев

Комментарии к задачам о возмущениях линейного уравнения малым линейным слагаемым и спектральных характеристик фредгольмова оператора	100
1. Введение	100
2. Комментарии к задаче (1.4) при $n \geq 1$	101
3. Уравнение (1.4) с аналитическим оператором $A(\varepsilon)$	103
4. Применение уравнения разветвления в корневом подпространстве при возмущении спектра	104

Ю. А. Левченко, А. А. Шиловская

Диффеоморфизмы 3-многообразий с одномерными базисными множествами, пространно расположенными на 2-торах 108

1. Введение и формулировка результатов 108

В. Л. Литвинов

Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении 112

О. В. Починка, А. А. Романов

Пример диффеоморфизма «источник-сток» на двумерной сфере, не включаемого в гладкий поток 120

1. Введение и формулировка результатов 120
2. Пример диффеоморфизма “источник-сток” на S^2 , включаемого в гладкий поток 122
3. Построение диффеоморфизма “источник-сток” на S^2 , не включаемого в гладкий поток 122
4. Доказательство теоремы 1.1. 123

Д. Г. Рахимов

О возмущениях в спектре Э.Шмидта линейных операторов в гильбертовых пространствах 126

1. Введение. 126
2. Постановка задачи 126
- 2.1. Построение уравнения разветвления. 128
3. Уточнение собственных значений Э. Шмидта методом ложных возмущений 130

С. И. Спивак, О. Г. Кантор, И. Р. Салахов

Прогнозные оценки в моделях системной динамики 133

М. В. Таланов А. В. Карасев В. М. Таланов

Реализация расширенного фильтра Калмана в среде MATLAB для восстановления угловой скорости вращения ротора асинхронного двигателя 140

1. Введение 140
2. Результаты моделирования в среде MATLAB 142

А. А. Цупак, М. Ю. Медведик

Решение обратной задачи дифракции в прямоугольном волноводе методом асимптотических интегральных уравнений 148

1. Введение 148
2. Постановка задачи. Интегро-дифференциальные уравнения. 148
3. Тензорные функции Грина. Асимптотические свойства ТФГ. 149
4. Асимптотические интегральные уравнения электромагнитного поля 151
5. Результаты вычислений 155

Т. К. Юлдашев

О разрешимости смешанной задачи для линейного парабологиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма 158

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

С. В. Зубов

Исследование поведения возмущенной системы дифференциальных уравнений 164

В. И. Зубов, И. В. Зубов, А. Ф. Зубова, О. С. Стрекопытова

Существование автоколебаний в динамических системах, устойчивых по Лагранжу 166

С. В. Зубов, М. В. Стрекопытова, О. С. Стрекопытова

Обобщение реберной теоремы 169

Правила оформления рукописей для публикации
в журнале «Журнал СВМО» 173

Алфавитный указатель 175

ОТ РЕДАКЦИИ

Третий номер 15-го тома содержит работы, в основном, участников объединённого семинара Средневолжского математического общества и кафедры прикладной математики Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарёва. Результаты, полученные в этих работах, развивают фундаментальные и прикладные исследования и содержат решения задач, обсуждавшихся на VI международной математической школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского (г. Саранск, 6-12 июля 2013 года). Школа-семинар проведена национальным исследовательским Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарёва и Средневолжским математическим обществом при поддержке РФФИ (грант № 13-01-06814).

Все статьи имеют положительные рецензии, а сам журнал (кроме подписки через каталог «Почта России») доступен и в сети Internet на сайте Elibrary.ru.

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

Вырожденные дифференциальные уравнения с переменным оператором вырождения

© Б. В. Логинов, Ю. Б. Руссак, Л. Р. Ким-Тян

Аннотация. Развита теория жордановых цепочек многопараметрических оператор-функций $A(\lambda) : E_1 \rightarrow E_2$, $\lambda \in \Lambda$, $\dim \Lambda = k$, $\dim E_1 = \dim E_2 = n$. Здесь $A_0 = A(0)$ вырожденный оператор, $\dim \text{Ker} A_0 = 1$, $\text{Ker} A_0 = \{\varphi\}$, $\text{Ker} A_0^* = \{\psi\}$ и $A(\lambda)$ предполагается линейной по λ . Целями работы являются приложения к вырожденным дифференциальным уравнениям вида $[A_0 + R(\cdot, x)]x' = Bx$.

Ключевые слова: многопараметрические оператор-функции; теория обобщенных жордановых цепочек; вырожденные дифференциально-алгебраические уравнения

Degenerated differential equations with variable degeneration operator

© B. V. Loginov¹ Yu. B. Rousak² L. R. Kim-Tyan³

Abstract. The theory of Jordan chains for multiparameter operator-functions $A(\lambda) : E_1 \rightarrow E_2$, $\lambda \in \Lambda$, $\dim \Lambda = k$, $\dim E_1 = \dim E_2 = n$ is developed. Here $A_0 = A(0)$ is degenerated operator, $\dim \text{Ker} A_0 = 1$, $\text{Ker} A_0 = \{\varphi\}$, $\text{Ker} A_0^* = \{\psi\}$ and the operator-function $A(\lambda)$ is supposed to be linear on λ . The aims of the article are the applications to degenerate differential equations of the form $[A_0 + R(\cdot, x)]x' = Bx$.

Key Words: multiparameter operator-functions; the theory of Jordan chains; degenerated differential-algebraic equations

1. Introduction.

Below degenerated differential equations (DE) of the form

$$A(x)x' = G(x) \quad (1.1)$$

are considered. If it is not stipulated the opposite, it is supposed that $A(x), G(x) : E_1 \rightarrow E_2$, $\dim E_1 = \dim E_2 = n$, $A(0) = A_0$ is degenerated operator with $\dim \text{Ker} A_0 = \dim \text{Ker} A_0^* = 1$, $\text{Ker} A_0 = N(A_0) = \{\varphi\}$, $\text{Ker} A_0^* = N(A_0^*) = \{\psi\}$. The function $G(x)$ is sufficiently smooth and $G(0) = 0$, $G(x) = Bx - H(x)$, $H(0) = 0$, $H'(0) = 0$. Our aim here is first of all to determine under which conditions the operator $A(x)$ will be nondegenerated in some neighborhood of the point $x = 0$, degenerated in some neighborhood of $x = 0$, or degenerated on some submanifold in neighborhood of $x = 0$. On this way the theory of Jordan chains for the degenerated operator-functions will be developed (sec. 2.3) and applied to DE of the form (2.3) (sec. 4). In the definition of the Jordan chain slightly more generic case will be studied when the linear by parameter λ operator-function

$$A(\lambda) = A_0 + DA(0)\lambda : E_1 \rightarrow E_2, \lambda \in \Lambda, \dim \Lambda = k \quad (1.2)$$

depends on parameter λ belonging to different from E_1 space Λ .

¹ Ulyanovsk State Technical University, Russia; bvllbv@yandex.ru

² Canberra University, Australia; irousak@gmail.com

³ National University of Science and Technology «MISIS» (MISIS), Russia; kim-tyan@yandex.ru

The case of polynomial (or analytical) operator-function $A(\lambda)$ will be considered in extended variant of the article. In sec. 2 often on examples will be considered the case $\Lambda = E_1$. Sec.4 contains applications to degenerated differential equations. The work was supported by the Federal Program "Research and scientific-pedagogical personnel of innovative Russia (agreement 14.B37.21.0373).

2. Jordan chains of multiparameter operator-functions

Let the function $A(\lambda)$ be linear on λ , i.e. $A(\lambda) = A_0 + DA(0)\lambda$, and $DA(0)$ is mapping a neighborhood of $0 \in \Lambda$ in the space of square $n \times n$ -matrices. The following construction defines a Jordan chain (further JCh) for the operator-function (1.2).

L e m m a 2..1 *For the mapping (1.2) would be noninvertible in some neighborhood of $\lambda = 0$ it is necessary and sufficient the existence of some function $h(\lambda) : U(0) \rightarrow E_1$ defined in some neighborhood of zero (or on submanifold of $U(0)$), such that $[A_0 + DA(0)\lambda]h(\lambda) = 0$.*

P r o o f. For sufficiently smooth $h(\lambda) = \varphi + Dh(0)\lambda + D^2h(0)\lambda^2 + \dots + D^s h(0)\lambda^s + \dots$ where $D^s h(0)$ is s -linear symmetric operator acting from Λ into E_1 or, that is the same, linear operator acting from $\Lambda \otimes \dots \otimes \Lambda = \otimes_s \Lambda$ into E_1 one has

$$0 = A_0\varphi + [A_0Dh(0)\lambda + (DA(0)\lambda)(\varphi)] + \dots + [A_0D^s h(0)\lambda^s + (DA(0))\lambda(D^{s-1}h(0)\lambda^{s-1})] + \dots$$

$DA(0)$ in the expression $A_0Dh(0)\lambda + (DA(0)\lambda)(\varphi)$ can be considered as the bilinear operator of two variables and since the second variable has constant value φ , it presents some known operator acting on λ , $B_1\lambda$, i.e. $A_0Dh(0)\lambda + (DA(0)\lambda)(\varphi) = [A_0Dh(0) + B_1]\lambda$. Thus, since $Dh(0) \in L\{\Lambda \rightarrow E_1\}$, the operator A_0 generates the operator B_1 acting from the space $L\{\Lambda \rightarrow E_1\}$ into the space $L\{\Lambda \rightarrow E_2\}$ according to the rule: if $S \in L\{\Lambda \rightarrow E_1\}$, then $B_1S = -A_0S$.

In order that $S \in \text{Ker} B_1$ it is necessary and sufficient that $\text{Im } S \in \{\varphi\}$. Consequently $\dim \text{Ker} B_1 = k$, and since $\dim \Lambda = k$, then there exist exactly k linearly independent operators S such that $\text{Im } S = \{\varphi\}$. Let the vectors $\xi_1, \dots, \xi_k$ form the base in Λ , then the base in $\text{ker} B_1$ is composed by the operators $\{\Phi_i \mid \Phi_i \xi_s = \delta_{is} \varphi\}$. The equality $\dim L\{\Lambda \rightarrow E_1\} = \dim L\{\Lambda \rightarrow E_2\}$ implies that $\dim \text{coKer} B_1 = k$. Since the space $L\{\Lambda \rightarrow E_1\}$ is isomorphic to the space $\Lambda^* \otimes E_1$ (designation $L\{\Lambda \rightarrow E_1\} \approx \Lambda^* \otimes E_1$), then $L\{\Lambda \rightarrow E_2\}^* \approx \Lambda \otimes E_2^*$ and the operators $\Psi_i = \xi_i \otimes \psi$ in the space $L\{\Lambda \rightarrow E_2\}^*$ form the base in the space $\text{coKer} B_1$. Thus for the solvability of the equation $A_0Dh(0) = -B_1$ it is necessary and sufficient the following equalities realization $\langle B_1, \Psi_i \rangle = 0$, $i = 1, \dots, n$,

In this case the operator $Dh(0)$ is defining up to linear combination of the operators Φ_i .

Suppose by induction that the operator $D^{s-1}h(0)$ is determined and consider the equation

$$A_0D^s h(0)\lambda^s + (DA(0)\lambda)(D^{s-1}h(0)\lambda^{s-1}) = [A_0D^s h(0) + B_s]\lambda^s. \quad (2.1)$$

Operator A_0 generates the operator B_s acting from the space $L\{\Lambda \otimes \dots \otimes \Lambda \rightarrow E_1\} = L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_1\}$ into the space $L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_2\}$ according to the rule: if $S \in \{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_1\}$, then $B_s S = A_0 S$. Since the space $L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_1\}$ is isomorphic to $\otimes_s \Lambda^* \otimes E_1$ (is represented by the elements of the space), then $\dim \text{Ker} B_s = k^s$ and the base in $\text{Ker} B_s$ the operators $\Psi_{i_1 \dots i_s}$ are composing, which can be constructed in the following manner: let the vectors $\xi_1, \dots, \xi_k$ form the base in Λ and $\xi_1^*, \dots, \xi_k^*$ be the biorthogonal base in Λ^* , the vectors $e_1, \dots, e_n$ ($u_1, \dots, u_n$) form the base in E_1 (resp. E_2), where for the definiteness $e_1 = \varphi$ ($u_1^* = \psi$), then the vectors $\Phi_{i_1 \dots i_s}$ are given by the formulae $\Phi_{i_1 \dots i_s} = \xi_{i_1}^* \otimes \dots \otimes \xi_{i_s}^* \otimes \varphi$ and $B_s \Phi_{i_1 \dots i_s} = 0$.

In analogous manner define the base of $coKer B_s \subset [L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_2\}]^* \approx \otimes_s \Lambda \otimes E_2^*$ as linear independent vectors $\Psi_{j_1 \dots j_s} = \xi_{j_1} \otimes \dots \otimes \xi_{j_s} \otimes \psi$ forming the space of the dimension k^s . In fact, since $S \in L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_1\} \approx \otimes_s \Lambda^* \otimes E_1$, then S can be represented in the form $S = \sum a_{j_1 \dots j_s} \otimes_{k=1}^s \xi_{j_k}^* \otimes e_j$ and therefore $B_s S = \sum a_{j_1 \dots j_s} \otimes_1^s \xi_{j_k}^* \otimes A_0 e_j$. As far as $\langle B_s S, \Psi_{i_1 \dots i_s} \rangle = \sum a_{j_1 \dots j_s} \left\langle \otimes_{k=1}^s \xi_{j_k}^* \otimes A_0 e_j, \otimes_{k=1}^s \xi_{i_k} \otimes \psi \right\rangle = \sum a_{j_1 \dots j_s} \langle \xi_{j_1}^*, \xi_{i_1} \rangle \dots \langle A_0 e_j, \psi \rangle = 0$, then $\Psi_{j_1 \dots j_s}$ form the base of the space $coKer B_s$.

Thus for the solvability of the equation (2.1) it is necessary and sufficient the realization of the following conditions

$$\langle B_s, \Psi_{i_1 \dots i_s} \rangle = 0, \quad j_1, \dots, j_s = \overline{1, n} \quad (2.2)$$

Definition 2.1 The elements $\varphi, Dh(0), D^2h(0), \dots, D^ph(0)$, until they are determining, form the Jordan chain of the zero-element φ for the operator-function $A_0 + DA(0)\lambda$.

Lemma 2.2 For the operator-function $A_0 + DA(0)\lambda$ irreversibility everywhere in the neighborhood of the point $\lambda = 0$ it is necessary and sufficient the existence of the infinite Jordan chain.

Sufficiency. Let there exists an infinite JCh. For the simplification introduce on every step Schmidt' operators [1]. Then at the usage of accepted designations $\tilde{A}_0 = A_0 + \langle \cdot, e_1^* \rangle u_1$ is the Schmidt's operator for A_0 , $\tilde{A}_0^{-1} = \Gamma$ [1]. Analogously, $\tilde{B}_1 = B_1 + \sum_{i=1}^k \langle \cdot, \xi_i \otimes e_1^* \rangle \xi_i^* \otimes u_1$. For $L\{\Lambda \rightarrow E_1\} \ni S = \sum_m a_{r,m} \xi_m^* \otimes e_r$ one has $\tilde{B}_1 S = B_1 S + \sum_{i=1}^k \langle \sum_m a_{r,m} \xi_m^* \otimes e_r, \xi_i \otimes e_1^* \rangle \xi_i^* \otimes u_1 = B_1 S + \sum_{i=1}^k a_{1i} \xi_i^* \otimes u_1$, and since $\langle S\lambda, e_1^* \rangle = \langle \sum_m a_{r,m} \lambda_m e_r, e_1^* \rangle = \sum_m a_{1m} \lambda_m = \sum_m a_{1m} \xi_m^*(\lambda)$ then $\tilde{B}_1 S = A_0 S + \langle S \cdot, e_1^* \rangle u_1 = \tilde{A}_0 S$. If $\Gamma_1 = \tilde{A}_1^{-1}$ from here it follows $\Gamma_1 T = \Gamma T$ for $T \in L\{\Lambda_1 \rightarrow E_2\}$, for the proof it is sufficient to set $S = \Gamma T \Rightarrow \tilde{B}_1 \Gamma T = \tilde{A}_0 \Gamma T = T \Rightarrow \Gamma_1 \tilde{B}_1 \Gamma T = \Gamma_1 T \Rightarrow \Gamma T = \Gamma_1 T$.

Analogously, if $B_s : L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_1\} \rightarrow L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_2\}$, then $\tilde{B}_s S = \tilde{A}_0 S$ for $S \in L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_1\}$. In fact, $\tilde{B}_s S = B_s S + \sum \langle \cdot, \xi_{j_1} \otimes \dots \otimes \xi_{j_s} \otimes e_1^* \rangle \xi_{j_1}^* \otimes \dots \otimes \xi_{j_s}^* \otimes u_1$ and $S = \sum a_{i_1 \dots i_s, i} \xi_{i_1}^* \otimes \dots \otimes \xi_{i_s}^* \otimes e_i \Rightarrow \tilde{B}_s S = A_s S + \sum \langle \sum a_{i_1 \dots i_s, i} \xi_{i_1}^* \otimes \dots \otimes \xi_{i_s}^* \otimes e_i, \xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_s} \otimes e_1^* \rangle \xi_{i_1}^* \otimes \dots \otimes \xi_{i_s}^* \otimes u_1 = A_0 S + \sum a_{i_1 \dots i_s} \otimes_{k=1}^s \xi_{i_k}^* \otimes u_1 = A_0 S + \langle S \cdot, e_1^* \rangle u_1 = \tilde{A}_0 S$, since $\langle S\lambda, e_1^* \rangle = \langle \sum a_{i_1 \dots i_s, i} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_s} e_i, e_1^* \rangle = \sum a_{i_1 \dots i_s, 1} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_s} = \sum a_{i_1 \dots i_s, 1} e_{i_1}^*(\lambda) \otimes \dots \otimes e_{i_s}^*(\lambda)$. If now $\Gamma_k = (\tilde{A}_k)^{-1}$, then $\Gamma_k T = \Gamma T$, where $T \in \{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_2\}$. From the last relation the inequality $\|\Gamma_k\| \leq \|\Gamma\|$ follows.

In analogous manner connect with the bilinear operator $DA(0)\lambda = R(\cdot, \lambda) \in L\{E_1 \rightarrow E_2\}$ the operator D_s acting from $L\{\otimes_{s-1} \Lambda \rightarrow E_1\}$ into $L\{\otimes_s \Lambda \rightarrow E_2\}$ according to the rule $D_s S \lambda = R(S\lambda, \lambda)$, for $S \in L\{\otimes_{s-1} \Lambda \rightarrow E_1\}$. Note here, that $D_0 : E_1 \rightarrow L\{\Lambda \rightarrow E_2\}$. Obviously $\|D_s\| \leq \|R\|$ is. The usage of the introduced designations implies the following formulae for Jordan chain elements

$$J^{s+1} = (\Gamma_s D_{s-1}) \dots (\Gamma_1 D_0) \varphi \quad s = 1, 2, \dots, J^1 = \varphi.$$

The estimate $\|J^{s+1}\| \leq (\|R\|\|\Gamma\|)^s\|\varphi\|$ gives the convergence of the series $h(\lambda)$ in some neighborhood of $\lambda = 0$.

N e c e s s i t y. Let in some neighborhood of $\lambda = 0$ the operator-function $A(\lambda)$ be irreversible, i. e. there exists a function $X(\lambda) : D_\varepsilon(0) \rightarrow E_1$ such that $A(\lambda)X(\lambda) = 0$, $X(\lambda) \neq 0$, $\|X(\lambda)\| = 1$ or at the usage of accepted designations $A_0X(\lambda) + R(X(\lambda), \lambda) = 0 \Rightarrow \tilde{A}_0X(\lambda) + R(X(\lambda), \lambda) = \langle X(\lambda), e_1^* \rangle u_1 \Rightarrow [I + \Gamma R(\cdot, \lambda)]X(\lambda) = \langle X(\lambda), e_1^* \rangle e_1 \Rightarrow X(\lambda) = \langle X(\lambda), e_1^* \rangle (I + \Gamma R(\cdot, \lambda))^{-1} e_1$, since $\Gamma = (\tilde{A}_0)^{-1}$ exists, $\Gamma u_1 = e_1$ and λ is sufficiently small. Then $\langle X(\lambda), e_1^* \rangle \neq 0$ at $\|X(\lambda)\| = 1$, and at the application of the functional e_1^* one has $1 = \langle [I + \Gamma R(\cdot, \lambda)]^{-1} e_1, e_1^* \rangle \Rightarrow \langle \Gamma R(e_1, \lambda), e_1^* \rangle - \langle \Gamma R(\Gamma R(e_1, \lambda), \lambda), e_1^* \rangle + \dots = 0$. Its realization for all sufficiently smooth λ at the usage of the relation $\Gamma^* e_1^* = u_1^*$ gives

$$\langle R(e_1, \lambda), u_1^* \rangle = 0, \quad \langle R(\Gamma R(e_1, \lambda), \lambda), u_1^* \rangle = 0, \quad \dots, \quad \langle R(\dots(\Gamma R(e_1, \lambda)), \dots, \lambda), u_1^* \rangle = 0, \dots \quad (2.3)$$

From the first equality (2.3) follows that the operator $D_0\varphi$ (in this case $D_0\varphi = R(e_1, \cdot)$) is orthogonal to operators $\Psi_i = \xi_i \otimes u_1^*, i = 1, \dots, k$, since according to (2.3) $(R(e_1, \cdot) = \sum r_{\sigma\rho} \xi_\sigma^* \otimes u_\rho, \rho > 1$. Thus the conditions for the existence of the element J^2 are realized. Analogously the relation $\langle R(\dots(\Gamma R(e_1, \lambda)), \dots, \lambda), u_1^* \rangle = 0$ means, that the polylinear function $R(\dots(\Gamma R(e_1, \lambda)), \dots, \lambda)$ is equal to $\sum r_{\sigma_1, \dots, \sigma_s, \rho} \xi_{\sigma_1}^* \otimes \dots \otimes \xi_{\sigma_s}^* \otimes u_\rho, \rho > 1$ and therefore is orthogonal to all $\Psi_{\sigma_1, \dots, \sigma_s, 1} = \xi_{\sigma_1} \otimes \dots \otimes \xi_{\sigma_s} \otimes u_1$. Thus the conditions for the existence of any elements J^{s+1} are fulfilled.

L e m m a 2..3 *If $\lambda = 0$ is a simple eigenvalue of the operator-function (1.2), i.e. if Jordan chain consists of only one element φ , then in a small neighborhood of $\lambda = 0$ the operator-function is invertible everywhere with the exception of an hypersurface passing through the zero.*

P r o o f. It is required to search for which λ there exists a solution of the equation $0 = \langle R(e_1, \lambda), u_1^* \rangle - \langle R(\Gamma R(e_1, \lambda), \lambda), u_1^* \rangle + \dots$. According to assumption $\langle R(e_1, \cdot), \Psi_i \rangle \neq 0$, i.e. for one of the numbers i $\langle R(e_1, \xi_{i0}), u_1^* \rangle \neq 0$. Then according to implicit functions theorem nonzero solutions of this equation exist only on some hypersurface M , passing through the zero.

Below the operator-function $A_0^*x + R^*(x, \lambda)$ is considered, where under $R^*(x, \lambda)$ is understood the conjugate to $R(\cdot, \lambda)$ matrix with regard to the action $R(y, \lambda) = R(\lambda)y$.

L e m m a 2..4 *If the operator-function $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$ has in zero simple eigenvalue, then the operator-function $A^*(\lambda) = A_0^* + R^*(\cdot, \lambda)$ also has in zero simple eigenvalue. It is non-invertible on the same hypersurface that $A(\lambda)$ is. Zero-element of $A^*(\lambda)$ is determined by the formula $\Psi(y) = (I + \Gamma^* R^*(\cdot, \lambda))^{-1} u_1^*$.*

P r o o f. If the operator-function $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$ has in zero the simple eigenvalue, then $\langle \langle R(e_1, \cdot), \Psi_i \rangle \rangle \neq 0$ for some $\Psi_i = \xi_i \otimes \psi$. Here $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ means the action of functional from $L\{\Lambda \rightarrow E_2\}^*$ on element from $L\{\Lambda \rightarrow E_2\}$. For the existence of such element Ψ_i it is necessary and sufficient the existence of the element ξ_i , such that $\langle R(\xi_i)e_1, \psi \rangle \neq 0$. In fact, $R(e_1, \lambda) \in L\{\Lambda \rightarrow E_2\}$ and therefore $R(e_1, \lambda) = \sum r_{\sigma i} \xi_\sigma^* \otimes u_i$. By virtue of the inequality $\langle \langle R(e_1, \cdot), \Psi_i \rangle \rangle \neq 0$ it follows $r_{i1} \neq 0$. Consequently $R(\xi_i)e_1 = r_{i1}u_1 + \dots + r_{in}u_n$ and therefore $\langle R(\xi_i)e_1, \psi \rangle \neq 0$. Opposite to inverse $\langle \langle R(e_1, \cdot), \Psi_i \rangle \rangle = 0, \forall \Psi_i \Rightarrow r_{i1} = 0, \forall i \Rightarrow \langle R(\xi_i)e_1, \psi \rangle = 0 \forall i$. Analogously the statement is true : $\langle \langle \Phi_i, R^*(u_1^*, \cdot) \rangle \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \exists \xi_i$, such that $\langle e_1, R^*(\xi_i)\psi \rangle \neq 0$. In fact, since $\langle R(\xi_i)e_1, \psi \rangle = \langle e_1, R^*(\xi_i)\psi \rangle$, then if $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$ has zero as simple eigenvalue, the conjugate operator-function also has zero as simple eigenvalue. The determinants

of matrices $R(\lambda)$ and $R^*(\lambda)$ are coincident, therefore the degeneration manifolds for there operator-functions are also coincident. Zero-element for the operator-function $A_i^* + R^*(\cdot, \lambda)$ is determined similarly the same scheme, as it was made in Lemma 2.3 for $A_0 + R(\cdot, \lambda)$.

3. Jordan chains along directions.

For every point $0 \neq \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda$ let $e_\lambda = \frac{\lambda}{\|\lambda\|}$ be the unit vector in the direction of λ . Then the restriction of operator-function $A(\cdot, \lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$ on the straight line $\lambda = \varepsilon e_\lambda$ depends now only on one-dimensional parameter ε : $A_\lambda(x, \varepsilon) = [A_0 + \varepsilon R(\cdot, e_\lambda)]x$. At the assumption $R(\cdot, e_\lambda) \neq 0$ one can define JChs of the operator-function $A_\lambda(x, \varepsilon)$, which are called JChs of the operator-function $A(x, \lambda)$ along the direction λ . The relevant length of the JCh of $A_\lambda(x, \varepsilon)$ is designated $p(\lambda)$.

L e m m a 3.1 *Let p be the length of the JCh of the multiparameter operator-function $A(x, \lambda)$. Then for any direction λ $p \leq p(\lambda)$ and for almost all directions λ with the exception of an algebraic set $p = p(\lambda)$.*

P r o o f. Elements of JCh on the direction λ are determined by the formula

$$\varphi^{(s+1)}(\lambda) = \Gamma R(\dots(\Gamma R(\varphi, \lambda), \lambda)) \quad s - \text{superpositions} \quad (3.1)$$

If $s \leq p$, where p is the length of JCh of the operator-function $A_0 + R(\cdot, \lambda)$, then $\langle R(\dots(\Gamma R(\varphi, \lambda), \lambda)), \Psi \rangle = 0$, otherwise the formulae of the type (2.2) are not take place. Therefore for $s \leq p$ all Jordan chain elements in the direction λ are determined. Directions λ^0 for which the JCh lengthes are exceeding p are determined by the equation (3.1) at $s = p + 1$.

D e f i n i t i o n 3.1 *The directions λ^0 along which $p(\lambda^0) > p$ are called singular, all other ones are nonsingular. Singular direction, along which the operator-function $A_0 + \varepsilon R(\cdot, \lambda^0)$ is non-invertible is called degenerated.*

R e m a r k 3.1 *Let be $p < \infty$. According to theorem 30.1 [1] on the set of all non-singular directions λ^0 the operator-function $A_0 + R(\cdot, \lambda^0)$ is invertible in the ball $0 < |\varepsilon| < \rho(\lambda^0)$ for some $\rho(\lambda^0)$.*

R e m a r k 3.2 *The following example shows that $\rho(\lambda)$ can't be chosen independent on λ .*

$$A(\lambda)x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \det A(\lambda) = \lambda_1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2$$

$A(\lambda)$ is non-invertible on the curve $(\lambda_1 - \frac{1}{2})^2 + \lambda_2 = \frac{1}{4}$. Here any direction $\lambda^0 \neq (0, 1)$, except the horizontal ones, is nonsingular and $\rho(\lambda^0)$ is equal to the distance between zero and the intersection point of the direction λ^0 with the curve $\lambda_1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 0$. Obviously, that $\rho(\lambda_0) \rightarrow 0$ for $\lambda_0 \rightarrow 0$. Along singular direction $(0, 1)$ $A(\lambda)$ is invertible everywhere except $\lambda = 0$.

R e m a r k 3.3 *If along some direction λ^0 $A(\lambda)$ has a maximal JCh, then along this direction it is invertible everywhere except $\lambda = 0$.*

Its validity follows from the fact, that in the pair of bases $\{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(n)}\}$ and $\{R(\varphi^{(1)}, \lambda^0), R(\varphi^{(2)}, \lambda^0), \dots, R(\varphi^{(n)}, \lambda^0)\}$ the matrix $A(\lambda)$ along this direction λ^0 has the form

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

C o n s e q u e n c e 3..1 *The length of JCh is either equal to infinity, or not exceeded the space dimension.*

L e m m a 3..2 *If for the operator-function $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$ the length of JCh is p , then for any sufficiently small value $\lambda \neq 0$, for which the direction $\lambda^0 = \frac{\lambda}{\|\lambda\|}$ is non-degenerate, the images of the JCh elements in the point λ are linearly independent.*

P r o o f. From the Proof of Lemma 2.2 it follows that JChs of $A(\lambda) = A_0 + R(\cdot, \lambda)$ are determined by the formula $J^{s+1}(\lambda) = \Gamma_s R(\dots \Gamma R(\varphi, \lambda), \dots \lambda)$, while the chains along the direction λ^0 are computed according to (3.1) in Lemma 3.1. Hence $\varphi^{(s+1)}(\lambda^0) = J^{s+1}(\lambda^0)$. If the direction λ^0 is non-degenerate, then the JCh elements $\varphi^{(s)}(\lambda)$ are linearly independent. But then the elements $J^s(\lambda)$ are also linearly independent, since they are different from $\varphi^{(s)}(\lambda)$ only by non-zero scalar factor.

R e m a r k 3..4 *The following example shows that the images of JCh elements in the point λ^0 can be linearly dependent although the direction λ^0 is degenerated.*

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

This operator-function has JCh consisting of two elements $J^1 = \varphi = (1, 0, 0)^T$ and $J^2(\lambda) = (0, \lambda_1, 0)^T$. Further this chain is non-prolongated, since $R(J^2(\lambda), \lambda) = (\lambda_1^2, \lambda_1 \lambda_2, 0)^T$ and therefore if $\Psi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \psi$, then $\langle R(J^2(\lambda), \lambda), \Psi \rangle \neq 0$. However on the straight line corresponding to degenerate direction $(0, 1)$ (or $(0, 1, 0)$ if $\dim \Lambda = 3$) the images of JCh elements are linearly dependent since there $J^2(\lambda) = 0$.

L e m m a 3..3 *If for $n \leq k$ and for $A_0 + R(\cdot, \lambda)$ the length of JCh is $p > 1$, then always there exists the direction λ^0 along which $A_0 + \varepsilon R(\cdot, \lambda^0)$ is degenerated.*

P r o o f. Consider the operator-functions corresponding to basic directions $A_i(x) = A_0 x + \varepsilon R(x, \xi_i)$, $i = \overline{1, k}$. According to assumption the length of Jordan chain for every of them is more than 1, i.e. $\langle R(e_1, \xi_i), \Psi \rangle = 0$, $i = 1, \dots, k$. Thus, k vectors $R(e_1, \xi_i)_{i=1}^k$ belong to $(n-1)$ -dimensional space $Im A_0$ and therefore are linearly dependent. This means the existence of the numbers $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, such that $\lambda_1 R(e_1, \xi_1) + \dots + \lambda_k R(e_1, \xi_k) = 0 \Rightarrow R(e_1, \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k) = 0$. Hence it follows, that along the direction $\lambda^* = \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k$ $A(\lambda^*) = A_0 + R(\cdot, \lambda^*)$ is degenerated.

R e m a r k 3..5 *When $n > k$ the degenerate direction λ^0 can be not existed that shows the following example*

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

JCh for this $A(\lambda)$ consists of two elements $(1, 0, 0)$ and $(0, \lambda_1, \lambda_2)$. Obviously that the square vector-function $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2, 0, 0)$ satisfied one of two conditions $\lambda_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \neq 0$ or $\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \neq 0$ and along direction $(1, 0)$ and $(0, 1)$ $A(\lambda)$ is not degenerated, since

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\lambda_1^2 \neq 0 \text{ and } \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\lambda_2^2 \neq 0$$

and for "intermediate" direction $(1, a)$ $\det \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon a \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon a & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\varepsilon^2 - \varepsilon^2 a^2 \neq 0$. Thus, $A(\lambda)$ hasn't degenerate directions.

Remark 3.6 However for more complicated, nonlinear $A(\lambda)$ by λ Lemma 6 is not realized, as the following example shows

$$A(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda_1^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

It hasn't degenerate direction, since $\det A(\lambda) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ for $\lambda \neq 0$.

Remark 3.7 The following example shows, that when $A(\lambda)$ (1) has at zero simple eigenvalue, degenerate direction for it can be existed

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$R(e_1, \lambda) = \xi_1^* \otimes u_1 \Rightarrow \langle R(e_1, \cdot), \Psi_1 \rangle = \langle R(e_1, \cdot), \xi_1 \otimes \psi \rangle = 1$$

i.e. $p = 1$, while the direction $(0, 1)$ is degenerate.

4. Degenerate differential equations.

In this section the results of sec. 2.3 are applied to the questions on the existence and uniqueness of solutions to degenerate DE

$$[A_0 + R(\cdot, x)]x' = Bx \quad (4.1)$$

Suppose that $A_0 + R(\cdot, x)$ has in zero the simple eigenvalue, i.e. JCh consists of only one zero-element. According to Lemma 2.3 in a neighborhood of $x = 0$ there exists the hypersurface M , on which $A_0 + R(\cdot, x)$ is degenerated, i.e. it has zero-element $\Phi(x) = [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1$ satisfying the condition $\langle \Phi(x), e_1^* \rangle = 1$. The hypersurface M is determined by the equation $\langle R(\cdot, x)(I + \Gamma R(\cdot, x))^{-1} e_1, e_1^* \rangle = 0$ and tangent space to it in the point $x = 0$ – by the equation

$$x_1 \langle R(e_1, e_1), \Psi \rangle + \dots + x_n \langle R(e_1, e_n), \Psi \rangle = 0$$

Outside of M Cauchy problem for (4.1) has a unique solution, while on M the system (4.1) can have no solution nowhere (except the point $x = 0$), can have solutions everywhere on M or only on some sub-manifold $M_1 \subset M$, as it simple examples show.

Consider the following equations of the type (4.1):

1°. $\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Here the hypersurface M is determined by the equation $x_1 = 0$, the relevant system on M takes the form $x'_2 = x_2$. Thus through any point on M passes the solution lying on M .

2°. $\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Here M the same, $x_1 = 0$, but the system on it is the following $x_2 = 0$, $x'_2 = 0$. On M it's solution there exist only in the point $(0, 0)$.

3°. $\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. The hypersurface M is determined by the equation $x_1 = 0$ and the system on it has the form $x_1 = 0$, $x'_2 = x_2$, $x_3 = 0$. This means that on M the solutions there exist only in the straight line $(0, x_2, 0)$.

Definition 4.1 *JCh of $A_0 + R(\cdot, x)$ is breaking along the principal direction e_1 , if $\langle R(e_1, e_1), \Psi \rangle \neq 0$.*

Definition 4.2 *The operator-function $A_0 + R(\cdot, x)$ is non-degenerate along hypersurface M , if it hasn't zeroes on tangent stratification to M .*

Lemma 4.1 *If for the operator-function $A(x) = A_0 + R(\cdot, x)$ the JCh is breaking along the principal direction, then $A(x)$ is non-degenerate along hypersurface M in a neighborhood of the point zero.*

Proof. Operator-function $A(x) = A_0x + \varepsilon R(\cdot, x)$ has zero-element e_1 in the point $x = 0$ and tangent subspace to M has the normal $(\langle R(e_1, e_1), \Psi \rangle, \dots, \langle R(e_1, e_n), \Psi \rangle)$. Thus in sufficiently small neighborhood of the point $x = 0$ this zero-element of $A(x)$ will not belong to the tangent space to M , i.e. $A(x)$ is not-degenerated along M .

However the following example shows, that if the JCh of $A(x)$ is breaking along non-principal direction $\langle R(e_1, e_1), \Psi \rangle = 0$, then $A(x)$ can be degenerated along hypersurface $M: A(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Here M is determined by the equation $x_2 = 0$ and zero-element e_1 belongs to tangent space to M in any point of the neighborhood $x = 0$.

A. Solutions of (4.1) belonging to the hypersurface M .

Theorem 4.1. *Let zero be simple eigenvalue of $A(x)$ and its JCh be breaking along principal direction. If in addition $Bx \in \text{Im}A(x)$ for any $x \in M$, then through any point of a neighborhood of $x = 0$ on M passes the unique solution to (4.1) belonging to M .*

Proof. If for the operator-function $A(x) = A_0x + \varepsilon R(\cdot, x)$ JCh is breaking along principal direction, then in a neighbourhood of $x = 0$ the equation of the hypersurface M can be presented in the form $x_1 = F(x_2, \dots, x_n)$, i.e. in coordinate form M takes the form $(F(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$. Therefore the equation (4.1) can be rewritten then as the following system

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}}_{(*)} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_2 \\ x'_3 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}(x) & \dots & b_{1n}(x) \\ b_{21}(x) & \dots & b_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(x) & \dots & b_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(x) \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

For efficiently small x the mapping $(*)$ defined by the left-hand-side of the systems (4.2) hasn't zeroes, since the expression $(**)(\equiv \text{left-side-hand without the first matrix})$ represents the tangent vector to hypersurface M in the point x , while the operator-function $A(x)$ is not vanished on tangent stratification TM. Therefore the mapping $(*)$ for any sufficiently small

x bijectively maps the tangent manifold to $n - 1$ -dimensional subspace $(x_2, \dots, x_n)$ on the image of the operator $A(x)$, also having the dimension $(n - 1)$. Introduction of the relevant inverse operator $T(x)$ gives the system
$$\begin{pmatrix} x'_2 \\ x'_3 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = T(x) \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(x) \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$
 which is equivalent to system (4.1) on M and has the unique solution, passing through every point of the zero-neighborhood in the space $(x_2, \dots, x_n)$.

R e m a r k 4.1 *In the case when JCh of the operator-function $A(x)$ is breaking along non-principal direction system (4.1) on the hypersurface M can have solutions nowhere except the point $x = 0$. For example the system $\begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, equivalent to $x_2 x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$ on the hypersurface M defined by equation $x_2 = 0$ gives the solution $(0, 0)$. However the other case is possible, when the solution, even non-unique, passes through any point of M : the system $\begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \sim x_2 x'_1 = x_2$, $x'_2 = x_2$ for any differentiable function $f(t)$, $f(0) = 0$ has the lying in M solution $(x_1^0 + f(t), 0)$ passing through any point $(x_1^0, 0) \in M$.*

For the case when JCh of operator-function $A(x)$ is breaking along non-principal direction the following analog of the Theorem 4.1 is true.

T h e o r e m 4.2. *Let $A(x)$ has in zero simple eigenvalue and also its JCh is breaking along non-principal direction, but nevertheless $A(x)$ is non-degenerate along the hypersurface M in some deleted neighborhood of zero. If in addition $Bx \in \text{Im}A(x)$ for any $x \in M$, then through any point of this neighborhood in M passes the unique solution (4.1) belonging to M .*

The proof of the Theorem 4.2 is practically the same as the Theorem 4.2.

In the following example $\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, M is determined by the equation $x_2 = x_1^2$ and in a deleted neighborhood of zero on M the operator-function $A(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix}$ has the zero-element $(-1, x_2)$, not belonging to tangent subspace to M in the point (x_1, x_1^2) . This system on the hypersurface M takes the form $\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, and when $x_1 \neq 0$ the obtained equation $(x_1 + 2)x'_1 = x_1$ is uniquely solvable.

T h e o r e m 4.3. *Let the operator-function $A(x)$ has in zero simple eigenvalue and its JCh is breaking along non-principal direction. Let in addition in some neighborhood of $x = 0$ the zero-element $\Phi(x)$ of $A(x)$ belongs to tangent stratification TM . If also for any $x \in M$, $Bx \in \text{Im}(A(x)|_{TM(x)})$, then in this neighborhood of $x = 0$ there exists $(n - 2)$ -dimensional submanifold N of the hypersurface M on which the equation (4.1) is uniquely solvable.*

P r o o f. Without loss of generality it can be considered the case, when JCh of $A(x) = A_0 + R(\cdot, x)$ is breaking along the direction x_n . Then in a zero-neighborhood the equation of the hypersurface M can be represented in the form $x_n = F(x_1, \dots, x_{n-1})$ or in coordinate form $(x_1, \dots, x_{n-1}, F(x_1, \dots, x_{n-1}))$. In some small neighbourhood of $x = 0$ define the submanifold N of the hypersurface M

$$N = \{x | x = (0, x_2, \dots, x_{n-1}, F(0, x_2, \dots, x_{n-1}))\} \quad (4.3)$$

Rewrite the system (4.1) in the following form

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}}_{(*)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}(x) & \dots & b_{1n}(x) \\ b_{21}(x) & \dots & b_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(x) & \dots & b_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \dots \\ F(x) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Since the vectors in the left-hand-side have the form $(0, x'_2, \dots, x'_{n-1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}x'_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}x'_{n-1})$ for small x , the zero-elements of operator-function $A(x)$ can't belong to TN as they are small different from e_1 and their first coordinate is nonzero. Therefore $A(x)$ bijectively maps $TN(x)$ on $Im(A(x)|_{TM(x)})$, both spaces are $(n-2)$ -dimensional. Since $Bx \in Im(A(x)|_{TM(x)}) \quad \forall x \in M$ the introduction of the inverse operator gives the uniquely solvable system $(x'_2, \dots, x'_{n-1})^T = T(x)\tilde{b}(x_2, x_2, \dots, F(x))$, where in the matrix $\tilde{b}$ the first line consists of zeros.

R e m a r k 4.2 *The following example shows that the condition $Bx \in Im(A(x)|_{TM(x)})$ can't be changed on the condition of Theorem 4.1 :* $\begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
The hypersurface M here is defined by the equation $x_2 = 0$, the system on it has solution $x_1 = 0, x_3 = 0$.

R e m a r k 4.3 *Proofs of the Theorem 1-3 are transferred without changes on the systems of the form $(A_0 + R(\cdot, x))x' = H(x)$, where $H(x)$ is smooth nonlinear function.*

B. Solutions of the equation (4.1) not belonging to degeneration hypersurface M .
 The following example shows that solutions of (4.1) beginning on the hypersurface M can "leave" it. Here the uniqueness of solution with a given initial point can be broken :

$$diag(x_1, 1, 1)(x'_1, x'_2, x'_3)^T = diag(1, 1, 1)(x_1, x_2, x_3)^T \sim x_1x'_1 = x_1, x'_2 = x_2, x'_3 = x_3 \quad (4.5)$$

Hypersurface M is determined by the equation $x_1 = 0$. Through any point $(0, x_2^0, x_3^0) \in M$ pass two solutions $(0, x_2^0 expt, x_3^0 expt)$ belonging to M and $(t, x_2^0 expt, x_3^0 expt)$ not belonging to M .

For the operator-function $A(x)$ having in zero simple eigenvalue with JCh breaking along non-principal direction also can exist solutions not belonging to degeneration hypersurface M : the system $(x_2x'_1, x'_2, x'_3)^T = (0, 1, 0)^T$ has the solution $(0, t, 0)$, orthogonal to hypersurface $(x_1, 0, x_3)$.

P r o b l e m: under the Theorem 1.1 conditions it is required to find the equations determining solutions beginning on the degeneration manifold M and not belonging to M .

Rewrite the equation (4.1) in the form

$$[\widetilde{A_0} + R(\cdot, x)]x' = Bx + \langle x', e_1^* u_1 \rangle \Rightarrow x' = [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx + \langle x', e_1^* \rangle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1 \quad (4.6)$$

Note that if $x \in M$, then according to Lemma 2.3 $\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_1^* \rangle = 1$; unless $x \notin M$, then this inequality can be not fulfilled. In $x = 0$ -neighborhood together with every point $x = (x_1, \dots, x_n)$ associate the point $x^F = (F(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$ lying on the degeneration manifold M . Obviously that $x = x^F + (x_1 - x_1^F)e_1$. Write the equation (4.6) in coordinate form

$$\begin{aligned} x'_1 &= \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_1^* \rangle + x'_1 \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_1^* \rangle \\ &\dots \dots \dots \\ x'_n &= \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_n^* \rangle + x'_1 \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_n^* \rangle \end{aligned} \quad (4.7)$$

From the first equation (4.7) it follows

$$x'_1 = (1 - \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e^* \rangle) = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e^*_1 \rangle \quad (4.8)$$

The left-hand-side (4.8) can be transformed by the following way

$$\begin{aligned} x'_1 (I - \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e^*_1 \rangle) &= \\ &= x'_1 (\langle [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} e_1, e^*_1 \rangle) - \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e^*_1 \rangle = \\ &= x'_1 (\langle [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} e_1 - [I + \Gamma R(\cdot, x^F + (x_1 - x^F_1) e_1)]^{-1} e_1, e^*_1 \rangle) = \\ &= x'_1 (\langle (I - \{I + (x_1 - x^F_1)[I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_1)\}^{-1}) [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} e_1, e^*_1 \rangle) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Since $I - \{I + (x_1 - x^F_1)[I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_1)\}^{-1} = (x_1 - x^F_1)[I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_1)\{I + (x_1 - x^F_1)[I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_1)\}^{-1}$, then the left-hand-side of this equality reduces to the form $\langle x', e^*_1 \rangle (x_1 - x^F_1) a(x)$, where the function $a(x)$ for small x is near to the expression $\langle \Gamma R(e_1, e^*_1), e^*_1 \rangle = 1$.

Consider now the right-hand-side of (4.8). Note that

$$\langle [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma Bx^F, e^*_1 \rangle = 0. \quad (4.10)$$

In fact, $\langle Bx^F, ([I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma)^* e^*_1 \rangle = \langle Bx^F, \Psi(x^F) \rangle = 0$, according to the equality $([I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma)^* = \Gamma^* [I + R^*(\cdot, x^F) \Gamma^*]^{-1} = [I + \Gamma^* R^*(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma^*$ and by virtue of Theorem 1.1 conditions (see also Lemma 2.4).

At the usage of the last equality the right-hand-side of (4.8) can be written in the following form :

$$\begin{aligned} &\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx - [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma Bx^F, e^*_1 \rangle = \\ &= \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx^F - [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma Bx^F, e^*_1 \rangle + \\ &+ (x_1 - x^F_1) \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma B e_1, e^*_1 \rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

At last, $[I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} - [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} = [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \{I + \Gamma R(\cdot, x^F) - I - \Gamma R(\cdot, x)\} [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} = (x_1 - x^F_1) [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_1) [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1}$. Thus all terms of equality (4.8) have the cofactor $(x_1 - x^F_1)$. The system (4.7) is splitting on two ones. The first system as the first equation will have $x_1 = x^F_1$, whence correspondingly

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{\partial F}{\partial x_2} x'_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} x'_{n-1} \\ x'_2 &= \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e^*_2 \rangle + x'_1 \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e^*_2 \rangle \\ &\dots \dots \dots \\ x'_n &= \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e^*_n \rangle + x'_1 \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e^*_n \rangle \end{aligned} \quad (4.12)$$

Solution of this system are belonging to the degeneration manifold M . The second system has the form

$$\begin{aligned} a(x) x'_1 &= \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_1) [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma Bx^F, e^*_1 \rangle + \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma B e_1, e^*_1 \rangle \\ x'_2 &= \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e^*_2 \rangle + x'_1 \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e^*_2 \rangle \\ &\dots \dots \dots \\ x'_n &= \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e^*_n \rangle + x'_1 \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e^*_n \rangle \end{aligned} \quad (4.13)$$

and its solutions can be non-belonging to the manifold M .

R e m a r k 4.4 Can be happen that solutions of the second system also belong to the manifold M ; the system $\text{diag}(x_1, 1, 1)(x'_1, x'_2, x'_3)^T = 0 \sim x_1 x'_1 = 0, x'_2 = 0, x'_3 = 0$ has as solutions beginning on M (it is the plane $((x_2, x_3))$ only fixed points of this hypersurface.

Theorem 4.4. *Let the operator-function $A(x)$ has in zero simple eigenvalue with JCh breaking along principal direction. If to the same $Bx \in Im(A(x))$ for any $x \in M$ and $\langle \Gamma B e_1, e_1^* \rangle \neq 0$, then through any point of the $x = 0$ -neighbourhood in M passes the unique solution to (4.1), not belonging to M .*

In order that the solution of the second system beginning on the hypersurface M leaves the hypersurface M it is sufficient, that in some point of M the tangent vector to this solution should not belong to tangent plane to M , which is determined by the formula

$$x_1 - x_1^F = \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_2 - x_2^F) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_n - x_n^F) \quad (4.14)$$

Obviously that at $x^F = 0$, $x'_1 = \langle \Gamma B e_1, e_1^* \rangle$, $x'_2 = 0, \dots, x'_n = 0$. Thus, if $\langle \Gamma B e_1, e_1^* \rangle \neq 0$, then the tangent vector to solution does not belong to the tangent plane to the hypersurface M . By virtue of the continuity the same is true for x^F near to zero.

For the points x^F belonging to the hypersurface M denote via N_x the normal to M in them. N_x can be considered as an element of E_1^* vanishing on the subspace $TM(x)$.

Theorem 4.5. *Let the conditions of Theorem 4.3 be fulfilled and normal N_x to M be the eigenvector of the operator $A^*(x)\Gamma^*$ (i.e. $A^*(x)\Gamma^*N_x = \lambda(x)N_x$), then the solutions beginning on the hypersurface M are remaining on it.*

Proof. Repeat the computations preceeding to Theorem 4.4, but with the difference that the hypersurface M is determined by the equation $x_n = F(x_1, \dots, x_{n-1})$. Therefore to every point x , near to zero, associate the point $x^F = (x_1, x_2, \dots, F(x_1, \dots, x_{n-1}))$ lying on the degeneration manifold M , so that $x = x^F + (x_n - x_n^F)e_n$. As earlier, transform the equation (4.8). The left-hand-side of this equality reduces to the form $\langle x'_1, e_1^* \rangle (x_n - x_n^F) b(x)$, where the function $b(x) = \langle [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_n) [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_1^* \rangle$ is near to $\langle \Gamma, R(e_1, e_n), e_1^* \rangle = 1$ for small x . In analogous way the right-hand-side of the equation (4.8) is reducing to the form $(x_n - x_n^F)(\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma B e_n, e_1^* \rangle + \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_n) [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma B x^F, e_1^* \rangle)$. Thus as in the case of Theorem 4.4 the system (4.7) is splitting on two ones. In the first system the first equation takes the form $x_n = x_n^F$ and therefore all its solutions, if they exist, belong to the hypersurface M .

Write the second system

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{1}{b(x)} (\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma B e_n, e_1^* \rangle + \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_n) [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma B x^F, e_1^* \rangle) \\ x'_2 &= \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma B x, e_2^* \rangle + x'_1 \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_2^* \rangle \\ &\dots \dots \dots \\ x'_n &= \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma B x, e_n^* \rangle + x'_1 \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_n^* \rangle \end{aligned} \quad (4.15)$$

Designation $G(x) = \frac{1}{b(x)} (\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma B e_n, e_1^* \rangle + \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma R(\cdot, e_n) [I + \Gamma R(\cdot, x^F)]^{-1} \Gamma B x^F, e_1^* \rangle)$, gives the system

$$\begin{aligned} x'_1 &= G(x) \\ x'_2 &= \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma B x, e_2^* \rangle + G(x) \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_2^* \rangle \\ &\dots \dots \dots \\ x'_n &= \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma B x, e_n^* \rangle + G(x) \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_n^* \rangle \end{aligned} \quad (4.16)$$

It must be shown that the right-hand-side of this system in the points M is belonging to the tangent space to M , i.e. is orthogonal to the vector $N_x = (\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}, -1)$. At first show that the vector $G(x)(1, \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_2^* \rangle, \dots, \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_n^* \rangle)$

belongs to the tangent space to M , when $x \in M$. Since by virtue of Lemma 2.3 $\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} e_1, e_1^* \rangle = 1$, then this vector is proportional to $\Phi(x)$, which according to Theorem 4.3 conditions belongs to the tangent space to M . It remains to prove that the vector $(0, \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_2^* \rangle, \dots, \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_n^* \rangle)$ is orthogonal to N_x . According to (4.10) it can be rewritten in the form

$$(\langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_1^* \rangle), \dots, \langle [I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1} \Gamma Bx, e_n^* \rangle \quad (4.17)$$

Since for small x the operator $([I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1})^*$ is near to identity one, the functionals $([I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1})^* e_1, \dots, ([I + \Gamma R(\cdot, x)]^{-1})^* e_n$ form the base of the space E_1^* . Therefore (4.17) gives the coordinates of the vector ΓBx in some basis of the space E_1 . On the conditions of Theorem 4.3 $Bx \in \text{Im}(A(x)|_{TM(x)})$ when $x \in M$, i.e. can be set $Bx = A(x)\omega$, where $\omega \in TM(x)$. Then $\langle \Gamma Bx, N_x \rangle = \langle \Gamma A(x)\omega, N_x \rangle = \langle \omega, A^*(x)\Gamma^* N_x \rangle = \lambda(x)\langle \omega, N_x \rangle = 0$, i.e. the proof is finished.

R e m a r k 4.5 *Under the Theorem 4.3 conditions the solution uniqueness also can be broken, although all bifurcated solutions remain on the degeneration hypersurface M :*

$$\begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Here the submanifold N from the Theorem 4.3 is the x_3 -axis. But through every point of this submanifold passes a set of other solutions to this system lying on the hypersurface M . These are $(f(t), 0, x_3^0 \text{expt})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vainberg M. M. Trenogin V. A., *Branching theory of solutions to nonlinear equations*, Nauka, Moscow, 1964; Engl. transl., Wolter Noordorf, Leyden, 1974, 336 pp.

УДК 517.938

О существовании сепараторов магнитных полей в шаровом слое плазмы

© В. З. Гринес¹, Е. В. Жужома², В. С. Медведев³

Аннотация. В статье доказывается, что при выполнении определенных условий в шаровом слое плазмы существуют сепараторы магнитного поля.

Ключевые слова: магнитные поля, плазма, сепаратор, особые точки, шипы и веерные поверхности, диффеоморфизмы Морса-Смейла

1. Введение и формулировка основных результатов

Одной из важных задач геофизической динамики является изучение магнитных полей астрофизических тел (например, Солнца, Земли и т.п.). Общепринятая точка зрения (см. например [3], [4]) состоит в том, что возникновение достаточно сильных магнитных полей и их эволюция определяются процессами, связанными с наличием и движением электропроводящих сред (проводящей жидкости, газа, плазмы). Исследование взаимодействия между движущейся плазмой и магнитным полем составляет предмет магнитной гидродинамики (МГД), см., например, книги [7], [9] и обзор [11]. Согласно Ханнесу Альфвену [1], [12], базовым постулатом МГД является предположение о том, что силовые линии магнитного поля движутся так, как если бы они были "вморожены в плазму". При таком предположении возможны появления таких близких областей плазмы, что магнитные поля на их границах имеют различные направления. В данные моменты времени в магнитном поле могут появиться особенности (нули или нейтральные точки) и связанные с ними образования: шипы и веерные поверхности [10]. Топологическая структура магнитного поля определяется числом и типом особых точек, взаимным расположением шипов и веерных поверхностей, а также линиями трансверсального пересечения веерных поверхностей. Линии пересечения веерных поверхностей, отличные от замкнутых кривых, называются *сепараторами*. Таким образом, представляет интерес решение проблемы существования сепараторов и их количества при заданном расположении особенностей магнитного поля.

С точки зрения теории динамических систем движения плазмы разбиваются (с некоторой долей условности) на регулярные и хаотические. При этом можно рассматривать динамические системы как с дискретным временем (порожденные одним преобразованием), так и с непрерывным временем (однопараметрическое семейство преобразований). В настоящей статье рассматривается вопрос существования сепараторов магнитного поля в шаровом слое плазмы под действием регулярного движения, порожденного одним преобразованием. Для решения этого вопроса применяются методы качественной теории дискретных динамических систем. Несмотря на меняющееся в каждый момент времени магнитное поле (как под действием движения плазмы, так и в силу уравнений Максвелла),

¹ Профессор кафедры численного и функционального анализа, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru

² Профессор кафедры теории управления и динамики машин, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru

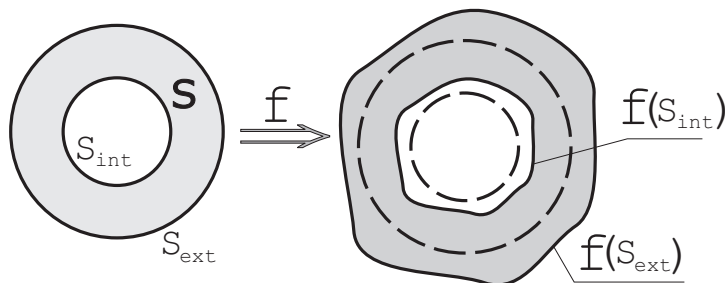
³ Старший научный сотрудник НИИ ПМК при Нижегородском государственном университете имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; medvedev@uic.nnov.ru

движение плазмы при сделанных ниже предположениях можно доопределить до диффеоморфизма Морса-Смейла и применить развитую ранее авторами технику (см. книгу [5] и обзор [6]).

Опишем цель и результаты статьи более детально. Под особыми точками магнитного поля обычно понимают точки в которых поле либо обращается в ноль, либо не существует, при этом в окрестности особой точки поле топологически эквивалентно линейному гиперболическому седлу. Двумерная инвариантная поверхность седловой точки называется веерной поверхностью (fun), а одномерная инвариантная кривая седловой точки называется шипом (spine) [9]⁴. Замкнутым шаровым слоем $\mathcal{S}$ называется множество, гомеоморфное произведению двумерной сферы на замкнутый промежуток $[-1; +1]$, то есть $\mathcal{S} = S^2 \times [-1; +1]$, где S^2 – двумерная сфера. Мы будем предполагать $\mathcal{S}$ вложенным в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Договоримся, что сфера $S^2 \times \{-1\} = S_{int}$, которая называется *внутренней*, ограничивает в $\mathbb{R}^3$ шар B^3 , не содержащий шаровой слой. Сферу $S^2 \times \{+1\} = S_{ext}$ назовем *внешней*. Будем считать, что в некоторый момент времени магнитное поле $\vec{B}_0$ имеет в шаровом слое особые точки. Заметим, что в силу гиперболичности, число особых точек конечно. Будем предполагать, что шипы и веерные поверхности либо не пересекают границу шарового слоя, либо пересекают ее трансверсально. Таким образом, компоненты пересечения шипов и веерных поверхностей со сферами S_{int} , S_{ext} суть точки и кривые (замкнутые, или незамкнутые).

В статье рассматривается регулярное движение плазмы, порожаемое преобразованием $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ таким, что его ограничение f_0 на $\mathcal{S}$ обладает следующими свойствами (см. рис. 1.1):

- $f_0 : \mathcal{S} \rightarrow f_0(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}^3$ является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом на свой образ, причем неблуждающее множество диффеоморфизма f_0 состоит из гиперболических седловых неподвижных точек и совпадает с множеством особых точек магнитного поля $\vec{B}_0$;
- $f_0(S_{int}) \subset \mathcal{S}$, $f_0(S_{ext}) \subset \mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{S} \cup B^3)$ так, что $f_0(S_{int})$ разбивает $\mathcal{S}$ на два шаровых кольца;
- веерные поверхности и шипы инвариантны относительно f_0 , трансверсальны друг другу и являются замыканиями сепаратрис неподвижных точек диффеоморфизма f_0 .



Р и с у н о к 1.1

Регулярное движение шарового слоя $\mathcal{S}$.

Отметим, что мы не требуем трансверсального пересечения силовых линий магнитного поля $\vec{B}_0$ со сферами S_{int} , S_{ext} . Поэтому веерные поверхности и шипы могут, вообще

⁴ Следует заметить, что инвариантные поверхности и кривые, о которых идет речь, являются идеализациями так называемых "тонких" токовых слоев.

говоря, пересекать S_{int} и S_{ext} по нескольким компонентам связности. Предложенная математическая модель с физической точки зрения означает, что мы рассматриваем регулярное движение плазменного шарового слоя в течение столь малого промежутка времени, в течение которого сохраняются особые точки с веерными поверхностями и шипами. Из приведенных свойств вытекает, что сепараторы (если они существуют) инвариантны относительно f_0 и их число (включая ноль) не меняется в течение наблюдаемого промежутка времени.

Сформулируем основные результаты статьи для таких магнитных полей и движений плазмы, которые удовлетворяют выше приведенным свойствам.

Т е о р е м а 1.1. *Предположим, что магнитное поле в $\mathcal{S}$ имеет особенности. Тогда их не меньше двух.*

Т е о р е м а 1.2. *Предположим, что магнитное поле на $\mathcal{S}$ имеет ровно две особенности. Тогда их веерные поверхности пересекаются по конечному ненулевому числу сепараторов.*

Благодарности. Авторы благодарят РФФИ (гранты 12-01-00672-а, 13-01-12452-афи-м) за финансовую поддержку. Особая благодарность Константину Витальевичу Кирсенко (бизнесмену и музыканту) за финансовую поддержку.

2. Доказательство основных результатов

Напомним некоторые понятия и факты, касающиеся диффеоморфизмов Морса-Смейла. Хорошим источником являются книги [5],[8], а также обзорные статьи [2], [15].

Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f будем обозначать через $NW(f)$. Для $x \in NW(f)$ обозначим через $W^s(x)$ (соотв. $W^u(x)$) устойчивое (соотв. неустойчивое) многообразие этой точки. Диффеоморфизм f называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество $NW(f)$ гиперболическое, состоит из конечного числа точек, и инвариантные многообразия $W^s(x)$, $W^u(y)$ пересекаются трансверсально (если пересечение не пусто) для любых точек $x, y \in NW(f)$. Диффеоморфизм f Морса-Смейла называется *градиентноподобным*, если для любых периодических точек $p, q \in NW(f)$ из $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$ следует, что $\dim W^s(p) < \dim W^s(q)$.

Точка $x \in M$ трансверсального пересечения инвариантных многообразий $W^s(p)$, $W^u(q)$, где $p, q \in NW(f)$, называется *гетероклинической*, если $\dim W^s(p) = \dim W^s(q)$. Диффеоморфизм Морса-Смейла является градиентноподобным диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда он не имеет гетероклинических точек.

Если $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$ и $\dim W^s(p) < \dim W^s(q)$, то компоненту связности пересечения $W^u(p) \cap W^s(q)$ назовем *гетероклиническим подмногообразием*. Если размерность многообразия равна 3, то любое гетероклиническое подмногообразие является либо простой замкнутой кривой (гомеоморфной окружности), либо незамкнутой кривой без самопересечений (гомеоморфной открытому интервалу). Мы будем называть такие кривые *гетероклиническими*.

Пусть p - периодическая точка диффеоморфизма Морса-Смейла f . *Индексом Морса* точки p называется топологическая размерность неустойчивого многообразия $W^u(p)$, $u(p) \stackrel{\text{def}}{=} \dim W^u(p)$. *Индексом Кронекера-Пуанкаре* точки p называется число $\text{ind}(p, f) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{u(p)}$.

Следующая лемма является ключевой для доказательства основных результатов. Обозначим через S^3 3-мерную сферу.

Л е м м а 2.1. *Существует вложение $\mathcal{S} \subset S^3$ и продолжение f_0 до полярного диффеоморфизма $f : S^3 \rightarrow S^3$ Морса-Смейла такого, что неблуждающее множество $NW(f)$ есть объединение источника, стока и неподвижных точек диффеоморфизма f_0 .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приклеим к граничным компонентам S_{int} , S_{ext} шарового слоя $\mathcal{S}$ шары B_{int}^3 , B_{ext}^3 соответственно. Тогда мы получим замкнутое многообразие, диффеоморфное 3-мерной сфере $S^3 = \mathcal{S} \cup B_{int}^3 \cup B_{ext}^3$, и естественное вложение $\mathcal{S} \subset S^3$. В силу свойств диффеоморфизма $f_0 : \mathcal{S} \rightarrow f_0(\mathcal{S})$, двумерная сфера S_{int} отображается внутрь шарового слоя. Поэтому f_0 можно продолжить на шар B_{int}^3 так, чтобы внутри B_{int}^3 появился гиперболический источник. Аналогично, f_0 можно продолжить на шар B_{ext}^3 так, чтобы внутри B_{ext}^3 появился гиперболический сток. Обозначим полученное продолжение диффеоморфизма f_0 через $f : S^3 \rightarrow S^3$. Ясно, что f_0 можно продолжить так, чтобы f являлся диффеоморфизмом, у которого неблуждающее множество получается из неблуждающего множества диффеоморфизма f_0 добавлением двух неподвижных точек.

Таким образом, диффеоморфизм f имеет конечное неблуждающее множество, состоящее из гиперболических неподвижных точек. По условию сепаратрисы седловых неподвижных точек пересекаются трансверсально. Следовательно, f является диффеоморфизмом Морса-Смейла. Так как f имеет только две узловые неподвижные точки, то f – полярный диффеоморфизм. $\square$

Доказательство теоремы 1.1..

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая лемму 2.1., достаточно показать, что диффеоморфизм $f : M^3 \rightarrow M^3$ Морса-Смейла не может иметь ровно три периодические точки на замкнутом трехмерном многообразии M^3 . Предположим противное. тогда неблуждающее множество содержит в точности одно седло, один сток и один источник. Следовательно, f не имеет гетероклинических кривых. В силу [14], для диффеоморфизма Морса-Смейла, не имеющего гетероклинических кривых, существует целое неотрицательное число m такое, что имеет место формула $l - k = 2 - 2m$, где l - число всех стоковых и источниковых периодических точек, и k - число всех седловых периодических точек. Поэтому для f должно выполняться равенство $1 = 2 - 2m$, которое невозможно ни при каком целом m . **Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

Доказательство теоремы 1.2..

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая лемму 2.1., мы далее будем рассматривать класс $MS_1(S^3, 4)$ диффеоморфизмов Морса-Смейла $S^3 \rightarrow S^3$ со следующим набором неподвижных точек: источник- α , сток - ω и два седла σ_1 , σ_2 . Покажем, что седла σ_1 , σ_2 имеют разный индекс Морса. Предположим противное. Тогда f не имеет гетероклинических кривых. В работе [14] доказано, что в этом случае $M^3 = S^3$ есть связная сумма $m \geq 1$ экземпляров $S^2 \times S^1$, что невозможно.

Далее будем считать, что неподвижные точки имеют следующие индексы Кронекера-Пуанкаре (соотв. Морса) $ind(\alpha, f) = -1$ ($u(\alpha) = 3$), $ind(\omega, f) = 1$ ($u(\omega) = 0$), $ind(\sigma_1, f) = -1$ ($u(\sigma_1) = 1$), $ind(\sigma_2, f) = 1$ ($u(\sigma_2) = 2$).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Покажем, что имеют место следующие включения:

$$W^u(\sigma_1) - \sigma_1 \subset W^s(\omega), \quad W^s(\sigma_2) - \sigma_2 \subset W^u(\alpha).$$

Поскольку f не может иметь гомоклинических точек, то $W^s(\sigma_i) \cap W^u(\sigma_i) = \emptyset$ ($i = 1, 2$). Так как f - структурно устойчивый диффеоморфизм, то $W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2) = \emptyset$, иначе бы в точках пересечения не выполнялось сильное условие трансверсальности. Отсюда вытекают требуемые включения, так как S^3 разбивается на попарно не пересекающиеся инвариантные многообразия, устойчивые или неустойчивые соответственно.

Доказательство закончено.

Следующая лемма доказана в [13]. Мы приводим ее для ссылок, оставляя читателю доказательство в качестве упражнения.

Лемма 2.2. *Имеет место вложение $W^s(\sigma) - \sigma \subset W^u(\alpha)$.*

Покажем теперь, что диффеоморфизм f не имеет гетероклинических точек, то есть является градиентноподобным. Поскольку $W^u(\sigma_1) - \sigma_1 \subset W^s(\omega)$ и $W^s(\sigma_2) - \sigma_2 \subset W^u(\alpha)$, то $W^u(\sigma_1)$ не пересекает $W^s(\sigma_2)$. Если же $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2) \neq \emptyset$, то выполняется неравенство $2 = \dim W^s(\sigma_1) > \dim W^u(\sigma_2) = 1$, что означает градиентноподобность.

Существует C^1 -иммерсия $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow W^u(\sigma_1)$, где $\varphi(0) = \sigma_1$, являющаяся взаимно однозначным отображением на свой образ. Если положить $\varphi(\pm\infty) = \omega$, то получаем, что иммерсия φ может быть продолжена до гомеоморфизма $\varphi : S^1 \cong \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow W^u(\sigma_1) \cup \{\sigma_1\}$, так как $W^u(\sigma_1) - \sigma_1 \subset W^s(\omega)$ и ω -предельное множество любой точки из множества $W^u(\sigma_1) - \sigma_1$ есть точка ω . Отсюда вытекает, что $C_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega\} \cup W^u(\sigma_1)$ является вложением окружности. Аналогично, $C_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha\} \cup W^s(\sigma_2)$ также является вложением окружности.

Теперь докажем, что $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ содержит хотя бы одну незамкнутую гетероклиническую кривую с концевыми точками σ_1, σ_2 . В устойчивом многообразии $W^s(\sigma_1)$ возьмем фундаментальную область F^s диффеоморфизма $f|_{W^s(\sigma_1) - \sigma_1}$. Так как точка σ_1 гиперболическая, то мы можем считать F^s замкнутым кольцом, ограниченным гладкими кривыми C_1 и C_2 , которые окружают точку σ_1 в $W^s(\sigma_1)$. Возьмем в F^s простую замкнутую кривую C , гомотопную C_1 и C_2 . Для удобства, разобьем дальнейшее доказательство на утверждения, которые мы будем обозначать как шаги. Конец доказательства каждого шага обозначим через $\diamond$.

Шаг 0 Для любой замкнутой кривой C , гомотопной кривым C_1 и C_2 , пересечение $C \cap W^u(\sigma_2)$ не пусто.

Доказательство шага 0. Предположим, что $C \cap W^u(\sigma_2) = \emptyset$. Тогда $C \subset W^u(\alpha)$, поскольку $S^3 - \omega$ есть объединение только трех попарно непересекающихся неустойчивых многообразий $W^u(\alpha)$, $W^u(\sigma_2)$ и $W^u(\sigma_1)$. В силу компактности $C_\omega = \{\omega\} \cup W^u(\sigma_1)$, существует такая окрестность $U(\alpha)$ источника α , что $U(\alpha) \cap C_\omega = \emptyset$. Из включения $C \subset W^u(\alpha)$ и компактности C следует существование целого отрицательного числа n_0 такого, что $f^{n_0}(C) \subset U(\alpha)$.

Так как кривая $C \subset W^s(\sigma_1) - \sigma_1$ негомотопна нулю в $W^s(\sigma_1) - \sigma_1$, то она ограничивает в $W^s(\sigma_1)$ диск D , содержащий точку σ_1 . Поскольку f не имеет гомоклинических точек, диск D пересекается с C_ω ровно в одной точке σ_1 . Поэтому C и C_ω образуют нетривиальное зацепление с коэффициентом зацепления -1 или $+1$ (в зависимости от ориентаций кривых). Тогда $f^{n_0}(C)$ и $f^{n_0}(C_\omega)$ также образуют нетривиальное зацепление с коэффициентом зацепления -1 или $+1$. Из $f(C_\omega) = C_\omega$ вытекает равенство $f^{n_0}(C_\omega) = C_\omega$. Поэтому $f^{n_0}(C)$ и C_ω образуют нетривиальное зацепление. С другой стороны, $f^{n_0}(C) \subset U(\alpha)$. Так как $U(\alpha) \cap C_\omega = \emptyset$, то отсюда получаем, что коэффициент зацепления $f^{n_0}(C)$ и C_ω равен нулю. Мы получили противоречие. $\diamond$

Таким образом, $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2) \neq \emptyset$. Так как $W^s(\sigma_1)$ и $W^u(\sigma_2)$ пересекаются трансверсально, то пересечение $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ состоит из кривых. В силу произвольности кривой C , пересечение $F^s \cap W^u(\sigma_2)$ содержит, по крайней мере, одну дугу d , с концевыми точками a_1, a_2 , лежащими на разных граничных компонентах C_1 и C_2 кольца F^s . Для определенности положим $a_i \in C_i$ ($i = 1, 2$). Обозначим через $\mathcal{D}$ кривую из $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$, содержащую дугу d .

Шаг 1 Для компактного (в топологии многообразия $W^s(\sigma_1)$) подмножества $F \subset W^s(\sigma_1)$ и любой точки $m_0 \in \text{int } F$ существует окрестность $U(m_0)$, которая гомеоморфна

диску и которая пересекается не более чем с одной кривой из пересечения $F \cap W^u(\sigma_2)$, при этом, если $U(m_0)$ пересекается с одной кривой, скажем l , то пересечение $U(m_0) \cap l$ состоит из одной компоненты, гомеоморфной простой дуге, которая делит $U(m_0)$.

Доказательство шага 1. Предположим, что любая окрестность $U(m_0)$, гомеоморфная диску, пересекается более чем с одной кривой из $F \cap W^u(\sigma_2)$. Тогда существует последовательность точек $m_k \in F \cap W^u(\sigma_2)$, сходящихся к точке $m_0 \in \text{int } F$, такая, что m_k лежат на попарно различных компонентах пересечения $F \cap W^u(\sigma_2)$. Отсюда и трансверсальности пересечения $F \cap W^u(\sigma_2)$ вытекает, что точки m_k изолированы в топологии неустойчивого многообразия $W^u(\sigma_2)$. Поэтому $m_0 \notin W^u(\sigma_2)$, иначе неустойчивое многообразие $W^u(\sigma_2)$ было бы самопредельным и существовали бы гомоклинические точки. Так как $M^3 - \omega = W^u(\sigma_2) \cup W^u(\alpha) \cup W^u(\sigma_1)$, то либо $m_0 \in W^u(\alpha)$, либо $m_0 \in W^u(\sigma_1)$. Включение $m_0 \in W^u(\alpha)$ невозможно, поскольку неустойчивое многообразие $W^u(\alpha)$ открыто и не может содержать точек накопления неустойчивого многообразия $W^u(\sigma_2)$. Включение $m_0 \in W^u(\sigma_1)$ также невозможно, поскольку в силу $m_0 \in \text{int } F^s \subset W^u(\sigma_1)$, оно влечет наличие гомоклинических точек.

Теперь предположим, что $U(m_0)$ пересекается с одной кривой, скажем l , но пересечение $U(m_0) \cap l$ содержит компоненту, гомеоморфную простой дуге, которая не делит $U(m_0)$. Из вышеприведенного рассуждения и трансверсальности пересечения $F \cap W^u(\sigma_2)$ вытекает, что предельное множество кривой l в $U(m_0)$ состоит ровно из одной точки. Снова равенство $M^3 - \omega = W^u(\sigma_2) \cup W^u(\alpha) \cup W^u(\sigma_1)$ приводит к противоречию, так как предельная точка не может принадлежать ни $W^u(\alpha)$, ни $W^u(\sigma_1)$. Полученное противоречие завершает доказательство шага 1. $\diamond$

Шаг 2 Семейство дуг из пересечения $F^s \cap W^u(\sigma_2)$, концевые точки которых лежат на разных граничных компонентах кольца F^s , конечно.

Доказательство шага 2. Предположим противное. Тогда имеется точка $m_0 \in \text{int } F^s$, которая является топологическим пределом попарно различных кривых из $F^s \cap W^u(\sigma_2)$. Это противоречит шагу 1. $\diamond$

Обозначим через $d = d_1, \dots, d_k$ занумерованные в циклическом порядке дуги из пересечения $F^s \cap W^u(\sigma_2)$, концевые точки которых лежат на разных компонентах кольца F^s . Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$ - кривые из $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$, содержащие дуги $d = d_1, \dots, d_k$ соответственно. Отметим, что некоторые из кривых $\mathcal{D}_i$ могут совпадать.

Шаг 3 Среди кривых $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$ существует, по крайней мере, одна незамкнутая.

Доказательство шага 3. Предположим противное. Согласно шагу 1, топологический предел кривых из пересечения $F^s \cap W^u(\sigma_2)$ содержится в граничных компонентах кольца F^s . Отсюда и замкнутости кривых $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$ следует, что существует замкнутая кривая, непересекающаяся с кривыми из $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ и содержащая на устойчивом многообразии $W^s(\sigma_1)$ внутри себя точку σ_1 . Это противоречит шагу 0. $\diamond$

Будем для определенности считать, что кривая $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$ незамкнута.

Шаг 4 Каждая незамкнутая кривая из $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ пересекает все кольца вида $f^i(F^s)$ по крайней мере одного из объединений $\cup_{i \geq 0} f^i(F^s)$, $\cup_{i \leq 0} f^i(F^s)$.

Доказательство шага 4. Достаточно доказать утверждение для кривой $\mathcal{D}$. Предположим противное. Тогда $\mathcal{D}$ лежит строго внутри конечного объединения $\cup_{i=i_1}^{i=i_2} f^i(F^s)$. Из незамкнутости $\mathcal{D}$ вытекает, что внутри этого объединения имеется точка m_0 такая, что либо любая ее окрестность $U(m_0)$ содержит счетное множество компонент пересечения $U(m_0) \cap \mathcal{D}$, либо m_0 является единственной предельной точкой одной из полукривых кривой $\mathcal{D}$. Это противоречит шагу 1. $\diamond$

Шаг 5 Каждая незамкнутая кривая из пересечения $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ инвариантна относительно некоторой итерации диффеоморфизма f .

Доказательство шага 5. Достаточно доказать утверждение для $\mathcal{D}$. Будем для опре-

деленности считать, что $\mathcal{D}$ пересекает все кольца из объединения $\cup_{i \geq 0} f^i(F^s)$. Предположим, что $\mathcal{D}$ не инвариантна относительно f^i для любого $i \geq 0$. Согласно шагу 4, для любого $i \geq 0$ существует дуга A_i кривой $\mathcal{D}$, лежащая в кольце $f^i(F^s)$ и имеющая концевые точки на разных граничных компонентах $f^i(C_1)$ и $f^i(C_2)$ этого кольца. Так как $\mathcal{D}$ не инвариантна относительно f^i , то дуги $f^{-1}(A_i)$ образуют семейство попарно непесекающихся дуг в кольце F^s , концевые точки которых лежат на разных граничных компонентах кольца F^s . Это противоречит шагу 2. $\diamond$

Шаг 6 Каждая незамкнутая кривая из $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ является кривой без самопересечений с концевыми точками σ_1, σ_2 .

Доказательство шага 6. Достаточно рассмотреть кривую $\mathcal{D}$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\mathcal{D}$ инвариантна относительно f . Дуга $d \subset \mathcal{D}$ пересекает фундаментальное кольцо F^s в разных окружностях, ограничивающих F^s . Так как $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(F^s) = W^s(\sigma_1) - \sigma_1$, то утверждение вытекает из шага 5. $\diamond$

Шаг 7 Каждая незамкнутая кривая из пересечения $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ после добавления концевых точек σ_1 и σ_2 превращается в непрерывный путь, соединяющий точки σ_1, σ_2 .

Доказательство шага 7 достаточно провести для $\mathcal{D}$. В силу шага 1, в F^s кривая $\mathcal{D}$ не имеет точек накопления. Следовательно, она не имеет точек накопления в любом кольце $f^i(F^s)$. Так как в сколь угодно малой окрестности точки σ_1 лежат все кольца $f^i(F^s)$, начиная с некоторого момента, то $\mathcal{D}$ доопределяется в непрерывный путь в точке σ_1 . Аналогично доказывается возможность непрерывного доопределения в σ_2 . $\diamond$

Это завершает доказательство теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альфвен Х., *Космическая электродинамика*, ИЛ, 1952.
2. Аносов Д.В., “Исходные понятия. Элементарная теория.”, *В сб. серии "Современные проблемы математики Дин. системы - 1*. Т. Т. 1, ред. Аносов Д.В., 1985, 156-178; 178-204.
3. Вайнштейн С.И., *Магнитные Поля в Космосе*, Наука, М., 1983.
4. Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., *Турбулентное Динамо в Астрофизике*, Наука, М., 1980.
5. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 424 с.
6. Гринес В.З., Починка О.В., “Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях.”, *Успехи Мат. Наук*, **68**, вып. 1(409) (2013), 129–188.
7. Каулинг Т., *Магнитная Гидродинамика*, ИЛ, 1959.
8. Нитецки З., *Введение в дифференциальную динамику*, Мир, М., 1975.
9. Прист Э.Р., *Солнечная Магнитогидродинамика*, Мир, М., 1985.
10. Прист Э.Р., Форбс Т., *Магнитное пересоединение: магнитогидро-динамическая теория и приложения*, ФМЛ, М., 2005.

11. Сыроватский С.И., “Магнитная гидродинамика.”, *Успехи Физ. Наук*, **62**, вып. 3 (1957), 247-303.
12. Alfven H., “On sunspots and the solar cycle.”, *Arc. f. Mat. Ast. Fys.*, **29A** (1943), 1-17..
13. Bonatti Ch., Grines V., “Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 .”, *Journal of Dyn. and Control Syst.*, **6** (2000), 579-602.
14. Bonatti Ch., Grines V., V. Medvedev V., Pecou E., “Three-dimensional manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves.”, *Topology and Applications*, **117** (2002), 335-344.
15. Smale S., “Bull. Amer. Math. Soc.”, *Успехи Мат. Наук*, **1**, 73 (1967), 741-817.

On existence of separators of magnetic fields in a spherical layer of plasma

© V. Z. Grines⁵, E. V. Zhuzhoma⁶, B. S. Medvedev⁷

Abstract. In the paper, one proves that there exist separators of magnetic field in a spherical layer provided some conditions hold.

Key Words: magnetic fields, plasma, separator, fun, spine, singular points, Morse-Smale diffeomorphisms

⁵ Professor chair of numerical and functional analysis, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; vgrines@yandex.ru.

⁶ Professor chair of theory of control and dynamics of machines, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

⁷ Senior Staff Scientist, Institute of Applied Mathematics and Cybernetics at Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; medvedev@unn.ac.ru

УДК 519.63

Итеративный метод первого порядка для аккретивных включений в банаховом пространстве

© И. П. Рязанцева¹

Аннотация. Для уравнений с многозначными аккретивными операторами в банаховом пространстве построен итеративный неявный метод первого порядка, получены достаточные условия его сильной сходимости к решению исходной задачи.

Ключевые слова: итеративный метод, аккретивный оператор, резольвента, сходимость, дуальное отображение

Пусть X – строго выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, модуль гладкости которого равен $\rho_X(\tau)$, X^* – пространство, сопряженное X , $\langle u, v \rangle$ – значение линейного функционала $u \in X^*$ на элементе $v \in X$, $B : X \rightarrow 2^X$ – m -аккретивный оператор, т.е. $R(\alpha B + E) = X$ при всех $\alpha > 0$, $E : X \rightarrow X$ – единичный оператор, $J^s : X \rightarrow X^*$ – дуальное отображение в X с масштабной функцией $\mu(t) = t^{s-1}$, $s > 1$, при $s = 2$ имеем нормализованное дуальное отображение $J : X \rightarrow X^*$ (см. [1], с.65).

Предположим, что оператор $A : X \rightarrow X$ обладает свойствами:

(i) является сильно аккретивным, т.е.

$$\langle J(u - v), Au - Av \rangle \geq M \|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in X, \quad M > 0;$$

(ii) удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$\|Au - Av\| \leq L \|u - v\| \quad \forall u, v \in X, \quad L > 0.$$

Рассмотрим в X уравнение

$$Ax + Bx = f \tag{1.1}$$

с многозначным оператором, решение которого понимаем в смысле следующего включения

$$f - Ax \in Bx. \tag{1.2}$$

Используя резольвенту оператора B , определяемую равенством $I_B^\alpha = (\alpha B + E)^{-1}$, от уравнения (1.1) перейдем к уравнению с однозначным оператором

$$x = I_B^\alpha(x - \alpha[Ax - f]). \tag{1.3}$$

Этот переход вызван тем, что построение множества значений многозначного оператора в точке – непростая задача (см. пример 2.4.3 из [1]).

В наших условиях однозначная разрешимость (1.1) доказана в [2]. В дальнейших исследованиях существенную роль играет оператор J^s . Приведем некоторые свойства этого оператора. Прежде всего в наших условиях отметим его однозначность и непрерывность. Кроме того, справедливо неравенство (см. [1], с.79, 88)

$$\langle J^s u - J^s v, u - v \rangle \leq c_1 \|u - v\|^2 + c_2 \rho_X(\|u - v\|), \tag{1.4}$$

здесь $\|u\| \leq R$, $\|v\| \leq R$, $c_1 = c_3(s - 1)$, $c_2 = c_3 c_4$, $c_3 = 2^{3s-1} R^{s-2}/s$, $c_4 = \max\{F, R\}$, F – постоянная Фигеля.

Используя (1.4), можно получить оценку сверху для $\|J^s u - J^s v\|$ на $\bar{B}(0, R)$, т.к. подобно [1], с. 83-85 доказывается утверждение.

¹ Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, Нижний Новгород; lryazantseva@aplmath.ru

Л е м м а 1.3. В равномерно гладком банаховом пространстве X справедливо неравенство

$$\|J^s u - J^s v\| \leq c_1 \|u - v\| + 2c_2 \frac{q_X(\|u - v\|)}{\|u - v\|} \quad \forall u, v \in \bar{B}(0, R) = \{x \mid \|x\| \leq R\}, \quad (1.5)$$

где

$$q_X(\xi) = \int_0^1 \frac{\rho_X(t\xi)}{t} dt, \quad \xi \geq 0.$$

З а м е ч а н и е 1.1. Поскольку (см. [1], с.16)

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\rho_X(t)}{t} = 0, \quad (1.6)$$

то функция $\rho_X(t\xi)/\xi$ определена при всех $\xi \geq 0$. Не нарушая неравенства (1.5), функцию $\rho_X(\tau)$ можно заменить непрерывной функцией $\tilde{\rho}_X(\tau)$ такой, что $\rho_X(\tau) \leq \tilde{\rho}_X(\tau)$ и сохраняющей свойство (1.6). Для пространств Лебега такая функция $\tilde{\rho}_X(\tau)$ существует (см. [1], с.27).

З а м е ч а н и е 1.2. Для нормализованного дуального отображения J верна более точная, чем получаемая из (1.4) оценка (см. [1], с.74)

$$\langle Ju - Jv, u - v \rangle \leq 8 [\|u - v\|^2 + c_4 \rho_X(\|u - v\|)],$$

откуда подобно (1.5) получаем

$$\|Ju - Jv\| \leq 8 \left[\|u - v\| + 2c_4 \frac{q_X(\|u - v\|)}{\|u - v\|} \right] \quad \forall u, v \in \bar{B}(0, R). \quad (1.7)$$

Пользуясь леммой, установим свойства вида (1.5) для операторов J и J^p в пространствах Лебега L^p .

При $p > 2$ и $s = p$ модуль гладкости $\rho_X(\tau) \leq (p-1)\tau^2$ (см. [1], с. 27), функция $q_X(\xi) = (p-1)\xi^2/2$, и в силу (1.5)

$$\|J^p u - J^p v\| \leq [c_1 + (p-1)c_2] \|u - v\|. \quad (1.8)$$

Пусть $p \in (1, 2)$, $s = 2$, тогда $\rho_X(\tau) \leq \tau^p/p$ (см. [1], с.27), $q_X(\xi) = \xi^p/p^2$, и из (1.7) имеем

$$\|Ju - Jv\| \leq 8 \left[\|u - v\| + \frac{2c_4}{p^2} \|u - v\|^{p-1} \right]. \quad (1.9)$$

Отметим, что отображение J^p в L^p при $p \in (1, 2)$ удовлетворяет на X условию Гельдера (см. [1], с. 85)

$$\|J^p u - J^p v\| \leq \frac{4}{p^2(2^{p-1} - 1)} \|u - v\|^{p-1}, \quad (1.10)$$

а для J в L^p при $p > 2$ выполнено условие Липшица (см. [1], с. 84)

$$\|Ju - Jv\| \leq (p-1) \|u - v\|. \quad (1.11)$$

Для решения уравнения (1.1) в [2] построен непрерывный метод первого порядка в виде следующей задачи Коши (см. [3]):

$$u'(t) + u(t) = I_B^{\gamma(t)}(u(t) - \gamma(t)[Au(t) - f]), \quad (1.12)$$

$$u(t_0) = u_0 \in X, \quad t_0 \geq 0, \quad (1.13)$$

и доказано утверждение.

Т е о р е м а 1.1. Пусть X – строго выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, $B : X \rightarrow 2^X$ – m -аккретивный ограниченный оператор, оператор $A : X \rightarrow X$ обладает свойствами (i) и (ii), $\gamma(t)$ – положительная непрерывная функция, и выполнены условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0, \quad \int_{t_0}^{\infty} \gamma(t) dt = +\infty, \\ sM - L > 0, \quad (1.14)$$

Пусть существует число $r_0 > 0$ такое, что

$$\langle Jy, y - I_B^{\gamma(t)}(y - \gamma(t)[Ay - f]) \rangle \geq 0 \quad \text{при } \|y\| \geq r_0. \quad (1.15)$$

Тогда существует единственное решение $u(t) \in C^1[t_0, +\infty)$ задачи Коши (1.12), (1.13) при любом $u_0 \in X$, и $u(t) \rightarrow x$ при $t \rightarrow \infty$, где x – единственное решение уравнения (1.1).

З а м е ч а н и е 1.3. Отметим, что предположение (1.15) есть одно из достаточных условий разрешимости уравнения (1.3) (см., например, [1], с.15, 158).

Пусть пространство X , операторы A и B удовлетворяют условиям теоремы 1.1., и верно (1.14). Построим разностный аналог метода (1.12), (1.13) следующего вида:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau_{n+1}} + u_{n+1} = I_B^{\gamma_n}(u_{n+1} - \gamma_n[Au_{n+1} - f]), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.16)$$

где элемент $u_1 \in X$ задается, $\{\tau_n\}$ и $\{\gamma_n\}$ – ограниченные последовательности положительных чисел, оператор $I_B^{\gamma_n} = (\gamma_n B + E)^{-1} : X \rightarrow X$ есть резольвента оператора B .

Установим однозначную разрешимость уравнения (1.16) относительно u_{n+1} . Для этого от (1.16) перейдем к эквивалентному уравнению

$$\gamma_n B \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau_{n+1}} + u_{n+1} \right) + \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau_{n+1}} + \gamma_n(Au_{n+1} - f) = 0, \quad (1.17)$$

или

$$B \left(\xi_{n+1} u_{n+1} - \frac{u_n}{\tau_{n+1}} \right) + \frac{u_{n+1}}{\gamma_n \tau_{n+1}} + Au_{n+1} = f + \frac{u_n}{\gamma_n \tau_{n+1}}, \quad (1.18)$$

где $\xi_{n+1} = 1 + 1/\tau_{n+1}$. Поскольку $\xi_n > 0$ при всех $n \geq 1$, то для m -аккретивного оператора B нетрудно убедиться в m -аккретивности отображения BT , где $Tx = \xi_{n+1}x - u_n/\tau_{n+1}$. Следовательно, существование единственного решения (1.18) (а значит, и (1.16), (1.17)) устанавливается теми же рассуждениями, что и для уравнения (1.1).

Исследуем поведение последовательности $\{u_n\}$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть элемент $h_{n+1} \in B(\eta_{n+1} + u_{n+1})$ такой, что (см. (1.17))

$$\gamma_n h_{n+1} + \eta_{n+1} + \gamma_n(Au_{n+1} - f) = 0, \quad \eta_{n+1} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau_{n+1}}. \quad (1.19)$$

Кроме того, согласно (1.2), существует элемент $v \in Bx$ такой, что

$$v + Ax - f = 0. \quad (1.20)$$

Умножив (1.20) на γ_n , имеем

$$\gamma_n v + \gamma_n(Ax - f) = 0. \quad (1.21)$$

Теперь из (1.19) и (1.21) получаем, что

$$\begin{aligned} \langle J^s(\eta_{n+1} + u_{n+1} - x), \eta_{n+1} \rangle + \gamma_n[\langle J^s(\eta_{n+1} + u_{n+1} - x), h_{n+1} - v \rangle + \\ + \langle J^s(\eta_{n+1} + u_{n+1} - x), Au_{n+1} - Ax \rangle] = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Пусть предположение (1.15) верно при замене $\gamma(t)$ на γ_n , т.е. справедливо неравенство

$$\langle Jy, y - I_B^{\gamma_n}(y - \gamma_n[Ay - f]) \rangle \geq 0 \quad \text{при} \quad \|y\| \geq r_0. \quad (1.23)$$

Докажем ограниченность $\{u_n\}$. Предположим противное: пусть $\|u_n\| \rightarrow \infty$. Тогда при достаточно больших n справедливо неравенство $\|u_n\| \geq r_0$, и в силу (1.23) имеем

$$\langle Ju_{n+1}, u_{n+1} - I_B^{\gamma_n}(u_{n+1} - \gamma_n[Au_{n+1} - f]) \rangle \geq 0.$$

Кроме того, из (1.16) получаем

$$\langle Ju_{n+1}, \eta_{n+1} + u_{n+1} - I_B^{\gamma_n}(u_{n+1} - \gamma_n[Au_{n+1} - f]) \rangle = 0.$$

Отсюда с учетом последнего неравенства получаем, что $\langle Ju_{n+1}, \eta_{n+1} \rangle \leq 0$ или $\|u_{n+1}\| \leq \|u_n\|$. Таким образом, доказана ограниченность $\{u_n\}$. Теперь из (1.16) вытекает ограниченность $\{(u_{n+1} - u_n)/\tau_{n+1}\}$. Пусть

$$\|u_n\| \leq \bar{C}, \quad \frac{\|u_{n+1} - u_n\|}{\tau_{n+1}} \leq \tilde{C} \quad \forall n. \quad (1.24)$$

Определим величину $r_n = \|u_n - x\|^s/s$. Установленные оценки (1.24) и свойства (i), (ii) оператора A позволяют записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \langle J^s(\eta_{n+1} + u_{n+1} - x), Au_{n+1} - Ax \rangle &= \langle J^s(u_{n+1} - x), Au_{n+1} - Ax \rangle + \\ + \langle J^s(\eta_{n+1} + u_{n+1} - x) - J^s(u_{n+1} - x), Au_{n+1} - Ax \rangle &\geq sMr_{n+1} - \\ - L\|u_{n+1} - x\|C(\|\eta_{n+1}\|) &\geq (sM - L)r_{n+1} - \frac{L}{m}C^m(\|\eta_{n+1}\|), \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{m} = 1, \end{aligned} \quad (1.25)$$

причем постоянные c_1 и c_2 , определяющие функцию $C(\xi) = c_1\xi + 2c_2q_X(\xi)/\xi$, зависят от $R = \bar{C} + \tilde{C} + \|x\|$. Здесь мы использовали неравенство $ab \leq a^s/s + b^m/m$, $a > 0$, $b > 0$. Отметим, что с помощью (1.6), нетрудно проверить равенство $C(0) = 0$.

Первое слагаемое в (1.22) с учетом монотонности оператора J^s оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle J^s(\eta_{n+1} + u_{n+1} - x), \eta_{n+1} \rangle &= \langle J^s(\eta_{n+1} + u_{n+1} - x) - J^s(u_{n+1} - x), \eta_{n+1} \rangle + \\ + \langle J^s(u_{n+1} - x), \eta_{n+1} \rangle &\geq \frac{1}{\tau_{n+1}} \langle J^s(u_{n+1} - x), u_{n+1} - u_n \rangle. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Для всякого выпуклого дифференцируемого по Гато на X функционала $\varphi : X \rightarrow R$ верно неравенство (см. [1], с.37, 38)

$$\varphi(x) - \varphi(y) \geq \langle \text{grad} \varphi(y), x - y \rangle \quad \forall x, y \in X.$$

Применив последнее неравенство к функционалу $\varphi(x) = \|x\|^s/s$, из (1.26) имеем

$$\langle J^s(\eta_{n+1} + u_{n+1} - x), \eta_{n+1} \rangle \geq \frac{1}{\tau_{n+1}}(r_{n+1} - r_n). \quad (1.27)$$

Из (1.17) без труда выводится оценка

$$\|\eta_{n+1}\| \leq \tilde{a}_1 \gamma_n \quad \forall n, \quad \tilde{a}_1 > 0. \quad (1.28)$$

Теперь из (1.22) с учетом (1.25), (1.27), (1.28) получаем рекуррентное неравенство

$$r_{n+1} \leq \left(1 - \frac{\gamma_n \tau_{n+1} \xi_0}{1 + \gamma_n \tau_{n+1} \xi_0}\right) r_n + \gamma_n \tau_n \frac{L}{m(1 + \gamma_n \tau_{n+1} \xi_0)} C^m(\tilde{a}_1 \gamma_n), \quad \xi_0 = sM - L,$$

и лемма из работы [4], с. 385 позволяет установить утверждение.

Т е о р е м а 1.2. Пусть X – строго выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, $B : X \rightarrow 2^X$ – m -аккретивный ограниченный оператор, оператор $A : X \rightarrow X$ обладает свойствами (i) и (ii), $\{\gamma_n\}$, $\{\tau_n\}$ – ограниченные последовательности положительных чисел, выполнены условия (1.14),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \tau_{n+1} = +\infty,$$

и верно (1.15) при $\gamma(t) = \gamma_n$. Тогда последовательность $\{u_n\}$ определяется однозначно из (1.16), и при любом $u_1 \in X$ сходится по норме пространства X к единственному решению уравнения (1.1).

З а м е ч а н и е 1.4. В банаховом пространстве величина $\langle J^s x - J^s y, x - y \rangle$ сверху и снизу оценивается разными степенями $\|x - y\|$, причем оценки носят локальный характер, поэтому в банаховом пространстве в отличие от гильбертова вместо $\gamma_n = \gamma > 0$ (см., например, [5] и [6]) выбрана последовательность $\{\gamma_n\}$ со свойствами, указанными в теореме 1.2.

З а м е ч а н и е 1.5. Пусть $X = L^p$, $p > 1$. В зависимости от s неравенство (1.5) принимает вид либо (1.8), (1.9), либо (1.10), (1.11). В теореме 1.2. исследован случай условий (1.8), (1.9). При выполнении (1.10), (1.11) утверждение теоремы 1.2. сохраняется, при этом доказательство практически не меняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рязанцева И.П., *Избранные главы теории операторов монотонного типа*, Издательство НГТУ, Нижний Новгород, 2008.
2. Рязанцева И.П., “Непрерывный метод регуляризации первого порядка для смешанных вариационных неравенств”, *Материалы Девятой Всероссийской конференции "Сеточные методы для краевых задач и приложения посвященной 80-летию со дня рождения А.Д.Ляшко.*, 2010, 373-379.
3. Антипин А.С., “Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования”, *Вопросы кибернетики. Вычисл. вопросы анализа больших систем. М.: Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика" АН СССР*, 1989, 5-43.
4. Alber Ya., Ryazantseva I., *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Dordrecht, 2006.

5. Рязанцева И.П., “Методы первого порядка для некоторых квазивариационных неравенств в гильбертовом пространстве”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:2 (2007), 189–196.
6. Noor M.A., Rassias T.M., “Resolvent equations for set-valued mixed variational inequalities”, *Nonlinear Analysis*, **42**:1 (2000), 71–83.

First-order iterative method for accretive inclusions in Banach space

© I. P. Ryazantseva²

Abstract. First-order iterative method be constructed for equations in Banach space with set-valued accretive operators. Sufficient conditions of convergence to solution of initial problem are obtained.

Key Words: iterative method, accretive operator, resolvent, convergence, duality mapping

² Professor of Applied Mathematics Chair, Nizhnii Novgorod State Tehnical University after R.A. Alekseev, Nizhnii Novgorod; lryazantseva@applmath.ru

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

УДК 517.9

**Математическое моделирование реакции
циклоалюминирования олефинов и ацетиленов
триэтилалюминием**© Л. Р. Абзалилова¹, С. И. Спивак²

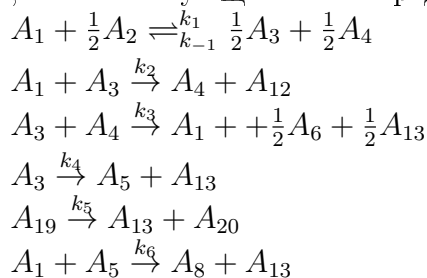
Аннотация. В работе отражены результаты математического моделирования каталитического циклоалюминирования олефинов и ацетиленов, вычислены значения кинетических параметров и проанализированы скорости протекания лимитирующих стадий реакции.

Ключевые слова: математическая модель, прямая и обратная кинетическая задачи, кинетические параметры

1. Введение

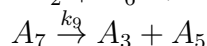
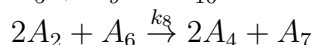
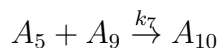
Активное развитие в последние десятилетия получил металлокомплексный катализ [1], [2], [3]. При исследовании этих реакций одной из ключевых проблем является идентификация механизма [4]. В результате изучения реакции циклоалюминирования олефинов и ацетиленов с помощью $AlEt_3$ в [5] были предложены схемы механизмов формирования молекул пятичленных АОС (ключевыми интермедиатами являются цирконациклопентаны и биметаллические Al, Zr -комплексы). Авторам этих работ не удалось выделить и идентифицировать промежуточные каталитически активные комплексы, участвующие в образовании АЦП. В лаборатории каталитического синтеза Института нефтехимии и катализа под руководством У.М.Джемилева впервые экспериментально изучен механизм реакции циклометаллирования олефинов $AlEt_3$ с образованием АЦП в присутствии катализатора Cr_2ZrCl_2 методом динамической спектроскопии ЯМР 1H и ^{13}C [6], [7]. На основании экспериментальных данных ими была предложена обобщенная схема механизма реакции циклометаллирования олефинов и ацетиленов [8].

Задачей настоящей работы является построение кинетической модели реакции циклоалюминирования олефинов и ацетиленов $AlEt_3$ в присутствии Cr_2ZrCl_2 . Схема превращений, соответствующая схеме предложенной в [8] имеет вид:



¹ Младший научный сотрудник лаборатории математической химии, Институт нефтехимии катализа РАН, г. Уфа; abzalilova.liya@gmail.com.

² Заведующий лабораторией математической химии, Институт нефтехимии катализа РАН, г. Уфа; s.spivak@bashnet.ru.



где $A_1 = AlEt_3$, $A_2 = Cp_2ZrCl_2$, $A_3 = Cp_2Zr(C_2H_5)Cl \cdot Al(C_2H_5)_3$, $A_4 = ClAl(C_2H_5)_2$, $A_5 = Cp_2ZrCH_2CH_2Al(Cl)(C_2H_5)_2$, $A_6 = (Cl)Cp_2ZrCH_2CH_2ZrCp_2(Cl) \cdot 2[ClAl(C_2H_5)_2]$, $A_7 = (Cl)Cp_2ZrCH_2CH_2ZrCp_2(Cl) \cdot 2[Al(C_2H_5)_3]$, $A_8 = Cp_2Zr(Cl)CH_2CH[Al(C_2H_5)_2]_2$, $A_9 = CH_2CH_2R$, $A_{10} = Cp_2Zr(Cl)CH_2CH_2CH_2Al(C_2H_5)_2$, $A_{11} = (C_2H_5)Al(CH_2)_3CH_2R$, $A_{12} = Cp_2Zr(C_2H_5)_2 \cdot Al(C_2H_5)_3$, $A_{13} = C_2H_5$, x_i -мольная доля i -того компонента (соответствует соединению A_i), k_j^+ , k_j^- -константа скорости прямой и обратной реакции, соответственно, j -ой стадии.

Каталитическая реакция циклоалюминирования олефинов триэтилалюминием в присутствии катализатора Cp_2ZrCl_2 проводится в лабораторном реакторе с магнитной мешалкой в диапазоне температур от 18 до $50^\circ C$ для олефина октен-1, и от 30 до $50^\circ C$ для ацетиленов октин-4. Корректным математическим описанием данной реакции является система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_5 - \omega_7 - 2\omega_8$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{2}\omega_1$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{2}\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \omega_4 + \omega_7$$

$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_8$$

$$\frac{dx_5}{dt} = \omega_4 - \omega_5 - \omega_6 + \omega_9$$

$$\frac{dx_6}{dt} = \frac{1}{2}\omega_3 + \omega_8$$

$$\frac{dx_7}{dt} = \omega_8 - \omega_9$$

$$\frac{dx_8}{dt} = \omega_5$$

$$\frac{dx_9}{dt} = -\omega_6$$

$$\frac{dx_{10}}{dt} = \omega_6 - \omega_7$$

$$\frac{dx_{11}}{dt} = \omega_7$$

$$\frac{dx_{12}}{dt} = \omega_2$$

$$\frac{dx_{13}}{dt} = \omega_3 + \omega_4 + \omega_5$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0, x_9(0) = x_9^0, x_i(0) = 0, i=3,4,5,6,7,8,10,11,12,13$$

Скорости реакции ω_j определяются на основании закона действующих масс:

$$\omega_1 = k_1^+ x_1 x_2^{0.5} - k_1^- x_3^{0.5} x_4^{0.5}$$

$$\omega_2 = k_2^+ x_1 x_3$$

$$\omega_3 = k_3^+ x_3 x_4$$

$$\omega_4 = k_4^+ x_3$$

$$\omega_5 = k_5^+ x_1 x_5$$

$$\omega_6 = k_6^+ x_5 x_9$$

$$\omega_7 = k_7^+ x_1 x_{10}$$

$$\omega_8 = k_8^+ x_1^2 x_6$$

$$\omega_9 = k_9^+ x_7$$

Все значения x_i связаны между собой законами сохранения, которые следуют из молекулярного состава веществ:

Эти соотношения выполняются всегда в каждой точке расчета. Для определения кинетических параметров решали обратную задачу минимизации функционала

Таблица 1: Законы сохранения для x_i

$x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 + x_8 + x_{10} + x_{12} = c_1$	по элементу Zr
$2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 4x_6 + 4x_7 + x_8 + x_{10} + x_{10} = c_2$	по элементу Cl
$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 2x_8 + x_{10} + x_{11} + 2x_{12} = c_3$	по элементу Al
$15x_1 + 10x_2 + 30x_3 + 10x_4 + 24x_5 + 44x_6 + 54x_7 + 33x_8 + 3x_9 +$ $+27x_{10} + 12x_{11} + 35x_{12} + 6x_{13} = c_4$	по элементу H
$6x_1 + 10x_2 + 18x_3 + 4x_4 + 16x_5 + 30x_6 + 34x_7 + 20x_8 + 2x_9 +$ $+18x_{10} + 6x_{11} + 20x_{12} + 2x_{13} = c_5$	по элементу C

$$F(k_j, k_{-j}) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^L |x_{kil}^p - x_{kil}^e| \rightarrow \min \quad (1.1)$$

где x_{kil}^p - расчетные значения концентраций наблюдаемых веществ, (*мольные доли*); x_{kil}^e - экспериментально полученные значения концентраций наблюдаемых веществ, (*мольные доли*); L - количество наблюдаемых веществ; n - количество точек эксперимента; K - количество экспериментов.

Зависимость константы скорости химической реакции k от температуры T определяется уравнением Аррениуса:

$$k = k_0 \cdot E^{-\frac{Ea}{R \cdot T}}$$

где k - приведенная константа скорости элементарной стадии, $1/\text{ч}$; Ea - энергия активации, Дж/моль , R - универсальная газовая постоянная, $\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{K})$, k_0 - предэкспоненциальный множитель, T - температура, K .

Следует отметить, что при решении обратной кинетической задачи нахождение энергий активаций и предэкспоненциальных множителей, а затем уже по этим значениям вычисление констант скоростей увеличило размерность обратной задачи в 2 раза, однако, позволило получить константы, которые всегда удовлетворяют соотношению Аррениуса. Таким образом, кинетическая модель исследуемого процесса представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными правыми частями, включающую 13 уравнений для определения концентраций компонентов реакции с 10 кинетическими параметрами $k_1^+, k_1^-, k_2^+, k_3^+, k_4^+, k_5^+, k_6^+, k_7^+, k_8^+, k_9^+$ которые связаны с температурой соотношением Аррениуса.

Решение обратной задачи осуществлялось параллельно: один процессор определял кинетические параметры без 6-ой и 7-ой стадии (исключили стадии внедрения олефина), а другой находил значения E_6 и E_7 при фиксированных E_i , $i = \overline{1, 5}$, E_8 , E_9 и соответствующие k_0 . Процесс чередовался до достижения требуемой точности. Аналогичным образом проводился расчет для случая с ацетиленом, вычисляли значения энергий активации E_6 и E_7 при найденных значения для остальных стадий.

Вычислительный эксперимент на основе внутреннего параллелизма натуральных экспериментальных данных и независимых реакций без олефина и с олефином позволил сократить время решения многопараметрической обратной задачи в три раза по сравнению с последовательным решением обратных задач для каждого набора натуральных данных реакции циклоалюминирования олефинов триэтилалюминием в присутствии катализатора Cp_2ZrCl_2 .

С использованием комплекса программ KinMod [9] для решений прямых и обратных задач, были найдены значения энергий активаций и предэкспоненциального множителя, а

Таблица 2: Кинетические параметры для реакции циклоалюминирования олефинами октен-1

$T, ^\circ C$	k_1^+	k_2^+	k_3^+	k_4^+	k_5^+	k_6^+	k_7^+	k_8^+	k_9^+	k_{10}^-
18	96,2	0,9	65,0	3,1	20,0	160,4	114,8	8,3	11,3	0,3
25	127,3	2,1	122,2	11,8	38,4	198,0	221,8	11,4	17,9	1,0
30	153,6	3,6	188,4	29,7	59,9	844,4	348,4	14,1	26,8	2,4
40	217,8	10,5	430,0	172,5	140,8	1401,4	823,3	21,3	66,1	9,8
50	300,3	28,2	932,2	899,6	313,1	3404,9	1844,6	31,4	168,2	54,8
E_a , ккал/моль	7,25	10,48	20,44	33,20	27,32	17,85	16,22	7,78	22,33	30,35

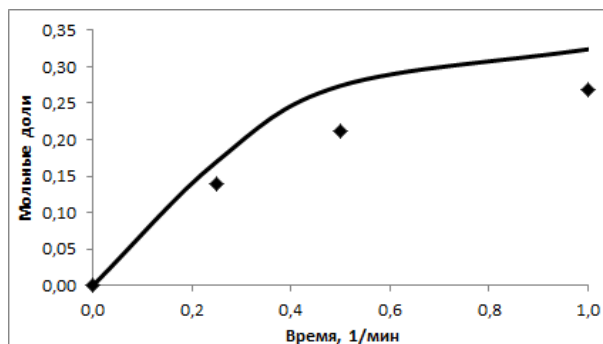
Таблица 3: Кинетические параметры для реакции циклоалюминирования ацетиленами октин-4

	$30^\circ C$	$40^\circ C$	$50^\circ C$	E_a , ккал/моль
k_6^+	79,7	99,2	215,7	22,35
k_7^+	69,9	78,3	100,4	13,56

затем рассчитаны значения констант скоростей реакции циклоалюминирования триэтилалюминием для октена-1 и октина-4.

Построены графики сравнения расчетных и экспериментальных значений концентрации для продукта алуминациклопентана (A_{11}) реакции циклоалюминирования олефинов и ацетиленов триэтилалюминием при разных температурах (рис. 1-4).

Точность описания находится в пределах погрешности эксперимента и составляет 20 %. Невысокие значения энергии активации для первой, второй и восьмой стадий обусловлены незначительными химическими трансформациями и межлигандным обменом. Лимитирующей является стадия образования ключевого комплекса A_5 , она же регулирует скорость всего процесса циклометаллирования. Была выявлена слабая тенденция роста значения константы седьмой стадии с увеличением температуры. Это объясняется большими стерическими затруднениями, возникающими на стадии переметаллирования. Таким образом, построена математическая модель реакции циклоалюминирования олефинов и ацетиленов триэтилалюминием в присутствии катализатора Cp_2ZrCl_2 и найдены значения кинетических параметров, удовлетворительно описывающие эксперимент.

Рис. 1: График соответствия расчетных значений и экспериментальных данных концентрации для продукта алуминациклопентана (A_{11}) реакции циклоалюминирования ацетиленов (октин-4) при $T=30^\circ C$

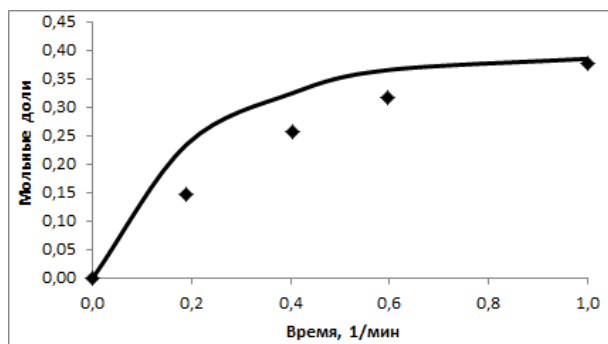


Рис. 2: График соответствия расчетных значений и экспериментальных данных концентрации для продукта алюминациклопентана (A_{11}) реакции циклоалюминирования ацетиленов (октин-4) при $T=40^\circ\text{C}$

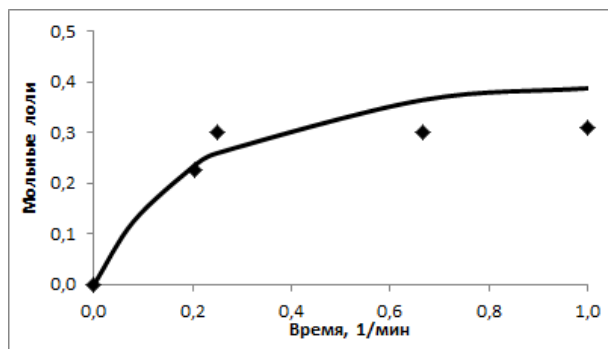


Рис. 3: График соответствия расчетных значений и экспериментальных данных концентрации для продукта алюминациклопентана (A_{11}) реакции циклоалюминирования ацетиленов (октен-1) при $T=25^\circ\text{C}$

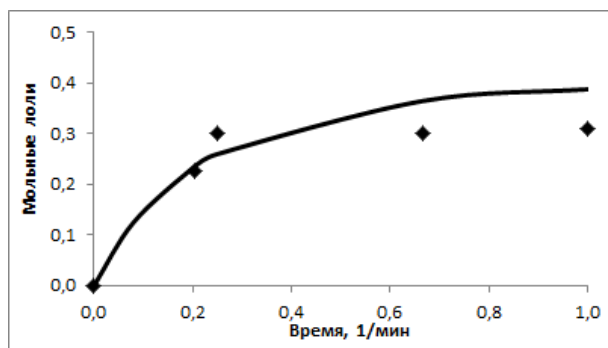


Рис. 4: График соответствия расчетных значений и экспериментальных данных концентрации для продукта алюминациклопентана (A_{11}) реакции циклоалюминирования ацетиленов (октен-1) при $T=40^\circ\text{C}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джемилев У. М., Поподько Н. Р., Козлова Е. В., *Металлокомплексный катализ в органическом синтезе*, Химия, М., М., 1999, 336 с.
2. Джемилев У. М., Ибрагимов А. Г., “Металлокомплексный катализ в синтезе магний-органических соединений”, *Успехи химии*, **74**:9 (2005), 886–904.
3. Dzhemilev U. M. and Ibragimov A. G., *Hydrometallation of unsaturated compounds. In: Modern Reduction Methods*, Wiley-VCH, M., 2008, 336 pp.
4. Parfenova L. V., Balaev A. V., Gubaidullin I. M., Abzalilova L. R., Pechatkina S. V., Khalilov L. M., Spivak S. I., Dzhemilev U. M., “Kinetic Model of Olefins Hydrometallation by $HAlBu_2^i$ and $AlBu_3^i$ in the Presence Cp_2ZrCl_2 Catalyst”, *Int. J. Chem. Kinet.*, **39**:6 (2007), 333–339.
5. Negishi E. I., Kondakov D. Y., Choueiri D., Kasai K., Takahashi T., “Multiple Mechanistic Pathways for Zirconium- Catalyzed Carboalumination of Alkynes. Requirements for Cyclic Carbometallation Processes Involving C-H Activation”, *J. Amer. Chem. Soc.*, **118**:40 (1996), 9577–9588.
6. Парфенова Л. В., Халилов Л. М., Джемилев У. М., “Механизмы реакций алюминий-органических соединений с алкенами и алкинами, катализируемых комплексами циркония”, *Успехи химии*, **81**:6 (2012), 524–548.
7. Рамазанов И. Р., Кадикова Р. Н., Джемилев У. М., “Катализируемое Cp_2ZrCl_2 цикло-алюминирование ацетиленовых спиртов и пропаргиламинов под действием Et_3Al .”, *Изв. АН, сер. хим.*, 2011, № 1, 96–102.
8. Балаев А. В., Парфенова Л. В., Губайдуллин И. М., Русаков С. В., Спивак С. И., Халилов Л. М., Джемилев У. М., “Механизм реакции циклоалюминирования алкенов триэтилалюминием в алюмациклопентаны, катализируемой Cp_2ZrCl_2 ”, *ДАН*, 2011, № 381, 364–367.
9. Губайдуллин И. М., Спивак С. И., “Информационно-аналитическая система обратных задач химической кинетики”, *Системы управления и информационные технологии*, 2008, № 1.1, 150–153.

Mathematical modeling of reaction cycloalumination of olefins and acetylenes threethylaluminum

© L. R. Abzalilova ³, S. I. Spivak ⁴

Abstract. The paper presents the results of mathematical modeling of catalytic cycloalumination olefins and acetylenes, kinetic parameters were calculated and analyzed by flow rate limiting steps of the reaction.

Key Words: mathematical model, direct и inverse kinetic problems, kinetic parametrs

³ Research associate, laboratory of mathematical chemistry, Institute of Petrochemistry and Catalysis RAS, с. Ufa; abzalilova.liya@gmail.com.

⁴ Head of Laboratory of mathematical chemistry, Institute of Petrochemistry and Catalysis RAS, с. Ufa; s.spivak@bashnet.ru.

УДК 517.929

Устойчивость неограниченных решений

© Л. Д.Блистанова¹, В.И. Зубов², И.В. Зубов³, С.А. Стрекопытов⁴

Аннотация. В статье изучаются неограниченные решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь получены условия устойчивости неограниченных решений и оценки на скорость приближения траекторий возмущенного движения к траектории невозмущенного

Ключевые слова: вектор, собственное число, матрица, строка, число, решение, параметр, уравнение

1. Введение

Интуитивно очевидно, что системы с простой структурой легче реализуются в инженерном смысле. Конечно, понятие простоты весьма относительно, но, скажем, квадратичные системы вызовут предпочтение у любого конструктора перед системами, включающими более сложные нелинейности. Рассмотрение нелинейных систем с простой структурой, имеющих несколько неустойчивых положений равновесия, но имеющих заданным образом геометрически локализованное ограниченное инвариантное множество, к тому же глобально асимптотически устойчивое, позволяет создавать весьма эффективные системы управления. По сути это предельное множество является аналогом устойчивого положения равновесия для линейных и линеаризованных систем. Но в данном случае алгебраические критерии устойчивости, основанные на анализе собственных чисел матрицы линейного приближения, беспомощны. Это связано с тем, что аналитическая природа этих предельных множеств, как правило, весьма сложна. Для составления возмущенной системы требуется интегрирование уравнений движения, что в общем случае не осуществимо.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = PX + Q + \mu F(X), \quad (2.1)$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)^*$ - вектор фазовых переменных, P, Q - постоянные матрицы размерностей $n \times n$ и $n \times 1$ соответственно, $F = (f_1, \dots, f_n)^*$ - векторная функция, μ - малый параметр. *Равновесным решением (движением)* мы будем называть такое решение (движение)

$$x(t, X_0) = (x_1(t, X_0), \dots, x_n(t, X_0))^*$$

в n - мерном пространстве, у которого одна из координат неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$, а остальные постоянны, например,

$$x_j(t, X_0) \equiv x_j^0, \quad j = 1, \dots, n-1; \quad x_n \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

¹ Профессор кафедры Теории управления, СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

² Аспирант кафедры Теории управления, СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

³ Профессор кафедры Теории управления, СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

⁴ Доцент кафедры Теории управления, СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Вектор S_n ортогонален всем строкам матрицы P , т.е. ортогонален подпространству, натянутому на строки матрицы P , и так как

$$\nabla \varphi_i = \sum \sigma_{ij} \nabla f_j,$$

где σ_{ij} - элементы матрицы S^{-1} , то выполнено (2.6), а следовательно, будет справедливо и соотношение (2.5), если ∇f лежат в подпространстве, натянутом на строки матрицы P . Рассмотрим равновесное решение $X(t)$. Пусть точка $M \in E_n$. Введем в рассмотрение величину $\rho(M, X(t))$ - расстояние от точки M до траектории $X(t)$: $\rho(M, X(t)) = \min_{\tau \geq t_0} \|M - X(\tau)\|$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Равновесное решение $X(t)$ называется орбитально устойчивым (орбитально асимптотически устойчивым), если для любого сколь угодно малого положительного ε найдется $\delta > 0$ такое, что при $\rho(X_0, X(t)) < \delta$ будет выполняться

$$\rho(X(t, X_0), X(t)) < \varepsilon \text{ при } t \geq 0 \quad (\rho(X(t, X_0), X(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 2.1. Пусть для системы (2.1) собственные числа матрицы P таковы, что $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ ($j = 1, \dots, n-1$), $\lambda_n = 0$, векторы ∇f_j ($j = 1, \dots, n$) существуют и лежат в подпространстве, натянутом на строки матрицы P . Тогда существует такое $\mu_0 > 0$, что для любого μ , по модулю превосходящего μ_0 , существует орбитально асимптотически устойчивое неограниченное равновесное решение системы (2.1), устойчивое по Ляпунову.

Далее будем рассматривать систему вида

$$\begin{aligned} \dot{X} &= PX + \mu F(X, z), \\ \dot{z} &= r + \mu h(X, z), \end{aligned} \tag{2.7}$$

в которую переходит система вида (2.1), если матрица P имеет хотя бы одно нулевое собственное число. Здесь $X = (x_1, \dots, x_N)^*$, $P - N \times N$ -матрица, $r > 0$, μ - малый параметр, $F = (f_1, \dots, f_N)$ - векторная, $h(X, z)$ - скалярная функция переменных $x_1, \dots, x_N, z$. Если $F(0, z) \equiv 0$, $h(0, z) \equiv 0$, то у системы (2.7) существует семейство неограниченных равновесных решений

$$x_1 = x_2 = \dots = x_N = 0, \quad z = z_0 + rt, \tag{2.8}$$

представляющее плоскость в $(N+1)$ -мерном пространстве. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$. Задача состоит в изучении свойства этого решения. Здесь и далее будем предполагать относительно функций F, h следующее: 1) функции $f_1, \dots, f_N, h$ разлагаются в ряды по целым положительным степеням переменных $x_1, \dots, x_N$, равномерно сходящимся относительно z , когда величина $\|X\|$ достаточно мала; 2) разложения функций $f_1, \dots, f_N, h$ не содержат членов, линейных относительно $x_1, \dots, x_N$; 3) имеет место оценка $|h| \leq k_0 |z|^b (\sum_{j=1}^N |x_j|)^a$, где $k_0 > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$. Рассмотрим следующий случай.

2.1. Случай нескольких пар чисто мнимых корней

Система (2.7) линейным преобразованием приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= -\lambda_s y_s + \mu F_s, & \dot{y}_s &= \lambda_s x_s + \mu G_s, \\ \dot{\xi}_j &= \sum_{i=1}^n p_{ji} \xi_i + \mu g_j, & \dot{z} &= r + \mu h, \\ s &= 1, \dots, k, & j &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь N -мерный ($2k+n=N$) вектор X перешел в вектор $(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k, \xi_1, \dots, \xi_n)$. Собственные числа матрицы $\{p_{ji}\}$, $i, j = 1, \dots, n$, имеют отрицательные вещественные части. А.М. Ляпунов в своей знаменитой диссертации [1] отмечал, что, если вместо времени взять какую-либо непрерывную вещественную функцию, вместе со временем возрастающую, то последняя при решении вопроса об устойчивости может играть такую же роль, как и время. Исследуем, как ведут себя переменные x_k, y_k, ξ_j в качестве функции z . Разделим первые $2k+n$ уравнений системы (2.9) на последнее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dz} &= -\bar{\lambda}_s y_s + \mu \bar{F}_s, & \frac{dy_s}{dz} &= \bar{\lambda}_s x_s + \mu \bar{G}_s, \\ \frac{d\xi_j}{dz} &= \sum_{i=1}^n p_{ji} \xi_i + \mu \bar{g}_j. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Очевидно, что $\bar{\lambda}_s > 0$. Собственные числа матрицы $\{p_{ji}\}$ имеют отрицательные вещественные части, и у системы (2.10) имеется нулевое решение. Функции $\bar{F}_s, \bar{G}_s, \bar{g}_j$, удовлетворяют следующим условиям: 1) они разлагаются в ряды по целым положительным степеням величин x_k, y_k, ξ_j , равномерно сходящиеся относительно z при достаточно малых $|x_k|, |y_k|, |\xi_j|$; 2) разложения функций $\bar{F}_s, \bar{G}_s, \bar{g}_j$ не содержат членов, линейных относительно x_k, y_k, ξ_j . Если мы имеем дело с общим по классификации А.М. Ляпунова случаем [2], то с помощью преобразований Ляпунова

$$\begin{aligned} x_s &= r_s \cos \theta_s, & y_s &= r_s \sin \theta_s, \\ r_s &= \rho_s + \sum_{i=z}^m r_s^{(i)}(\theta_1, \dots, \theta_k, \rho_1, \dots, \rho_k, z), \end{aligned}$$

а затем

$$\xi_j = \sum_{i=1}^m r_s^{(i)}(\theta_1, \dots, \theta_k, \rho_1, \dots, \rho_k, z) + \eta_i,$$

не нарушающих вопроса об устойчивости, где $r_j^{(i)}, \xi_j^{(i)}$ - однородные формы относительно $\rho_1, \dots, \rho_k$ степени l с периодическими коэффициентами относительно $\theta_1, \dots, \theta_k$, m - положительное целое число, система (2.10) в общем случае приводима к виду

$$\frac{d\rho_s}{dz} = \mu R_s, \quad \frac{d\theta_s}{dz} = \bar{\lambda}_s + \mu \theta_s, \quad \frac{d\eta_i}{dz} = \sum_{i=1}^m p_{ji} \eta_i + \mu p_j. \quad (2.11)$$

Напомним, что m определяется как наименьшая степень форм относительно $\rho_1, \dots, \rho_k$, обладающих периодическими по $\theta_1, \dots, \theta_k$ коэффициентами, вычисляемыми подстановкой в систему (2.10) выражений

$$r_s = \rho_s + \sum_{i=z}^{\infty} r_s^{(i)}(\theta_1, \dots, \theta_k, \rho_1, \dots, \rho_k, z)$$

и приравниванием членов одного порядка в получившихся выражениях [3]. Разложение функций R_s в ряды по степеням $\rho_1, \dots, \rho_k$ при $\eta_1 = 0, \dots, \eta_n = 0$ начинается с форм степени m , которые обладают не зависящими от θ_k коэффициентами. Разложение функций p_j по степеням $\rho_1, \dots, \rho_k$ при $\eta_1 = 0, \dots, \eta_n = 0$ начинаются с форм степени $v \geq m+1$. Ряды, в которые разлагаются функции R_s, θ_s, p_j , сходятся равномерно относительно z . Обозначим $R^{(0)}$ форму порядка m , с которой начинается разложение функции R_s при $\eta_1 = 0, \dots, \eta_n = 0$.

Т е о р е м а 2.2. Если нулевое решение системы

$$\frac{d\rho_s}{dz} = \mu R^{(0)}, \quad s = 1, \dots, k, \quad (2.12)$$

асимптотически устойчиво, то нулевое решение системы (2.10) также асимптотически устойчиво. При этом имеют место оценки при $z \geq 0$

$$|\rho_s| \leq \psi(z), \quad |\eta_j| \leq \psi(z), \quad (2.13)$$

где

$$\psi(z) = c_1 \left(\sum_{s=1}^k \rho_s^{(0)} + \sum_{j=1}^n |\eta_j^{(0)}| \right) \times (1 + c_2 \left(\sum_{s=1}^k |\rho_s^{(0)}| + \sum_{j=1}^n |\eta_j^{(0)}| \right)^{m-1} z)^{-1/(m-1)}.$$

Здесь c_1, c_2 - положительные постоянные, $\rho_s^{(0)}, \eta_j^{(0)}$ - значения ρ_s, η_j при $z = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (2.12) существуют положительно определенные функции V и W , обладающие свойствами: 1) функция V имеет порядок $l+1-m$, функция W имеет порядок l ; 2) $\frac{\partial V}{\partial z} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial V}{\partial \rho_s} R_s^{(0)} = -W$. Построим положительно определенную квадратичную форму V_1 , удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial V_1}{\partial \eta_j} \sum_{i=1}^n \bar{p}_{ji} \eta_i = - \sum_{i=1}^m \eta_i^2.$$

Рассмотрим полную производную функции $U = V + V_1$ в силу системы (2.12):

$$\frac{dU}{dz} = \frac{dV}{dz} + \frac{dV_1}{dz} = -W - \sum_{i=1}^n \eta_i^2 + \sum_{s=1}^k \frac{\partial V}{\partial \rho_s} \times (R_s - R_s^{(0)}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_1}{\partial \eta_j} p_j.$$

В малой окрестности начала координат справедливы оценки [1]

$$\left| \sum_{s=1}^k \frac{\partial V}{\partial \rho_s} (R_s - R_s^{(0)}) \right| \leq a \left[\sum_{s=1}^k |\rho_s| \right]^{i+1},$$

$$\left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_1}{\partial \eta_j} p_j \right| \leq a \left[\sum_{s=1}^k |\rho_s| \right]^{m+1} \sum_{s=1}^k |\eta_j| + b \sum_{j=1}^n |\eta_j|^2 \sum_{s=1}^k |\rho_s|,$$

где $a > 0, b > 0$. Функция U является положительно определенной, а ее производная dU/dz , вычисленная в силу системы (2.12), является отрицательно определенной функцией при $l = m+1$. Следовательно, решение

$$\rho_1 = \dots \rho_k = 0, \quad \eta_1 = \dots = \eta_m = 0,$$

$$\theta_1 = \lambda_1 z, \quad \theta_2 = \lambda_2 z, \quad \dots, \quad \theta_k = \lambda_k z$$

системы (2.12) асимптотически устойчиво при $l = m+1$, и U удовлетворяет неравенствам

$$a_1 \left(\sum_{j=1}^k |\rho_s|^2 + \sum_{j=1}^n |\eta_j|^2 \right) \leq U \leq a^2 \left(\sum_{s=1}^k |\rho_s|^2 + \sum_{j=1}^n |\eta_j|^2 \right), \quad (2.14)$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. В малой окрестности начала координат справедливы неравенства

$$-b_1 U \leq \frac{dU}{dz} \leq -b_2 U^{(m+1)/2}, \quad (2.15)$$

где $b_1 > 0$, $b_2 > 0$. Отсюда следует

$$U \leq U_0 \left(1 + \frac{m-1}{2} b_2 U_0^{(m-1)/2} z \right)^{-2/(m-1)}. \quad (2.16)$$

Из (2.14), (2.16) следует

$$U \leq a_2 \left(\sum_{j=1}^k |\rho_s^{(0)}|^2 + \sum_{j=1}^n |\eta_j^{(0)}|^2 \right) \times \left(1 + \frac{m+1}{2} b_2 a_1 \times \left(\sum_{s=1}^k |\rho_s^{(0)}|^2 + \sum_{j=1}^n |\eta_j^{(0)}|^2 \right)^{(m-1)/2} z \right)^{-2/(m-1)}.$$

Отсюда и из неравенства (2.16) и следуют доказываемые оценки (2.13).

Доказательство закончено.

З а м е ч а н и е 2.1. Из теоремы и определения величин ρ_s , η_j следует, что при $z \geq 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |x_s| &\leq \bar{\psi}(z), \quad |y_s| \leq \bar{\psi}(z), \\ |\xi_j| &\leq \bar{\psi}(z), \quad s = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$\bar{\psi}(z) = c_1 \left(\sum_{s=1}^k (|x_s^{(0)}| + |y_s^{(0)}|) + \sum_{j=1}^n |\xi_j^{(0)}| \right) \times \left(1 + c_2 \left(\sum_{s=1}^k (|x_s^{(0)}| + |y_s^{(0)}|) + \sum_{j=1}^n |\xi_j^{(0)}| \right)^{m-1} z \right)^{-1/(m-1)};$$

параметры c_1, c_2 в функции $\bar{\psi}(z)$ будут зависеть от коэффициентов в разложениях r_s , $\bar{\xi}_j$ [3]. Получив оценки для $|x_s|$, $|y_s|$, $|\xi_j|$, вернемся к уравнению $\dot{z} = r + \mu h$. Оценим величину h :

$$h \leq k_0 z^b c_1 \left(\sum_{s=1}^k (|x_s^{(0)}| + |y_s^{(0)}|) + \sum_{j=1}^n |\xi_j^{(0)}| \right) \times \left(1 + c_2 \left(\sum_{s=1}^k (|x_s^{(0)}| + |y_s^{(0)}|) + \sum_{j=1}^n |\xi_j^{(0)}| \right)^{m-1} z \right)^{-a/(m-1)}.$$

Исследуем, при каких условиях $z \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Возможны три случая: 1) $D = b - a/(m-1) = 0$; 2) $D < 0$; 3) $D > 0$. В первых двух случаях за счет выбора $x_s^{(0)}$, $y_s^{(0)}$, $\xi_j^{(0)}$, μ можно сделать $|\mu h| < r/2$. Тогда $z \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. В третьем случае можно показать [3], что для любого конечного $\bar{z}$ найдется такое μ_0 , что при $|\mu| \leq \mu_0$ на любом движении, начинающемся в области $|x_s^{(0)}| < \delta$, $|y_s^{(0)}| < \delta$, $|\xi_j^{(0)}| < \delta$, будут сохраняться неравенства (2.17), а z будет постоянно возрастать от 0 до $\bar{z}$ при возрастании времени. Таким образом, мы доказали следующие теоремы.

Т е о р е м а 2.3. Если выполнены условия теоремы 2.2. и $D \leq 0$, то равновесное решение системы (2.7) орбитально асимптотически устойчиво.

Т е о р е м а 2.4. Если выполнены условия теоремы 2.2. и $D > 0$, то для любого конечного $\bar{z}$ за счет выбора x_s^0, y_s^0, ξ_j, μ величины $|x_s|, |y_s|, |\xi_j|$ становятся сколь угодно малыми при возрастании времени [4].

Исследуем теперь равновесное решение на устойчивость. Обозначим равновесное решение $Z(t)$, а гиперплоскость, проходящую через точку $Z(t)$ при фиксированном t перпендикулярно оси z , $-P(t)$. Эта гиперплоскость определяется уравнением

$$(X - Z(t), \dot{Z}(t)) = 0.$$

Интегральная кривая $X(t, X_0)$ достигает $P(t)$ за время $\tau = \tau(t, X_0)$, следовательно, вектор $Y = X(\tau, X_0) - Z(t)$ лежит в $P(t)$. таким образом, выполняется $(Y, \dot{Z}(t)) = 0$. Дифференцируя последние два равенства, получим

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= \frac{r}{r + \mu h}, \quad \dot{x}_s = (-\lambda_s y_s + \mu F_s) \frac{r}{r + \mu h}, \\ \dot{y}_s &= (\lambda_s x_s + \mu G_s) \frac{r}{r + \mu h}, \quad \dot{\xi}_j = \left(\sum_{i=1}^n p_{ji} \xi_i + \mu g_j \right) \frac{r}{r + \mu h}, \\ s &= 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Сделаем замену $\tau = t_\theta$. Первое уравнение (2.18) примет вид

$$\dot{\theta} = -\frac{\mu h}{r + \mu h}. \quad (2.19)$$

К системе (2.18) применим теорему 2.2.. Получим оценки

$$|x_s| \leq \psi(t), \quad |y_s| \leq \psi(t), \quad |\xi_j| \leq \psi(t),$$

где

$$\psi(t) = c_1 \left(\sum_{s=1}^k (|x_s^{(0)}| + |y_s^{(0)}|) + \sum_{j=1}^n |\xi_j^{(0)}| \right) \times (1 + c_2 \left(\sum_{s=1}^k (|x_s^{(0)}| + |y_s^{(0)}|) + \sum_{j=1}^n |\xi_j^{(0)}| \right)^{m-1} t)^{-1/(m-1)}.$$

Интегрируя уравнение (2.19), получим

$$\theta - \theta_0 = \int_0^t -\frac{\mu h}{r + \mu h} d\tau.$$

Величина подинтегральной функции ограничена:

$$\left| \frac{\mu h}{r + \mu h} \right| \leq c_0 \left(\sum_{s=1}^k |x_s^{(0)}| + |y_s^{(0)}| \right) + \sum_{j=1}^n |\xi_j^{(0)}| t^D,$$

где $c_0 > 0$. При $D < -1$ интеграл сходится за счет выбора $x_s^0, y_s^0, \xi_j^0, \mu$; величина $\theta - \theta_0$ становится сколь угодно мала, поэтому верна следующая теорема [5].

Т е о р е м а 2.5. если выполнены условия теоремы 2.2. и $D < -1$, то равновесное решение системы (2.7) устойчиво по Ляпунову.

3. Выводы

Результаты, полученные в настоящей статье, относятся к тому случаю, когда параметр μ мал. Но учитывая, что функция Ляпунова будет представлять собой ряд по степеням параметра, результаты будут оставаться верными и в том случае, когда функция Ляпунова существует (соответствующие ряды сходятся), отрицательна и $z \rightarrow \infty$ и при $t \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. В. Zubov, М. Б. Авдеева, И. С. Стрекопытов, “Последовательная локализация инвариантных множеств”, *«Дифференциальные уравнения»*, Известия Российской академии естественных наук (Рязань), **17**, Рязанский гос. университет, 390000, г. Рязань, ул. Свободы, 46, 2012, 9-12.
2. А. В. Zubov, К. А. Пешехонов, С. А. Стрекопытов, М. В. Стрекопытова, “Трехмерные квадратичные системы”, *«Дифференциальные уравнения»*, Известия Российской академии естественных наук (Рязань), **17**, Рязанский гос. университет, 390000, г. Рязань, ул. Свободы, 46, 2012, 13-16.
3. В. И. Zubov, И. В. Zubov, А. Ф. Zubova, А. И. Иванов, “Уравнение для регулярного интеграла”, *«Дифференциальные уравнения»*, Известия Российской академии естественных наук (Рязань), **17**, Рязанский гос. университет, 390000, г. Рязань, ул. Свободы, 46, 2012, 17-20.
4. А. Ф. Zubova, *Математические методы моделирования промышленных процессов и технологий*, СПбГУ, СПб., 2004, 472 с.
5. А. В. Zubov, С. В. Zubov, *Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений*, АОТ «Мобильность-плюс», СПб., 2012, 357 с.

The stability of inlimiting solutions

© L.D. Blistanova⁵, V.I. Zubov⁶, I.V. Zubov⁷, S.A. Strekopitov⁸

Abstract. In article is learning in limiting solutions of systems ordinary differential equations. Here is receiving conditions of stability in limiting solutions estimates on speed approximation trajectories indignant motion from trajectory in indignant

Key Words: vector, own number, matrix, line, number, solution, parameter, equation

⁵ Professor, chair of theory control faculty AM-PC, SPbGU; t. Saint-Petersburg

⁶ Post-graduate, chair of theory control faculty AM-PC SPbGU; t. Saint-Petersburg

⁷ Professor chair of theory control faculty AM-PC, SPbGU; t. Saint-Petersburg

⁸ Docent chair of theory control faculty AM-PC, SPbGU; t. Saint-Petersburg

УДК 533.6.013.42

Математическое моделирование динамики защитного экрана при взаимодействии со сверхзвуковым потоком газа

© П. А. Вельмисов¹, В. А. Судаков², А. В. Анкилов³

Аннотация. Исследуется решение начально-краевой задачи для связанной системы дифференциальных уравнений с частными производными, описывающей динамику упругой стенки (защитного экрана) резервуара, заполненного жидкостью, при взаимодействии стенки со сверхзвуковым потоком газа. Численно-аналитическое решение, основанное на методе Бубнова-Галёркина, позволяет провести численный эксперимент с целью определения характера колебаний.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, упругая пластина, деформация, динамика, устойчивость, сверхзвуковой поток газа, жидкость, дифференциальные уравнения с частными производными, численное решение, метод Бубнова-Галёркина

1. Введение

При проектировании различных конструкций, устройств, приборов, аппаратов, систем и т. д., находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа), необходимо решать задачи, связанные с исследованием динамики и устойчивости упругих элементов, требуемой для их качественного функционирования и надёжности эксплуатации [2] - [21]. Воздействие потока может приводить к эффектам, являющимся причиной нарушения функциональных свойств элементов, вплоть до их разрушения (например, приводить к состоянию неустойчивости вследствие увеличения амплитуды или ускорения колебаний до критически допустимых значений). Такая проблема, когда неустойчивость является негативным явлением, возникает, например, при проектировании составных частей летательных и подводных аппаратов: элерона – составной части крыла; руля высоты – составной части стабилизатора, руля направления – составной части киля; панели – составной части фюзеляжа или крыла [2], [5], [6], [8], [9], [12], [13], [14], [17]. Аналогичная проблема возникает при исследовании течений в проточных каналах, трубопроводах различного назначения, содержащих упругие элементы [7], [10], [11], [14], [15], [18].

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике и используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий, в частности, устройства для подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки (см., например [20]). Другим примером, когда деформация упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии необходима для функционирования приборов и является основой их работы, являются датчики давления [3], [4], [16], [19].

¹ Доктор физ.-мат. наук, зав. кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

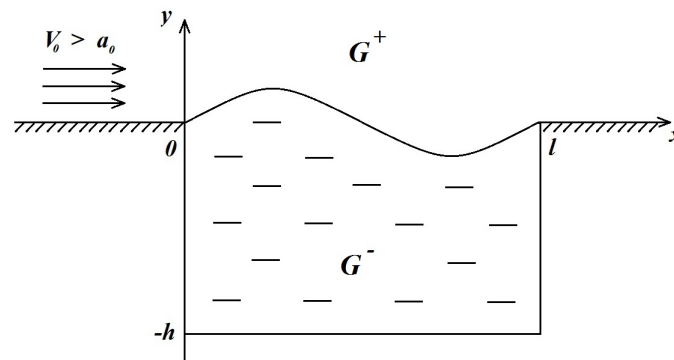
² Аспирант кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; sseevvaa@inbox.ru.

³ Кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; ankil@ulstu.ru.

В работе рассматривается численно-аналитическое решение задачи о динамике упругой стенки (защитного экрана) резервуара, заполненного жидкостью (несжимаемая среда), при обтекании стенки сверхзвуковым потоком газа (сжимаемая среда). Исследование проводится в линейной постановке. Задача сведена к решению дифференциального уравнения в частных производных с начальными и краевыми условиями, в котором неизвестной является функция деформации стенки резервуара. На основе численного эксперимента, основой которого является метод Бубнова-Галёркина, проводится анализ зависимости характера колебаний от параметров механической системы, в т.ч. от значения скорости набегающего сверхзвукового потока. Этот анализ позволяет судить об устойчивости или неустойчивости колебаний.

2. Постановка задачи

Рассматривается плоская задача о динамике упругой стенки резервуара $G^- = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < l, -h < y < 0\}$, заполненного жидкостью. Упругой является стенка, занимающая положение $y = 0$, $0 < x < l$ и моделируемая упругой пластиной. Остальные стенки ($x = 0$, $x = l$ и $y = -h$) считаются недеформируемыми (рис. 2.1). В области $G^+ = \{(x, y) \in R^2 : x \in (-\infty, +\infty), y \in (0, +\infty)\}$ протекает сверхзвуковой поток газа в направлении оси Ox со скоростью $V_0 > a_0$, где a_0 – скорость звука. Предполагается, что число Маха $M_0 = \frac{V_0}{a_0} > \sqrt{2}$.



Р и с у н о к 2.1

Резервуар с деформируемой стенкой, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа

Введем обозначения: $w(x, t)$ – функция деформации (прогиб) пластины; $\varphi^-(x, y, t)$ – потенциал скорости жидкости в области G^- , $\varphi^+(x, y, t)$ – потенциал скорости газа в области G^+ . Математическая постановка задачи в линейном приближении имеет вид:

$$\varphi_{tt}^+ + 2V_0\varphi_{xt}^+ + V_0^2\varphi_{xx}^+ = a_0^2(\varphi_{xx}^+ + \varphi_{yy}^+), \quad (x, y) \in G^+; \quad (2.1)$$

$$\varphi_y^+(x, 0, t) = \begin{cases} w_t + V_0 w_x, & x \in (0, l), \quad t \geq 0, \\ 0, & x \in (l, +\infty) \quad t \geq 0; \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\varphi^+(0, y, t) = 0, \quad \varphi_x^+(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, \infty), \quad t \geq 0; \quad (2.3)$$

$$\varphi^+(x, y, 0) = 0, \quad \varphi_t^+(x, y, 0) = 0, \quad x \in (0, \infty), \quad y \in (0, \infty); \quad (2.4)$$

$$\varphi_{xx}^- + \varphi_{yy}^- = 0, \quad (x, y) \in G^-; \quad (2.5)$$

$$\varphi_y^-(x, -h, t) = 0, \quad \varphi_y^-(x, 0, t) = w_t(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \geq 0; \quad (2.6)$$

$$\varphi_x^-(0, y, t) = 0, \quad \varphi_x^-(l, y, t) = 0, \quad y \in (-h, 0), \quad t \geq 0; \quad (2.7)$$

$$mw_{tt}(x, t) + Dw_{xxx}(x, t) = (p^- - \rho^- \varphi_t^-(x, 0, t)) - (p^+ - \rho(\varphi_t^+(x, 0, t) + V_0 \varphi_x^+(x, 0, t))); \quad (2.8)$$

$$w(0, t) = w_{xx}(0, t) = w(l, t) = w_{xx}(l, t) = 0, \quad t \geq 0; \quad (2.9)$$

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad w_t(x, 0) = f_2(x), \quad x \in (x, l). \quad (2.10)$$

Здесь индексы x, y, t снизу обозначают производные по x, y и t ; D и m – изгибная жесткость и погонная масса пластины; V_0 , ρ^+ , p^+ – скорость газа, плотность и давление в набегающем однородном потоке в области G^+ ; ρ^- , p^- – плотность и давление жидкости в области G^- в состоянии покоя.

Уравнение (2.1) описывает течение газа в области G^+ в модели идеальной сжимаемой среды; (2.2), (2.6), (2.7) – условия непротекания; (2.3) – условия отсутствия возмущений перед пластиной в области G^+ ; (2.4) – условия отсутствия возмущений в начальный момент времени в области G^+ ; уравнение Лапласа (2.5) описывает динамику жидкости в области G^- в модели идеальной несжимаемой среды; (2.8) – уравнение, описывающее динамику упругой стенки резервуара с учетом воздействия на неё сверхзвукового потока газа сверху и жидкости снизу; условия (2.9) соответствуют шарнирному закреплению концов упругого элемента резервуара; (2.10) – начальные условия, которые должны быть согласованы с (2.9). Заметим, что предлагаемый ниже метод решения задачи пригоден и для любых других закреплений концов, например для жесткого защемления.

Уравнения и условия (2.1) – (2.10) образуют начально-краевую задачу для определения трех неизвестных функций $w(x, t)$, $\varphi^+(x, y, t)$, $\varphi^-(x, y, t)$.

Для решения задачи в верхней области G^+ применим операционный метод. Перейдем в уравнении (2.1) и условии (2.2) к безразмерным переменным $\varphi^*(x^*, y^*, t^*)$, $w^*(x^*, t^*)$, x^* , y^* , t^* :

$$\varphi^*(x^*, y^*, t^*) = \frac{\varphi^+(x, y, t)}{V_0 l}, \quad w^*(x^*, t^*) = \frac{w(x, t)}{l}, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad y^* = \frac{y}{l}, \quad t^* = \frac{V_0 t}{l}. \quad (2.11)$$

Тогда уравнение (2.1) и условие (2.2) примут вид:

$$\varphi_{t^* t^*}^* + 2\varphi_{x^* t^*}^* + \varphi_{x^* x^*}^* = M_0^{-2} (\varphi_{x^* x^*}^* + \varphi_{y^* y^*}^*), \quad (2.12)$$

$$\varphi_{y^*}^*(x^*, 0, t^*) = \begin{cases} w_t^* + w_x^*, & x^* \in (0, 1), \quad t^* \geq 0, \\ 0, & x^* \in (1, +\infty) \quad t^* \geq 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (2.12) по переменным x^* и t^* , с учетом условий (2.3), (2.4), для двойного изображения по Лапласу $\tilde{\varphi}^*(p, y^*, q)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$[(p + q)^2 - M_0^{-2} p^2] \tilde{\varphi}^*(p, y^*, q) = M_0^{-2} \tilde{\varphi}_{y^* y^*}^*(p, y^*, q). \quad (2.14)$$

Применяя преобразование Лапласа по переменным x^* и t^* к граничному условию непротекания (2.13), будем иметь

$$\tilde{\varphi}_y^*(p, 0, q) = (q + p) \tilde{w}(p, q). \quad (2.15)$$

Общее решение уравнения (2.14), удовлетворяющее условию затухания при $y^* \rightarrow \infty$ и граничному условию непротекания (2.15), имеет вид

$$\bar{\varphi}^*(p, y^*, q) = -\frac{(p+q)\bar{w}(p, q)}{M_0\sqrt{(p+q)^2 - M_0^{-2}p^2}} e^{-M_0\sqrt{(p+q)^2 - M_0^{-2}p^2}y^*}. \quad (2.16)$$

Из выражения (2.16) при $y = 0$ находим изображение слагаемого из правой части уравнения (2.8)

$$-\rho(\varphi_t^+(x, 0, t) + V_0\varphi_x^+(x, 0, t)) = -\alpha p^+ M_0^2(\varphi_{t^*}^* + \varphi_{x^*}^*), \quad (2.17)$$

а именно

$$-\alpha M_0^2(\varphi_{t^*}^* + \varphi_{x^*}^*)_{y=0} \Leftarrow -\alpha M_0^2(p+q)\bar{\varphi}^*(p, 0, q) = \frac{\alpha M_0(p+q)^2\bar{w}(p, q)}{\sqrt{((p+q)^2 - M_0^{-2}p^2)}}. \quad (2.18)$$

Дальнейшее решение задачи состоит в нахождении оригинала, соответствующего изображению

$$\frac{\alpha M_0(p+q)^2\bar{w}(p, q)}{\sqrt{((p+q)^2 - M_0^{-2}p^2)}}. \quad (2.19)$$

Приближенное выражение оригинала, соответствующее изображению (2.19), полученное на основе квазистатической теории, в которой формула для вычисления давления получена путем разложения по приведенной частоте точного выражения для давления двумерного неустановившегося течения [1], [21], имеет вид (в размерных переменных)

$$\frac{\rho^+ V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left(V_0 w_x(x, t) + \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1} w_t(x, t) \right) \quad (2.20)$$

Тогда уравнение динамики упругой стенки резервуара (2.8) принимает вид

$$\begin{aligned} & m w_{tt}(x, t) + D w_{xxxx}(x, t) = \\ & = (p^- - \rho^- \varphi_t^-(x, 0, t)) - p^+ - \frac{\rho^+ V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left(V_0 w_x(x, t) + \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1} w_t(x, t) \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Слагаемое

$$-p^+ - \frac{\rho^+ V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left(V_0 w_x(x, t) + \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1} w_t(x, t) \right) \quad (2.22)$$

в уравнении (2.21) описывает воздействие на пластину сверхзвукового потока газа.

Получим дифференциальное уравнение в частных производных, которое описывает динамику упругой стенки резервуара с учетом аэрогидродинамического воздействия на неё, содержащее лишь $w(x, t)$, согласно поставленной задаче (2.5) - (2.10).

Представим потенциал скорости $\varphi^-(x, y, t)$, являющийся решением уравнения Лапласа (2.5), в виде

$$\varphi^-(x, y, t) = \alpha(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos(\lambda_n x) (e^{\lambda_n y} + e^{-\lambda_n y} e^{-2\lambda_n h}), \quad (2.23)$$

где $\alpha(t)$ и $b_n(t)$ - некоторые произвольные функции, а $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$.

Условия (2.7) и первое условие (2.6) выполнены. Удовлетворяя второму условию (2.6), получим

$$b_m(t) = \frac{2}{l\lambda_m(1 - e^{-2\lambda_m h})} \int_0^l w_t(x, t) \cos(\lambda_m x) dx. \quad (2.24)$$

Подставляя (2.24) в (2.23), согласно (2.8), получим уравнение динамики упругой пластины

$$\begin{aligned} & mw_{tt}(x, t) + Dw_{xxxx}(x, t) = \\ &= (p^- - p^+) - \frac{\rho^+ V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \left(V_0 w_x(x, t) + \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1} w_t(x, t) \right) - \\ &- \rho^- \left(\alpha_t(t) + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n x)(1 + e^{-2\lambda_n h})}{\lambda_n(1 - e^{-2\lambda_n h})} \int_0^l w_t(x, t) \cos(\lambda_n x) dx \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Оставшуюся произвольной функцию $\alpha_t(t)$ определим, удовлетворяя уравнению (2.25) в среднем, учитывая при этом условие несжимаемости среды

$$\alpha_t(t) = \left(-D \int_0^l w_{xxxx}(x, t) dx + (p^- - p^+)l \right) \frac{1}{l\rho^-}. \quad (2.26)$$

3. Численно - аналитическое решение задачи

Применим метод Галёркина для решения начально-краевой задачи (2.25), (2.9), (2.10). Приведем уравнение (2.25) к виду

$$\begin{aligned} w_{tt}(x, t) = & \frac{1}{m} (-Dw_{xxxx}(x, t) + p - \theta V_0 w_x - \theta \gamma w_t) - \\ & - \frac{1}{m} \rho^- \left(\alpha_t(t) + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\lambda_n x) K_n \int_0^l w_t(x, t) \cos(\lambda_n x) dx \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $p = (p^- - p^+)$, $\theta = \frac{\rho^+ V_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}}$, $K_n = \frac{(1 + e^{-2\lambda_n h})}{\lambda_n(1 - e^{-2\lambda_n h})}$, $\gamma = \frac{M_0^2 - 2}{M_0^2 - 1}$.

Согласно методу Галёркина пробное решение $w(x, t)$ будем искать в виде

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^N w_k(t) \sin(\lambda_k x), \quad (3.2)$$

где $\{\sin(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная система базисных функций на отрезке $[0, l]$, подобранных так, чтобы выполнялись заданные краевые условия (2.9).

Условия ортогональности невязки уравнения (3.1) с учетом (3.2) позволяют записать систему уравнений для $w_k(t)$

$$\begin{aligned} \ddot{w}_k = & \frac{2}{lm} \left(-D \frac{l}{2} \lambda_k^4 w_k - \theta V_0 \sum_{k=1}^N \lambda_k w_k H_{k,m}^1 - \theta \gamma \frac{l}{2} \dot{w}_k + H_m^2 (p - \rho^- \alpha_t(t)) \right) - \\ & - \frac{4}{l^2 m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} K_n \sum_{k=1}^N w_k H_{k,n}^3 H_{m,n}^4 \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $H_{k,m}^1 = \int_0^l \cos(\lambda_k x) \sin(\lambda_m x) dx$, $H_m^2 = \int_0^l \sin(\lambda_m x) dx$, $H_{k,n}^3 = \int_0^l \sin(\lambda_k x) \cos(\lambda_n x)$, $H_{m,n}^4 = \int_0^l \sin(\lambda_m x) \cos(\lambda_n x)$.

Начальные условия для $w_k(t)$ в (3.2) получим согласно (2.10)

$$w_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \sin(\lambda_k x) dx, \quad \dot{w}_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f_2(x) \sin(\lambda_k x) dx. \quad (3.4)$$

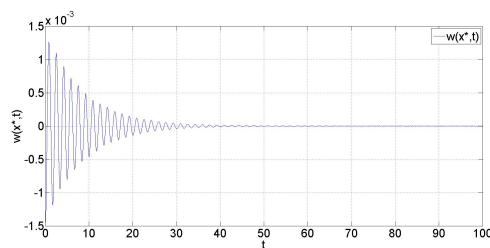
Таким образом, получена задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3) с начальными условиями (3.4).

Приведем примеры численного решения задачи (3.3), (3.4). Ниже на графиках представлены деформации упругой стенки резервуара при обтекании сверхзвуковым потоком газа при заданных параметрах механической системы. По этим графикам можно судить об устойчивости или неустойчивости колебаний стенки.

Будем считать, что упругий элемент изготовлен из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$ – модуль упругости, $\rho_{pl} = 2699$ – плотность), обтекается сверхзвуковым потоком воздуха ($\rho^+ = 1.3$), при этом резервуар заполнен водой ($\rho^- = 998.2$). Другие параметры механической системы: $l = 100$; $h = 100$; $h_{pl} = 0.5$ (толщина пластины); $m = 269.9$ (погонная масса); $\nu = 0.34$ (коэффициент Пуассона); $D = \frac{E h_{pl}^3}{12(1 - \nu^2)} = 6.5958 \cdot 10^8$ (изгибная жесткость). Все значения приведены в системе СИ. Начальные условия зададим в виде: $w(x, 0) = -0.0015 \sin(\frac{2\pi x}{l})$, $\dot{w}(x, 0) = 0$.

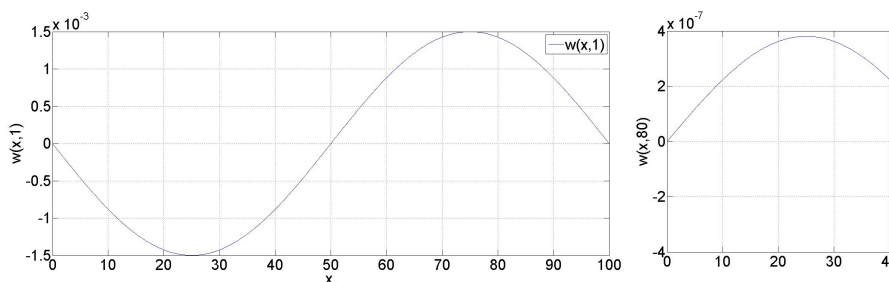
С помощью пакета прикладных программ MATLAB решается задача Коши (3.3), (3.4) (порядок приближения $N=15$) и строятся графики функции $w(x, t)$ в точке $x^* = \frac{l}{4}$ при различных значениях скорости набегающего потока V .

1. $V = 600$



Р и с у н о к 3.1

Закон колебаний $w(x^*, t)$ упругой стенки резервуара в сечении $x^* = \frac{l}{4}$

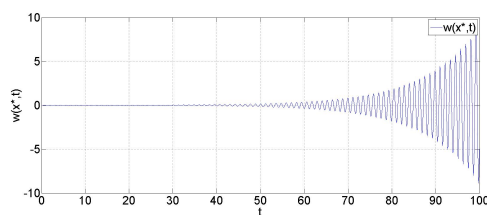


Р и с у н о к 3.2

Прогиб упругой стенки резервуара $w(x, t)$ в моменты времени $t = 1$, $t = 80$

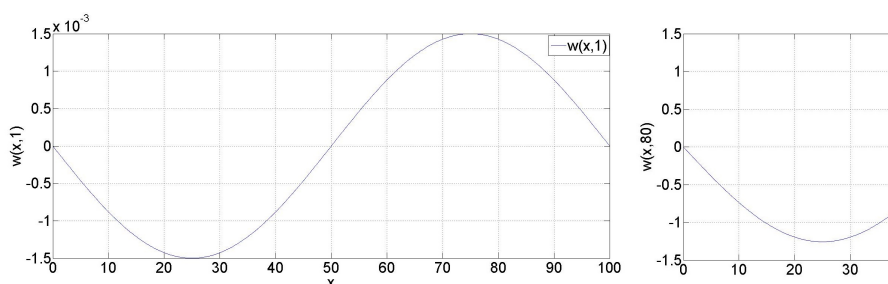
Согласно графикам на рис. 3.1 и рис. 3.2 можно сделать вывод, что решение задачи (3.3), (3.4) при скорости $V = 600$ является устойчивым.

2. $V = 1070$



Р и с у н о к 3.3

Закон колебаний $w(x^*, t)$ упругой стенки резервуара в сечении $x^* = \frac{l}{4}$



Р и с у н о к 3.4

Прогиб упругой стенки резервуара $w(x, t)$ в моменты времени $t = 1$, $t = 80$

Согласно графикам на рис. 3.3 и рис. 3.4 можно сделать вывод, что решение задачи (3.3), (3.4) при скорости $V = 1070$ является неустойчивым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Voss H. V., "The effect of an external supersonic flow on the vibration characteristics of thin cylindrical shells", *J. Aerospace Sciences*, **3** (1961), 945–956.
2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., *Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2009, 220 с.
3. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Покладова Ю. В., *Математическое моделирование механической системы "трубопровод-датчик давления"*, УлГТУ, Ульяновск, 2008, 188 с.
4. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., "Математическое моделирование механической системы "трубопровод-датчик давления"", *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **3(27)** (2007), 7–14.
5. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., "Численно-аналитическое исследование динамической устойчивости упругой пластины при аэрогидродинамическом воздействии", *Прикладная математика и механика: сборник научных трудов*, УлГТУ, Ульяновск, 2009, 3–22.

6. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Дегтярева Н. А., “Устойчивость упругих элементов крылового профиля”, *Прикладная математика и механика: сборник научных трудов*, УлГТУ, Ульяновск, 2007, 9–18.
7. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “Об устойчивости решений уравнений взаимодействия упругих стенок каналов с протекающей жидкостью”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **1(22)** (2011), 179–185.
8. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Семенова Е. П., “О решениях интегродифференциальных уравнений в задаче динамики одной аэроупругой системы типа «тандем»”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **2(23)** (2011), 266–271.
9. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “Математическое моделирование динамики и устойчивости упругих элементов крыла”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **1(37)** (2009), 7–16.
10. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Семенова Е. П., “Исследование динамической устойчивости упругих элементов стенок канала”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **2(38)** (2009), 7–17.
11. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Казакова Ю. А., “Устойчивость решений одной нелинейной начально-краевой задачи аэроупругости”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **1(30)** (2013), 1–7.
12. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “Устойчивость решений некоторых классов интегродифференциальных уравнений в частных производных”, *Вестник Самарского государственного университета, естественнонаучная серия*, **8/1(67)** (2008), 331–344.
13. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “Исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкций при сверхзвуковом обтекании”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **3(57)** (2011), 59–67.
14. Вельмисов П. А., Киреев С. В., *Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2011, 200 с.
15. Вельмисов П. А., Решетников Ю. Е., Колмановский Е. Е., “Устойчивость уравнений взаимодействия вязкоупругих пластин с жидкостью”, *Дифференциальные уравнения*, **11(30)** (2011), 1966–1981.
16. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Решетников Ю. А., “Математическое моделирование механической системы “трубопровод-датчик давления””, *Датчики и системы*, **6(49)** (2003), 12–15.
17. Вельмисов П. А., Судаков В. А., Замальдинова Ю. К., “Устойчивость решений одного класса нелинейных начально-краевых задач аэроупругости”, *Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: тезисы докладов Четвёртой Международной конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева*, РУДН, Москва, 2013, 290–292.

18. Вельмисов П. А., Молгачев А. А., *Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости вязкоупругих элементов проточных каналов*, УлГТУ, Ульяновск, 2012, 185 с.
19. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., “О некоторых математических моделях механической системы "трубопровод-датчик давления"”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки*, **1(29)** (2011), 137–144.
20. Вельмисов П. А., Горшков Г. М., Рябов Г. К., *Пат. 2062662 РФ, МПК6 В 06 В 1/18, 1/20. Гидродинамический излучатель*, Заявитель и патентообладатель Ульяновский гос. техн. ун-т. – №5038746/28; заявл. 20.07.92; опубл. 27.06.96, Бюл. №18..
21. Бочкарев С. А., Матвеев В. П., “Решение о панельном флаттере оболочечных конструкций методом конечных элементов”, *Математическое моделирование*, **12** (2002), 55–71.

Mathematical modeling of the dynamics of the shield in the supersonic gas flow.

© P. A. Velmisov⁴, V. A. Sudakov⁵, A. V. Ankilov⁶

Abstract. The solution of the initial-boundary value problem for a coupled system of differential equations describing the dynamics of the elastic wall (shield) tank filled with liquid, the interaction of the wall with a supersonic flow of gas. Numerical-analytical solution based on the method of Bubnov-Galerkin, allows a numerical experiment to determine the nature of the oscillations.

Key Words: aerohydroelasticity, elastic plate, deformation, dynamics, stability, supersonic flow of gas, liquid, differential equations with partial derivatives, the numerical solution, Bubnov-Galerkin method

⁴ Doctor of Physics and Mathematics, Head of Higher Mathematics Chair, Uljanovsk State Technical University, Uljanovsk; velmisov@ulstu.ru.

⁵ Post-graduate student of Higher Mathematics Chair, Uljanovsk State Technical University, Uljanovsk; sseevvaa@inbox.ru.

⁶ Candidate of Physics and Mathematics, assistant professor of Higher Mathematics Chair, Uljanovsk State Technical University, Uljanovsk; ankil@ulstu.ru.

УДК 577.95

Каузальные модели исторических процессов

© В. А. Воробьев¹, Ю. В. Березовская², А. Ю. Кочнев³

Аннотация. В статье для математического моделирования исторических процессов предлагаются и применяются каузальные модели (К-модели), адекватные свойствам исторических процессов. Рассмотрены базовые процессы истории: демографический процесс и этногенез. Дан обзор истории Западной Европы и её экстраполяция в ближайшее будущее.

Ключевые слова: каузальная сеть, каузальная модель, математическое моделирование исторических процессов

1. Введение

История — результат взаимодействия большого числа людей и других объектов техносферы и биосферы. Все они претерпевают изменения своих состояний, интенсивность которых нелинейно зависит от численности этих объектов. Эта нелинейность усложняет математизацию истории. Для моделирования исторических процессов предлагаются и применяются каузальные модели (К-модели). Рассмотрены базовые процессы истории: демографический процесс и этногенез.

2. Пролог математической истории

Математизация истории началась с моделей демографических процессов [1-4] и продолжилась в трудах синергетиков [9-12]. Исторические процессы не выводятся из биологии, но законы биологических популяций остаются в силе и являются базовыми для истории. На этом пути нами ранее были получены следующие результаты [2-4].

1. Объяснение мирового демографического процесса ограничивающим действием экологического барьера на экспоненциальный рост населения Земли.

2. Открытие экологической паузы конца XX века — отставания роста населения Земли от роста ёмкости техносферы — экологической ниши человечества.

3. Обнаружение причины снижения рождаемости по мере индустриального развития — информационного барьера — как следствия наложения возраста обучения на фертильный возраст женщин и повышенные нормы потребления в современном обществе.

4. Прогноз будущего развития демографической ситуации на планете — остановки роста населения Земли в середине XXI века и дальнейшее вымирание.

Пусть t — время, а T — дата от Р.Х. Зависимость ёмкости P экологической ниши человечества (техносферы) и численности N населения Земли от времени t описывается следующими уравнениями.

$$\text{Уравнение роста населения по Мальтусу (1798 г.)} \quad dN/dt = N/\tau(t) \quad (2.1)$$

$$\text{Экологический барьер (2003 [2])} \quad N = k \cdot P, k \leq 1 \quad (2.2)$$

¹ Профессор кафедры программирования и высокопроизводительных вычислений, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; vva100@atnet.ru.

² Старший преподаватель кафедры программирования и высокопроизводительных вычислений, САФУ имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; myumla.myu@gmail.com

³ Заведующий отделением ИТ-образования, САФУ имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; derxyz@yandex.ru

$$\text{Уравнение роста (2003 [2]) ниши (техносферы)} \quad dP/dt = NP/C \quad (2.3)$$

$$\text{Экологическое уравнение роста населения} \quad dN/dt = kNP/C \quad (2.4)$$

Характерное время $\tau(t)$ стремительно уменьшалось во всём мире в XIX и XX веках. Напротив, одновременное увеличение величины $\tau(t)$ в развитых странах — это *демографический переход*, т.е. снижение темпов роста населения. Из уравнений (2.1—2.4) непосредственно следуют (при $N = P$):

$$\text{Уравнение Капицы для населения Земли (1999 г. [10])} \quad dN/dt = N^2/C \quad (2.5)$$

$$\text{Формула фон Фёрстера для населения Земли (1960)} \quad N = C/(T_0 - T) \quad (2.6)$$

$$\text{Уравнение годового прироста ниши (2007 г. [11])} \quad N = C/(T_0 - T) \quad (2.7)$$

Уравнение 2.2 говорит о том, что население, превышающее величину P , не может выжить, и обречено на вымирание. Параметры уравнения 2.6 можно найти из данных С. П. Капицы [9, 10], построив линейный тренд функции $1/N$, например, в Excel. Получается, что $C \cong 197,005$ млрд. человеколет, а $T_0 \cong 2025$ год.

Демографические данные показывают, что уравнения 2.1—2.7 адекватны только в эпоху *экологического дефицита (экодефицита)* — с момента полного заселения экологической ниши где-то около 12-ти тысяч лет назад [9, 10] и до ≈ 1975 года. Избыток населения $M = N - P$ должен был удаляться или даже не родиться из-за плохого состояния здоровья голодающих женщин.

В [4] показано, что емкость экологической ниши человечества ограничивает население только до 70-х годов XX века. С этого времени действие экологического барьера прекращается. За момент выхода из экодефицита мы примем дату $T_n = 1975$ г. Из тех же уравнений нетрудно получить, что в момент T_n характерное время роста $\tau = \tau_n = T_0 - T_n$. Минимальное наблюдаемое время удвоения равно $\tau_{удв} \cong 19$ лет, а $\tau(t) = 1,44\tau_{удв} \cong 27$ лет. Население Земли 1975 года $\cong 4$ млрд. Следовательно, в момент выхода из экологического дефицита время удвоения населения Земли составляло $\tau_{удв} \cong 35$ лет, что близко к действительности.

После 1975 года наступила *экологическая пауза (экопауза)* [2-4], когда рост населения согласно мальтузианскому уравнению 2.1 стал медленнее роста ёмкости экологической ниши, заданного уравнением 2.3. В экопаузе исторические явления уже не могут объясняться экологическим дефицитом. Они являются следствием *социального взаимодействия* людей и человеческих качеств, сформированных под давлением экологического барьера. Экопауза выявила *системный кризис* человечества [4], который проявляется, прежде всего, как *экологический кризис*. Особую тревогу вызывает чрезмерное снижение рождаемости в развитых странах, которое принято называть *демографическим переходом*.

Причина демографического перехода — *информационный барьер*, состоящий в следующем. Демографические данные и социальная статистика [12, 13] выявили явную связь между ростом образования и снижением рождаемости. Аналогичные результаты получены в [11]. Снижение рождаемости можно объяснить тем, что возраст профессионального становления в сложном современном обществе перекрывает репродуктивный возраст женщин. Это явление, грозящее демографической катастрофой всем развитым странам мира, и есть информационный барьер человечества. Действие информационного барьера ярко демонстрируют демографические процессы в странах т.н. *золотого миллиарда*. Если угодно, золотой миллиард вымирает от избытка.

Экстраполяция статистики прироста населения из [10, 12, 13], на ближайшие столетия, позволила нам [4] прогнозировать динамику роста населения Земли и обнаружить, что с

середины XX века проявляется тенденция к снижению темпов роста населения. В линейном приближении к ≈ 2050 году рост населения прекратится на уровне $\cong 8 \div 9$ млрд., а далее начнётся вымирание человечества. До каких пределов будет происходить это вымирание предсказать трудно. Если допустить, что уравнение 2.3 роста экологической ниши будет действовать и в эконопаузе, пусть даже при уменьшении населения, то к концу XXI века получится совершенно нереальная для Земли ёмкость ниши в 400 млрд. человек [4]. Такая ниша возможна только в космосе. Но главное возражение против статистических моделей и прогнозов состоит в том, что мотивация людей никак не отражается в этих моделях. Феноменологические модели недостаточны для понимания и адекватного описания исторических процессов. Они не учитывают социального поведения людей. История человечества — это продукт совместной деятельности множества конкурирующих людей и в эпоху эконофицита, и в экологической паузе, и в преддверии близкой экологической катастрофы.

3. Каузальное моделирование социальных систем

Итак, необходимо моделировать историю, как продукт совместного действия множества объектов: людей, животных, биоты, экологических мест, технологий, идей и т.д. и т.п. Поведение каждого такого объекта в социуме можно представить вероятностным автоматом, переходы которого из состояния в состояние недетерминированы и неоднозначны. Это позволяет моделировать «свободу воли» людей и неопределённость поведения природных объектов. Кроме того, наши автоматы изменяют своё состояние не столько сами по себе, сколько под действием других элементов всей этой сложной системы. Взаимодействие состоит в том, что состояния «воздействующих» автоматов влияют на «изменяемые» автоматы и переводят их в новые состояния. Способ передачи воздействий и структура связей между автоматами не рассматриваются. Вместо этого принята *гипотеза сильного перемешивания*.

Метод каузального (К) моделирования (К-сеть и К-модель) строго описан в [5, 6]. Идея его состоит в том, что сеть Петри, описывающая каузальные связи между субъектами и объектами исторического процесса, дополняется интенсивностями переходов — линейными и нелинейными функциями от маркировки входных позиций, длительности такта моделирования и вероятности взаимодействия в паре вход-выход перехода. Эти функции зависят от типа перехода: линейный (при дальном действии) или нелинейный (при близком действии). Нелинейные переходы зависят от способа встречи автоматов: в растворе, как медведи в лесу, или в смеси, как птичий базар. Сами переходы имеют следующие модификации: *простые* — изменяющие только те состояния, которые подвергаются воздействию, *сохраняющие* входную маркировку и воздействующих и подвергающихся воздействию позиций, *удаляющие* все входы в выходную маркировку, *остаточные* — выполняемые для автоматов, оставшихся нетронутыми и *ингибиторные* — запрещающие переход (чего нет в сети Петри). Всего, таким образом, возможны 15 типов переходов. Кроме того, вводится внешнее состояние, допускаются действительные числа в качестве маркеров и задержка маркировок во времени. Так из сети Петри получается К-сеть, а её исполнение по правилам, подобным сети Петри, это и есть К-моделирование. Более того, из описания К-сети можно автоматически получать дифференциальные уравнения динамики средних с задержками времени. Теория и решение этих уравнений весьма сложны для исследователя-предметника, особенно гуманитария.

4. Трудовая К-модель народонаселения в эпоху экодефицита

Трудовая К-модель учитывает самое фундаментальное свойство человека — труд. Роль биоты (Б) в трудовой К-модели сводится к «растворителю», в который погружены (Ч) люди и техносфера (М). Из соображений размерности ясно, что ёмкость экологической ниши P — это количество человеколет жизни, которые может обеспечить техносфера без дополнительных трудовых усилий. Ёмкость P измеряется в тех же единицах, а C [человеколет] — труд (Т), необходимый человеку, чтобы исчерпать всю биоту и превратить её в техносферу — место (М) проживания и пропитания человека. Всю биоту (Б), однако, исчерпать нельзя в силу законов экологии. Масса продуцентов должна составлять около 98% массы биоты, а общая масса консументов и редуцентов должна быть около 2% массы биоты. Тогда продуценты могут прокормить и консументов, и редуцентов. Человек, как вид, является консументом и редуцентом одновременно, и мы вправе ожидать, что в эпоху экодефицита число экологических мест (М) и, соответственно, людей (Ч) существенно не превысит 2% от мощности биоты. И действительно, $C \cong 200$ млрд. человеколет, а годовой биологический ущерб от человечества в конце экодефицита составляет $N_{1975} \cong 4$ млрд. челет, т.е. $\cong 2\%$. После 1975 года деятельность человечества становится антиэкологичной и ведёт к экологической катастрофе, а уравнения (2.3—2.7) постепенно теряют свою адекватность. К моменту «обострения» в 2025 году К-модель и уравнения (2.3—2.7), вообще теряют эмпирический смысл.

Начальные условия в момент $t_0 = 0$ от Р.Х.: $Ч_0 = 0,1$ млрд.; $М_0 = 0,1$ млрд.; $Б_0 = 196,805$. Здесь появляется новое, чисто человеческое, состояние — труд (Т), которое дало название К-модели. Отсюда следует, что $C = Ч_0 + Б_0 + М_0 + T_0 = 197,005$ млрд. человеколет.

К-модель на Рис.4.1 предполагает, что трудозатраты человечества (Т) пропорциональны и числу людей (Ч), и числу мест (М), причём и люди, и места растворены в биоте мощности C (переход 1). Это относится и к числу вновь созданных мест, и к числу выживших людей, причём численность мест проживания людей не убывают ни от труда, ни от размножения (тип переходов d_1 и d_3 сохраняющий — 4). Размножение людей пропорционально и количеству мест, и количеству людей, растворённых во всём множестве автоматов. А вот приложение труда к биоте, происходящее в том же растворе, приводит к превращению и этих трудозатрат, и биоты в место техносферы (тип перехода d_2 линейный удаляющий — 6). Задержка на 23 года для взросления людей подобрана так, чтобы обеспечить хорошее совпадение с известными данными палеодемографии и демографии. Совпадение получилось очень точное. К-сеть демографического процесса и её матричное представление изображены на Рис.4.2. В вершинах-переходах записаны интенсивности, т.е. среднее число переходов за единицу времени, равную одному году. В вершинах-позициях записаны переменные маркеры, т.е. число автоматов, находящихся в соответствующем состоянии. Справа на Рис.4.2 показаны матрицы **In**, **Out**, **D** и вектор-столбец **R** матричного описания К-сети. Выполняя матричное умножение $D \bullet R$ получим дифференциальные уравнения для К-модели и нормировку. Для всей области адекватного поведения К-модели $T < B$, т.е. $\min T, B = T$, вследствие чего дифференциальные уравнения имеют вид:

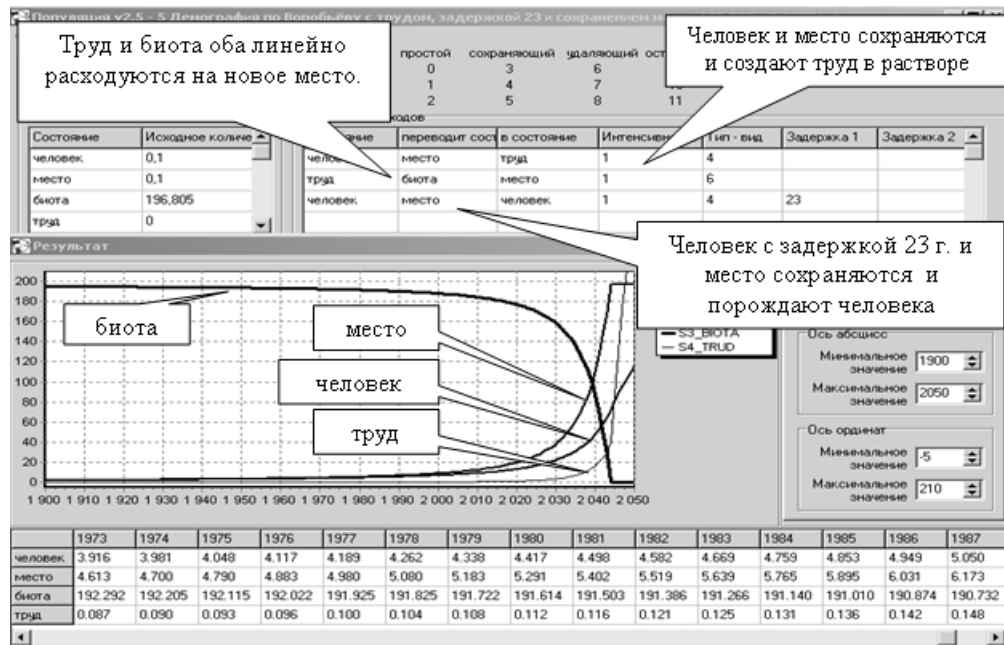
$$dЧ/dt = Ч_{t-23} \cdot M/C$$

$$dM/dt = T$$

$$dB/dt = -T$$

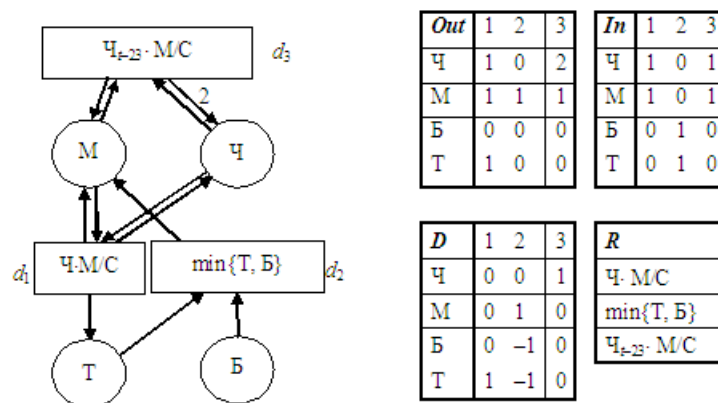
$$dT/dt = Ч_{t-23} \cdot M/C - T$$

$$Ч + M + B + T = C = 197,005$$



Р и с у н о к 4.1

Демографический процесс перехода в экопаузу. Трудовая К-модель



Р и с у н о к 4.2

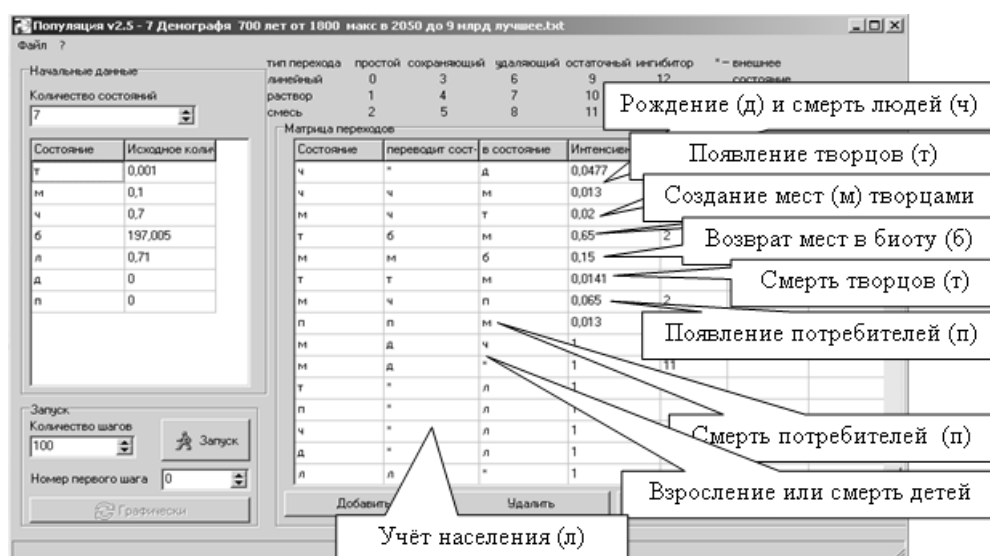
К-сеть и матричное представление демографического процесса в биосфере

Впрочем, имеющаяся программа реализации К-моделей позволяет обойтись без составления и решения этих уравнений. Результаты моделирования приведены на Рис.4.1 для 1900–2050 гг., что позволяет увидеть процесс потери адекватности К-модели. Кроме того, нами было построено множество К-моделей демографического взрыва и экологической катастрофы, которые абстрагируются от каких-то аспектов реального демографического процесса: труда, задержек, смертности и т.п., но при этом учитывают иные аспекты реальности. Подробно рассматривать эти модели нет смысла в силу их ограничения 1975 годом, когда кончается экодефицит и начинается экопауза.

5. К-модель демографического кризиса в экопаузе

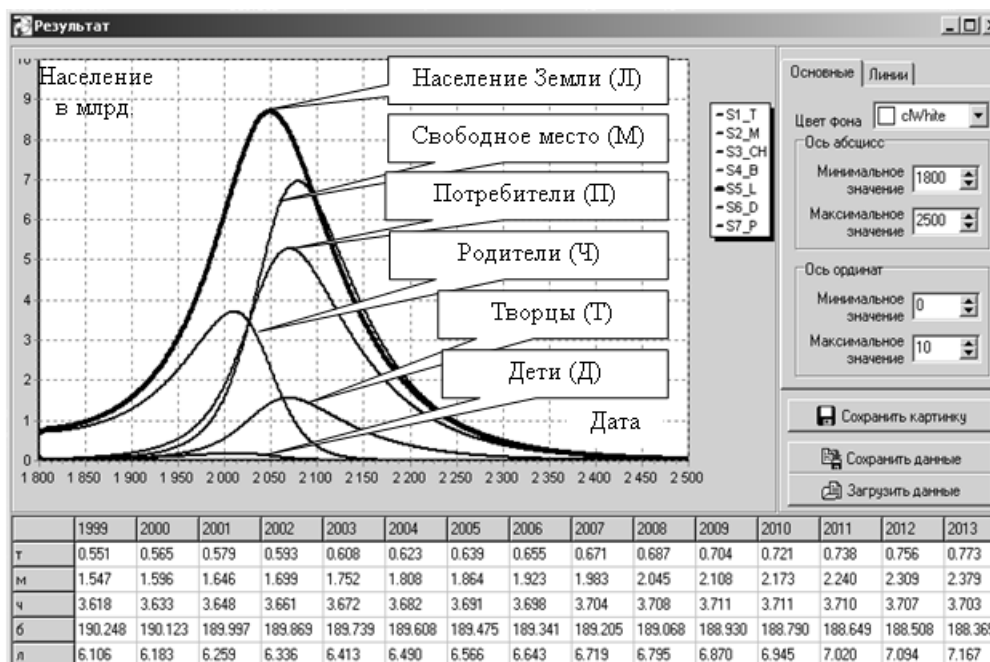
С началом экологической паузы К-модели демографического взрыва постепенно теряют и адекватность, и эмпирический смысл. Для того чтобы получить более адекватный

результат следует моделировать рост населения с учетом господствующей в обществе мотивации репродуктивного поведения. Здесь тоже действуют естественные факторы: рождение детей (Д) из внешнего состояния (*), элиминация детей, не нашедших места, во внешнюю среду (*), смертность всех людей с освобождением места (М), рост ёмкости экологической ниши (М). В индустриальном и постиндустриальном обществе добавляются ещё два фактора, замещающих репродуктивное поведение: во-первых, обучение молодёжи и появление творцов (Т) экониши; во-вторых, появление избыточного места (М) и потребителей (П).



Р и с у н о к 5.1

К-модель демографического кризиса эпохи модерна с 1800 по 2500 г.



Р и с у н о к 5.2

Демографический процесс эпохи модерна и постмодерна с 1800 по 2500 г. В строке Л дана модельная численность населения Земли, очень хорошо совпадающая с данными Всемирного Банка [12] и статистическим прогнозом.

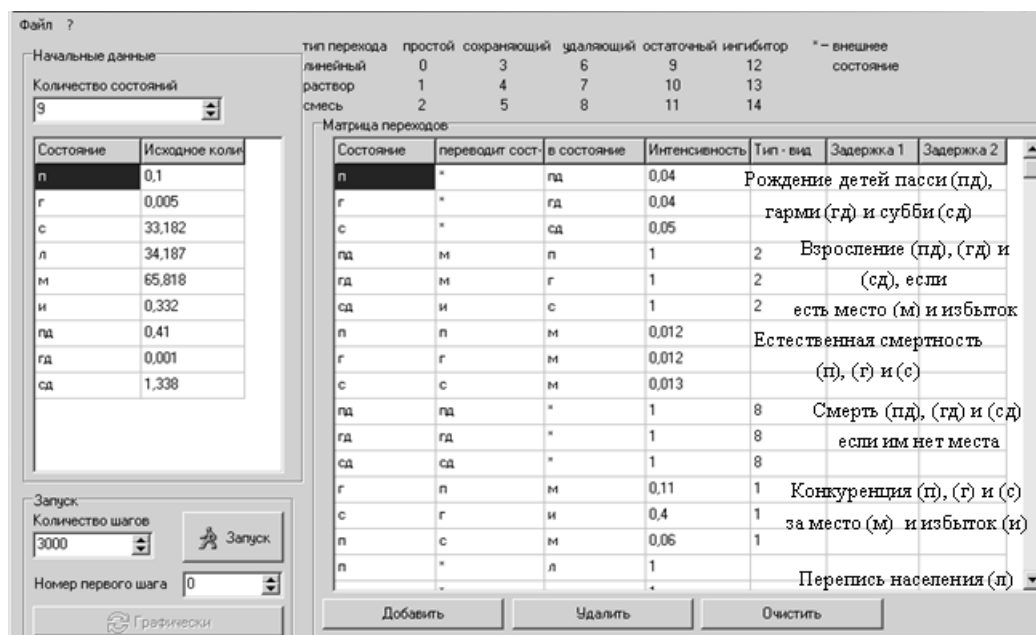
Будем полагать, что творчество и потребление исключают размножение, но не исключают смертность. Ясно, что каждый человек может попеременно выполнять все три функции: репродуктивную, творческую и потребительскую, поэтому численности Ч, Т и П относятся к людям, которые заняты данной функцией в текущий момент времени. Естественная рождаемость согласно демографической статистике – 47,7 детей на 1000 человек населения. В нашей К-модели вся смертность сводится к детской смертности, а выжившие дети, став взрослыми людьми, живут до 77 лет, творцы – до 71 года. Это упрощение не слишком искажает результат. Средняя продолжительность жизни соответствует реальной. Приходится подбирать только коэффициенты появления творческих людей и потребителей. Ближайшая к наблюдаемому [12, 13] мировому демографическому процессу К-модель с 1800 г. по 2500 г. показана на Рис.5.1.

Результаты на Рис.5.2 показывают, что если репродуктивное поведение людей не изменится, постиндустриальная цивилизация вымрет.

6. К-модель этногенеза

Демографический процесс отражает человеческий способ приспособления к природной среде — расширение своей экологической ниши, т.е. техносферы. *Этногенез* — продукт внутривидовой конкуренции людей за экологическую нишу. Согласно Л. Н. Гумилёву в социальной жизни этноса конкурируют три *социотипа* человека: *пассионарии* (*пасси*), *гармоничники* (*гарми*) и *субпассионарии* (*субби*). При этом пасси вытесняют субби, гарми вытесняют пасси, а субби вытесняют гарми, извлекая избыточность Рис.6.1. У этих трёх социотипов различно и экологическое поведение. Пасси обеспечивают рост техносферы, гарми — её сохранение, а субби — её разрушение.

По нашему мнению и вопреки Гумилёву пасси не обладают повышенной биоэнергетикой. Они тормозят (по Павлову) свои биологические инстинкты вплоть до *жертвенности*. Гарми трудолюбивы, но не противоречат витальным инстинктам. Субби живут ради удовлетворения биологических потребностей засчёт гарми. А поскольку численность субби контролируют пасси, то как только пасси практически уничтожены, эксплуатация гарми со стороны субби приводит к *обскурации*, *депопуляции* и *гибели* этноса.

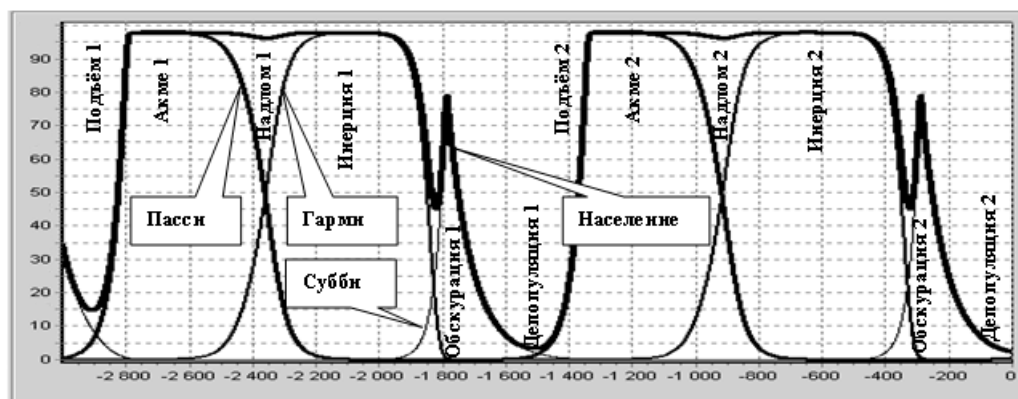


Р и с у н о к 6.1

К-модель этногенеза как конкуренции пасси (П), гарми (Г) и субби (С)

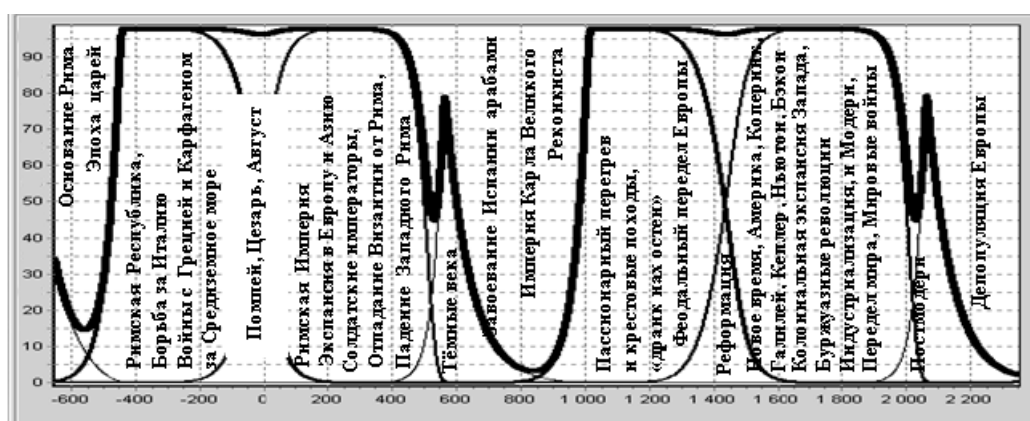
При компьютерной реализации модели этногенеза ясно видно чередование фаз с разными типами поведения, видны *волны* преобладания пасси, гарми и субби и все описанные Гумилёвым фазы этногенеза: *подъём, акме, надлом, инерция, обскурация*. Эта последовательность продолжается 1400–1500 лет, после чего начинается новый этногенез с той же последовательностью фаз. Время исторического существования этноса продолжается 1100–1200 лет и включает *акме, надлом* и *инерцию*. Это эпоха расцвета культуры и цивилизации. Остальные 300–400 лет приходятся на переходные эпохи: *подъём* и *обскурацию*.

В фазах *подъёма* и *акме* доминирует пассионарное поведение. В фазе надлома происходит смена пассионарной доминанты на гармоничную. В инерционной фазе доминируют гарми, а в фазе обскурации субби. Обскурирующий этнос, по Тойнби, обычно становится жертвой *нашествия пассионарных варваров*, что приводит к новому витку этногенеза. На прилагаемых рисунках (Рис.6.2, 6.3, 6.4) графики численности социотипов наложены на исторические события в различных этносах: Древний Египет, Рим и Западная Европа и Россия. Для России имеются два способа наложения этих же кривых на её историю: по источникам РПЦ и по Гумилёву. Ещё одна деталь нашей модели этногенеза — депопуляция этноса почти до нулевой численности. В реальности пассионарное и гармоничное население не вымирает, а *замещается* или *отпадает* от этноса подобно отпадению христиан от язычников.



Р и с у н о к 6.2

Два классических цикла этногенеза в Древнем Египте



Р и с у н о к 6.3

Этногенез в Западной Европе от Рима до Европейского Союза. Та же последовательность этапов этногенеза, что и в Египте



Р и с у н о к 6.4

Этногенез в России по Л.Н. Гумилёву с 1250 по 2700 годы

7. Результат

Построенные модели исходят из предположения о благополучном развитии всей земной цивилизации без катастроф и мировых войн. К сожалению, результаты не могут порадовать оптимистическими прогнозами. Человечество вступило в эпоху глобального кризиса. Этот кризис сильнее всего затрагивает технические цивилизации — Запад и Россию,

но за ними неизбежно последуют и развивающиеся страны. Из исторических наблюдений, математических и каузальных моделей демографии и этногенеза вытекают следующие выводы.

1. Современное человечество прошло три крупных этапа антропогенеза: (1) эпоха расселения по планете Земля [10]; (2) эпоха экологического дефицита и этногенеза, как результата конкуренции людей за экологическую нишу на Земле [7]; (3) эпоха экологической паузы и мирового экологического кризиса [2-4]. Экопауза завершается в XXI веке, после чего начинается вымирание постиндустриальной цивилизации и, возможно, замена современного *homo sapiens* новым видом разумных людей.

2. Если репродуктивное поведение людей не изменится, постиндустриальная потребительская цивилизация вымрет.

3. Исторический процесс в эпоху экодефицита детерминирован, в основном, этногенезом – объединением людей, родственных генетически, психологически и социокультурно, в борьбе за экологическую нишу на Земле [7].

4. Конкуренция происходит не только между этносами, но и внутри этносов, как минимум, между тремя генотипами людей: пасси, гарми и субби.

5. Основные исторические повороты происходят при смене этапов этногенеза, когда меняется доминанта социального поведения. С небольшими вариациями коэффициентов это наблюдается на моделях этногенеза и в Египте, и в Европе, и в России. Это, очевидно, общая закономерность этногенеза.

6. Хорошее совпадение волн этногенеза в Египте, Западной Европе, России (это одна и та же кривая) говорит о том, что этногенез практически не зависит от климата, расы, культуры, календарного времени и уровня технологии. Это значит, что этногенез, скорее всего, не социокультурное и не экономическое, а природное явление, связанное с генетикой человека как биологического вида.

7. Для появления носителей пассионарной и иной генетики нет необходимости в каком-то космическом вмешательстве. Волны этногенеза возникают, как и в модели «хищник-жертва», из-за нелинейности процессов конкуренции людей.

8. Исторический процесс объективен, закономерен и практически не зависит от желаний и идей отдельных людей или социальных групп. Люди могут предлагать самые разумные и прогрессивные идеи или социальные институты, но тщетно. Всякая идея будет продуктивна тогда и только тогда, когда для её восприятия и реализации появится достаточное число генетически подходящих людей — пасси, гарми или даже субби.

9. На волне *подъёма* и *акме* доминирует самая жёсткая религиозная социокультурная установка, которая невыносима для возрастающей массы гарми, а потом и субби. В результате происходит *надлом*: смута, гражданская война или революция, смягчение нравов в пользу витальных инстинктов гарми и субби, установление социального равновесия и законности, а точнее — безразличия к высшим сакральным ценностям. Этот результат развития пассионарной культуры есть, собственно, *цивилизация*, как и утверждал О. Шпенглер [16].

10. В своём развитии цивилизация становится всё более агрессивной по отношению к культуре, породившей эту цивилизацию. Это приводит к *обскурации* — разгулу субби, отрицанию и осмеянию пассионарной *классической культуры*, её вытеснению массовой *поп-культурой*. После этого этнос, потерявший пассионарность, базовые ценности и мотивы для продуктивной деятельности, гибнет. Начинается *депопуляция*, беспокоящая деятелей культуры — так называемых *интеллектуалов*.

11. Интеллектуалы не знают ни фундаментальных законов истории, ни математики. Поэтому они не в состоянии понять происходящие процессы и горячо обсуждают разные *благоглупости* (Салтыков-Щедрин), окончательно разлагающие гибнущий этнос.

12. Теория этногенеза по Л.Н. Гумилёву в целом выдержала проверку математическим моделированием. Качественная картина этногенеза хорошо подтверждается. Однако если сменить некоторые коэффициенты в К-модели, можно получать различные сценарии этногенеза с пролонгированной фазой реликта, с различными длительностями волн этногенеза, с равновесными реликтовыми состояниями даже без тех или иных социотипов человека.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базыкин А. Д., *Нелинейная динамика взаимодействующих популяций*, Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, М., 2003, 368 с.
2. Воробьев В. А., Воробьева Т. В., “Экологический императив и демографический процесс”, *Вестник Поморского университета. Серия естественные и точные науки*, 2003, № 1(3), 122–131.
3. Воробьев В. А., Воробьева Т. В., “Демографический парадокс, экология и религия”, *Свеча — 2003: Наука и Религия*, Сборник научных и методических работ по религиоведению и культурологии, ред. Е. И. Аригин, Поморский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск, 2003.
4. Воробьев В. А., Воробьева Т. В., “Экологическая пауза — системный кризис человечества”, *Труды АНИГ «Прогноз»*, **Выпуск 1**, Исследования в области глобального катастрофизма, ред. В. К. Журавлев, Новосибирск, 2006, 69–109.
5. Воробьев В. А., Березовская Ю. В., “Популяции взаимодействующих автоматов”, *Прикладная дискретная математика*, 2011, № 4, 89–104.
6. Воробьев В. А., Березовская Ю. В., *Теория систем и системный анализ. Стохастические системы.*, учебное пособие, ИПЦ САФУ, Архангельск, 2012, 147 с.
7. Гумилев Л. Н., *Этносфера: история людей и история природы*, ООО «Издательство АСТ», М., 2004, 575 с.
8. Данилевский Н. Я., *Россия и Европа. Взгляд на культурные и политические отношения Славянского мира к Германо-Романскому*, ГЛАГОЛЬ, СПб.; СПбГУ, 1995, 501 с., <http://www.booksite.ru/fulltext/ye/rop/ada/nil/index.htm>.
9. Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., *Синергетика и прогнозы будущего*, 2-е изд., Эдиториал УРСС, М., 2001, 288 с.
10. Капица С. П., *Сколько людей жило, живет и будет жить на Земле. Очерк теории роста Человечества*, Международная программа образования, М., 1999, 240 с.
11. Малков А. С., Коротаев А. В., Халтурина Д. А., “Экологическая пауза — системный кризис человечества”, *Новое в синергетике, новые проблемы, новое поколение*, ред. Г. Г. Малинецкий, Наука, М., 2007, 148–186.
12. *Народонаселение стран мира*, Справочник, 2-е изд., ред. Б. Ц. Урланис, Статистика, М., 1978.

13. *Страны и регионы. Статистический справочник Всемирного банка*, Пер. с англ., «Весь мир», М., 1999 – 2005.
14. Тойнби А. Дж., *Постижение истории*, <http://www.hrono.ru/index.php>.
15. Форрестер Дж., *Мировая динамика*, Наука, М., 1978.
16. Шпенглер О., *Закат Европы*, ВО «Наука», Сибирская издательская фирма, Новосибирск, 1993.

The population of automata is a model of the complex systems

© V. A. Vorob'ev⁴, Yu. V. Berezovska⁵, A. Yu. Kochnev⁶

Abstract. The article deals with the causal models (C-models) for the mathematical modelling of historical processes. Ways to apply the causal modelling method to the investigations historical processes are offered. We review the history of Western Europe and its extrapolation in the near future.

Key Words: causal net, causal model, mathematical modelling of historical processes

⁴ Professor, Department of Programming and High-Performance Computing, Northern (Arctic) Federal University, Arkhangelsk; vva100@atnet.ru

⁵ Senior lecturer, Department of Programming and High-Performance Computing, Northern (Arctic) Federal University, Arkhangelsk; myumla.myu@gmail.com

⁶ Chief of IT-education department, Northern (Arctic) Federal University, Arkhangelsk; derxyz@yandex.ru

УДК 517.9

Исследование механизма развития коррозионных поражений с использованием компьютерного зрения

© М. Р. Еникеев¹, М. А. Малеева², И. М. Губайдуллин³

Аннотация. В статье рассматриваются задача исследования процесса коррозии путем визуального контроля проводимого эксперимента. Обсуждаются вопросы использования методов обработки изображения и последующего его анализа. Для оценки коррозионных пятен используется фрактальная размерность.

Ключевые слова: фрактальная размерность, компьютерное зрение, обработка изображений.

1. Введение

В последние годы в области изучения поверхностных процессов нашли широкое применение методы визуального контроля: ‘in situ’ оптическая микроскопия, конфокальная микроскопия, лазерная сканирующая микроскопия, сканерная рефлектометрия и т.д. К разновидности визуальных методов, позволяющих получить изображения на микро- и нано-уровнях, можно отнести электронную и сканирующую зондовую спектроскопии. При всех преимуществах визуальных методов все они имеют один существенный недостаток – трудность в количественном описании полученного изображения в целом. Поэтому в лаборатории коррозии металлов в природных условиях Института физической химии и электрохимии РАН им. Фрумкина (зав. лабораторией Маршаков А.И.) совместно с лабораторией математической химии Института нефтехимии и катализа РАН (зав. лабораторией Спивак С.И.) проводится изучение механизма коррозионных процессов посредством исследования морфологии поверхности металла с использованием фрактального анализа.

При всех преимуществах визуальных методов все они имеют один существенный недостаток – трудность в количественном описании полученного изображения в целом. Несмотря на то, что в последние годы интенсивно развиваются методы трехмерной реконструкции поверхностных микро- и макрообъектов, они, как правило, касаются отдельных дефектов на поверхности и дают минимум информации о механизме межфазных взаимодействий в целом. Как и большинство природных явлений, коррозия по существу является сложной и нерегулярной, поэтому морфология и изображения поверхности, подвергшейся коррозионному разрушению, не могут быть совершенно идентичными даже в случае использования одного и того же материала и коррозионной среды. Другими словами, изображения прокорродировавшего металла нерегулярны и невоспроизводимы. Одним из эффективных путей решения данной проблемы является использование фракталов. В основе фрактального анализа лежит оценка величины фрактальной размерности (ФР). Целью работы является разработка методики оценки коррозионных процессов посредством исследования морфологии металлов во время протекания коррозионного и электрохимического процессов. Итогом работы также будут являться фрактальные характеристики как поверхности всего исследуемого образца, так и локальных коррозионных дефектов.

¹ Аспирант 1-го года обучения лаб. математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; mat-83@mail.ru.

² Н.с. лаб. коррозии металлов в естественных условиях, институт физической химии и электрохимии им. А.Н. Фрумкина РАН, г. Москва; marina.maleeva1@gmail.com.

³ С.н.с. лаб. математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; irekmars@gmail.ru.

2. ФР в коррозионных экспериментах

ФР в коррозионных экспериментах предлагается определять на основании визуальных (оптическая микроскопия, сканерная рефлектометрия) и электрохимических (импедансная электрохимическая спектроскопия, хроноамперометрия) методов. Визуальные методы основываются на обработке цифровых изображений, полученных в ходе эксперимента. При проведении операций обработки изображения выделяют следующие основные этапы: формирование изображения, сегментация изображения и анализ изображения.

2.1. Формирования изображения

К операциям формирования изображения относятся получение изображения, в данном случае цифрового, и предварительная обработка изображения. Цифровое изображение I можно рассматривать как матрицу размером $N \times M$, элементами которой являются значения яркости в $I[x, y]$, где x и y – координаты пикселя. Обычно изображения, сформированные различными информационными системами, искажаются действием помех. Это затрудняет как их визуальный анализ человеком-оператором, так и автоматическую обработку в ПЭВМ [1].

В качестве предварительной обработки изображения использовались фильтры шумоподавления и фильтры повышения контрастности и чёткости. Большинство основных методов повышения четкости основаны на простом улучшении контраста изображения. В частности, для повышения четкости использовался метод линейной растяжки гистограммы (2.1).

$$\begin{cases} b = 255/(max - min), \\ a = -b * min. \end{cases} \quad dst(x, y) = a + b * src(x, y), \quad (2.1)$$

где a и b – коэффициенты растяжения, max и min – соответственно максимальное и минимальное значения яркости на изображении, src и dst – исходное и обработанное изображение соответственно.

В качестве предобработки для последующего распознавания использовалось гауссово размытие. Гауссовское размытие – это свертка изображения с функцией

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.2)$$

где μ – математическое ожидание случайно величины, а σ^2 – дисперсия. Матричный фильтр, посчитанный по формуле (2.2), называется гауссианом.

После предварительной обработки изображения необходимо провести операции сегментации, то есть детектировать пятна коррозии на полученном изображении. Необходимо разделить изображения на области, для которых выполняется определенный критерий однородности.

2.2. Сегментация

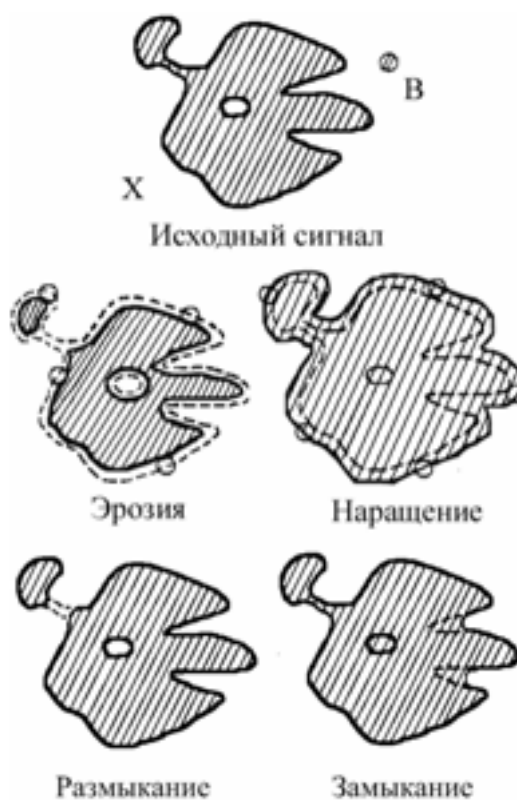
Операция порогового разделения, которая в результате дает бинарное изображение, называется бинаризацией. Целью операции бинаризации является радикальное уменьшение количества информации, содержащейся на изображении. В данной работе использовались, как пороговые, так и адаптивные методы бинаризации, в зависимости от эксперимента.

Бинаризация с нижним порогом является наиболее простой операцией, в которой используется только одно значение порога (2.3).

$$dst = \begin{cases} src(x, y), & src(x, y) > h, \\ 0. & \end{cases} \quad (2.3)$$

Адаптивная бинаризация производится аналогично с (2.3), только $h = T(x, y)$, где $T(x, y)$ - порог, рассчитываемый индивидуально для каждого пикселя.

Для извлечения информации о коррозионном пятне (контуры коррозионного поражения) используются операции математической морфологии. Основные операции: наращивание, эрозия, замыкание и размыкание (рис. 2.1). Операция наращивания увеличивает область изображения, а эрозия делает её меньше. Операция замыкания позволяет замкнуть внутренние отверстия области вдоль её границы. Операция размыкания помогает избавиться от маленьких фрагментов, выступающих наружу области вблизи её границы [2].



Р и с у н о к 2.1

Основные операции математической морфологии.

Таким образом применив операцию размыкания, найдем контуры объектов, отфильтруем те, которые являются слишком маленькими, и к оставшимся контурам применим следующий анализ.

3. Анализ характеристик

Характеристика коррозионного пятна велась при помощи фрактального анализа. Фрактал – геометрическая фигура, обладающая свойством самоподобия. Для оценки коррозионных пятен было решено сравнивать их фрактальную размерность. Основной характеристикой фрактального объекта является его размерность [3]. Фрактальная размер-

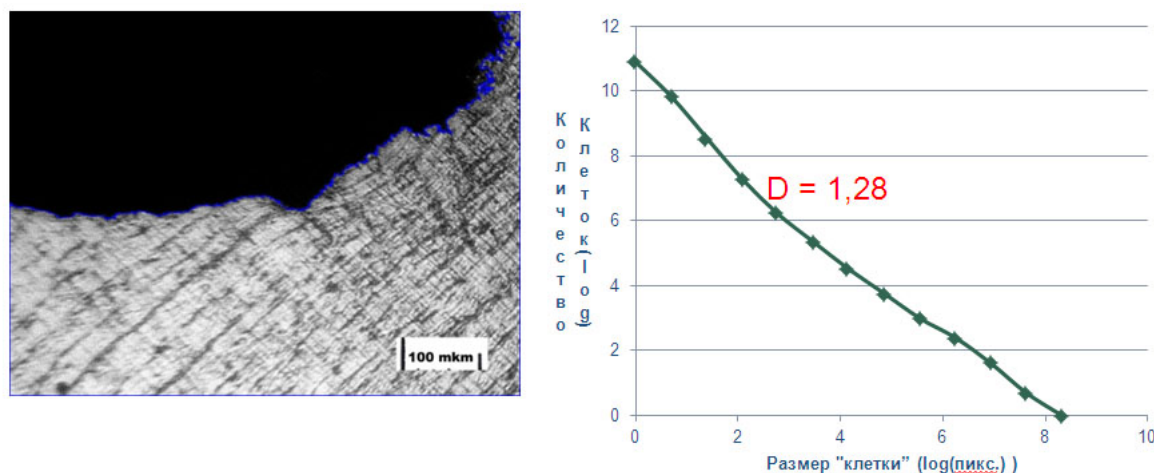
ность, как правило, является неотрицательным нецелым числом, отражающим, некоторым образом, геометрическую сложность объекта и вычисляется следующим образом:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_{\varepsilon}}{-\ln \varepsilon}$$

где D - фрактальная размерность, N_{ε} - минимальное число множеств диаметра ε , которыми можно покрыть исходное множество. Для расчета фрактальной размерности использовался box-counting метод. Идея алгоритма состоит в следующем:

1) Исследуемое множество точек разбивается на пиксели размера ε и считается количество пикселей N , содержащих хотя бы одну точку множества. 2) Для разных ε определяется соответствующее значение N , т.е. накапливаются данные для построения зависимости $N(\varepsilon)$. 3) Зависимость $N(\varepsilon)$ строится в двойных логарифмических координатах и определяется коэффициент наклона прямой, который и будет значением фрактальной размерности.

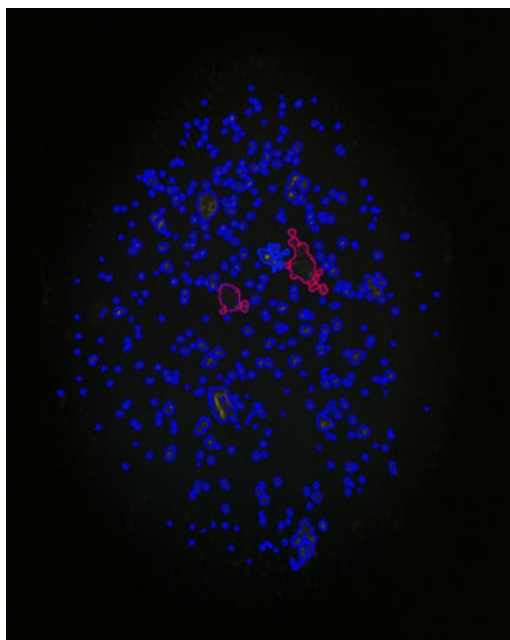
Для образца стали при растрескивании была рассчитана фрактальная размерность. На рис. 3.1 можно увидеть образец стали, с найденной границей и соответствующую ей фрактальную размерность.



Р и с у н о к 3.1

Трещина для стального образца и график зависимости $N(\varepsilon)$ в зависимости от размера ε для определения фрактальной размерности.

Также наряду с фрактальной размерностью, для ускорения расчетов использовалось понятие компактности – отношение квадрата периметра контура к его площади.



Р и с у н о к 3.2

Детектирование коррозии на образце меди (синий цвет) и побочных дефектов (красный).

Для медного образца пластины (рис. 3.2) при длительном наблюдении было установлено изменение компактности изображения в зависимости от времени (рис. 3.3).



Р и с у н о к 3.3

График изменения коррозии в количественном выражении в зависимости от времени.

4. Заключение

В статье были рассмотрены основные аспекты обработки и анализа изображений в задаче исследования механизма коррозионных поражений. В результате работы:

1) Исследованы методы обработки изображений в контексте использования в задаче поиска коррозионных поражений.

2) Исследован механизм фрактального анализа и в качестве характеристики коррозионного поражения была выбрана фрактальная размерность.

3) Применены описанные алгоритмы для детектирования и распознавания коррозионного поражения для стального и медного образца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борискевич А. А., *Электронный учебно-методический комплекс по дисциплине Цифровая обработка речи и изображений*.
2. Шапиро Л., Стокман. Дж., *Компьютерное зрение*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2006, 752 с.
3. Mandelbort B. B., *The Fractal Geometry of Nature*., 1982.

Investigation of the mechanism of corrosion damages using computer vision

© М. Enikeev⁴, М. Maleeva⁵, I. Gubaydullin⁶

Abstract. The article deals with the problem of studying the corrosion process by visual inspection conducted the experiment. Discusses the use of image processing techniques and its subsequent analysis. To evaluate the corrosion stains the fractal dimension.

Key Words: fractal dimension, computer vision, image processing. фрактальная размерность, компьютерное зрение, обработка изображений.

⁴ The first year post-graduate student of Mathematical chemistry laboratory, Institute of petrochemistry and catalysis of RAS, Ufa; mat-83@mail.ru.

⁵ Associate of Mathematical chemistry laboratory, Institute of Physical Chemistry and Electrochemistry of RAS, Ufa; marina.maleeva@gmail.com.

⁶ Senior associate of Mathematical chemistry laboratory, Institute of petrochemistry and catalysis of RAS, Ufa; irekmars@mail.ru.

УДК 517.938.5

Реализация градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхностях посредством автоморфизмов трехцветных графов

© С. Х. Капкаева¹

Аннотация. Данная статья является продолжением работ [5], [4], в которых найдены условия топологической сопряженности градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей. В настоящей работе решена проблема реализации, то есть в каждом классе топологически сопряженных градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхности построен стандартный представитель

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса-Смейла, градиентно-подобный диффеоморфизм, топологически сопряженные диффеоморфизмы, трехцветный граф, реализация диффеоморфизмов

1. Основные понятия и формулировка результатов

Целью нашей работы является решение проблемы реализации градиентно-подобных диффеоморфизмов, заданных на двумерных поверхностях, то есть в каждом классе топологически сопряженных градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхности строится стандартный представитель.

Решение задачи реализации является частью топологической классификации диффеоморфизмов из рассматриваемого класса, где под топологической классификацией понимается решение следующих задач:

1. нахождение топологических инвариантов диффеоморфизмов из заданного класса;
2. доказательство полноты множества найденных инвариантов, то есть доказательство того, что совпадение множеств топологических инвариантов является необходимым и достаточным условием топологической сопряженности диффеоморфизмов из рассматриваемого класса;
3. реализация, то есть построение по заданному множеству топологических инвариантов стандартного представителя.

В работах [5], [4] были решены первая и вторая задачи, данная работа посвящена решению третьей задачи.

Пусть $f : M^2 \rightarrow M^2$ — диффеоморфизм Морса-Смейла². Неблуждающее множество диффеоморфизма f представим в виде $\Omega_f = \bigcup_{i=0}^2 \Omega_f^i$, где Ω_f^i — множество периодических точек диффеоморфизма f , индекс Морса (размерность неустойчивого многообразия W_p^u) которых равен i ($i = 0, 1, 2$). Точки с индексом Морса 2 называются *источниками*, точки с индексом Морса 0 называются *стоками*, точки с индексом Морса 1 — *седлами*.

¹ Магистрантка кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kapkaevasvetlana@yandex.ru

² Диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$, заданный на гладком замкнутом n -многообразии M^n называется диффеоморфизмом Морса-Смейла, если:

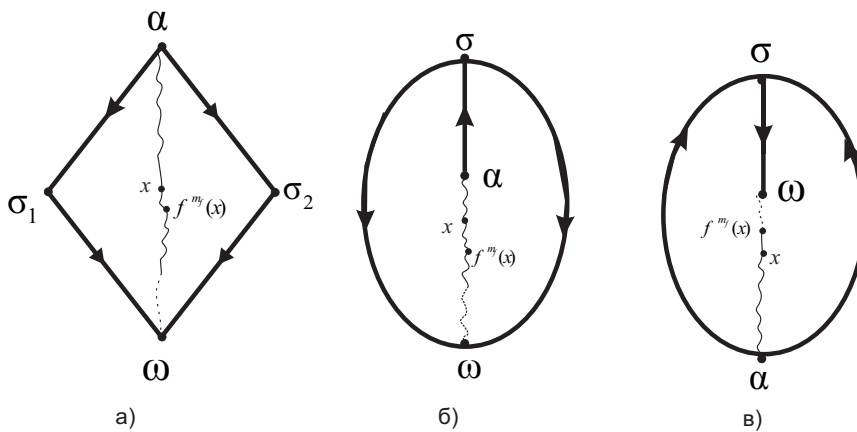
- 1) неблуждающее множество Ω_f гиперболично и конечно (то есть состоит из конечного числа периодических точек, для которых модули собственных значений матрицы Якоби не равны единице);
- 2) для любых периодических точек p, q устойчивое многообразие W_p^s и неустойчивое многообразие W_q^u либо не пересекаются, либо трансверсальны в каждой точке пересечения.

Если для различных седловых периодических точек p, q диффеоморфизма f пересечение $W_p^s \cap W_q^u$ непусто, то оно является бесконечным множеством. При этом, если $\dim W_p^s + \dim W_q^u = n$, то каждая точка, принадлежащая $W_p^s \cap W_q^u$, называется *гетероклинической точкой*, а если $\dim W_p^s + \dim W_q^u > n$, то каждая компонента связности $W_p^s \cap W_q^u$ называется *гетероклинической компонентой*. Диффеоморфизм Морса-Смейла называется *градиентно-подобным*, если он не имеет гетероклинических точек.

В настоящей работе рассматривается класс G сохраняющих ориентацию градиентно-подобных диффеоморфизмов, заданных на поверхности M^2 . Заметим, что в этом случае условие градиентно-подобности эквивалентно тому, что пересечение $W_p^s \cap W_q^u$ является пустым, для различных седловых точек p, q .

Пусть $f \in G$. Везде далее мы будем предполагать, что f имеет хотя бы одну седловую точку³.

Удалим из поверхности M^2 замыкание объединения устойчивых и неустойчивых многообразий всех седловых точек диффеоморфизма f и обозначим получившееся множество через $\tilde{M}$, то есть $\tilde{M} = M^2 \setminus (W_{\Omega_f^0}^u \cup W_{\Omega_f^1}^u \cup W_{\Omega_f^1}^s \cup W_{\Omega_f^0}^s)$.



Р и с у н о к 1.1

Виды ячеек

Тогда множество $\tilde{M}$ представляется в виде объединения областей (*ячеек*), гомеоморфных открытому двумерному диску, граница каждой из которых имеет один из видов, изображенных жирными линиями на рисунке 1.1 и содержит в точности один источник, один сток, одну или две седловые точки и некоторые из их сепаратрис⁴.

Пусть A — любая ячейка из множества $\tilde{M}$, α и ω — источник и сток, входящие в ее границу. Простую кривую $\tau \subset A$, граничными точками которой являются источник α и сток ω , будем называть *t-кривой* (см. рисунок 1.1). Обозначим через $\mathcal{T}$ множество, являющееся f -инвариантным и состоящее из t -кривых, взятых по одной из каждой ячейки. Способ построения такого множества приведен в разделе 2. (см. предложение 2.1.).

Любую компоненту связности множества $M_\Delta = \tilde{M} \setminus \mathcal{T}$ назовем *треугольной областью*. Обозначим через Δ_f множество всех треугольных областей диффеоморфизма f . В границу каждой треугольной области $\delta \in \Delta_f$ входят три периодические точки: источник α ,

³ Если диффеоморфизм Морса-Смейла $f : M^n \rightarrow M^n$ не имеет седловых точек, то его неблуждающее множество состоит из одного источника и одного стока. Все диффеоморфизмы “источник-сток” топологически сопряжены и доказательство этого факта, например, приведено в книге [3] (Теорема 2.2.1).

⁴ Этот факт доказывается аналогично соответствующему результату для грубых потоков на поверхностях (см., например, [1]).

седло σ , сток ω , а также устойчивая сепаратриса l_σ^s (будем называть ее s -кривой) с граничными точками α и σ , неустойчивая сепаратриса l_σ^u (будем называть ее u -кривой) с граничными точками ω и σ и кривая τ (t -кривая) с граничными точками α и ω . Стороной треугольной области назовем замыкание одной из s , u или t компонент связности границы. Будем говорить, что две треугольные области, имеют общую сторону, если эта сторона принадлежит замыканиям обеих областей. Периодом треугольной области δ называется наименьшее натуральное число $k \in \mathbb{N}$, такое что $f^k(\delta) = \delta$.

Для того, чтобы ввести комбинаторный топологический инвариант диффеоморфизма $f \in G$, напомним следующие определения.

Конечным графом называется упорядоченная пара (V, E) , для которой выполнены следующие условия: V — непустое конечное множество вершин; E — множество пар вершин, называемых рёбрами.

Если граф содержит ребро $e = (a, b)$, то каждую из вершин a , b — называют инцидентной ребру e и говорят, что вершины a и b соединены ребром $e = (a, b)$.

Путем в графе называют конечную последовательность вершин и ребер $a_0, e_0, a_1, \dots, a_{i-1}, e_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-1}, e_{n-1}, a_n$ (где $n \geq 1$), в которой вершины a_{i-1} и a_i соединены ребром e_{i-1} , $i \in \overline{1; n}$. Длиной пути называется число входящих в него ребер.

Граф называют связным, если любые две его вершины можно соединить путём.

Циклом называют путь, в котором вершина a_0 совпадает с вершиной a_n . Простым циклом называют цикл, у которого нет повторяющихся вершин, кроме a_0 и a_n .

О п р е д е л е н и е 1.1. Граф T называется трехцветным графом, если:

- 1) множество ребер графа T является объединением трех подмножеств, каждое из которых состоит из ребер одного и того же определенного цвета (цвета ребер из разных подмножеств не совпадают, будем обозначать эти цвета буквами s , t , u , а ребра для краткости будем называть s -, t -, u -ребрами);
- 2) каждая вершина графа T инцидентна в точности трем ребрам различных цветов;
- 3) граф не содержит циклов длины один.

Простой цикл трехцветного графа T назовем двухцветным циклом типа su , tu или st , если он содержит ребра в точности двух цветов s и u , t и u или s и t .

Взаимно-однозначное отображение P графа T на себя, переводящее вершины в вершины с сохранением отношений инцидентности и цветности (то есть вершина, инцидентная s , t или u -ребру переходит в вершину, инцидентную ребру того же цвета), называется автоморфизмом графа T . В дальнейшем мы будем понимать под символом (T, P) граф T , оснащенный автоморфизмом P .

Два трехцветных графа (T, P) и (T', P') назовем изоморфными, если существует взаимно-однозначное соответствие ξ между множествами их вершин, сохраняющее отношения инцидентности и цветности, а также сопрягающее автоморфизмы P и P' (то есть $P'\xi = \xi P$).

Аutomорфизм P трехцветного графа T назовём периодическим периода $t \in \mathbb{N}$, если $P^t(a) = a$ и $P^\mu(a) \neq a$ при натуральных $\mu < t$ для любой вершины a графа T .

Построим трехцветный граф T_f , соответствующий диффеоморфизму $f \in G$ следующим образом:

1) вершины графа T_f взаимно-однозначно соответствуют треугольным областям множества Δ ;

2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s , t или u , если соответствующие этим вершинам треугольные области имеют общую s , t или u кривую.

Обозначим через B_f множество вершин графа T_f . Так как стороны любой треугольной области раскрашены в разные цвета, то в вершине, соответствующей треугольной

области, сходятся ребра трех различных цветов. Таким образом, граф T_f удовлетворяет определению трехцветного графа. Обозначим через $\pi_f : \Delta_f \rightarrow B_f$ взаимно-однозначное отображение множества треугольных областей диффеоморфизма f на множество вершин графа T_f . Диффеоморфизм f индуцирует на множестве вершин и ребер графа T_f автоморфизм $P_f = \pi_f f \pi_f^{-1}$. В силу конструкции, трехцветные графы, полученные по различным разбиениям на треугольные области (зависящим от выбора t -кривых), изоморфны.

В работе [4] доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1.1. *Для того чтобы диффеоморфизмы f, f' из класса G были топологически сопряжены необходимо и достаточно, чтобы их графы (T_f, P_f) и $(T_{f'}, P_{f'})$ были изоморфны.*

В настоящей работе решается проблема реализации.

О п р е д е л е н и е 1.2. *Трехцветный граф (T, P) назовём допустимым, если он обладает следующими свойствами:*

- 1) граф T связан;
- 2) длина любого su -цикла графа T равна 4;
- 3) автоморфизм P является периодическим.

Л е м м а 1.1. *Пусть $f \in G$. Тогда трехцветный граф (T_f, P_f) является допустимым.*

Т е о р е м а 1.2. *Пусть (T, P) — допустимый трехцветный граф. Тогда существует диффеоморфизм $f : M^2 \rightarrow M^2$ из класса G , граф (T_f, P_f) которого изоморфен графу (T, P) . При этом*

- i) Эйлерова характеристика поверхности M^2 вычисляется по формуле $\chi(M^2) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2$, где ν_0, ν_1, ν_2 число tu -, su -, st -циклов графа T , соответственно;
- ii) поверхность M^2 ориентируема тогда и только тогда, когда в графе T существуют две вершины, соединяющиеся путями четной и нечетной длины.

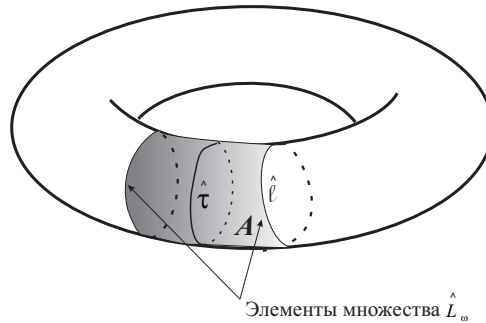
Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 13-01-12452-офи-м). Автор также благодарит В. З. Гринеса за постановку задачи и О. В. Починку за плодотворные обсуждения.

2. Свойства трехцветного графа $(T_f; P_f)$

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ существует f -инвариантное множество $\mathcal{T}$, состоящее из t -кривых, каждая из которых принадлежит в точности одной ячейке множества $\tilde{M}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A — любая ячейка из множества $\tilde{M}$, α и ω — источник и сток, входящие в ее границу. Обозначим через L_ω объединение седловых сепаратрис, содержащих ω в своем замыкании. Положим $\hat{L}_\omega = p_\omega(L_\omega)$, $\hat{L}_\omega$ — непустое подмножество, двумерного тора $\hat{V}_\omega$, состоящее из конечного числа попарно непересекающихся гомотопически нетривиальных гладких окружностей. По построению множество $\hat{A} = p_\omega(A)$ является компонентой связности множества $\hat{V}_\omega$ и, следовательно, является двумерным кольцом (см. рисунок 2.1). Выберем простую замкнутую гомотопически

нетривиальную гладкую кривую $\hat{\tau} \subset \hat{A}$. Множество $p_\omega^{-1}(\hat{\tau})$ является f -инвариантным объединением t -кривых, по одной на каждой из ячеек множества $p_\omega^{-1}(\hat{A})$.



Р и с у н о к 2.1

Проекция ячейки A

Если множество $p_\omega^{-1}(\hat{A})$ исчерпывает всё множество ячеек диффеоморфизма f , то предложение доказано. В противном случае повторим рассуждения выше для ячеек множества $\tilde{M} \setminus p_\omega^{-1}(\hat{A})$. Продолжая процесс, мы исчерпаем все ячейки диффеоморфизма f и построим искомое множество $\mathcal{T}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Предложение 2.1. позволяет построить трехцветный граф T_f , по полученному разбиению фазового пространства на треугольные области, как это было описано при формулировке результатов.

П р е д л о ж е н и е 2.2. Любая треугольная область $\delta \in \Delta_f$ диффеоморфизма $f \in G$ имеет период m_f .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любая седловая сепаратриса ℓ диффеоморфизма f имеет период m_f (см., например, лемму 3.1.1. книги [3]), то есть $f^{m_f}(\ell) = \ell$ и $f^\mu(\ell) \neq \ell$ для натуральных $\mu < m_f$. Покажем, что любая t -кривая τ имеет период m_f . Пусть τ содержит сток ω в своем замыкании. Кривая $\hat{\tau}$ имеет тот же гомотопический тип на торе $\hat{V}_\omega$, что и компонента связности множества $\hat{L}_\omega$. Что означает, что любая t -кривая τ имеет тот же период, что и неустойчивые седловые сепаратрисы диффеоморфизма f , содержащие ω в своем замыкании.

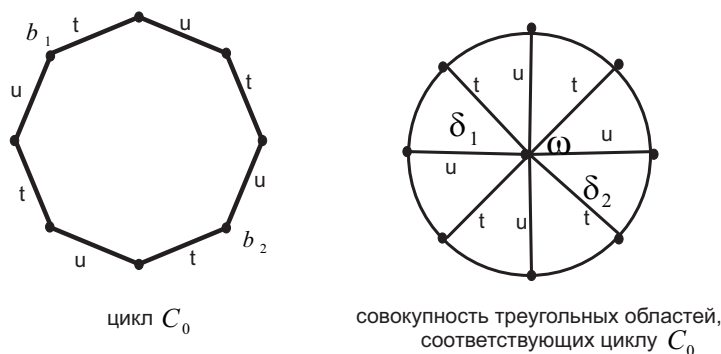
Таким образом, граница любой треугольной области, а, следовательно, и сама треугольная область имеет период m_f .

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

С л е д с т в и е 2.1. Автоморфизм P_f , индуцированный диффеоморфизмом f на графе T_f , является периодическим периода m_f .

Пусть $\mathcal{C}_0$ — множество всех tu -циклов графа T_f , $\mathcal{C}_1$ — множество всех su -циклов, $\mathcal{C}_2$ — множество всех st -циклов. Для двухцветного цикла $C_i \in \mathcal{C}_i$ обозначим через B_{C_i} множество его вершин.

Из определения треугольных областей следует, что для $i = 0, 1, 2$ корректно определено отображение $p_i : \Delta_f \rightarrow \Omega_f^i$, ставящее в соответствие треугольной области $\delta \in \Delta_f$ единственную периодическую точку из множества Ω_f^i , принадлежащую её замыканию. Положим $q_i = p_i \pi_f^{-1} : B_f \rightarrow \Omega_f^i$.



Р и с у н о к 2.2

Пример tu -цикла C_0 и соответствующих ему треугольных областей

Предложение 2.3. Для любых вершин $b_1, b_2 \in B_{C_i}$ имеет место равенство $q_i(b_1) = q_i(b_2)$.

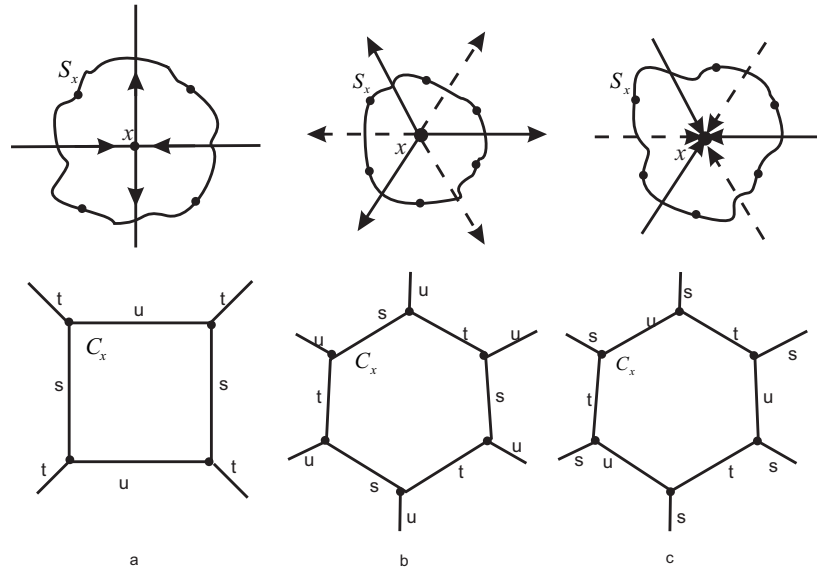
Доказательство. Проведём доказательство для B_{C_0} (в остальных случаях доказательства аналогичные). Вершинам $b_1, b_2 \in B_{C_0}$ соответствуют треугольные области $\delta_1 = \pi_f^{-1}(b_1)$ и $\delta_2 = \pi_f^{-1}(b_2)$ (см. рисунок 2.2)). Поскольку b_1 и b_2 вершины цикла B_{C_0} , то существует последовательность $\delta_1 = \beta_1, \dots, \beta_k = \delta_2$ треугольных областей таких, что β_i и $\beta_{i+1}, i = 1, \dots, k-1$ имеют общую u - или t -кривую. Поскольку каждое из таких рёбер содержит единственную стоковую точку, принадлежащую замыканию обеих областей, то $\pi_f(\beta_1) = \dots = \pi_f(\beta_k)$. Откуда следует, что $q_0(b_1) = q_0(b_2)$.

Доказательство закончено.

В силу предложения 2.3., корректно определено отображение Q_i , ставящее в соответствие множеству $B_{C_i}, C_i \in \mathcal{C}_i$ точку $x \in \Omega_f^i$ такую, что $x = q_i(b)$ для некоторой вершины $b \in B_{C_i}$.

Лемма 2.1. Отображение Q_i является взаимно-однозначным.

Доказательство. Покажем сюръективность отображения Q_i . Для точки $x \in \Omega_f^i$ обозначим через Δ_x объединение всех треугольных областей, содержащих x в своём замыкании, то есть $\Delta_x = \{\delta_x \in \Delta_x \subset \Delta_f | p_i(\delta_x) = x\}$. В окрестности точки x построим замкнутую кривую S_x , которая пересекает каждое ребро, содержащие точку x в своём замыкании, в единственной точке и не пересекает других рёбер. Тогда существует единственный цикл C_x такой, что $B_{C_x} = \pi_f(\bigcup_{\delta_x \in \Delta_x} \delta_x)$ (см. рисунок 2.3 на котором показано соответствие между кривой S_x и циклом C_x в окрестности седла, источника и стока). Рассмотрим произвольную точку $b = \pi_f(\delta_x) \in B_{C_x}$, тогда $q_i(b) = q_i(\pi_f(\delta_x)) = p_i(\pi_f^{-1}(\pi_f(\delta_x))) = p_i(\delta_x) = x$. Откуда следует, что $Q_i(C_x) = x$.



Р и с у н о к 2.3

Соответствие между кривой S_x и циклом C_x графа T_f в окрестности седла, стока и источника

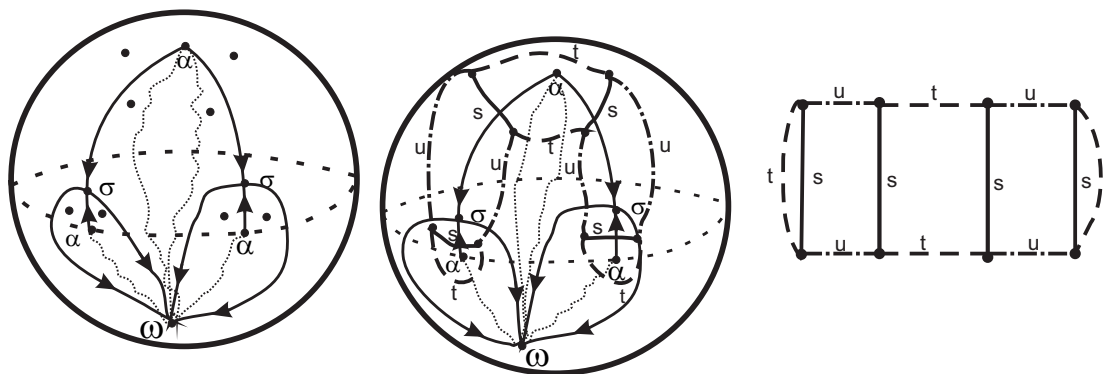
Покажем инъективность отображения Q_i . Предположим противное, для некоторых циклов C_i и C'_i таких, что $C_i \neq C'_i$, $Q_i(C_i) = Q_i(C'_i) = x \in \Omega_f^i$. Положим $\Delta_x = p_i^{-1}(x)$ полный прообраз точки x , тогда $\pi_f(\Delta_x) = B_{C_x}$, где цикл C_x определяется способом, описанным выше. В силу конструкции $C_x = C_i = C'_i$. Получили противоречие.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

В силу леммы 2.1., каждой периодической точке $x \in \Omega_f^i$ взаимно-однозначно соответствует двухцветный цикл C , любая вершина $b \in B_C$ посредством отображения π_f^{-1} переводится в треугольную область $\pi_f^{-1}(b)$, содержащую периодическую точку x в своём замыкании.

З а м е ч а н и е 2.1. Таким образом, стоковой точке $\omega \in \Omega_f^0$ соответствует tu -цикл; седловой точке $\sigma \in \Omega_f^1$ — su -цикл; источниковой точке $\alpha \in \Omega_f^2$ — st -цикл графа T_f .

Выберем во внутренности каждой треугольной области произвольную точку. Точки, находящиеся в смежных областях, соединим кривой, пересекающей общую сторону треугольных областей в единственной точке. Этой кривой припишем цвет стороны, которую она пересекает. Отсюда следует, что граф T_f вкладывается в поверхность M^2 в том смысле, что существует взаимно однозначное соответствие между вершинами графа и точками в треугольных областях (по одной в каждой), а также между ребрами графа и отрезками, соединяющими эти точки (см. рисунок 2.4).



Р и с у н о к 2.4

Вложение графа T_f в поверхность

Доказательство леммы 1.1.

Докажем, что трехцветный граф (T_f, P_f) обладает следующими свойствами:

- 1) граф T_f связан;
- 2) длина su -циклов графа T_f равна 4;
- 3) автоморфизм P_f является периодическим с периодом m_f .

Доказательство. Пусть $f \in G$. Докажем последовательно все вышеприведенные свойства графа T_f .

- 1) Пусть b_1, b_2 различные вершины графа T_f . Покажем, что существует путь, их соединяющий.

Для $i = 1, 2$ положим $\delta_i = \pi_f^{-1}(b_i)$ и выберем точку $x_i \in \text{int } \delta_i$. Поскольку 2-многообразие M^2 связно, а множество $\bigcup_{i=0}^2 \Omega_f^i$ нульмерно, то множество $M_\Omega = M^2 \setminus \bigcup_{i=0}^2 \Omega_f^i$ связно (в силу теоремы о разбивающих множествах⁵). Тогда существует гладкий путь $H : [0, 1] \rightarrow M_\Omega$ такой, что $H(0) = x_1$ и $H(1) = x_2$ (см., например, [10]). Можно считать этот путь трансверсальным объединению s, t, u -кривых⁶. Обозначим через $\delta_1 = \beta_1, \dots, \beta_k = \delta_2$ последовательность треугольных областей из множества Δ_f , пронумерованных в порядке пересечения их кривой $H([0, 1])$ при возрастания параметра $t \in [0, 1]$. Треугольные области β_i и β_{i+1} граничат по кривым γ_i . Положим $d_i = \pi_f(\beta_i)$. Из построения графа T_f следует, что последовательность вершин и ребер $d_1, e_1, d_2, \dots, d_{k-1}, e_{k-1}, d_k$ (где вершины b_i и b_{i+1} инцидентны ребру e_i , $i \geq 1$, причем цвет кривой γ_i и ребра e_i совпадает), является путем на графе T_f , соединяющим вершины b_1 и b_2 .

- 2) Согласно лемме 2.1., каждой седловой точке $\sigma \in \Omega_f^1$ соответствует цикл $C_1 \in \mathcal{C}_1$, в который входят в точности те вершины, которые являются образами треугольных областей, под действием отображения π_f , содержащими σ в своем замыкании. Так как число таких областей в точности четыре, следовательно и длина любого su -цикла равна четырем.

- 3) В силу следствия 2.1. автоморфизм P_f является периодическим с периодом m_f .

Доказательство закончено.

⁵ **Теорема о разбивающих множествах:** Любое n -мерное связное многообразие не может быть разбито подмножеством топологической размерности $\leq n - 2$.

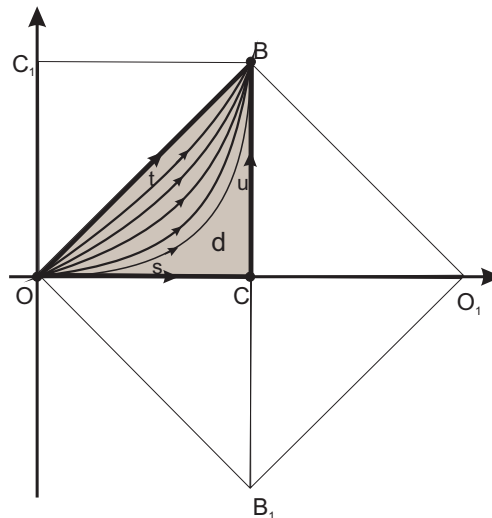
⁶ Множество $H([0, 1])$ является компактным как непрерывный образ компакта. Тогда существует открытая окрестность $U(\Omega_f)$ неблуждающего множества Ω_f , не пересекающаяся с множеством $H([0, 1])$. Обозначим через R объединение s, t, u -кривых и положим $\hat{R} = R \setminus U(\Omega_f)$. Поскольку множество $\hat{R}$ замкнуто, то, согласно теореме о трансверальности (см., например, теорема 10.3.29 книги [3]), мы можем аппроксимировать гладкий путь H таким образом, что множество $H([0, 1])$ будет трансверсально множеству $\hat{R}$.

3. Реализация (Доказательство теоремы 1.2.)

Пусть (T, P) допустимый трехцветный граф. Разобьем доказательство теоремы 1.2. на три шага, которые составят доказательства предложений 3.1., 3.3., 3.4..

Предложение 3.1. *Существует диффеоморфизм $f : M^2 \rightarrow M^2$ из класса G , граф (T_f, P_f) которого изоморфен графу (T, P) .*

Доказательство. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ векторное поле $v = (\sin(\pi x), \sin(\pi y))$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Непосредственно проверяется, что неблуждающее множество потока, определенного векторным полем v , совпадает с множеством точек целочисленной решетки плоскости (x, y) , причем точки с двумя четными (нечетными) координатами являются источниками (стоками) потока, а точки с координатами разной четности — седловыми состояниями потока. Объединение замыкания седловых сепаратрис образуют семейство целочисленных горизонтальных и вертикальных прямых. Диагонали соответствующих квадратов, соединяющие вершину с четными координатами с вершиной с нечетными координатами, являются инвариантными относительно построенного потока. Обозначим через d треугольник $\triangle OBC$ с вершинами $O(0, 0)$, $C(1, 0)$, $B(1, 1)$ и будем называть внутренности отрезков, соединяющих попарно точки O и C , O и B , B и C , соответственно OC , OB , BC — сторонами. соответственно, s -, t -, u - сторонами $\triangle OBC$ (см. рисунок 3.1). Обозначим через $g : d \rightarrow d$ диффеоморфизм, являющийся сдвигом на единицу времени потока, определяемого на треугольнике d векторным полем v .



Р и с у н о к 3.1

Траектории потока, порождённого векторным полем v

Рассмотрим теперь допустимый трехцветный граф (T, P) и обозначим через n число его вершин. Положим $D = d \times \mathbb{Z}_n$, где $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ и обозначим через $p_d : D \rightarrow d$ проекцию на первую координату, то есть $p_d(d, i) = d$. Множество B вершин графа T пронумеруем следующим образом: $b_0, \dots, b_{n-1}$. Введем на множестве D минимальное отношение эквивалентности $\sim$, удовлетворяющее следующему правилу: если вершины b_i, b_j графа T соединены s , t или u -ребром, то $(\rho, i) \sim (\rho, j)$ для любой точки $\rho \in d$, принадлежащей s , t или u -стороне, соответственно. Из свойств допустимого графа следует, что факторпространство $M^2 = D / \sim$ является замкнутым топологическим 2-многообразием. Обозначим через $q : D \rightarrow M^2$ естественную проекцию.

Автоморфизм P индуцирует на множестве D отображение $\Pi : D \rightarrow D$, переводящее точку (ρ, i) , $\rho \in d, i \in \mathbb{Z}_n$ в точку (ρ, j) , где $j \in \mathbb{Z}_n$ выбирается таким образом, что $b_j = P(b_i)$. Поскольку изоморфизм P сохраняет отношение инцидентности и цветности, то на топологическом пространстве M^2 корректно определён гомеоморфизм $f : M^2 \rightarrow M^2$ формулой $f(z) = q(g(\Pi(q^{-1}(z))))$, $z \in M^2$. Следуя идеям работы [7], определим на M^2 гладкую структуру, относительно которой отображение f является диффеоморфизмом. Что и завершит доказательство теоремы реализации.

Покроем многообразие M^2 конечным числом карт (U_z, ψ_z) , $z \in M^2$, где $U_z \subset M^2$ открытая окрестность точки z и $\psi : U_z \rightarrow \mathbb{R}^2$ гомеоморфизм на образ, следующих трёх типов (см. рисунок 3.1 для наглядности).

1. Для точки $z = q(C, i_1)$, $i_1 \in \mathbb{Z}_n$ существуют ещё три треугольника $d \times \{i_2\}, d \times \{i_3\}, d \times \{i_4\}$, $i_2, i_3, i_4 \in \mathbb{Z}_n$ таких, что $(\rho, i_{2k-1}) \sim (\rho, i_{2k})$ для любой точки $\rho \in OC$ и $(\rho, i_{2k}) \sim (\rho, i_{2k+1})$ для любой точки $\rho \in BC$, где $k = 1, 2$ и $i_5 = i_1$. Положим $U_z = \text{int } q(d \times \{i_1, i_2, i_3, i_4\})$, $\psi_z(w) = p_d((q|_{d \times \{i_1\}})^{-1}(w))$ для $w \in q(d \times \{i_1\})$; $\psi_z(w) = M_{OC}(p_d((q|_{d \times \{i_2\}})^{-1}(w)))$ для $w \in q(d \times \{i_2\})$, где $M_{OC}(x, y) = (x, -y)$ для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; $\psi_z(w) = M_C(p_d((q|_{d \times \{i_3\}})^{-1}(w)))$ для $w \in q(d \times \{i_3\})$, где $M_C(x, y) = (2 - x, -y)$ для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; $\psi_z(w) = M_{BC}(p_d((q|_{d \times \{i_4\}})^{-1}(w)))$ для $w \in q(d \times \{i_4\})$, где $M_{BC}(x, y) = (2 - x, y)$ для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Для точки $z = q(O, i_1)$, $i_1 \in \mathbb{Z}_n$ существует ещё $2m - 1$ треугольника $d \times \{i_2\}, \dots, d \times \{i_{2m}\}$, $i_2, \dots, i_{2m} \in \mathbb{Z}_n$ таких, что $(\rho, i_{2k-1}) \sim (\rho, i_{2k})$ для любой точки $\rho \in OB$ и $(\rho, i_{2k}) \sim (\rho, i_{2k+1})$ для любой точки $\rho \in OC$, где $k = 1, \dots, m$ и $i_{2m+1} = i_1$. Положим $U_z = \text{int } q(d \times \{i_1, \dots, i_{2m}\})$, $\psi_z(w) = \nu_k(p_d((q|_{d \times \{i_{2k-1}\}})^{-1}(w)))$ для $w \in q(d \times \{i_{2k-1}\})$ и $\psi_z(w) = \nu_k(M_{OB}(p_d((q|_{d \times \{i_{2k}\}})^{-1}(w))))$ для $w \in q(d \times \{i_{2k}\})$, где $\nu_k(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = (r \cos(\frac{4\varphi + 2\pi(k-1)}{m}), r \sin(\frac{4\varphi + 2\pi(k-1)}{m}))$ для $(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2$ и $M_{OB}(x, y) = (y, x)$ для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Для точки $z = q(B, i_1)$, $i_1 \in \mathbb{Z}_n$ существует ещё $2l - 1$ треугольника $d \times \{i_2\}, \dots, d \times \{i_{2l}\}$, $i_2, \dots, i_{2l} \in \mathbb{Z}_n$ таких, что $(\rho, i_{2j-1}) \sim (\rho, i_{2j})$ для любой точки $\rho \in OB$ и $(\rho, i_{2j}) \sim (\rho, i_{2j+1})$ для любой точки $\rho \in OC$, где $j = 1, \dots, l$ и $i_{2l+1} = i_1$. Положим $U_z = \text{int } q(d \times \{i_1, \dots, i_{2l}\})$, $\psi_z(w) = \mu_j(p_d((q|_{d \times \{i_{2j-1}\}})^{-1}(w)))$ для $w \in q(d \times \{i_{2j-1}\})$ и $\psi_z(w) = \mu_j(M_{OB}(p_d((q|_{d \times \{i_{2j}\}})^{-1}(w))))$ для $w \in q(d \times \{i_{2j}\})$, где $\mu_j((r - 1) \cos \varphi, (r - 1) \sin \varphi) = ((r - 1) \cos(\frac{4(\varphi + \frac{\pi}{2}) - 2\pi(j-1)}{l}), (r - 1) \sin(\frac{4(\varphi + \frac{\pi}{2}) - 2\pi(j-1)}{l}))$ для $((r - 1) \cos \varphi, (r - 1) \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2$.

Покажем, что введённые карты задают гладкую структуру на M^2 . Для этого проверим гладкость отображений перехода для карт разных типов, так как различные карты одного типа не пересекаются между собой.

1.2. Если (U_{z_1}, ψ_{z_1}) и (U_{z_2}, ψ_{z_2}) — карты первого и второго типов, соответственно, такие, что $U_{z_1} \cap U_{z_2} \neq \emptyset$. Тогда отображение $\varphi_{1,2} = \psi_{z_2} \psi_{z_1}^{-1} : \psi_{z_1}(U_{z_1} \cap U_{z_2}) \rightarrow \psi_{z_2}(U_{z_1} \cap U_{z_2})$ имеет следующий вид для $k \in \{1, \dots, m\}$:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2}(x, y) &= \nu_k(x, y) \text{ или } \varphi_{1,2}(x, y) = \nu_k(y, x) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \triangle OBC; \\ \varphi_{1,2}(x, y) &= \nu_k(x, -y) \text{ или } \varphi_{1,2}(x, y) = \nu_k(-y, x) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \triangle OB_1C; \\ \varphi_{1,2}(x, y) &= \nu_k(2 - x, -y) \text{ или } \varphi_{1,2}(x, y) = \nu_k(-y, 2 - x) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \triangle O_1B_1C; \\ \varphi_{1,2}(x, y) &= \nu_k(2 - x, y) \text{ или } \varphi_{1,2}(x, y) = \nu_k(y, 2 - x) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \triangle O_1BC. \end{aligned}$$

1.3. Если (U_{z_1}, ψ_{z_1}) и (U_{z_3}, ψ_{z_3}) — карты первого и третьего типов, соответственно, такие, что $U_{z_1} \cap U_{z_3} \neq \emptyset$. Тогда отображение $\varphi_{1,3} = \psi_{z_3} \psi_{z_1}^{-1} : \psi_{z_1}(U_{z_1} \cap U_{z_3}) \rightarrow \psi_{z_3}(U_{z_1} \cap U_{z_3})$ имеет следующий вид для $j \in \{1, \dots, l\}$:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,3}(x, y) &= \mu_j(x, y) \text{ или } \varphi_{1,3}(x, y) = \mu_j(y, x) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \triangle OBC; \\ \varphi_{1,3}(x, y) &= \mu_j(x, -y) \text{ или } \varphi_{1,3}(x, y) = \mu_j(-y, x) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \triangle OB_1C; \\ \varphi_{1,3}(x, y) &= \mu_j(2 - x, -y) \text{ или } \varphi_{1,3}(x, y) = \mu_j(-y, 2 - x) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \triangle O_1B_1C; \\ \varphi_{1,3}(x, y) &= \mu_j(2 - x, y) \text{ или } \varphi_{1,3}(x, y) = \mu_j(y, 2 - x) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \triangle O_1BC. \end{aligned}$$

2.3. Если (U_{z_2}, ψ_{z_2}) и (U_{z_3}, ψ_{z_3}) — карты второго и третьего типов, соответственно, такие, что $U_{z_2} \cap U_{z_3} \neq \emptyset$. Тогда отображение $\varphi_{2,3} = \psi_{z_3} \psi_{z_2}^{-1} : \psi_{z_2}(U_{z_2} \cap U_{z_3}) \rightarrow \psi_{z_3}(U_{z_2} \cap U_{z_3})$ имеет следующий вид для $k \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, l\}$:

$$\varphi_{2,3}(x, y) = \mu_j(\nu_k^{-1}(x, y)) \text{ для } (x, y) \in \text{int } \nu_k(d).$$

Доказательство закончено.

Предложение 3.2. Пусть a_f^0 , a_f^1 , a_f^2 — число стоковых, седловых, источниковых точек диффеоморфизма $f \in G$, заданного на ориентируемой (неориентируемой) поверхности рода g (q), тогда $a_f^0 - a_f^1 + a_f^2 = 2 - 2g$ ($a_f^0 - a_f^1 + a_f^2 = 2 - q$).

Доказательство. Хорошо известно, что эйлерова характеристика для ориентируемой поверхности выражается формулой: $\chi(X) = 2 - 2g$, где g — число ручек; а для неориентируемой поверхности формула — выглядит следующим образом: $\chi = 2 - q$, где q — число плёнок Мёбиуса (см., например, [3]). С другой стороны, в силу [11], многообразие M^2 является двумерным клеточным комплексом $M^2 = \bigcup_{p \in \Omega_f} W_p^u$ с числом

a_f^0 , a_f^1 , a_f^2 нульмерных, одномерных, двумерных клеток, соответственно. Тогда эйлерова характеристика данного комплекса вычисляется по формуле: $\chi(M^2) = \sum_{q=0}^2 (-1)^q c_q$, где c_q — число его q -мерных клеток (см., например, Теорему 9 книги [9]). Откуда $\chi(M^2) = a_f^0 - a_f^1 + a_f^2$.

Доказательство закончено.

Предложение 3.3. Эйлерова характеристика поверхности M^2 , построенной по допустимому графу (T, P) в предложении 3.1., вычисляется по формуле $\chi(M^2) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2$, где ν_0, ν_1, ν_2 число tu -, su -, st -циклов графа T , соответственно.

Доказательство. В силу леммы 2.1., $\nu_i = a_f^i$ для $i = 0, 1, 2$. Откуда, с учетом предложения 3.2., $\chi(M^2) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2$.

Доказательство закончено.

Введем понятие согласованной ориентации треугольных областей многообразия M^2 , сконструированного в доказательстве предложения 3.1. Для этого ориентируем каждую его треугольную область. Ориентацию будем задавать, выбирая один из двух возможных порядков обхода вершин треугольной области: 1) если при обходе вершин, треугольная область остается слева, то припишем области метку $\theta = +1$; 2) если при обходе вершин, треугольная область остается справа, то припишем области метку $\theta = -1$. Ориентацию треугольных областей будем называть *согласованной*, если двум смежным треугольным областям приписаны различные метки, то есть направление обхода на общей границе совпадает.

Поверхность M^2 , ориентируема тогда и только тогда, когда все треугольные области на ней можно согласованно ориентировать.

Предложение 3.4. Поверхность M^2 , построенная по допустимому графу (T, P) в предложении 3.1., ориентируема тогда и только тогда, когда в графе T все циклы имеют четную длину.

Доказательство.

Необходимость Пусть поверхность M^2 ориентируема, тогда мы можем задать согласованную ориентацию треугольных областей. Рассмотрим произвольную треугольную область $\delta \in \Delta$, для определенности положим, что ей приписана метка $\theta_\delta = +1$. По правилу согласования всем треугольным областям будут приписаны метки. Так как между

треугольными областями множества Δ и множеством вершин B графа T существует взаимно-однозначное соответствие π , то каждой вершине $b \in B$ можно приписать метку $\theta_b = \theta_\delta$, где $b = \pi(\delta)$.

Рассмотрим произвольный цикл C графа T , содержащий вершину b , положим $b = b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1} = b$ - вершины цикла C . Правило согласования меток на треугольных областях индуцирует правило согласования меток на вершинах: любые две вершины, инцидентные одному ребру, имеют различные метки.

Приписав метку θ_b вершине $b = b_1$, правило согласования однозначно определяет метку на вершине b_2 , от нее на вершине b_3 и далее по цепочке до b_n и снова на $b = b_{n+1}$. Таким образом, вершине b приписаны две метки. Так как по правилу согласования метки совпадают, то цикл C имеет четную длину.

Достаточность

Предположим все циклы графа T имеют четную длину. В силу того, что путь четной длины соединяет вершины с одинаковыми метками, можно ввести следующее правило согласования меток на вершинах: любые две вершины, инцидентные одному ребру, имеют различные метки.

Припишем метку θ_{b^*} произвольной вершине b^* , в силу связности графа правило согласования однозначно определяет метки на всех вершинах графа T . Тогда произвольной треугольной области $\delta = \pi^{-1}(b)$ однозначно приписывается метка $\theta_\delta = \theta_b$. Так как метки на вершинах введены согласованно, то треугольные области можно согласованно ориентировать в соответствии с приписанными им метками, значит, поверхность M^2 ориентируема.

Доказательство закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер., *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, Москва, 1966, 568 с.
2. Безденежных А.Н., Гринес В.З., “Динамические свойства и топологическая классификация градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений: межвуз. тематич. сб. науч. тр.*, Т. Ч. 2, ред. Е. А. Леонтович-Андропова, ГГУ, Горький, 1987, 24–32.
3. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 424 с.
4. Гринес В.З., Капкаева С.Х., “Классификация градиентно-подобных диффеоморфизмов посредством трехцветного графа”, *Журнал СВМО*, **2**, 15 (2013), 12–22.
5. Капкаева С.Х., “О топологической сопряженности градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей посредством трехцветного графа”, *Журнал СВМО*, **4**, 14 (2012), 34–43.
6. Леонтович Е., Майер А.О., “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Доклады академии наук СССР*, **4**, 103 (1955), 557–560.
7. Ошемков А.А., Шарко В.В., “О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях”, *Математический сборник*, **8**, 189 (1998), 93–140.

8. Peixoto M. M., “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems*, 1973, 389-419.
9. Л. С. Понтрягин, *Основы комбинаторной топологии.*, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1947, 142 с.
10. М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия.*, Наука, Москва, 1987, 480 с.
11. С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, *УМН*, **25**:1(151) (1970), 113–185.

Realization of gradient-like diffeomorphisms on surfaces by means of automorphisms of three-color graphs

© S. H. Kapkaeva⁷

Abstract. This paper is a continuation of the papers [5], [4] which contain the conditions of topological conjugacy of gradient-like diffeomorphisms on surfaces. In the present paper the realization problem is solved. That is a standard representative is constructed in each class of topologically conjugated gradient-like diffeomorphisms

Key Words: Morse-Smale diffeomorphisms, gradient-like diffeomorphisms, topological conjugate diffeomorphisms, three-color graph, realization of diffeomorphisms

⁷Student, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; kapkaevasvetlana@yandex.ru.

УДК 517.9

Некоторые аспекты оптимизации самовоспроизводящихся систем

© О. А. Кузенков¹, Е. А. Рябова²

Аннотация. Рассматривается модель самовоспроизводящейся системы, исследуется ее предельное поведение, на основании этого решаются задачи оптимизации данной системы при неограниченном времени управления. Критерии качества в рассматриваемых задачах отражают увеличение в системе самовоспроизводящихся объектов с определенной поведенческой стратегией. Доказано, что максимизация некоторых критериев приводит к вырождению всей системы.

Ключевые слова: самовоспроизводящиеся системы, оптимальное управление, неограниченное время управления.

Введение

Самовоспроизводящейся системой (или системой авторепродукции) называется система, объекты которой обладают свойством генерировать свои копии в процессе существования — передавать другим объектам свои качественные признаки, определяющие условия их существования в системе, в частности, это может быть тот или иной способ поведения [1, 2].

Актуальной является задача оптимального управления системами авторепродукции, в том числе и в биоэкономических моделях [3-8]. В задачах управления важнейшую роль имеет определение целей, которые достигаются посредством управления. Одной из основных целей является сохранение самой управляемой системы. В классических задачах теории управления от проблемы сохранения управляющей системы обычно отвлекаются [9]. Но если перейти к более общим моделям, то эта проблема приобретает решающее значение. Особенно актуальна она для современной экологии, при управлении экономическими, демографическими, социальными процессами и т. п.

Для того чтобы принимаемое в соответствии с избранным критерием оптимальное решение имело практический смысл, нужно, чтобы критерий содержал информацию о реальной эффективности каждой возможной альтернативы поведения. Интересующая систему информация о варианте поведения состоит лишь в следующем: возможно ли бесконечное существование системы при осуществлении этого варианта поведения или нет. Получить эту информацию система может, только реализовав его. Но если, проверяя данный вариант, система разрушается за конечное время, то принимать решение уже будет некому. Такое, казалось бы, неразрешимое противоречие исчезает в системе самовоспроизводящихся объектов. Здесь каждый вариант поведения осуществляется отдельным объектом; те объекты, поведение которых наиболее быстро приводит к собственному разрушению, исчезают из общей системы в первую очередь, и постепенно в системе остаются только те объекты, чье поведение может бесконечно долго поддерживать существование системы. Таким образом, система в целом находит для этого оптимальный вариант поведения.

¹ Доцент кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; kuzenkov_o@mail.ru

² Старший преподаватель кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; riabova-ea@rambler.ru

В то же время такой подход к заданию порядка предпочтительности и соответствующего ему критерия качества вариантов поведения системы авторепродукции таит в себе определенные опасности. Действительно, если общая численность самовоспроизводящихся объектов в системе при любом способе поведения не может стать меньше некоторого минимального положительного порога, то это означает, что система в целом всегда существует, независимо от качественных характеристик объектов или вариантов их поведения. Тогда задача оптимизации стратегии поведения не имеет решения, так как варианты поведения несравнимы. Система существует неограниченно долго при любом из них. Чтобы задача оптимизации имела смысл, необходимо, чтобы при реализации некоторых стратегий поведения система разрушалась. Значит, нужно допустить возможность приближения численности системы к нулю.

Из этого допущения следует возможность для вида с определенной поведенческой стратегией вытеснять другие виды, но при этом уничтожать всю систему, подобно тому, как неограниченный рост раковых клеток приводит к уничтожению всего организма. Такое поведение Чернавский назвал «популизмом» [10]. В интересах самосохранения система должна иметь механизмы противодействия «популизму».

Цель настоящей работы состоит в исследовании модели авторепродукции, изучения ее предельного поведения, и на основании этого решения задач управления для обеспечения неограниченно долгого существования этой системы.

Моделью авторепродукции является распределенная система, поведение которой описывается нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями. Функционалы качества в рассматриваемых задачах оптимизации, задаваемые в виде предела некоторой величины при стремлении времени к бесконечности, отражают увеличение в системе объектов с определенной поведенческой стратегией. В отличие от классической теории [??] здесь приходится рассматривать случай неограниченного времени управления.

1. Описание модели авторепродукции

Пусть W — область обитания некоторой популяции. Математически можно решать задачу для любой размерности, поэтому будем рассматривать n -мерную область W с кусочно-гладкой границей G ; $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точки области W . Через границу G проникновение особей отсутствует.

Предположим, что особи рассматриваемой популяции могут реализовывать одну из двух стратегий поведения — v_1 или v_2 . Стратегия v_1 является нормальным поведением, стратегия v_2 является патологическим (асоциальным) поведением (из-за болезни или наркологической зависимости и т.п.). Следствием патологической стратегии поведения является утрата способности к воспроизводству. Стратегия v_2 не является врожденной и может быть передана нормальным особям (в результате инфекции, копирования поведения и т.п.).

Предполагается, что особи, со стратегией поведения v_1 , могут перемещаться равномерно с равной скоростью s в любом направлении из любой внутренней точки области; скорость перемещения особей, осуществляющих стратегию v_2 , существенно выше скорости s ; особи с асоциальным поведением могут воздействовать на нормальных особей, в результате чего нормальные особи меняют стратегию своего поведения на патологическую, результативность этого воздействия пропорциональна распространенности последней стратегии в популяции («популярности» асоциального способа поведения).

Пусть $z_1(x, t)$ — плотность популяции особей, реализующих стратегию v_1 в точке $x \in W$ в момент времени t , $z_2(t)$ — общее количество особей, осуществляющих

стратегию v_2 в момент времени t , $a(x)$ — коэффициент размножения особей первого вида в точке x (коэффициент размножения является разностью между коэффициентом рождаемости и коэффициентом смертности), b — постоянный коэффициент смертности особей второго вида, $r(t)$ — коэффициент результативности воздействия особей второго вида.

Похожие гипотезы были использованы при построении модели динамики популяции с учетом явления паразитизм [12]. При сделанных предположениях модель описывается системой уравнений

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = s\Delta z_1 + az_1 - \frac{rz_1z_2}{\int_W z_1 dx + z_2}, \quad \frac{dz_2}{dt} = \frac{rz_2 \int_W z_1 dx}{\int_W z_1 dx + z_2} - bz_2 \quad (1.1)$$

с краевыми и начальными условиями

$$\partial z_1 / \partial n|_G = 0, \quad z_1(x, 0) = f(x), \quad z_2(0) = z_2^0. \quad (1.2)$$

Здесь символ Δ означает оператор Лапласа, $\partial / \partial n|_G$ — производную по нормали к границе G . Предполагаем, что функции $a(x)$, $f(x)$, $r(t)$ — непрерывные, положительные, $r(t)$ — ограниченная; параметры b , s и z_2^0 — постоянные, положительные; оператор $s\Delta v + av$ определен на множестве функций $v(x)$, заданных в области W , удовлетворяющих краевому условию $\partial v / \partial n|_G = 0$; $\nu_i(x)$, $i = \overline{1, \infty}$, — полная система ортонормированных собственных функций оператора $s\Delta v + av$, занумерованных в порядке убывания соответствующих им собственных чисел λ_i , $i = \overline{1, \infty}$, и кратность первого собственного числа равна единице: $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_i \geq \dots$.

Заметим, что система (1.1) при поставленных начальных условиях имеет лишь неотрицательное решение [13, 14], что соответствует количественной интерпретации функций $z_1(x, t)$ и $z_2(t)$. Введем переменную

$$z = \int_W z_1 dx + z_2, \quad (1.3)$$

характеризующую общую численность популяции в момент времени t ; средневременное значение функции $r(t)$ обозначим

$$\langle r \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t r(\tau) d\tau. \quad (1.4)$$

2. Формулировка результатов

2.1. Предельное поведение системы авторепродукции

Т е о р е м а 2.1. В системе (1.1) с начальными и краевыми условиями (1.2) предельные значения функций $z_2(t)$, $z(t)$ и их частного определяются в зависимости от параметров системы следующим образом:

при $\lambda_1 > 0$

$$\begin{array}{lll} \lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} z = 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} (z_2/z) = 1, \text{ если } \langle r \rangle > \lambda_1 + b; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = +\infty, & \lim_{t \rightarrow \infty} z = +\infty, & \lim_{t \rightarrow \infty} (z_2/z) = 0, \text{ если } b < \langle r \rangle < \lambda_1 + b; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} z = +\infty, & \lim_{t \rightarrow \infty} (z_2/z) = 0, \text{ если } \langle r \rangle < b; \end{array}$$

при $\lambda_1 < 0$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (z_2/z) = 0, \quad \text{если } 0 < \langle r \rangle < \lambda_1 + b; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (z_2/z) = 1, \quad \text{если } \langle r \rangle > \lambda_1 + b; \end{aligned}$$

при $\lambda_1 = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (z_2/z) = 0, \quad \text{если } 0 < \langle r \rangle < b; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (z_2/z) = 1, \quad \text{если } \langle r \rangle > b. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\lambda_1 > 0$, $\langle r \rangle > \lambda_1 + b$ удельный вес особей второго (асоциального) типа поведения стремится к максимальному значению, при этом численность всей популяции стремится к нулю. Если $b < \langle r \rangle < \lambda_1 + b$, то удельная численность особей асоциального вида стремится к минимальному значению, тем не менее происходит неограниченное увеличение их численности и всей популяции в целом. При $\langle r \rangle < b$ происходит неограниченное увеличение общей численности популяции, численность особей второго типа поведения стремится к нулю.

При любом соотношении параметров r , λ_1 и b , если $\lambda_1 < 0$, наблюдается вырождение особей второго типа поведения и всей популяции в целом; если $\lambda_1 = 0$, особи второго типа поведения вырождаются.

2.2. Оптимальное управление системой авторепродукции при неограниченном времени управления

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления для системы (1.1) при неограниченном времени управления. Допустим, что в рассматриваемой модели (1.1) возможно влияние на коэффициент воздействия $r(t)$, которое оказывают особи с паталогической стратегией поведения v_2 на особей с нормальным поведением v_1 . При этом функция $r(t)$ имеет вид

$$r(t) = r_0 + u(t), \quad (2.5)$$

где r_0 — постоянная положительная величина, $u(t)$ — результат управляющего воздействия, оказываемого особями со стратегией v_2 на особей с поведением v_1 . Пусть $u(t)$ — непрерывная функция времени, удовлетворяющая ограничению

$$|u(t)| \leq c, \quad (2.6)$$

где c — постоянная, $0 < c < r_0$.

Цель управления с точки зрения особей второго вида состоит в неограниченно долгом сохранении своей популяции. Кроме того, если рассматривать данную систему, как систему взаимного существования двух различных вариантов поведения, то можно сравнивать варианты поведения друг с другом. В этом случае лучшим будет тот вариант, который используется большим количеством особей и, соответственно, удельный вес которого в популяции будет выше. Целью управления с точки зрения повышения ценности второго варианта поведения будет увеличение численности особей, осуществляющих стратегию v_2 , или увеличение удельного веса этих особей в популяции. Исходя из этих целей, оптимальным будет управление, которое обеспечит максимум пределов³

$$J_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2, \quad J_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} (z_2/z)$$

³ Заметим, что величина z_2 не ограничена сверху, и при соотношении параметров $b < \langle r \rangle < b + \lambda$ она стремится к бесконечности. В этом случае $J_1 = +\infty$, и управление, при котором это выполняется будет оптимальным.

или двух других критериев, связанных с предыдущими:

$$J_3 = \langle z'_2/z_2 \rangle, \quad J_4 = \langle \eta'/\eta \rangle.$$

Здесь для сокращения записи введена новая переменная $\eta = z_2/z$. Смысл максимизации функционалов второй группы — увеличение средневременных значений скорости воспроизводства особей второго вида и скорости изменения удельного веса второго варианта поведения в популяции соответственно.

Будем говорить, что критерий качества адекватно выражает возможность неограниченно долгого существования некоторого вида в системе, если его выполнение (максимизация) не противоречит неограниченно долгому существованию всей системы. Поскольку при $\lambda_1 \leq 0$ особи второго вида вырождаются, то будем рассматривать только случай, когда $\lambda_1 > 0$.

Т е о р е м а 2.2. В задаче (1.1) с краевыми и начальными условиями (1.2), в которой функция $r(t)$, имеющая вид (2.5), содержит управление, удовлетворяющее ограничению (2.6), функционалы J_2 и J_4 достигают своего максимума при $\langle r \rangle > \lambda_1 + b$, функционал J_3 — при $\langle r \rangle < \lambda_1 + b$, $J_1 = +\infty$ при $b < \langle r \rangle < \lambda_1 + b$.

Приведенные результаты показывают, что решения задач оптимизации с разными критериями — различны. Более того, рекомендации противоположны: для максимизации функционалов J_2 и J_4 величину $\langle r \rangle$ нужно выбирать больше $\lambda_1 + b$, выбор $\langle r \rangle < \lambda_1 + b$ дает худший результат, для максимизации функционалов J_1 и J_3 величину $\langle r \rangle$ нужно выбирать меньше $\lambda_1 + b$ (но больше b для максимизации J_1).

Сравнив эти результаты с данными теоремы 2.1, нетрудно заметить, что при максимизации функционалов J_2 и J_4 количество объектов с поведением v_2 , также как и совокупная численность системы, стремится к нулю, т.е. система вырождается. Таким образом, функционалы J_2 и J_4 неадекватно выражают цель сохранения системы.

3. Доказательство результатов

Л е м м а 3.1. Если $\nu_i(x)$, $i = \overline{1, \infty}$, — система собственных функций оператора $s\Delta v + a(x)v$, определенного на множестве функций $v(x)$, заданных в n -мерной области W с кусочно-гладкой границей G , удовлетворяющих краевому условию $\partial v/\partial n|_G = 0$; λ_i , $i = \overline{1, \infty}$, — соответствующая им система собственных чисел; постоянные $a_i = \int_W a(x)\nu_i(x)dx$ — коэффициенты Фурье для положительной функции $a(x)$ и $w_i = \int_W \nu_i(x)dx$ — коэффициенты Фурье для единицы по системе $\nu_i(x)$, $i = \overline{1, \infty}$, то справедливо равенство

$$a_i = \lambda_i w_i, \quad i = \overline{1, \infty}. \quad (3.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\nu_i(x)$, $i = \overline{1, \infty}$, — система собственных функций оператора $s\Delta v + av$, λ_i , $i = \overline{1, \infty}$, — соответствующая им система собственных чисел, то для всех индексов $i = \overline{1, \infty}$ выполняются равенства $s\Delta \nu_i(x) + a(x)\nu_i(x) = \lambda_i \nu_i(x)$. Проинтегрируем обе части этого равенства по области W с границей G . Учитывая выражение коэффициентов Фурье a_i и w_i через функции $\nu_i(x)$, получим: $s \int_W \Delta \nu_i(x) dx + a_i = \lambda_i w_i$. Найдем значение интеграла для функции $v(x)$ из рассматриваемой области W , удовлетворяющей краевому условию $dv/dn|_G = 0$. Воспользовавшись формулой интегрирования

по частям, получим $\int_W \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} dx = \oint_G 1 \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \cos(x_i \hat{n}) ds - \int_W \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot 0 dx$, где $(x_i \hat{n})$ — угол между осью x_i и внешней нормалью к поверхности G . Тогда по свойству аддитивности интегралов $\int_W \Delta v(x) dx = \int_W \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} dx = \oint_G \frac{dv}{dn} \Big|_G ds$. Так как $dv/dn|_G = 0$, то $\int_W \Delta v(x) dx = 0$, также как и $\int_W \Delta \nu_i(x) dx = 0$, следовательно, справедливо (3.7).
Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 2.1. Предполагается, что в системе (1.1) с начальными и краевыми условиями (1.2) функции $a(x)$, $f(x)$, $r(t)$ — непрерывные, положительные, кроме этого $r(t)$ — ограниченная; параметры b , s и z_2^0 — постоянные, положительные; оператор $s\Delta v + av$ определен на множестве функций $v(x)$, заданных в области W , удовлетворяющих краевому условию $\partial v / \partial n|_G = 0$; $\nu_i(x)$, $i = \overline{1, \infty}$, — полная система ортонормированных собственных функций оператора $s\Delta v + av$, занумерованных в порядке убывания соответствующих им собственных чисел λ_i , $i = \overline{1, \infty}$, и кратность первого собственного числа равна единице: $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_i \geq \dots$.

Пусть $\zeta_i(t)$ — коэффициенты Фурье функции $z_1(x, t)$ по системе собственных функций $\nu_i(x)$, $i = \overline{1, \infty}$; $\varphi_i = \zeta_i(0)$ — постоянные коэффициенты Фурье функции $f(x)$; $w_i = \int_W \nu_i(x) dx$ — коэффициенты Фурье для единицы; $a_i = \int_W a(x) \nu_i(x) dx$ — коэффициенты Фурье функции $a(x)$.

Тогда функции $\zeta_i(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\zeta_i' = \lambda_i \zeta_i - \frac{r z_2 \zeta_i}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j w_j + z_2\right)}, \quad i = \overline{1, \infty}, \quad z_2' = \frac{r z_2 \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j w_j}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j w_j + z_2\right)} - b z_2. \quad (3.8)$$

Заметим, что при этом отношение ζ_i / ζ_1 подчиняется уравнению

$$(\zeta_i / \zeta_1)' = (\lambda_i - \lambda_1)(\zeta_i / \zeta_1), \quad i = \overline{2, \infty}.$$

Решая его, имеем $(\zeta_i / \zeta_1) = (\varphi_i / \varphi_1) \exp(\lambda_i - \lambda_1)t$, $i = \overline{2, \infty}$. Так как все разности $\lambda_i - \lambda_1$ по условию строго отрицательны, то все отношения ζ_i / ζ_1 стремятся к нулю, $i = \overline{2, \infty}$.

Более того, для функционального ряда $\sum_{i=2}^{\infty} (\zeta_i / \zeta_1) w_i$ на луче $[0, +\infty)$ справедливы оценки

$$\left| \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\zeta_i}{\zeta_1} w_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\zeta_i}{\zeta_1}\right)^2} \sqrt{\sum_{i=2}^{\infty} w_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}\right)^2} \sqrt{\sum_{i=2}^{\infty} w_i^2}.$$

Последние два ряда в правой части оценки сходятся в силу равенства Парсеваля, следовательно, исходный ряд сходится равномерно на луче $[0, +\infty)$. Значит, возможен почленный переход к пределу в сумме этого ряда при t , стремящемся к бесконечности. Поскольку пределы всех членов ряда равны нулю, то и предел суммы ряда равен нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\zeta_i}{\zeta_1} w_i = 0. \quad (3.9)$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\zeta_i}{\zeta_1} a_i = 0. \quad (3.10)$$

Из уравнений (3.8) следует, что отношение ζ_1/z_2 определяется следующим образом:

$$\left(\frac{\zeta_1}{z_2}\right)' = \frac{\zeta_1' z_2 - \zeta_1 z_2'}{z_2^2} = \frac{\zeta_1}{z_2} (\lambda_1 - r + b), \quad \frac{\zeta_1}{z_2}(t) = \frac{\varphi_1}{z_2^0} \exp\left((\lambda_1 + b)t - \int_0^t r(\tau) d\tau\right).$$

Отсюда, с учетом обозначения (1.4), получим выражение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\zeta_1}{z_2}(t) = \frac{\varphi_1}{z_2^0} \exp\left(\lim_{t \rightarrow \infty} t(\lambda_1 + b - \langle r \rangle)\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } \langle r \rangle > \lambda_1 + b, \\ \infty, & \text{если } \langle r \rangle < \lambda_1 + b. \end{cases}$$

Если $\langle r \rangle = \lambda_1 + b$, то возможны различные результаты. В частности, предел $\lim_{t \rightarrow \infty} (\zeta_1/z_2)$ может принимать любое значение от $-\infty$ до $+\infty$. Возможен случай, когда указанного предела вообще не существует.

Из системы (1.1) следует, что переменная z , определяемая соотношением (1.3), удовлетворяет уравнению

$$z' = \int_W a z_1 dx - b z_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j a_j - b z_2 = z \left(\left(a_1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\zeta_j}{\zeta_1} a_j \right) \frac{\zeta_1}{z} - b \frac{z_2}{z} \right), \quad (3.11)$$

где отношения ζ_1/z и z_2/z выражаются следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_1}{z} &= \zeta_1 / \left(\sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j w_j + z_2 \right) = \left(w_1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\zeta_j}{\zeta_1} w_j + z_2 / \zeta_1 \right)^{-1}, \\ \frac{z_2}{z} &= z_2 / \left(\sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j w_j + z_2 \right) = \left(\frac{\zeta_1}{z_2} \left(w_1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\zeta_j}{\zeta_1} w_j \right) + 1 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

В зависимости от величины $\lim_{t \rightarrow \infty} (\zeta_1/z_2)$ получим следующие предельные значения:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\zeta_1}{z}(t) &= 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{z_2}{z}(t) = 1, \quad \text{если } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\zeta_1}{z_2} = 0; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\zeta_1}{z}(t) &= 1/w_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{z_2}{z}(t) = 0, \quad \text{если } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\zeta_1}{z_2} = \infty. \end{aligned}$$

Известно, что если непрерывная функция имеет предел, то ее временное среднее совпадает с этим пределом. В силу предельного равенства (3.10) и ограниченности отношения ζ_1/z справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left(\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\zeta_j}{\zeta_1} a_j \right) \frac{\zeta_1}{z} d\tau = 0, \quad (3.12)$$

тогда с учетом равенства (3.7) для $i = 1$ получим следующее:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z = z(0) \exp \left(\lim_{t \rightarrow \infty} t \left(a_1 \left\langle \frac{\zeta_1}{z} \right\rangle - b \left\langle \frac{z_2}{z} \right\rangle \right) \right) = \begin{cases} 0, & \text{если } \lim_{t \rightarrow \infty} (\zeta_1/z_2) = 0, \\ 0, & \text{если } \lim_{t \rightarrow \infty} (\zeta_1/z_2) = \infty, \lambda_1 < 0, \\ +\infty, & \text{если } \lim_{t \rightarrow \infty} (\zeta_1/z_2) = \infty, \lambda_1 > 0. \end{cases}$$

Если $\lambda_1 = 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} z$ может принимать любое неотрицательное конечное или бесконечное значение, может и не существовать.

Наконец, вернемся к рассмотрению уравнения относительно переменной z_2 в системе (3.8). Его можно переписать в виде

$$z_2' = z_2 \left(r \left(w_1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\zeta_j}{\zeta_1} w_j \right) \frac{\zeta_1}{z} - b \right). \quad (3.13)$$

В силу (3.9), ограниченности функций r и ζ_1/z справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t r \frac{\zeta_1}{z} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\zeta_j}{\zeta_1} w_j d\tau = 0, \quad (3.14)$$

тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = z_2^0 \exp \left(\lim_{t \rightarrow \infty} t \left(\frac{1}{t} \int_0^t r w_1 \frac{\zeta_1}{z} d\tau - b \right) \right)$. В зависимости от величины $\lim_{t \rightarrow \infty} (\zeta_1/z)$ получим следующие предельные значения функции $z_2(t)$:

$$\begin{aligned} &\text{если } \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_1/z = 0, \quad \text{то } \lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = 0; \\ &\text{если } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\zeta_1}{z} = 1/w_1, \quad \text{то } \lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } \langle r \rangle < b, \\ +\infty & \text{при } \langle r \rangle > b. \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим, что при $\langle r \rangle = b$ величина $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2$ может принимать любое неотрицательное конечное или бесконечное значение, может и не существовать.

При $\langle r \rangle \neq \lambda_1 + b$ и $\langle r \rangle \neq b$ получим предельные значения функций $z_2(t)$, $z(t)$ и z_2/z , указанные в теореме 2.1.

Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 2.2. Рассмотрим четыре задачи оптимизации для каждого из функционалов $J_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2$, $J_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} (z_2/z)$, $J_3 = \langle z_2'/z_2 \rangle$ и $J_4 = \langle \eta'/\eta \rangle$, где $\eta = z_2/z$.

1. Как следует из проведенного выше исследования, абсолютный максимум критерия качества $J_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} z_2$, равный плюс бесконечности достигается при выполнении двойного неравенства

$$b < \langle r \rangle < \lambda_1 + b. \quad (3.15)$$

В противном случае значение критерия качества равно нулю — наименьшему возможному значению.

Согласно формуле (2.5) и неравенствам (2.6) временное среднее функции $r(t)$ удовлетворяет условию $r_0 - c \leq \langle r \rangle \leq r_0 + c$. Отсюда нетрудно видеть, что если константа c , ограничивающая мощность управляющего воздействия, удовлетворяет неравенствам $0 < c < b - r_0$ или $0 < c < -\lambda_1 - b + r_0$, то выполнение неравенства (3.15) невозможно, следовательно, особи второго вида в этом случае будут вымирать при любом возможном управлении. При заданных параметрах b , r_0 и λ_1 невозможно одновременное выполнение этих неравенств.

Если выполняются неравенства $-c \leq b - r_0 < c$ или $-c < \lambda_1 + b - r_0 \leq c$, то любое управление, имеющее временное среднее (или предел), удовлетворяющее условию $b - r_0 < \langle u \rangle < \lambda_1 + b - r_0$, будет оптимальным. В частности, таким может быть постоянное управление.

В одном случае, когда $c < -b + r_0$ и $c < \lambda_1 + b - r_0$, любое управление, имеющее временное среднее (или предел), будет оптимальным

Если $c = b - r_0$ или $c = -\lambda_1 - b + r_0$, то нельзя гарантировать существование управления, для которого предел z_2 равен плюс бесконечности, так как результат будет существенно зависеть от начальных условий и соотношения параметров системы.

2. Рассмотрим задачу максимизации функционала $J_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} (z_2/z)$. Как следует из теоремы 2.1 данный функционал может достигать своего абсолютного максимума, равного единице, при выполнении условия

$$\langle r \rangle > \lambda_1 + b. \quad (3.16)$$

В противном случае значение критерия качества равно нулю — наименьшему возможному значению.

Если константа c , ограничивающая мощность управляющего воздействия, удовлетворяет неравенству $c < \lambda_1 + b - r_0$, то выполнение неравенства (3.16) невозможно.

Если $c = \lambda_1 + b - r_0$, то нельзя гарантировать существование оптимального управления, так как значение критерия качества $\lim_{t \rightarrow \infty} (z_2/z)$ будет существенно зависеть от начальных условий и соотношения параметров системы.

Если выполняется неравенство $-c \leq \lambda_1 + b - r_0 < c$, то достичь абсолютного максимума можно с помощью любого управления, удовлетворяющего условию $\langle u \rangle > \lambda_1 + b - r_0$, в частности, при $u = c$.

Если $c < -\lambda_1 - b + r_0$, то любое управление, имеющее временное среднее (или предел), доставляет абсолютный максимум рассматриваемому функционалу.

3. Рассмотрим задачу максимизации функционала $J_3 = \langle z'_2/z_2 \rangle$. Из уравнения (3.13) и предельного равенства (3.14) вытекает, что этот критерий качества выражается следующим образом:

$$\langle z'_2/z_2 \rangle = \left\langle rw_1 \frac{\zeta_1}{z} \right\rangle - b, \quad (3.17)$$

и, как следует из анализа предельного поведения величины ζ_1/z , зависящего от временного среднего $\langle r \rangle$, может принимать следующие значения:

$$\langle z'_2/z_2 \rangle = \begin{cases} -b, & \text{если } \langle r \rangle > \lambda_1 + b, \\ \langle r \rangle - b, & \text{если } \langle r \rangle < \lambda_1 + b. \end{cases}$$

При сделанных предположениях относительно вида функции $r(t)$ и ограниченности управления константой c критерий $J_3 = \langle z'_2/z_2 \rangle$ достигает своего абсолютного максимума при условии

$$\langle r \rangle < \lambda_1 + b. \quad (3.18)$$

При $\langle r \rangle > \lambda_1 + b$ критерий качества принимает наименьшее возможное значение $-b$.

Если константа c , ограничивающая мощность управляющего воздействия, удовлетворяет неравенству $c \leq -\lambda_1 - b + r_0$, то выполнение неравенства (3.18) невозможно.

Если выполняется неравенство $-c < \lambda_1 + b - r_0 \leq c$, то достичь абсолютного максимума можно с помощью любого управления, удовлетворяющего условию $\langle u \rangle < \lambda_1 + b - r_0$.

Если $c < \lambda_1 + b - r_0$, то любое управление, имеющее временное среднее (или предел), доставляет абсолютный максимум рассматриваемому функционалу, в частности, $u = c$.

4. Рассмотрим задачу максимизации функционала $J_4 = \langle \eta'/\eta \rangle$, где $\eta = z_2/z$. Легко убедиться, что $\eta'/\eta = z'_2/z_2 - z'/z$, тогда из выражения (3.17) и уравнения (3.11) с учетом предельного равенства (3.12) получим следующее представление рассматриваемого функционала

$$\left\langle \frac{\eta'}{\eta} \right\rangle = \left\langle (rw_1 - a_1) \frac{\zeta_1}{z} \right\rangle + b \left(\left\langle \frac{z_2}{z} \right\rangle - 1 \right).$$

Как следует из анализа предельного поведения величин ζ_1/z и z_2/z этот функционал в зависимости от временного среднего $\langle r \rangle$, принимает следующие значения:

$$\langle \eta' / \eta \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } \langle r \rangle > \lambda_1 + b, \\ \langle r \rangle - \lambda_1 - b, & \text{если } \langle r \rangle < \lambda_1 + b. \end{cases}$$

Максимум критерия качества $J_4 = \langle \eta' / \eta \rangle$ достигается, также как и для функционала $J_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} (z_2/z)$, лишь при выполнении условия (3.16) и при том же соотношении параметров λ_1 , b , r_0 и c , которые приводятся в пункте 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Заключение

В работе рассмотрена самовоспроизводящаяся система, объекты которой реализуют одну из двух возможных стратегий поведения: „нормальную“ (с дальнейшим размножением) или „паталогическую“ (без размножения). Исследовано предельное поведение системы. Установлено, что при некоторых соотношениях входных параметров величина, характеризующая численность всей системы, стремится к нулю, что соответствует вырождению системы. На основании этого решаются задачи оптимального управления данной системой при неограниченном времени управления. Функционалы качества в рассматриваемых задачах отражают увеличение в системе объектов с «паталогической» стратегией поведения. Доказано, что при максимизации некоторых функционалов система саморазрушается. Указаны адекватные и неадекватные критерии с точки зрения сохранения существования системы.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-12452.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейман Дж. фон., *Теория самовоспроизводящихся автоматов*, Мир, М., 1971.
2. Розоноэр Л. И., Седых Е. И., “О механизмах эволюции самовоспроизводящихся систем”, *Автоматика и телемеханика*, 1979, № 2, 110–119.
3. Заславский Б. Г., Полуэктов Р. А., *Управление экологическими системами*, Наука, М, 1988.
4. Абакумов А. И., “Оптимальное управление популяцией с распределенными параметрами”, *Информатика и системы управления*, 2011, № 3(29), 3–9.
5. Фрисман Е. Я., Ласт Е. В., “Динамическая неустойчивость промысловых популяций с возрастной структурой (на примере лососевых видов рыб)”, *Доклады Академии наук*, **394**:4 (2004), 569–573.
6. Clark C. W., *Bioeconomic modelling and fisheries management*, Wiley Intersc. Pub., New York, 1985.
7. Кузенков О.А., “Задача оптимального управления для распределенной системы типа Вольтерра”, *Автоматика и телемеханика*, 2006, № 7, 14–26.

8. Кузенков О. А., Кузенкова Г. В., “Оптимальное управление системами авторепродукции”, *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2012, № 4, 26–37.
9. Неймарк Ю. И., Коган Н. Я., Савельев В. П., *Динамические модели теории управления*, Наука, М., 1985.
10. Чернавский Д. С., *Синергетика и информация (динамическая теория информации)*, Едиториал УРСС, Минск, 2004.
11. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В., *Оптимальное управление*, Наука, М, 1979.
12. Кузенков О. А., “Исследование асимптотического поведения в некоторых моделях с нелинейной динамикой”, *Нелинейная динамика и управление*, 2002, № 2, 333–335.
13. Кузенков О. А., Рябова Е. А., *Математическое моделирование процессов отбора: Учеб. пособие*, Изд-во Нижегородского госуниверситета, Нижний Новгород, 2007.
14. Кузенков О. А., Рябова Е. А., Круподерова К. Р., *Математические модели процессов отбора*, Нижегородский госуниверситет, Нижний Новгород. Режим доступа: http://www.unn.ru/books/met_files/kuzryab.pdf, 2012.

Some aspects of the optimization of self-replicating systems

© О. А. Kuzenkov⁴, Е. А. Ryabova⁵

Abstract. Model of self-replicating system and its limit behavior are studied. On this basis, the problem of optimizing the system with unlimited time control are solved. Quality criteria in these problems reflect an increase replicating objects with selected behavioral strategy. It is proved that maximization of some criteria leads to destruction of the whole system.

Key Words: self-replicating systems, optimal control, unlimited time control

⁴ Associate Professor of numerical and functional analysis of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod; kuzenkov_o@mail.ru

⁵ Senior teacher of chair numerical and functional analysis of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod; riabova-ea@rambler.ru

УДК 517.988.67

Комментарии к задачам о возмущениях линейного уравнения малым линейным слагаемым и спектральных характеристик фредгольмова оператора

© А. А. Кяшкин¹, Б. В. Логинов², П. А. Шаманаев³

Аннотация. В монографии [1] и статье [2] исследована задача о возмущении линейного уравнения малым линейным слагаемым вида $(B - \varepsilon A)x = h$ с фредгольмовым, плотно заданным на D_B оператором $B : E_1 \supset D_B \rightarrow E_2$, $D_A \supset D_B$, или $A \in L\{E_1, E_2\}$, $\varepsilon \in \mathbb{C}^1$ - малый параметр, E_1, E_2 - банаховы пространства. Применение результатов [3, 4], сформулированных в виде леммы о биортогональности обобщенных жордановых цепочек позволяет дать уточнение результатов, полученных в [1, 2]. Эта задача рассмотрена здесь также в общем случае достаточно гладкой (аналитической) по ε оператор-функции $A(\varepsilon)$. Дано также приложение леммы о биортогональности и уравнения разветвления в корневом подпространстве к задаче о возмущении фредгольмовых точек в C -спектре оператора $A(0)$.

Ключевые слова: линейные операторы в банаховых пространствах, теория возмущений

1. Введение

Пусть $B : E_1 \rightarrow E_2$ - плотно заданный фредгольмов оператор, $D_A \supset D_B$, или, для простоты изложения, $A \in L\{E_1, E_2\}$, $N(B) = \text{span}\{\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}\} \in E_1$, $N^*(B) = \text{span}\{\psi_1^{(1)}, \dots, \psi_n^{(1)}\} \in E_2^*$ - соответствующие подпространство нулей и дефектных функционалов, $\{\gamma_k^{(1)}\}_1^n \in E_1^*$ и $\{z_s^{(1)}\}_1^n \in E_2$ - соответствующие биортогональные системы, т. е. $\langle \varphi_i^{(1)}, \gamma_k^{(1)} \rangle = \delta_{ik}$, $\langle z_s^{(1)}, \psi_l^{(1)} \rangle = \delta_{sl}$. Эти условия порождают проекторы $P = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i$ и $Q = \sum_{k=1}^n \langle \cdot, \gamma_k \rangle z_k$ и соответствующие им разложения банаховых пространств E_1 и E_2 в прямые суммы $E_1 = E_1^n \dot{+} E_1^{\infty-n}$, $E_1^n = N(B)$, $E_2 = E_{2,n} \dot{+} E_{2,\infty-n}$, $E_1^n = PE_1$, $E_1^{\infty-n} = (I - P)E_1$, $E_{2,n} = QE_2$, $E_{2,\infty-n} = (I - Q)E_2$. Всюду далее использована терминология и обозначения [1].

О п р е д е л е н и е 1.1. [1-4]. Элементы $\{\varphi_i^{(s)}\}_{i=\overline{1,n}, s=\overline{1,p_i}}$ образуют полный канонический жорданов набор (ОЖН) аналитической (достаточно гладкой) по ε оператор-функции $B - A(\varepsilon)$, $A(\varepsilon) = \sum_{k=1}^n \varepsilon^k A_k$, если

$$\begin{aligned} B\varphi_k^{(s)} &= \sum_{j=1}^{s-1} A_j \varphi_k^{(s-j)}, \quad \langle \varphi_k^{(s)}, \gamma_l^{(1)} \rangle = 0, \quad s = \overline{2, p_k}, \\ D_p &= \det \left[\left\langle \sum_{j=1}^{p_k} A_j \varphi_k^{(p_k+1-j)}, \psi_l^{(1)} \right\rangle \right] \neq 0, \quad k, l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

¹ Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; andrej_kjashkin@list.ru.

² Профессор кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; loginov@ulstu.ru

³ Заведующий кафедрой прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

Этот ОЖН биканонический, если ОЖН сопряженной оператор-функции $B^* - A^*(\varepsilon)$, отвечающий элементам $\{\psi_j^{(1)}\}_1^n$, также канонический; и триканонический, если более того:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i^{(k)}, \gamma_k^{(l)} \rangle &= \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad \langle z_i^{(j)}, \psi_k^{(l)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}, \\ \gamma_k^{(l)} &= \sum_{s=1}^{p_k+1-l} A_s^* \psi_k^{(p_k+2-l-s)}, \quad z_k^{(l)} = \sum_{s=1}^{p_k+1-l} A_s \varphi_k^{(p_k+2-l-s)}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

З а м е ч а н и е 1.1. При $A(\varepsilon) = \varepsilon A$ подпространства $N(B)$ и $N^*(B)$ могут быть всегда выбраны так, чтобы соответствующие им элементы A - и A^* -жордановых наборов оператор-функций $B - \varepsilon A$ и $B^* - \varepsilon A^*$ были триканоническими, т.е. удовлетворяли условиям биортогональности

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i^{(j)}, \gamma_k^{(l)} \rangle &= \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad \langle z_i^{(j)}, \psi_k^{(l)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad j(l) = \overline{1, p_i(p_k)}, \\ \gamma_k^{(l)} &= A^* \psi_k^{(p_k+1-l)}, \quad z_i^{(j)} = A \varphi_i^{(p_i+1-j)}, \quad i, k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В п.2 на основе соотношения биортогональности (1.3) приведены комментарии к задаче ([1] §31)

$$Bx = \varepsilon Ax + h, \quad \dim N(B) \geq 1 \quad (1.4)$$

Приведен пример с конечномерными операторами B и A . П. 3 содержит обобщение на аналитическую зависимость от ε $A(\varepsilon)$, $A(\varepsilon) = 0$. Указано приложение к задачам с возмущенной границей. В п. 4 рассмотрено приложение УРК к задаче о возмущении спектра вида $A(\varepsilon)y = C(\lambda_0 + \mu)y$, где λ_0 - фредгольмова точка C -спектра оператора $A_0 = A(0)$, т. е. $B = A_0 - \lambda C$ - фредгольмов оператор.

2. Комментарии к задаче (1.4) при $n \geq 1$

Вводя регуляризатор Шмидта $\tilde{B} = B + \sum_{k=1}^n \langle \cdot, \gamma_k^{(1)} \rangle z_k^{(1)}$, запишем (1.4) в виде системы

$$\tilde{B}x = \varepsilon Ax + h + \sum_{i=1}^n \xi_i z_i^{(1)}, \quad \xi_k = \langle x, \gamma_k^{(1)} \rangle, \quad (2.1)$$

откуда по лемме Шмидта следует $x = (I - \varepsilon \Gamma A)^{-1} \varphi_i^{(1)}$. Подстановка x во второе уравнение системы (2.1) дает аналог уравнения разветвления - разрешающую систему

$$\xi_k = \langle (I - \varepsilon A \Gamma)^{-1} h, \psi_k^{(1)} \rangle + \sum_{i=1}^n \xi_i \langle (I - \varepsilon \Gamma A)^{-1} \varphi_i^{(1)}, \gamma_k^{(1)} \rangle.$$

Согласно определению ОЖЦ (1.1), (1.3) $\varphi_i^{(j)} = (\Gamma A)^{j-1} \varphi_j^{(1)}$, $j = 1, 2, \dots$, $i = \overline{1, n}$, где $\langle \varphi_i^{(j)}, \gamma_k^{(l)} \rangle = \delta_{jk}$, если j делится на p_i и $\langle \varphi_i^{(j)}, \gamma_k \rangle = 0$ - в противном случае, т. е. $\varphi_i^{(j)} = \varphi_i^{(j-p_i \lfloor \frac{j}{p_i} \rfloor)}$, $\varphi_i^{(0)} = \varphi_i^{(p_i)}$, и разрешающая система для определения ξ_k , $k = \overline{1, n}$, принимает вид

$$\begin{aligned} -\xi_k \frac{\varepsilon^{p_k}}{1 - \varepsilon^{p_k}} &= \langle (I - \varepsilon A \Gamma)^{-1} h, \psi_k^{(1)} \rangle = \langle h, \psi_k^{(1)} \rangle + \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l \langle (A \Gamma)^{l-1} h, \varphi_k^{(1)} \rangle = \\ &= \langle h, \psi_k^{(1)} \rangle + \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l \langle h, (\Gamma^* A^*)^{l-1} \psi_k^{(1)} \rangle. \end{aligned}$$

В последней сумме согласно определению ОЖЦ сопряженной оператор-функции $B^* - \varepsilon A^*$, $(\Gamma^* A^*)^{l-1} \psi_k^{(1)} = \psi_k^{(l)} = \psi_k^{(l-p_k \lceil \frac{l}{p_k} \rceil)}$, $\psi_k^{(0)} = \psi_k^{(p_k)}$.

Таким образом, при учете определения ОЖЦ сопряженной оператор-функции получаем разрешающую систему в виде

$$-\xi_k \frac{\varepsilon^{p_k}}{1 - \varepsilon^{p_k}} = \left[\langle h, \psi_k^{(1)} \rangle + \varepsilon \langle h, \psi_k^{(2)} \rangle + \dots + \varepsilon^{p_k-1} \langle h, \psi_k^{(p_k)} \rangle \right] \frac{1}{1 - \varepsilon^{p_k}}, \quad k = \overline{1, n},$$

откуда следует

$$\xi_k = -\frac{1}{\varepsilon^{p_k}} \sum_{s=1}^{p_k} \varepsilon^{s-1} \langle h, \psi_k^{(s)} \rangle, \quad k = \overline{1, n} \quad (2.2)$$

Тем самым доказано утверждение.

Т е о р е м а 2.1. *Решение уравнения (1.4) аналитично по ε , если для всех k $\langle h, \psi_k^{(s)} \rangle = 0$, $s = \overline{1, p_k}$, и имеет полюс порядка не выше $\max_k p_k$ в противном случае.*

Действительно, пусть q_k есть номер первого ненулевого члена в множестве слагаемых $\langle h, \psi_k^{(1)} \rangle, \langle h, \psi_k^{(2)} \rangle, \dots, \langle h, \psi_k^{(p_k)} \rangle$. Тогда ξ_k имеет полюс порядка $p_k - q_k + 1$, а решение уравнения (1.4) - полюс порядка $\max_k (p_k - q_k + 1)$. Если все $\langle h, \psi_k^{(s)} \rangle = 0$, $s = \overline{1, p_k}$, $k = \overline{1, n}$, то решение уравнения (1.4) аналитично по ε .

П р и м е р 2.1. $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N(B) = \{\bar{e}_1 = (1 \ 0 \ 0 \ 0), \bar{e}_2 = (0 \ 1 \ 0 \ 0)\}$, $N^*(B) = \{\bar{e}_3 = (0 \ 0 \ 1 \ 0), \bar{e}_4 = (0 \ 0 \ 0 \ 1)\}$.

Такой выбор базиса приводит к неполному ОЖН, когда определитель полноты D_p равен нулю, но ОЖЦ обрываются. Осуществляя перестройку ОЖН согласно [1, 3], приходим к базисным элементам ОЖН следующего вида

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)} &= e_1, & \varphi_2^{(1)} &= e_2, & \varphi_2^{(2)} &= -e_1 + e_4, & \varphi_2^{(3)} &= -e_3, \\ A\varphi_1^{(1)} &= z_1^{(1)} = e_1 + e_3, & A\varphi_2^{(1)} &= z_2^{(3)} = e_2, & A\varphi_2^{(2)} &= z_2^{(2)} = -e_1, & A\varphi_2^{(3)} &= z_2^{(1)} = -e_4, \\ \psi_1^{(1)} &= e_3, & \psi_2^{(1)} &= -e_4, & \psi_2^{(2)} &= -e_1 + e_3, & \psi_2^{(3)} &= e_2, \\ A^*\psi_1^{(1)} &= \gamma_1^{(1)} = e_1 + e_4, & A^*\psi_2^{(1)} &= \gamma_2^{(3)} = -e_3, & A^*\psi_2^{(2)} &= \gamma_2^{(2)} = e_4, & A^*\psi_2^{(3)} &= \gamma_2^{(1)} = e_2, \end{aligned}$$

удовлетворяющим условиям биортогональности $\langle \varphi_i^{(k)}, \gamma_j^{(l)} \rangle = \delta_{ij} \delta_{kl}$, $\langle z_i^{(k)}, \psi_j^{(l)} \rangle = \delta_{ij} \delta_{kl}$. Разрешающая система определяет ξ_1 и ξ_2 в виде

$$\xi_1 = -\frac{1}{\varepsilon} \langle h, \psi_1^{(1)} \rangle, \quad \xi_2 = -\frac{1}{\varepsilon^3} \left[\langle h, \psi_2^{(1)} \rangle + \varepsilon \langle h, \psi_2^{(2)} \rangle + \varepsilon^2 \langle h, \psi_2^{(3)} \rangle \right].$$

З а м е ч а н и е 2.1. *Решение задачи (1.4) в каждом отдельном случае теоремы 2.1. ищется методом неопределенных коэффициентов [1].*

З а м е ч а н и е 2.2. *В работе [5] теорема 2.1. доказана с помощью техники уравнений разветвления в корневых подпространствах.*

3. Уравнение (1.4) с аналитическим оператором $A(\varepsilon)$

Л е м м а 3.1. [5, 6]. Соотношения (1.2), (1.3) определяют проекторы

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \gamma_i^{(j)} \rangle \varphi_i^{(j)} = \langle \cdot, \gamma \rangle \Phi : E_1 \rightarrow E_1^K = K(B, A), \\ \mathbf{Q} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle z_i^{(j)} = \langle \cdot, \psi \rangle z : E_2 \rightarrow E_{2,K} = \text{span} \{z_i^{(j)}\}, \end{aligned}$$

где $\Phi = (\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_1^{(p_1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(p_n)})$, векторы γ , φ и z определяются аналогично, порождающие разложения пространств E_1 , E_2 в прямые суммы $E_1 = E_1^K \dot{+} E_1^{\infty-K}$, $E_2 = E_{2,K} \dot{+} E_{2,\infty-K}$. Здесь $E_1^K = \text{span}\{\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(p_n)}\}$, $E_{2,K} = \text{span}\{z_1^{(1)}, \dots, z_n^{(p_n)}\}$, $K = \sum_{s=1}^n p_s$ - размерность корневого подпространства E_1^K . При этом справедливы соотношения сплетения

$$\begin{aligned} B\mathbf{P} &= \mathbf{Q}B \text{ на } D_B, \quad A\mathbf{P} = \mathbf{Q}A \text{ на } D_A, \\ B\Phi &= \mathcal{A}_B z, \quad A\Phi = \mathcal{A}_A z, \quad A^* \psi = \mathcal{A}_A \gamma, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\mathcal{A}_B$ и $\mathcal{A}_A$ - клеточно-диагональные матрицы $\mathcal{A}_B = (B_1, \dots, B_n)$ и $\mathcal{A}_A = (A_1, \dots, A_n)$

$$\text{с } p_i \times p_i \text{-клетками } B_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторы A и B , действуют в инвариантных парах подпространств E_1^K , $E_{2,K}$ и $E_1^{\infty-K}$, E_2 и $B : D_B \cap E_1^{\infty-K} \rightarrow E_{2,\infty-K}$ и $A : E_1^K \rightarrow E_{2,K}$, являются изоморфизмами.

Введение регуляризатора Э.Шмидта [1] позволяет записать уравнение $(B - A(\varepsilon))x = h$ в виде системы

$$\tilde{B}x = h + A(\varepsilon)x + \sum_{i=1}^n \xi_{i1} z_i^{(1)}, \quad \xi_{s\sigma} = \langle x, \gamma_s^{(\sigma)} \rangle, \quad s = \overline{1, n}, \quad \sigma = \overline{1, p_s}, \quad (3.2)$$

решение которой ищется в виде $x = w + \xi \cdot \Phi = w + v$, $v \in E_1^K$. Тогда

$$\tilde{B}x = \tilde{B}w + \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^{p_j} \xi_{jk} B \varphi_j^{(k)} = h + A(\varepsilon)w + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{p_j} \xi_{jl} A(\varepsilon) \varphi_j^{(l)}. \quad (3.3)$$

Согласно (1.1) при $k \geq 2$ $B \varphi_j^{(k)} = \sum_{r=1}^{k-1} A_r \varphi_j^{(k-r)} = z_j^{(p_j+2-k)}$, $\sum_{k=2}^{p_j} \xi_{jk} B \varphi_j^{(k)} = \sum_{k=2}^{p_j} \xi_{jk} z_j^{(p_j+2-k)} = \xi_{j2} z_j^{(p_j)} + \xi_{j3} z_j^{(p_j-1)} + \dots + \xi_{jp_j} z_j^{(2)}$ и т. к. $\Gamma z_j^{(p_j)} = \varphi_j^{(2)}$, $\Gamma z_j^{(p_j-1)} = \varphi_j^{(3)}$, ..., $\Gamma z_j^{(2)} = \varphi_j^{(p_j)}$, $\Gamma z_j^{(1)} = \varphi_j^{(1)}$; $\varphi_j^{(p_j+1)} = \varphi_j^{(1)}$, $z_j^{(p_j+1)} = z_j^{(1)}$, получаем, обращая в (3.3) оператор $\tilde{B}$

$$\begin{aligned} w &= (I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1} \Gamma h - \sum_{j=1}^n (I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1} (\xi_{j2} \varphi_j^{(2)} + \xi_{j3} \varphi_j^{(3)} + \dots + \xi_{jp_j} \varphi_j^{(p_j)}) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{p_j} \xi_{jl} (I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1} \Gamma A(\varepsilon) \varphi_{jl}. \end{aligned}$$

Поскольку $(I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1} \Gamma A(\varepsilon) = \Gamma A(\varepsilon)(I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1}$, $(I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1} = I + \Gamma A(\varepsilon)(I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1}$ и $-\sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^{p_j} \xi_{jk} (I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1} \varphi_j^{(k)} + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{p_j} \xi_{jl} \Gamma A(\varepsilon)(I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1} \varphi_j^{(l)} = -\sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^{p_j} \xi_{jk} \varphi_j^{(k)} - \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^{p_j} \xi_{jk} \Gamma A(\varepsilon)(I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1} \varphi_j^{(k)} + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{p_j} \xi_{jl} \Gamma A(\varepsilon)(I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1} \varphi_j^{(l)} = -\sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^{p_j} \xi_{jk} \varphi_j^{(k)} + \sum_{j=1}^n \xi_{j1} \Gamma A(\varepsilon)(I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1} \varphi_j^{(1)}$, то выражение для w преобразуется к виду

$$w = \Gamma(I - A(\varepsilon)\Gamma)^{-1}h - \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^{p_j} \xi_{jk} \varphi_j^{(k)} + \sum_{j=1}^n \xi_{j1} \Gamma A(\varepsilon)(I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1} \varphi_j^{(1)}. \quad (3.4)$$

Так как $\Gamma^* \gamma_j^{(1)} = \psi_j^{(1)}$ и $\Gamma^* \gamma_j^{(s)} = \psi_j^{(p_j+2-s)}$ при $s \geq 2$, подстановка $x = v + w$ во второе уравнение системы (3.2) дает

$$\begin{aligned} -\langle w, \gamma_s^{(\sigma)} \rangle &= 0, \quad \sigma = \overline{1, p_s}, \quad s = \overline{1, n} \Rightarrow \\ -\langle (I - A(\varepsilon)\Gamma)^{-1}h, \psi_s^{(1)} \rangle - \sum_{j=1}^n \xi_{j1} \langle A(\varepsilon)(I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1} \varphi_j^{(1)}, \psi_s^{(1)} \rangle &= 0 \text{ при } \sigma = 1, \\ \xi_{s\sigma} &= \langle (I - A(\varepsilon)\Gamma)^{-1}h, \psi_s^{(1)} \rangle + \sum_{j=1}^n \xi_{j1} \langle A(\varepsilon)(I - \Gamma A(\varepsilon))^{-1} \varphi_j^{(1)}, \psi_s^{(p_j+2-\sigma)} \rangle \text{ при } \sigma > 1, \end{aligned}$$

или, учитывая, что $A^*(\varepsilon)(I - \Gamma^* A^*(\varepsilon))^{-1} = (I - A^*(\varepsilon)\Gamma^*)^{-1} A^*(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \langle h, (I - \Gamma^* A^*(\varepsilon))^{-1} \psi_s^{(1)} \rangle + \sum_{j=1}^n \xi_{j1} \langle \varphi_j^{(1)}, (I - \Gamma^* A^*(\varepsilon))^{-1} A^*(\varepsilon) \psi_s^{(1)} \rangle &= 0, \\ \xi_{s\sigma} &= \langle h, (I - \Gamma^* A^*(\varepsilon))^{-1} \psi_s^{(1)} \rangle + \\ + \sum_{j=1}^n \xi_{j1} \langle \varphi_j^{(1)}, (\varepsilon)(I - \Gamma^* A^*(\varepsilon))^{-1} A^*(\varepsilon) \psi_s^{(p_j+2-\sigma)} \rangle, \quad \sigma &= \overline{2, p_s}, \quad s = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

З а м е ч а н и е 3.1. Считая $A^*(\varepsilon)$, $A(0) = 0$ агрегатом, не учитывающим зависимость от ε , т.е. вводя ОЖЦ сопряженного оператора для оператор-функции $B^* - \mu A^*(\varepsilon)$, приходим к заключению теоремы 2.1.. Более тонкая структура решения может быть получена при исследовании системы (3.5) при конкретной зависимости от ε оператора $A(\varepsilon)$.

П р и м е р 3.1. В качестве применения укажем уравнение Пуассона $\Delta u = h$ с граничными условиями Неймана $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0$ в области эллипса $\Omega = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}$. Осуществляя отображение области эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (при $a - b < \varepsilon$ $a = b$) на круг $T(x, y) = \left(\frac{b}{\mu} x, y \right) = (\xi, \eta)$, получаем задачу вида (1.4) с аналитическим оператором $A(\varepsilon)$. Оператор B - оператор Лапласа в круге с граничным условием Неймана.

4. Применение уравнения разветвления в корневом подпространстве при возмущении спектра

Для семейства операторов $A(\varepsilon) : E_1 \rightarrow E_2$, $A(0) = A_0$, зависящих от малого параметра $\varepsilon \in \mathbb{C}^1$ рассматривается обобщенная задача на собственные значения $A(\varepsilon)y = \lambda C y$,

$C : L(E_1 \rightarrow E_2)$, λ_0 - n -кратная фредгольмова точка спектра оператора A_0 , т. е. $A_0 - \lambda_0 C$ - Ф-оператор. Ставится задача определения собственных чисел $\lambda = \lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \mu(\varepsilon)$ оператор-функции $A(\varepsilon) - \lambda(\varepsilon)C$, ответившихся от собственного значения λ_0 и собственных элементов, им соответствующих, на основе применения уравнений разветвления в корневых подпространствах.

Поставленная задача сводится к уравнению $By = H(\varepsilon)y + \mu Cy$, $B = A_0 - \lambda_0 C$, $H(\varepsilon) = A_0 - A(\varepsilon)$, в предположении $N(B) = \{\varphi_i\}_1^n$, $N^*(B) = \{\psi_j\}_1^n$. Согласно [1, 4], C -жорданов набор, отвечающий $N(B)$ всегда можно считать триканоническим, т. е. $B\varphi_k^{(s)} = C\varphi_k^{(s-1)}$, $B^*\psi_k^{(s)} = C^*\psi_k^{(s-1)}$, $s = \overline{2, p_k}$, $k = \overline{1, n}$ со свойствами (1.2), т. е.

$$\langle \varphi_i^{(j)}, \gamma_k^{(l)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad \langle z_i^{(j)}, \psi_k^{(l)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad \gamma_k^{(l)} = C^* \psi_k^{(p_k+1-l)}, \quad z_k^{(l)} = C \varphi_k^{(p_k+1-l)}.$$

Вводя регуляризатор Шмидта $\tilde{B}$, $\tilde{B}^{-1} = \Gamma$, запишем эквивалентную поставленной задаче систему

$$\tilde{B}y = H(\varepsilon)y + \mu Cy + \sum_{i=1}^n \xi_{i1} z_i^{(1)}, \quad \xi_{s\sigma} = \langle y, \gamma_s^{(\sigma)} \rangle. \quad (4.1)$$

Полагая $y = w + v$, $v = \xi \cdot \Phi \in E_1^K$, находим $\tilde{B}w + \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{p_i} \xi_{ij} B\varphi_i^{(j)} - \mu Cw - H(\varepsilon)w = \mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \xi_{ij} C\varphi_i^{(j)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \xi_{ij} H(\varepsilon)\varphi_i^{(j)}$, и обращая оператор $\tilde{B}$ с учетом соотношений $C\varphi_i^{(j)} = z_i^{(p_i+1-j)}$, $\Gamma z_k^{(p_k+1-s)} = \varphi_k^{(s+1)}$, получаем $(I - \mu\Gamma C - \Gamma H(\varepsilon))w = \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{p_i} \xi_{ij} \Gamma C\varphi_i^{(j-1)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \xi_{ij} (\mu\Gamma C + \Gamma H(\varepsilon))\varphi_i^{(j)} = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{p_i} \xi_{ij} \varphi_i^{(j)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \xi_{ij} \Gamma(\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(j)} \Rightarrow$
 $w = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{p_i} \xi_{ij} [I - \Gamma(\mu C + H(\varepsilon))]^{-1} \varphi_i^{(j)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \xi_{ij} [I - \Gamma(\mu C + H(\varepsilon))]^{-1} \Gamma(\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(j)} =$
 $= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{p_i} \xi_{ij} \varphi_i^{(j)} - \Gamma \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{p_i} \xi_{ij} [I - (\mu C + H(\varepsilon))\Gamma]^{-1} (\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(j)} + \Gamma \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \xi_{ij} [I - (\mu C + H(\varepsilon))\Gamma]^{-1} (\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(j)} =$
 $= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{p_i} \xi_{ij} \varphi_i^{(j)} + \Gamma \sum_{i=1}^n \xi_{i1} [I - \mu C + H(\varepsilon)\Gamma]^{-1} (\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(j)}.$

Подставляя найденное w во второе уравнение системы (4.1) и учитывая равенства $\Gamma^* \gamma_s^{(1)} = \psi_s^{(1)}$, $\Gamma^* \gamma_s^{(\sigma)} = \psi_s^{(p_s+2-\sigma)}$, $\sigma \geq 2$, приходим к уравнению разветвления в корневом подпространстве (УРК)

$$\begin{aligned} -\langle w, \gamma_s^{(\sigma)} \rangle &= 0, \quad \sigma = \overline{1, p_s}, \quad s = \overline{1, n} \Rightarrow \\ &-\sum_{i=1}^n \xi_{i1} \langle [I - (\mu C + H(\varepsilon))\Gamma]^{-1} (\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(j)}, \psi_s^{(1)} \rangle = 0, \\ \xi_s^{(2)} - \sum_{i=1}^n \xi_{i1} \langle [I - (\mu C + H(\varepsilon))\Gamma]^{-1} (\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(1)}, \psi_s^{(p_s)} \rangle &= 0, \\ \xi_s^{(3)} - \sum_{i=1}^n \xi_{i1} \langle [I - (\mu C + H(\varepsilon))\Gamma]^{-1} (\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(1)}, \psi_s^{(p_s-1)} \rangle &= 0, \\ \dots \\ \xi_s^{(p_s)} - \sum_{i=1}^n \xi_{i1} \langle [I - (\mu C + H(\varepsilon))\Gamma]^{-1} (\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(1)}, \psi_s^{(2)} \rangle &= 0, \quad s = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Выделяя главные члены по степеням μ при использовании формул $C\varphi_i^{(j)} = z_i^{(p_i+1-j)}$, $\Gamma z_k^{(p_k+1-s)} = \varphi_k^{(s+1)}$, получаем разложение $[I - (\mu C + H(\varepsilon))\Gamma]^{-1} (\mu C + H(\varepsilon))\varphi_i^{(1)} = [\mu C + \mu^2 C\Gamma C + \mu^3 (C\Gamma)^2 C + \dots + \mu^{p_i-1} (C\Gamma)^{p_i-2} C + \mu^{p_i} (C\Gamma)^{p_i-1} C + \mu^{p_i+1} (C\Gamma)^{p_i} C + \mu^{p_i+2} (C\Gamma)^{p_i+1} C +$

$+\dots]\varphi_i^{(1)} + H(\varepsilon)[I - \Gamma(\mu C + H(\varepsilon))]^{-1}\varphi_i^{(1)} = \frac{1}{1 - \mu^{p_i}}[\mu z_i^{(p_i)} + \mu^2 z_i^{(p_i-1)} + \dots + \mu^k z_i^{(p_i-k+1)} + \dots + \mu^{p_i} z_i^{(1)}] + H(\varepsilon)[I - \Gamma(\mu C + H(\varepsilon))]^{-1}\varphi_i^{(1)}$. УРК принимает вид

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu^{p_s}}{1 - \mu^{p_s}}\xi_{s1} - \sum_{i=1}^n \xi_{i1} \langle H(\varepsilon)[I - \Gamma(\mu C + H(\varepsilon))]^{-1}\varphi_i^{(1)}, \psi_s^{(1)} \rangle = 0, \\ \xi_s^{(2)} - \frac{\mu}{1 - \mu^{p_s}}\xi_{s1} - \sum_{i=1}^n \xi_{i1} \langle H(\varepsilon)[I - \Gamma(\mu C + H(\varepsilon))]^{-1}\varphi_i^{(1)}, \psi_s^{(p_s)} \rangle &= 0, \\ \xi_s^{(3)} - \frac{\mu^2}{1 - \mu^{p_s}}\xi_{s1} - \sum_{i=1}^n \xi_{i1} \langle H(\varepsilon)[I - \Gamma(\mu C + H(\varepsilon))]^{-1}\varphi_i^{(1)}, \psi_s^{(p_s-1)} \rangle &= 0, \\ \dots \\ \xi_s^{(p_s)} - \frac{\mu^{p_s-1}}{1 - \mu^{p_s}}\xi_{s1} - \sum_{i=1}^n \xi_{i1} \langle H(\varepsilon)[I - \Gamma(\mu C + H(\varepsilon))]^{-1}\varphi_i^{(1)}, \psi_s^{(2)} \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Подобно [1] УРК (4.2) определяет асимптотику разветвляющихся решений на основе метода диаграммы Ньютона.

З а м е ч а н и е 4.1. Данная работа написана с целью исследования устойчивости разветвляющихся решений [6]. Укажем здесь недавно опубликованные обзоры результатов [8-10] по теории ветвления решений нелинейных уравнений, полученные в школе профессора В. А. Треногина.

Полученные результаты поддержаны ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"(соглашение 14.В37.21.0373).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А., *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, М., 1964, Engl. transl. Wolter Noordorf, Leyden, 1974.
2. Треногин В. А., "Возмущение линейного уравнения малым линейным слагаемым", *ДАН СССР*, **140**:2 (1961), 311-313.
3. Русак Ю. Б., *Обобщенная жорданова структура в теории ветвления*, кандидатская диссертация, Ташкент. Инст. математики им. В. М. Романовского АН Узб. ССР, 1979, 126 с.
4. Логинов Б. В., Русак Ю. Б., "Обобщенная жорданова структура в теории ветвления", *Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными*, сб. н. работ, ред. М. С. Салахитдинов, Фан, Ташкент, 1978, 133-148.
5. Karasözen B., Konopleva I., Loginov B., "Hereditary symmetry of resolving systems in nonlinear equations with Fredholm operators", *Nonlinear Analysis and Applications: To V. Lakshmikantham on his 80-th Birthday*, **2**, eds. Ravi P. Agarwal, Donal O'Regan, Kluwer Acad. publ., Dordrecht, 2003, 617-644.
6. Loginov B. V., Rousak Yu. B., "Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions", *Nonlinear Analysis: TMA*, **17**:3 (1991), 219-232.
7. Loginov B. V., "Branching equation in the root subspace", *Nonlinear Analysis: TMA*, **32**:3 (1998), 439-448.

8. Логинов Б. В., “Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия”, *Вестник Самарского гос. ун-та*, 1998, № 4(10), 15-70.
9. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M., *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*, MIA, **550**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
10. *Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения*, Коллективная монография, ред. В. А. Треногин, А. Ф. Филипов, Физматлит, М., 2003.

Comments to the problems of small perturbations of linear equations and linear term of the spectral characteristics of a Fredholm operator

© A. A. Kyashkin⁴, B. V. Loginov⁵, P. A. Shamanaev⁶

Abstract. In the monograph [1] and the article [2] the problem on perturbation of linear equation by small linear summand of the form $(B - \varepsilon A)x = h$ were investigated with closely defined on D_B Fredholmian operator $B : E_1 \supset D_B \rightarrow E_2$, $D_A \supset D_B$, or $A \in L\{E_1, E_2\}$, $\varepsilon \in \mathbb{C}^1$ - small parameter, E_1 and E_2 - are Banach spaces. The application of the results [3, 4] formulated in the form of the lemma on the biorthogonality of generalized Jordan chains allows to give some retainings of the results [1, 2]. This problem is considered here in the general case of sufficiently smooth (analytic) by ε operator-function $A(\varepsilon)$. It is given also the application of the biorthogonality lemma and branching equation in the root subspaces to the problem on perturbation of Fredholm points in C -spectrum of the operator $A(0)$.

Key Words: linear operators in Banach spaces, perturbation theory

⁴ Graduate student of chair of an applied mathematics, Mordovian State University of a name of N. P. Ogarev, Saransk; andrej_kjashkin@list.ru.

⁵ Professor department of Mathematics, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; loginov@ulstu.ru

⁶ Head of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru.

УДК 517.9

Диффеоморфизмы 3-многообразий с одномерными базисными множествами, просторно расположенными на 2-торах

© Ю. А. Левченко¹, А. А. Шиловская²

Аннотация. В работе рассматривается класс G диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А.С. Смейла, заданных на трехмерных многообразиях и таких что, неблуждающее множество любого диффеоморфизма из G принадлежит объединению конечного числа двумерных поверхностей, каждая из которых является вложением двумерного тора и содержит одномерное просторно расположенное базисное множество. При естественных ограничениях на структуру пересечения инвариантных двумерных многообразий точек из таких базисных множеств, устанавливается полусопряженность любого диффеоморфизма из G модельному диффеоморфизму.

Ключевые слова: А-диффеоморфизм, базисное множество, полусопряженность

1. Введение и формулировка результатов

В статье рассматриваются сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы f , заданные на замкнутом ориентируемом связном 3-многообразии M^3 и удовлетворяющие аксиоме А.С.Смейла (то есть множество неблуждающих точек $NW(f)$ является гиперболическим и периодические точки плотны в $NW(f)$). Согласно спектральной теореме С. Смейла [14] неблуждающее множество $NW(f)$ диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных *базисных множеств*, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию. *Типом* базисного множества $\mathcal{B}$ называют пару неотрицательных целых чисел (a, b) таких, что $a = \dim W_x^u$, $b = \dim W_x^s$, $x \in \mathcal{B}$.

В силу [3], *нетривиальное* (отличное от периодической орбиты) базисное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма f называется *поверхностным*, если оно принадлежит f -инвариантной замкнутой поверхности $M_{\mathcal{B}}^2$ топологически вложенной в 3-многообразие M^3 и называемой *носителем* множества $\mathcal{B}$.

Тесная взаимосвязь между топологией многообразия M^3 и динамикой рассматриваемого диффеоморфизма наблюдается тогда, когда все неблуждающее множество диффеоморфизма $f : M^3 \rightarrow M^3$ состоит только из поверхностных двумерных базисных множеств, а именно, в [5] доказано, то многообразие M^3 в этом случае является локально тривиальным расслоением над окружностью со слоем тор. В работах [6]-[8] выделен класс структурно устойчивых диффеоморфизмов с поверхностными двумерными базисными множествами, для которого получена полная топологическая классификация.

В настоящей работе будем рассматривать класс А-диффеоморфизмов трехмерного многообразия, все нетривиальные базисные множества которых являются одномерными и поверхностными. Фундаментом для настоящих исследований послужили результаты по топологической классификации А-диффеоморфизмов двумерных многообразий, неблуждающие множества которых содержат одномерные базисные множества, полученные в

¹ Младший научный сотрудник НИИ ПМК при ННГУ им. Н.И. Лобачевского; ulev4enko@gmail.com

² Аспирант кафедры численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского; vesnann@mail.ru

работах Х. Бонатти, Р. Ланжевена, Гринеса В.З., Жирова А.Ю., Калая Х.Х., Плыкина Р.В. (для ссылок смотри, например [1], [9], [13]).

Пусть $f : M^3 \rightarrow M^3$ диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме А С. Смейла. Предположим, что неблуждающее множество диффеоморфизма $f : M^3 \rightarrow M^3$ содержит одномерное поверхностное базисное множество $\mathcal{B}$ с носителем $M_{\mathcal{B}}^2$. Поскольку $\mathcal{B}$ нетривиальное базисное множество, то оно имеет тип $(1, 2)$ или $(2, 1)$. Для базисного множества $\mathcal{B}$ типа $(1, 2)$ существуют следующие возможности:

- i) $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in \mathcal{B}} W_x^u$;
- ii) $\mathcal{B} = M_{\mathcal{B}}^2 \cap (\bigcup_{x \in \mathcal{B}} W_x^s)$.

Согласно [12], в случае i) базисное множество $\mathcal{B}$ является *аттрактором*, а в случае ii) — не является ни аттрактором, ни репеллером и мы называем его *седловым*. Будем называть одномерное поверхностное базисное множество $\mathcal{B}$ типа $(1, 2)$ *канонически вложенным*, если

в случае i), W_x^s , $x \in \mathcal{B}$ пересекается с поверхностью $M_{\mathcal{B}}^2$ по единственной кривой;

в случае ii), $W_x^u \subset M_{\mathcal{B}}^2$, $x \in \mathcal{B}$.

Одномерное поверхностное базисное множество $\mathcal{B}$ типа $(2, 1)$ называется *канонически вложенным* в $M_{\mathcal{B}}^2$, если оно является таковым для диффеоморфизма f^{-1} .

Пусть базисное множество $\mathcal{B}$ канонически вложено в поверхность $M_{\mathcal{B}}^2$. Положим $\hat{W}_x^s = W_x^s \cap M_{\mathcal{B}}^2$ и $\hat{W}_x^u = W_x^u \cap M_{\mathcal{B}}^2$ для $x \in \mathcal{B}$. Следуя [12], множество $\mathcal{B}$ назовем *просторно расположенным* на $M_{\mathcal{B}}^2$, если для различных точек $x, y \in \mathcal{B}$ любая замкнутая кривая, составленная из дуг $[x, y]^s \subset \hat{W}_x^s$ и $[x, y]^u \subset \hat{W}_y^u$ не гомотопна нулю на $M_{\mathcal{B}}^2$.

Когда носитель просторно расположенного базисного множества состоит из двумерных торов, будем обозначать его $T_{\mathcal{B}}^2$. Топология объемлющего многообразия M^3 в этом случае уточняется следующим образом.

Обозначим через $M_{\hat{J}}$ — многообразие, являющееся фактор-пространством, полученным из $T^2 \times [0, 1]$ отождествлением точек $(z, 1)$ и $(\hat{J}(z), 0)$, где $\hat{J}$ — алгебраический автоморфизм тора, заданный матрицей J , которая либо является гиперболической, либо совпадает с единичной матрицей $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, либо совпадает с матрицей $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

В [11] доказано следующее утверждение, вытекающее из результатов работ [2], [10].

Предложение 1.1. Пусть $f : M^3 \rightarrow M^3$ диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме А, заданный на замкнутом, неприводимом, ориентируемом трехмерном многообразии M^3 , неблуждающее множество которого содержит одномерное просторно расположенное на $T_{\mathcal{B}}^2$ базисное множество. Тогда многообразие M^3 гомеоморфно многообразию $M_{\hat{J}}$.

Будем рассматривать класс G А-диффеоморфизмов $f : M^3 \rightarrow M^3$ со следующими свойствами:

1) неблуждающее множество f содержит непустое множество $\mathbb{B}$ просторно расположенных базисных множеств;

2) $M_{\mathcal{B}}^2 = T_{\mathcal{B}}^2$ для любого $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$;

3) $NW(f) \subset (\bigcup_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} T_{\mathcal{B}}^2)$;

4) для любой точки x базисного множества $\mathcal{B}_1 \in \mathbb{B}$ типа $(1, 2)$ ($(2, 1)$) существует точка y базисного множества $\mathcal{B}_2 \in \mathbb{B}$ типа $(2, 1)$ ($(1, 2)$) такая, что каждая компонента связности пересечения $W_x^s \cap W_y^u$ ($W_x^u \cap W_y^s$) является открытой дугой, имеющей в точности

две граничные точки, одна из которых принадлежит $\mathcal{B}_1$, другая $\mathcal{B}_2$, при этом объединение замыканий всех таких дуг определяет f -инвариантную одномерную ламинацию на многообразии M^3 .

Следуя [4] введем класс Φ модельных диффеоморфизмов следующим образом. Представим многообразие $M_{\hat{f}}$ как пространство орбит $M_{\hat{f}} = (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где $\Gamma = \{\gamma^k, k \in \mathbb{Z}\}$ группа степеней диффеоморфизма $\gamma : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, заданного формулой $\gamma(z, r) = (\hat{J}(z), r - 1)$. Обозначим через $p_{\hat{f}} : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow M_{\hat{f}}$ естественную проекцию.

Пусть $C \in SL(2, \mathbb{Z})$ гиперболическая матрица такая, что $CJ = JC$. Для $n, k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\psi_{n,k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диффеоморфизм, являющийся сдвигом на единицу времени потока $\dot{r} = \sin 2\pi nkr$. Для $k = 1$ положим $l = 0$ и для $k > 1$ пусть $l \in \{1, \dots, k-1\}$ натуральное число, взаимно простое с k . Обозначим через $\chi_{k,l} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\chi_{k,l}(r) = r - \frac{l}{k}$. Положим $\varphi_{n,k,l} = \psi_{n,k}\chi_{k,l} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Обозначим через $\tilde{\varphi}_{C,n,k,l} : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\tilde{\varphi}_{C,n,k,l}(z, r) = (\hat{C}(z), \varphi_{n,k,l}(r))$, где $\hat{C}$ — гиперболический автоморфизм тора. Непосредственно проверяется, что $\tilde{\varphi}_{C,n,k,l}\gamma = \gamma\tilde{\varphi}_{C,n,k,l}$, откуда следует, что отображение $\varphi_{C,n,k,l} : M_{\hat{f}} \rightarrow M_{\hat{f}}$, заданное формулой $\varphi_{C,n,k,l} = p_{\hat{f}}\tilde{\varphi}_{C,n,k,l}p_{\hat{f}}^{-1}$, где $p_{\hat{f}}^{-1}(x)$ полный прообраз точки x , является диффеоморфизмом. Обозначим через Φ множество таких диффеоморфизмов.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Т е о р е м а 1.1. *Любой диффеоморфизм $f \in G$ полусопряжен некоторому диффеоморфизму $\varphi \in \Phi$.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 12-01-00672 и 13-01-12452-офи-м). Авторы также благодарят В. З. Гринеса за постановку задачи и О. В. Починку за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bonatti Ch., Langevin R., *Diffeomorphismes de Smale des surfaces. Asterisque.*, Societe mathematique de France, Paris, 2011, 250 с.
2. Гринес В. З., “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах”, *Труды ММО*, **34** (1977), 243–252.
3. Гринес В. З., Медведев В. С., Жужома Е. В., “О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях”, *Мат. зам.*, **78**:6 (2005), 813–826.
4. V.Z. Grines, Yu.A. Levchenko, O.V. Pochinka., “On a topological classification of diffeomorphisms on 3-manifolds with two-dimensional surface attractors and repellers.”, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2014 will be published.
5. Гринес В. З., Медведев В. С., Левченко Ю. А., “О структуре 3-многообразия, допускающего А-диффеоморфизм с двумерным поверхностным неблуждающим множеством”, *Труды СВМО*, **12**:2 (2010), 7–12.
6. Гринес В. З., Левченко Ю. А., “О топологической классификация диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами.”, *Труды СВМО*, **13**:1 (2011), 29–31.

7. Гринес В. З., Левченко Ю. А., “Реализация структурно устойчивых диффеоморфизмов”, *Труды СВМО*, **14**:2 (2012), 48–57.
8. Гринес В. З., Левченко Ю. А., “О топологической классификации диффеоморфизмов трехмерных многообразий с двумерными поверхностными аттракторами и репеллерами”, *Доклады Академии Наук*, **447**:2 (2012), 127–129.
9. В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, Институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 438 с.
10. Hertz F., Herts M., Ures R., “Tori with hyperbolic dynamics in 3-manifolds”, *Journal of modern dynamics*, **5**:1 (2011), 185–202.
11. Левченко Ю. А., “О структуре трехмерного многообразия, допускающего диффеоморфизмы с одномерными базисными множествами.”, *Труды СВМО*, **15**:1 (2013), 71–76.
12. Плыкин Р. В., “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов С.Смейла”, *Матем. сборник*, **84**:2 (1971), 301–312.
13. Плыкин Р. В., “О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов”, *Успехи матем. наук*, **35**:3 (1980), 94–104.
14. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

Diffeomorphisms on 3-manifolds with 1-dimensional basic sets which are spaciouly situated on 2-torus

© Y. A. Levchenko³, A. A. Shilovskaya⁴

Abstract. We consider the class G of diffeomorphisms satisfying Smale’s Axiom A on 3-manifolds, such that the nonwandering set of any diffeomorphism from G belongs to the finite union of surfaces. Every surface is an embedding of torus and contains a one-dimensional spaciouly situated basic set. Under certain restrictions on the structure of intersection of two-dimensional invariant manifolds of points from this basic sets, it is established the semiconjugacy of any diffeomorphism from G to a model diffeomorphism.

Key Words: A-diffeomorphism, basic set, semiconjugacy

³ research associate, Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod; ulev4enko@gmail.com.

⁴ graduate student of Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod; vesnann@mail.ru

УДК 534.11

Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении

© В. Л. Литвинов¹

Аннотация. Описан аналитический метод решения волнового уравнения с условиями, заданными на движущихся границах. С помощью замены переменных в функциональном уравнении исходная краевая задача сведена к разностному уравнению с одним постоянным смещением, которое решено с помощью интегрального преобразования Лапласа. Получено выражение для амплитуды колебаний, соответствующих n -ой динамической моде в случае граничных условий первого рода. В качестве примера рассмотрены крутильные колебания балки переменной длины. Исследования резонансных свойств доведены до численного решения.

Ключевые слова: волновое уравнение, колебания систем с движущимися границами, законы движения границ, резонансные свойства

Механические системы, границы которых движутся, широко распространены в технике (канаты грузоподъемных установок [1], гибкие звенья передач [2] и т.д.). Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем, поэтому здесь в основном используются приближенные методы решения [3], [4]. Из аналитических методов наиболее эффективным является метод, предложенный в [5], который заключается в подборе новых переменных, останавливающих границы и оставляющих уравнение инвариантным. В [6] решение ищется в виде суперпозиции двух волн, бегущих навстречу друг другу. В результате этого автору удалось решить волновое уравнение с граничными условиями первого рода, заданными на одной движущейся и одной неподвижной границах. Метод, используемый в [7], заключается в замене геометрической переменной на чисто мнимую переменную, что позволяет свести волновое уравнение к уравнению Лапласа и применить для решения методику теории функций комплексного переменного. Эффективен также метод, используемый в [8], заключающийся в замене переменных в системе дифференциально-разностных уравнений, позволяющий получить точное решение волнового уравнения с различного вида условиями на подвижных границах.

В развиваемом в данной статье методе решения таких задач удачно сочетается методика, используемая в [5], [8].

Пусть движение системы описывается волновым уравнением

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0 \quad (1.1)$$

при граничных условиях первого рода

$$\begin{aligned} U(\ell_1(\tau), \tau) &= F_1(\tau); \quad \ell_1(0) = 0; \\ U(\ell_2(\tau), \tau) &= F_2(\tau); \quad \ell_2(0) = 1; \quad \ell_2(\tau) > \ell_1(\tau) \end{aligned} \quad (1.2)$$

и начальных условиях

$$U(\xi, 0) = \Phi_0(\xi); \quad U_\tau(\xi, 0) = \Phi_1(\xi). \quad (1.3)$$

Здесь τ безразмерное время ($\tau \geq 0$); ξ безразмерная пространственная координата ($\ell_1(\tau) \leq \xi \leq \ell_2(\tau)$); $\ell_1(\tau), \ell_2(\tau)$ законы движения границ; $\Phi_0(\xi), \Phi_1(\xi), F_1(\tau), F_2(\tau)$ заданные функции, допускающие разрывы первого рода.

¹ Старший преподаватель кафедры общетеоретических дисциплин, Сызранский филиал Самарского государственного технического университета, г. Сызрань, vladlitvinov@rambler.ru.

Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$U(\xi, \tau) = U(\tau - \xi).$$

Из (1.3) найдем функцию $U(\xi; 0)$:

$$U(\xi) = \frac{1}{2}[\Phi_0(-\xi) + \int_0^\xi \Phi_1(-\zeta)d\zeta], \quad -1 \leq \xi \leq 0. \quad (1.4)$$

Для упрощения задачи введем новую функцию

$$U(\tau - \xi) = r(\varphi(\tau - \xi)). \quad (1.5)$$

Тогда граничные условия (1.2) примут вид

$$\begin{cases} r(\varphi(\tau - \ell_1(\tau))) = F_1(\tau); \\ r(\varphi(\tau - \ell_2(\tau))) = F_2(\tau). \end{cases} \quad (1.6)$$

Обозначая в первом уравнении системы (1.6)

$$\varphi(\tau - \ell_1(\tau)) = z$$

и во втором уравнении этой системы

$$\varphi(\tau - \ell_2(\tau)) = z - \frac{1}{2},$$

получим

$$\varphi(\tau - \ell_1(\tau)) = \varphi(\tau - \ell_2(\tau)) + \frac{1}{2}. \quad (1.7)$$

При этом система (1.6) примет вид

$$\begin{cases} r(z) = \theta_1(z); \\ r(z - \frac{1}{2}) = \theta_2(z), \end{cases} \quad (1.8)$$

где $\theta_1(z) = F_1(\tau)$; $\theta_2(z) = F_2(\tau)$

Заметим, что из уравнения (1.7) функция $\varphi(z)$ определяются с точностью до константы в том смысле, что если $\varphi(z)$ решение уравнения (1.7), то $\varphi(z) + C$ также является решением (здесь C — произвольная постоянная). Поэтому для определенности можно выбрать такую функцию $\varphi(z)$, что $\varphi(-1) = -\frac{1}{2}$. При этом, при $\tau = 0$ следует, что $\varphi(0) = 0$.

С учетом замены (1.5) начальные условия (1.3) примут следующий вид:

$$r(z) = U(\bar{\varphi}(z)); \quad -\frac{1}{2} \leq z \leq 0, \quad (1.9)$$

где функция $U(z)$ определяется выражением (1.4). Здесь $\bar{\varphi}(z)$ функция, обратная к $\varphi(z)$

Таким образом, начальная задача (1.1)-(1.3) сведена к системе разностных уравнений (1.8) с одним постоянным смещением при начальном условии (1.9). Из системы (1.8) получим

$$r(z) - r(z - \frac{1}{2}) = \theta(z), \quad (1.10)$$

где

$$\theta(z) = \theta_1(z) - \theta_2(z).$$

Используем для решения задачи (1.10), (1.9) интегральное преобразование Лапласа

$$\bar{r}(p) = \int_0^\infty r(z)e^{-pz}dz.$$

После применения указанного преобразования получим:

$$\bar{r}(p) = \bar{\theta}(p)/(1 - e^{-0,5p}) + e^{-0,5p} \int_{-\frac{1}{2}}^0 r(z)e^{-pz}dz/(1 - e^{-0,5p}),$$

где $\bar{\theta}(p)$ изображение функции $\theta(z)$. Оригинал данного изображения имеет вид

$$r(z) = 2 \int_0^z \theta(\zeta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi ni(z-\zeta)} d\zeta + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi niz} \int_{-\frac{1}{2}}^0 r(\zeta) e^{-2\pi ni\zeta} d\zeta.$$

Объединяя члены при положительных и отрицательных будем иметь:

$$\begin{aligned} r(z) = & 2 \int_0^z \theta(\zeta) d\zeta + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z \theta(\zeta) \cos[2\pi n(z - \zeta)] d\zeta + \\ & + 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 r(\zeta) d\zeta + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^0 r(\zeta) \cos[2\pi n(z - \zeta)] d\zeta \end{aligned} \quad (1.11)$$

Рассмотрим свободные колебания системы ($\theta(z) = 0$). В этом случае из (1.5) с учетом (1.11) следует, что

$$U(\xi, \tau) = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 r(\zeta) d\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^*(\xi, \tau), \quad (1.12)$$

где

$$V_n^*(\xi, \tau) = A_n^* \cos(2\pi n\varphi(\tau - \xi)) + B_n^* \sin(2\pi n\varphi(\tau - \xi)); \quad (1.13)$$

$$A_n^* = 4 \int_{-\frac{1}{2}}^0 r(\zeta) \cos(2\pi n\zeta) d\zeta; B_n^* = 4 \int_{-\frac{1}{2}}^0 r(\zeta) \sin(2\pi n\zeta) d\zeta. \quad (1.14)$$

Рассмотрим теперь вынужденные колебания системы. При нулевых начальных условиях из (1.5) с учетом (1.11) получим:

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\xi, \tau) + D(\xi, \tau), \quad (1.15)$$

где

$$V_n(\xi, \tau) = A_n \cos(2\pi n\varphi(\tau - \xi)) + B_n \sin(2\pi n\varphi(\tau - \xi)); \quad (1.16)$$

$$A_n = 4 \int_0^{\varphi(\tau-\xi)} \theta(\zeta) \cos(2\pi n\zeta) d\zeta; B_n = 4 \int_0^{\varphi(\tau-\xi)} \theta(\zeta) \sin(2\pi n\zeta) d\zeta; \quad (1.17)$$

$$D(\xi, \tau) = 2 \int_0^{\varphi(\tau-\xi)} \theta(\zeta) d\zeta.$$

При решении задач на резонансные свойства рассматриваются, главным образом, резонансные явления в механических объектах с движущимися границами, когда амплитуда колебаний во много раз превосходит амплитуду возмущающего воздействия. Поэтому в равенстве (1.15) функцией $D(\xi, \tau)$ можно пренебречь как функцией одного порядка малости с функциями $F_1(\tau); F_2(\tau)$, характеризующими возмущающие воздействия.

Сравнивая выражения (1.12) и (1.15), (1.13) и (1.16), нетрудно заметить, что вынужденные колебания представляют собой суперпозицию собственных колебаний с изменяющимися во времени амплитудами A_n и B_n .

Заметим, что из всех видов внешних воздействий наиболее распространенными являются гармонические нагрузки. Ограничимся рассмотрением случая, когда $\theta(z)$ имеет вид

$$\theta(z) = \cos W(z), \quad (1.18)$$

где $W(z)$ — монотонно возрастающая функция.

В этом случае равенства (1.17) можно переписать следующим образом:

$$A_n = 2 \int_0^{\varphi(\tau-\xi)} \cos \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta + 2 \int_0^{\varphi(\tau-\xi)} \cos \Phi_{n2}(\zeta) d\zeta;$$

$$B_n = 2 \int_0^{\varphi(\tau-\xi)} \sin \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta + 2 \int_0^{\varphi(\tau-\xi)} \sin \Phi_{n2}(\zeta) d\zeta,$$

где $\Phi_{n1}(\zeta) = 2\pi n\zeta - W(\zeta)$; $\Phi_{n2}(\zeta) = 2\pi n\zeta + W(\zeta)$.

Так как функции $2\pi n\zeta$ и $W(\zeta)$ монотонно возрастают, фаза $\Phi_{n2}(\zeta)$ быстро изменяется, что приводит к осцилляции с небольшой амплитудой соответствующих интегралов. Фаза же $\Phi_{n1}(\zeta)$ может изменяться очень медленно. При этом наблюдается резонансное явление, которое характеризуется ростом интегралов, содержащих фазу $\Phi_{n1}(\zeta)$. Из изложенного следует, что при возникновении резонанса рост амплитуды связан с возрастанием интегралов с фазой $\Phi_{n1}(\zeta)$, интегралами же с фазой $\Phi_{n2}(\zeta)$ можно пренебречь. Тогда полная амплитуда, определяемая по формуле $A_n^2 = A_n^2 + B_n^2$ в точке $\xi = \xi_n(\tau)$ соответствующей максимальному размаху колебаний, будет иметь следующий вид:

$$A_n^2(\tau) = 4 \left\{ \left[\int_0^{b(\tau)} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^{b(\tau)} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (1.19)$$

где $b(\tau) = \varphi(\tau - \xi_n(\tau))$, $\Phi_n(\zeta) = 2\pi n\zeta - W(\zeta)$.

В случае, когда левая граница неподвижна, а закон движения правой границы имеет вид $l(\tau) = 1 + \varepsilon\tau$ (равномерное движение), функции φ, Φ_n определяются следующим образом

$$\varphi(z) = \frac{\ln[(1 + \varepsilon z)/(1 - \varepsilon)]}{2 \ln[1/(1 - \varepsilon)]} - \frac{1}{2};$$

$$\Phi_n(\zeta) = 2\pi n\zeta - W \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} \right)^{2\zeta} - \frac{1}{\varepsilon} \right). \quad (1.20)$$

При выводе (1.20) было учтено, что

$$\zeta = \frac{\ln(1 + \varepsilon\tau)}{2 \ln[1/(1 - \varepsilon)]}. \quad (1.21)$$

Рассмотрим явление установившегося резонанса и прохождение через резонанс для крутильных колебаний балки переменной длины. Дифференциальное уравнение, описывающее крутильные колебания балки, имеет вид:

$$Q_n(x, t) - a^2 Q_{xx}(x, t) = 0. \quad (1.22)$$

Граничные условия можно записать следующим образом:

$$Q(0, t) = 0; \quad (1.23)$$

$$Q(l_0(t), t) = B \cos W_0(\omega_0 t). \quad (1.24)$$

В задаче (1.22) - (1.24) используются следующие обозначения:

$Q(x, t)$ – угол поворота сечения балки с координатой x в момент времени t , $a^2 = GJ/K$, G – модуль сдвига, J – полярный момент инерции, K – момент инерции единицы длины балки; $l_0(t) = L_0 - v_0 t$ – закон движения правой границы, L_0 – начальная длина балки; $W_0(\omega_0 t)$ – монотонно возрастающая функция, B, ω_0 – постоянные величины. Начальные условия в данном случае на резонансные свойства влияния не оказывают, поэтому здесь они не рассматриваются. Введем в поставленную задачу безразмерные переменные:

Начальные условия в данном случае на резонансные свойства влияния не оказывают, поэтому здесь они не рассматриваются. Введем в поставленную задачу безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{\omega_0}{a} x; \tau = \omega_0 t - \frac{\omega_0 L_0 - a}{v_0}; Q(x, t) = B \Theta(\xi, \tau). \quad (1.25)$$

В результате задача примет вид

$$\Theta_{\tau\tau}(\xi, \tau) - \Theta_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (1.26)$$

$$\Theta(0, \tau) = 0; \quad (1.27)$$

$$\Theta(l(\tau), \tau) = \cos W(\tau), \quad (1.28)$$

где

$$l(\tau) = 1 + \varepsilon\tau; \varepsilon = -v_0/a;$$

$$W(\tau) = W_0(\tau - \gamma_0); \gamma_0 = (a - \omega_0 L_0)/v_0.$$

Для задачи вида (1.26)-(1.28) выражение амплитуды напряжений, соответствующих колебаниям на n -ой динамической моде имеет вид (1.19).

В системах с движущимися границами возможны два вида резонансных явлений: установившийся резонанс и прохождение через резонанс.

Установившийся резонанс – это явление резкого увеличения амплитуды колебаний в случае, когда изменение частоты внешней силы и одной из собственных частот согласованы таким образом, что создаются наилучшие условия для увеличения амплитуды.

Прохождение через резонанс – это явление резкого увеличения амплитуды в течение конечного промежутка времени, когда мгновенная частота одного из собственных колебаний проходит через значение возмущающей частоты.

Явление установившегося резонанса будет наблюдаться, если скорость изменения функции $\Phi_n(\zeta)$ равна нулю, т.е.

$$\Phi_n(\zeta) = \gamma, \quad (1.29)$$

где γ — постоянная величина. В этом случае возрастание амплитуды описывается следующим выражением:

$$A_n = \frac{\ln(1 + \varepsilon\tau)}{\ln[1/(1 - \varepsilon)]}. \quad (1.30)$$

Исследуем колебания балки под действием нагрузки постоянной частоты $W(\tau) = \tau$

Явление прохождения через резонанс наблюдается во временной области, содержащей точку ζ_0 , где

$$\Phi_n'(\zeta_0) = 0.$$

В этой точке мгновенная частота n -ного собственного колебания проходит через значение возмущающей частоты. Точка ζ_0 определяется по следующей формуле:

$$\zeta_0 = \frac{\ln \left\{ \frac{\pi n \varepsilon}{\ln[1/(1 - \varepsilon)]} \right\}}{2 \ln[1/(1 - \varepsilon)]}.$$

Если амплитуда в начале резонансной области (точка $\zeta_1 = \varphi(\tau_1 - \xi_n(\tau_1))$) равна нулю, то амплитуда в конце резонансной области (точка $\zeta_2 = \varphi(\tau_2 - \xi_n(\tau_2))$) определяется выражением

$$A_n^2(\zeta_1, \zeta_2) = 4 \left\{ \left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (1.31)$$

Учитывая (1.21), точки τ_0, τ_1, τ_2 , соответствующие точкам $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$, определяются по формуле

$$\tau_i = \frac{1}{\varepsilon} \exp \{ 2\zeta_i \ln[1/(1 - \varepsilon)] \} - \frac{1}{3}; i = 0, 1, 2.$$

В этом случае на интервале, содержащем точку τ_0 , будет наблюдаться явление прохождения через резонанс. Формула для максимально возможной амплитуды здесь имеет вид

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \cos \Phi_n(\tau) d\tau \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sin \Phi_n(\tau) d\tau \right]^2 \right\}, \quad (1.32)$$

где

$$F_n(\tau) = \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon\tau) \ln[1/(1 - \varepsilon)]}; \Phi_n(\tau) = \pi n \frac{\ln(1 + \varepsilon\tau)}{\ln[1/(1 - \varepsilon)]} - W(\tau).$$

Прохождение через резонанс начинается не доходя до точки τ_0 ($\tau_1 < \tau_0$) и заканчивается за этой точкой ($\tau_2 > \tau_0$). Сама точка τ_0 определяется по формуле:

$$\tau_0 = \frac{\pi n}{\ln[1/(1 - \varepsilon)]} - \frac{1}{\varepsilon}.$$

Исследование прохождения через резонанс заключается в определении границ резонансной области τ_1 и τ_2 , соответствующих максимуму выражения (1.32). Результаты исследований равенства (1.32) на максимум численно приведены в таблице, отображающей зависимость величин A_n, τ_1, τ_2 от скорости ε при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах.

Таблица 1: Численные результаты исследования равенства (1.32) на максимум

	ε	-0,40	-0,30	-0,20	-0,10	-0,01	0	0,01	0,10	0,20	0,30	0,40
1 мода	A_1	3,3	3,7	4,5	6,2	19,0	∞	19,0	5,9	4,0	3,2	2,7
	τ_1	-15,1	-17,7	-22,8	-36,9	-255,4	τ_0	176,2	9,6	2,5	0,5	0,0
	τ_2	-1,7	-2,6	-4,8	-12,1	-179,1	τ_0	252,1	33,1	18,8	13,5	10,6
2 мода	A_2	2,3	2,6	3,2	4,4	13,4	∞	13,4	4,1	2,9	2,3	1,9
	τ_1	-27,1	-32,7	-43,6	-74,9	-586,9	τ_0	473,1	34,6	13,2	6,7	3,7
	τ_2	-8,3	-11,6	-18,3	-40,6	-479,1	τ_0	580,3	67,8	36,1	24,9	19,0

Из анализа данной таблицы следует, что чем медленнее происходит прохождение через резонанс, тем большей величины достигает амплитуда колебаний. В заключении отметим, что приведенная здесь методика позволяет установить возможность возникновения явления установившегося резонанса и прохождения через резонанс, а также вычислить амплитуду возникающих при этом колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савин Г. Н., Горошко О. А., *Динамика нити переменной длины*, Наук.думка, Киев, 1962, 332 с.
2. Самарин Ю. П., Анисимов В. Н., "Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне", *Изв. вузов. Машиностроение*, 1986, № 12, 17-21.
3. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., "Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича-Галеркина", *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. "физико-математические науки"*, 1:18 (2009), 149-158.
4. Горошко О. А., Савин Г. Н., *Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины*, Наук.думка, Киев, 1971, 270 с.
5. Весницкий А. И., *Волны в системах с движущимися границами и нагрузками*, Физматлит, М., 2001, 320 с.
6. Весницкий А. И., "Обратная задача для одномерного резонатора изменяющего во времени свои размеры", *Изв. вузов. Радиофизика*, 1971, № 10, 1538-1542.
7. Барсуков К. А., Григорян К. А., "К теории волновода с подвижными границами", *Изв. вузов. Радиофизика*, 1976, № 2, 280-285.
8. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., *Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография*, Самар. гос. техн. ун-т, Самара, 2009, 131 с.

Solving boundary value problems with moving boundaries using the method of change of variables in the functional equation

© V. L. Litvinov²

Abstract. The method of analytical solution of wave equation with the conditions, assigned on the moving boundaries, is described. With the aid of the change of variables in the functional equation the original boundary-value problem is brought to the difference equation with one fixed bias, which can be solved using the Laplace integral transform. The expression for amplitude of oscillation corresponding to n-th dynamic mode is obtained for the first kind boundary conditions. As an example, the torsional vibrations of a beam of variable length considered. Study the resonance properties brought to the numerical solution.

Key Words: wave equation, variations of systems with moving boundaries, laws of boundary moving

²Senior lecturer of dept. of general – theoretical disciplines, Syzran Branch of Samara State Technical University, Syzran, vladlitvinov@rambler.ru.

УДК 517.9

Пример диффеоморфизма «источник-сток» на двумерной сфере, не включаемого в гладкий поток

© О. В. Починка¹, А. А. Романов²

Аннотация. Одним из классических результатов Дж. Палиса [4] является включение любого градиентно-подобного двумерного каскада в топологический поток при условии, что все его неблуждающие точки неподвижны. Напротив, в гладкий поток среди них включается лишь нигде не плотное множество, что следует из работы М. Брина [1]. Целью данной работы является аналитическое построение примера диффеоморфизма «источник-сток» на S^2 , не включаемого в гладкий поток.

Ключевые слова: включение в гладкий поток, диффеоморфизм «источник-сток»

1. Введение и формулировка результатов

Проблема включения диффеоморфизма в поток является классической. Детальный обзор результатов, полученных в этой области, изложен в [6]. В работе [5] доказано, что множество C^r -диффеоморфизмов ($r \geq 1$), включающихся в C^1 -поток, является подмножеством первой категории в $Diffr(M^n)$. Согласно [1] множество C^2 -диффеоморфизмов, включающихся в C^1 -гладкий поток, нигде не плотно в пространстве диффеоморфизмов Морса-Смейла. Однако доказательство последнего результата не носит конструктивный характер. В настоящей работе аналитически строится пример C^2 -каскада, не включающегося ни в какой гладкий поток. Дадим необходимые определения.

C^m -*поток*ом ($m \geq 0$) на гладком многообразии M^n называется непрерывно зависящее от $t \in \mathbb{R}$ семейство C^m -диффеоморфизмов $X^t : M^n \rightarrow M^n$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $X^0(x) = x$ для любой точки $x \in M^n$;
- 2) $X^t(X^s(x)) = X^{t+s}(x)$ для любых $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in M^n$.

C^0 -поток еще называют *топологическим потоком*. Заменяя $\mathbb{R}$ на $\mathbb{Z}$, получаем определение дискретной динамической системы или *каскада*. Будем говорить, что диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ включается в C^m -поток, если f является сдвигом на единицу времени вдоль траекторий некоторого C^m -потока X^t ($f = X^1$).

Траекторией или орбитой точки $x \in M^n$ называется множество $\mathcal{O}_x = \{f^t(x), t \in \mathbb{R}(\mathbb{Z})\}$. Точка $x \in M^n$ называется *неподвижной точкой* потока f^t (каскада f), если $\mathcal{O}_x = \{x\}$. Точка $x \in M^n$ называется *периодической точкой* потока f^t (каскада f), если существует число $per(x) > 0$ ($per(x) \in \mathbb{N}$) такое, что $f^{per(x)}(x) = x$, но $f^t(x) \neq x$ для всех действительных (натуральных) чисел $0 < t < per(x)$. Число $per(x)$ называется *периодом периодической точки* x .

Для каскада f точка $x \in M^n$ называется *блуждающей*, если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $f^t(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для всех $t \in \mathbb{N}$. В противном случае точка x называется *неблуждающей*. Множество всех неблуждающих точек каскада f называется *неблуждающим множеством* и обозначается Ω_f .

¹ Профессор кафедры теории функций, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; olga-pochinka@yandex.ru

² Магистрант кафедры теории функций, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; romanov18.04@mail.ru

Пусть $f : M^n \rightarrow M^n$ — диффеоморфизм и $f(p) = p$. Точка p является *гиперболической* тогда и только тогда, когда среди собственных чисел матрицы Якоби $(\frac{\partial f}{\partial x})|_p$ (матрицы, состоящей из частных производных в точке p функций, задающих отображение) нет чисел, по модулю равных 1. Если при этом все собственные числа по модулю меньше 1, то p называется *стоковой точкой*; если все собственные числа по модулю больше 1, то p называется *источниковой точкой*. Гиперболическая неподвижная точка, не являющаяся стоковой или источниковой, называется *седловой точкой* или *седлом*.

Если p — периодическая точка f с периодом $per(p)$, то, применяя предыдущую конструкцию к диффеоморфизму $f^{per(p)}$, получаем классификацию гиперболических периодических точек, аналогичную классификации неподвижных.

Картина траекторий каскада в фазовом пространстве около гиперболических точек представлена на рисунке 1.

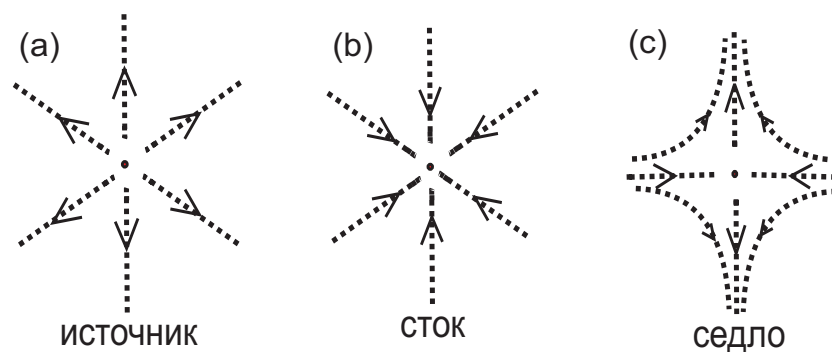


Рис. 1: Траектории каскада в окрестности гиперболической неподвижной точки: (a) источника; (b) стока; (c) седла.

У каждой гиперболической неподвижной точки p в силу теоремы Адамара-Перрона (см., например, книгу [3]) существуют *устойчивое* W_p^s и *неустойчивое* W_p^u многообразия, которые в случае каскада определяются следующим образом:

Пусть p — неподвижная гиперболическая точка для диффеоморфизма f , и d — метрика, индуцированная римановой метрикой на $T_p M^n$. Тогда для p существует устойчивое многообразие $W_p^s = \{y \in M^n : d(f^k(p), f^k(y)) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow +\infty\}$. Неустойчивое многообразие соответственно: $W_p^u = \{y \in M^n : d(f^k(p), f^k(y)) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow -\infty\}$.

Диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$, заданный на гладком замкнутом (компактном без края) связном ориентируемом n -многообразии ($n \geq 1$) M^n называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если

- 1) неблуждающее множество Ω_f конечно и гиперболично;
- 2) многообразия W_p^s , W_q^u пересекаются трансверсально³ для любых периодических точек p, q .

Обозначим через $MS(M^n)$ множество диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразии M^n .

Диффеоморфизм $f \in MS(M^n)$ называется диффеоморфизмом «источник-сток», если его неблуждающее множество состоит из одного гиперболического стока и одного гиперболического источника.

Т е о р е м а 1.1. *Существует аналитически заданный пример диффеоморфизма типа «источник-сток» на S^2 , не включаемого в гладкий поток.*

³ Понятие трансверсальности заключается в следующем: говорят, что два гладких подмногообразия X_1, X_2 , принадлежащих n -многообразию M^n , пересекаются трансверсально (находятся в общем положении), если либо $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, либо $T_x X_1 + T_x X_2 = T_x M^n$ для любой точки $x \in (X_1 \cap X_2)$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м РФФИ и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

2. Пример диффеоморфизма “источник-сток” на $\mathbb{S}^2$, включаемого в гладкий поток

Зададим на плоскости линейное сжатие с неравными коэффициентами $\bar{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\bar{g}(x_1, x_2) = (\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3})$. Построим на его основе диффеоморфизм на $\mathbb{S}^2$ в виде композиции $g(x_1, x_2, x_3) = \vartheta_+^{-1} \bar{g} \vartheta_+$, где $\vartheta_+ : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vartheta_+^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ — прямая и обратная стереографические проекции двумерной сферы без северного полюса на плоскость [2], заданные формулами $\vartheta_+(x_1, x_2, x_3) = (\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3})$, $\vartheta_+^{-1}(x_1, x_2) = (\frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2+1}, \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2+1}, \frac{x_1^2+x_2^2-1}{x_1^2+x_2^2+1})$.

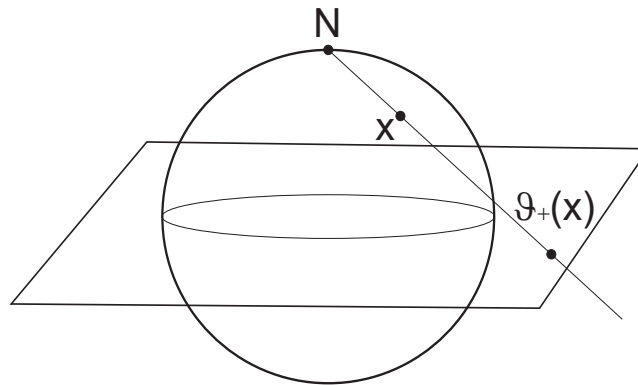


Рис. 2: Стереографическая проекция

Получим $g(x_1, x_2, x_3) = (\frac{x_1(1-x_3)}{x_1^2/4+x_2^2/9+(1-x_3)^2}, \frac{(2/3)x_2(1-x_3)}{x_1^2/4+x_2^2/9+(1-x_3)^2}, \frac{x_1^2/4+x_2^2/9-(1-x_3)^2}{x_1^2/4+x_2^2/9+(1-x_3)^2})$, дополнив до непрерывности неподвижной точкой в северном полюсе $g(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$.

Этот диффеоморфизм является сдвигом на единицу времени для гладкого потока на $\mathbb{S}^2$, заданного формулой

$g_t(x_1, x_2, x_3) = (\frac{2^{-t+1}x_1(1-x_3)}{2^{-2t}x_1^2+3^{-2t}x_2^2+(1-x_3)^2}, \frac{2 \cdot 3^{-t}x_2(1-x_3)}{2^{-2t}x_1^2+3^{-2t}x_2^2+(1-x_3)^2}, \frac{2^{-2t}x_1^2+3^{-2t}x_2^2-(1-x_3)^2}{2^{-2t}x_1^2+3^{-2t}x_2^2+(1-x_3)^2})$, посторенного аналогичным образом из потока на плоскости

$\bar{g}_t(x_1, x_2) = (2^{-t}x_1, 3^{-t}x_2)$ и дополненного до непрерывности в точке $(0, 0, 1)$ как $g_t(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$.

3. Построение диффеоморфизма “источник-сток” на $\mathbb{S}^2$, не включаемого в гладкий поток

На плоскости зададим диффеоморфизм $\bar{f}(x_1, x_2)$ следующим образом: составим его из двух диффеоморфизмов с различными коэффициентами линейного сжатия $h_1(x_1, x_2) = (\frac{x_1}{4}, \frac{x_2}{6})$, $h_2(x_1, x_2) = (\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3})$, так, что зона действия первого включает окрестность точки $(0, 0)$ (на сфере будет включать окрестность южного полюса), а второго — уходит в бесконечность (на сфере соответственно будет включать окрестность северного полюса).

Задав в некоторой области, окружающей область действия h_1 , гладкий переход от сжатия h_2 к сжатию h_1 , мы построим искомый диффеоморфизм. Эту область ограничим единичной окружностью $x_1^2 + x_2^2 = 1$ и эллипсом $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1$.

Перейдём к полярной системе координат, в которой прямоугольные координаты на плоскости выражаются как $x_1 = \rho * \cos \varphi$, $x_2 = \rho * \sin \varphi$.

Представим $\bar{f}(\rho, \varphi) = (\bar{f}_1(\rho, \varphi) = \bar{\rho}, \bar{f}_2(\varphi) = \bar{\varphi})$.

Для h_2 : $\bar{\rho} = q_2(\rho, \varphi) = \sqrt{(\frac{1}{2}\rho \cdot \cos \varphi)^2 + (\frac{1}{3}\rho \cdot \sin \varphi)^2} = \rho \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{5}{36} \cos^2 \varphi} = \alpha \rho$,

для h_1 : $\bar{\rho} = q_1(\rho, \varphi) = \sqrt{(\frac{1}{4}\rho \cdot \cos \varphi)^2 + (\frac{1}{6}\rho \cdot \sin \varphi)^2} = \frac{\alpha}{2} \rho$,

$$\bar{f}_2(\varphi) = \bar{\varphi} = \begin{cases} \arctg(\frac{2}{3}tg\varphi), \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}); \\ \arctg(\frac{2}{3}tg\varphi) + \varphi, \varphi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}); \\ \varphi, \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Так как закон $\bar{\varphi}$ одинаков для этих двух сжатий (ввиду пропорциональности их линейных коэффициентов по прямоугольным координатам), то он сохранится без изменения и в переходной зоне. Изменение координаты ρ линейно, но коэффициент сжатия зависит от угловой координаты φ , и различается у диффеоморфизмов в два раза

Для гладкого соединения законов изменения радиальной координаты $q_1(\rho, \varphi)$ и $q_2(\rho, \varphi)$ с учётом гладкости и непрерывности первой производной строим сплайн пятой степени по следующим данным:

$$q_3(\rho_1, \varphi) = 1, \quad q'_3(\rho_1, \varphi) = \alpha, \quad q''_3(\rho_1, \varphi) = 0,$$

$$q_3(1, \varphi) = \rho_2, \quad q'_3(1, \varphi) = \frac{\alpha}{2}, \quad q''_3(1, \varphi) = 0,$$

где ρ_1 — радиальная координата для конкретного φ на эллипсе $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1$, $\rho_1 = 1/\alpha$; ρ_2 — радиальная координата для конкретного φ на эллипсе $16x_1^2 + 36x_2^2 = 1$, $\rho_2 = \alpha/2$.

Получаем

$$q_3 = \frac{\alpha\rho}{2} + \frac{2\alpha+3}{(1/\alpha-1)^3}(\rho-1)^3 - \frac{3,5\alpha+4}{(1/\alpha-1)^4}(\rho-1)^4 + \frac{1,5(\alpha+1)}{(1/\alpha-1)^5}(\rho-1)^5,$$

$$q'_3 = \frac{\alpha}{2} + \frac{6\alpha+9}{(1/\alpha-1)^3}(\rho-1)^2 - \frac{14\alpha+16}{(1/\alpha-1)^4}(\rho-1)^3 + \frac{7,5(\alpha+1)}{(1/\alpha-1)^5}(\rho-1)^4.$$

Производная q'_3 для всех значений (ρ, φ) из переходной зоны не равна нулю, то есть q_3 является диффеоморфизмом.

Таким образом, искомый диффеоморфизм на плоскости запишется в виде:

$$\bar{\rho} = \begin{cases} \alpha\rho, \rho \geq 1/\alpha; \\ \frac{\alpha\rho}{2}, \rho \leq 1; \\ \frac{\alpha\rho}{2} + \frac{2\alpha+3}{(1/\alpha-1)^3}(\rho-1)^3 - \frac{3,5\alpha+4}{(1/\alpha-1)^4}(\rho-1)^4 + \frac{1,5(\alpha+1)}{(1/\alpha-1)^5}(\rho-1)^5, 1 < \rho < 1/\alpha \end{cases}$$

$$\bar{\varphi} = \begin{cases} \arctg(\frac{2}{3}tg\varphi), \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}); \\ \arctg(\frac{2}{3}tg\varphi) + \varphi, \varphi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}); \\ \varphi, \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{5}{36} \cos^2 \varphi}$.

Определим C^2 -диффеоморфизм $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ формулой

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \vartheta_+^{-1}(\bar{f}(\vartheta_+(x_1, x_2, x_3))), & x \neq (0, 0, \pm 1); \\ (0, 0, \pm 1), & x = (0, 0, \pm 1). \end{cases}$$

4. Доказательство теоремы 1.1.

Покажем, что диффеоморфизм $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, построенный в разделе 3., не включается в гладкий поток. Предположим противное: существует C^1 векторное поле, порождающее поток, сдвигом на единицу времени которого является диффеоморфизм f . Тогда это

векторное поле индуцирует C^1 векторное поле v на оси Ox_2 , порождающее поток, сдвигом на единицу времени которого является диффеоморфизм $h = \bar{f}|_{Ox_2}$. По построению $h(x) = h_1(x) = \frac{x}{6}$ для $x \in (0, 1]$ и $h(x) = h_2(x) = \frac{x}{3}$ для $x \in [3, +\infty)$. В силу [7], существует единственное C^1 векторное поле $v_1(x) = -\ln 6 \cdot x$ ($v_2(x) = -\ln 3 \cdot x$), порождающее поток со сдвигом на единицу времени h_1 (h_2). Откуда следует, что $v(x) = v_1(x)$ для $x \in (0, 1]$ и $v(x) = v_2(x)$ для $x \in [3, +\infty)$.

Положим $\psi(x) = h^{-1}(\frac{x}{6})$ для $x \in (0, 9]$. Непосредственно проверяется, что $\psi : (0, 9] \rightarrow (0, \frac{9}{2}]$ — C^2 -диффеоморфизм такой, что $h\psi = \psi h_1$ для $x \in (0, 9]$. Тогда диффеоморфизм ψ индуцирует векторное поле v_* на промежутке $(0, \frac{9}{2}]$ формулой

$$v_*(\psi(x)) = \psi'(x) \cdot v_1(x), \quad x \in (0, 9] \quad (*)$$

При этом диффеоморфизм h на интервале $(0, \frac{9}{2}]$ является сдвигом на единицу времени векторного поля, порожденного v_* . Поскольку такое векторное поле единственно на отрезке $[3, \frac{9}{2}]$, то $v_*(x) = v_2(x)$ для $x \in [3, \frac{9}{2}]$. Подставив последнее равенство в формулу (*), получаем

$$\psi(x) = 2\psi'(x), \quad x \in (0, 9] \quad (**)$$

Решением дифференциального уравнения (**) является функция $\psi(x) = c \cdot e^{2x}$, $x \in (0, 9]$, где c — некоторая константа. Получили противоречие с тем, что $\psi(x) = x$ для $x \in (0, 1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брин М.И., "О включении диффеоморфизма в поток", *Известия высших учебных заведений. Математика.*, **8** (1972), 19–25.
2. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Ижевский институт компьютерных исследований, М. - Ижевск, 2011.
3. А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, М.: Изд-во «Факториал», 1999.
4. Palis J., "On Morse-Smale dynamical systems", *Topology.*, **8:4** (1969), 385–404.
5. Palis J., "Vector fields generate few diffeomorphisms.", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80**. (1974.), 503–505..
6. W.R. Utz., "The embedding of homeomorphisms in continuous flows.", *Topology Proceedings.*, **6**. (1981.), 159–177..
7. Venti R.J., "Linear normal forms of differential equations.", *Different. Equat.*, **2:2** (1966), 182–194.

The example of a diffeomorphism «source-sink» which does not include to a smooth flow

© O. V. Pochinka⁴, A. A. Romanov⁵

Abstract. The inclusion to a topological flow of any two-dimensional gradient-like cascade with condition that all its non-wandering points are fixed is one of the classical results of J.Palis [4]. In contrast, a nowhere dense set of them are included in a smooth flow, it follows from the [1]. The analytic construction of an example of the diffeomorphism «source-sink» on $\mathbb{S}^2$ which does not include to a smooth flow is the purpose of this paper.

Key Words: diffeomorphism «source-sink», inclusion to a smooth flow

⁴ Professor of theory function chair, Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky; olga-pochinka@yandex.ru

⁵ Undergraduate of theory function chair, Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky; romanov18.04@mail.ru

УДК 517.948.67

О возмущениях в спектре Э.Шмидта линейных операторов в гильбертовых пространствах

© Д. Г. Рахимов¹

Аннотация. В теории возмущений дискретного спектра фредгольмовых операторов в работах [5], [6] предложена регуляризация, позволяющая сводить случаи возмущений кратных собственных значений к простым. В данной работе регуляризованные методы возмущений, в том числе и в аспекте ложных возмущений по М.Г.Гавурину [8], применяются к спектральным задачам по Э.Шмидту.

Ключевые слова: методы теории ветвления, спектр Э.Шмидта, теория возмущений, уравнение разветвления, обобщенные жордановы цепочки (ОЖЦ), регуляризация

1. Введение.

В начале прошлого века Э.Шмидт в ряде своих статей рассматривая линейные и нелинейные интегральные уравнения ввел собственные значения λ_k оператора действующего в гильбертовом пространстве $B : H \rightarrow H$ и соответствующие собственные элементы $\{u_k\}_1^\infty, \{v_k\}_1^\infty$ удовлетворяющие отношениям $Bu_k = \lambda_k v_k, B^*v_k = \lambda_k u_k$. В дальнейшем [1-4] эти собственные значения стали называться "спектром Э.Шмидта".

В работе [2] определяется фредгольмовость собственных значений Э.Шмидта и обобщенные жордановы цепочки (ОЖЦ). Рассматривается численный метод, основанный на методе ложных возмущений для определения собственных значений Э.Шмидта и соответствующих им собственных элементов.

В данной работе методами регуляризации (представленными в [5, 6]) в задачах теории ветвления [7] исследуется возмущение спектра Э.Шмидта. Применением метода диаграммы Ньютона к уравнению разветвления устанавливаются порядки зависимости собственного значения возмущенного оператора от параметра возмущения ε .

2. Постановка задачи

Пусть H — гильбертово пространство, и $B_0, A_0 : H \rightarrow H$ — линейные операторы.

О п р е д е л е н и е 2.1. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется собственным значением Э.Шмидта, если система уравнений

$$B_0\varphi = \lambda A_0\psi, B_0^*\psi = \lambda A_0\varphi \quad (2.1)$$

имеет нетривиальные решения (φ, ψ) . Пару (φ, ψ) называют A_0 -собственным элементом Э.Шмидта соответствующим собственному значению λ .

В прямой сумме $H \oplus H$ равенства (2.1) можно написать в матричном виде

$$(B_0 - \lambda A_0) \oplus = \begin{pmatrix} -\lambda A_0^* & B_0^* \\ B_0 & -\lambda A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = 0,$$

¹ доцент, Национальный университет Узбекистана, г. Ташкент; Davranaka@yandex.ru.

где

$$\mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & B_0^* \\ B_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0^* & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяются A_0^* -собственные элементы Э.Шмидта оператора B_0 , отвечающие тем же собственным значениям λ

$$B_0 \tilde{\varphi} = \lambda A_0^* \tilde{\psi}, \quad B_0^* \tilde{\psi} = \lambda A_0 \tilde{\varphi}$$

или

$$(\mathcal{B}_0^* - \lambda \mathcal{A}_0^*) \Psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & B_0^* \\ B_0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_0^* \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} = 0.$$

Пусть $N(\mathcal{B}_0 - \lambda \mathcal{A}_0) = \{\Phi_i\}_1^n$, $N(\mathcal{B}_0^* - \lambda \mathcal{A}_0^*) = \{\Psi_i\}_1^m$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Если $m = n$, то собственное значение λ называется фредгольмовым, в ином случае λ называется нетеровым.

Пусть λ_0 - фредгольмова точка спектра Шмидта оператор-функции $\mathcal{B}_0 - t\mathcal{A}_0$ с соответствующими $\mathcal{A}_0$ - и $\mathcal{A}_0^*$ -жордановыми цепочками с длинами $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$:

$$(\mathcal{B}_0 - \lambda_0 \mathcal{A}_0) \Phi_{i0}^{(k)} = \mathcal{A}_0 \Phi_{i0}^{(k-1)}, \quad (\mathcal{B}_0^* - \lambda_0 \mathcal{A}_0^*) \Psi_{i0}^{(k)} = \mathcal{A}_0^* \Psi_{i0}^{(k-1)}, \quad k = \overline{2, p_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$K = \det \left\| \langle \mathcal{A}_0 \Phi_{i0}^{(p_i)}, \Psi_{j0}^{(1)} \rangle \right\| \neq 0, \quad L = \det \|L_{ij}\| \neq 0, \quad L_{ij} = \det \left\| \langle \mathcal{A}_0 \Phi_{i0}^{(p_i+1-k)}, \Psi_{j0}^{(l)} \rangle \right\|,$$

$$k(l) = \overline{2, p_i(p_j)}, \quad i(j) = \overline{1, n}.$$

Согласно [2, 4] элементы $\Phi_{i0}^{(j)}$, $\Psi_{k0}^{(l)}$, $j(l) = \overline{2, p_i(p_k)}$, $i(k) = \overline{1, n}$ $\mathcal{A}_0$ - и $\mathcal{A}_0^*$ -жордановых наборов, отвечающих λ_0 оператор-функции $\mathcal{B}_0 - \lambda_0 \mathcal{A}_0$ могут быть выбраны так, чтобы выполнялись следующие соотношения биортогональности

$$\langle \Phi_{i0}^{(j)}, \Gamma_{k0}^{(l)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad \langle Z_{i0}^{(j)}, \Psi_{k0}^{(l)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl},$$

где $\Gamma_{k0}^{(l)} = \mathcal{A}_0^* \Psi_{k0}^{(p_k+1-l)}$, $Z_{i0}^{(j)} = \mathcal{A}_0 \Phi_{i0}^{(p_i+1-j)}$. Для нашей задачи эти соотношения имеют вид

$$\langle \Phi_{i0}^{(j)}, \Gamma_{k0}^{(l)} \rangle = \langle \varphi_{i0}^{(j)}, A_0^* \tilde{\varphi}_{k0}^{(p_k+1-l)} \rangle + \langle A_0 \psi_{i0}^{(j)}, \tilde{\psi}_{k0}^{(p_k+1-l)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl},$$

$$\langle Z_{i0}^{(j)}, \Psi_{k0}^{(l)} \rangle = \langle \varphi_{i0}^{(p_i+1-j)}, A_0^* \tilde{\varphi}_{k0}^{(l)} \rangle + \langle A_0 \psi_{i0}^{(p_i+1-j)}, \tilde{\psi}_{k0}^{(l)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

Пусть $\varepsilon \in \mathbb{C}$ - малый параметр, $|\varepsilon| \leq \varrho_0$ и $A(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varepsilon^k : H \rightarrow H$, возмущенная оператор-функция, такая что $A(0) = A_0$.

Ставится задача: найти собственные значения $\lambda_0 + \mu(\varepsilon)$ задачи

$$B_0 \varphi = \lambda A(\varepsilon) \psi, \quad B_0^* \psi = \lambda A^*(\varepsilon) \varphi \quad (2.2)$$

такие, что $\mu(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а также собственные элементы $\Phi_i(\varepsilon)$, отвечающие этим собственным значениям.

2.1. Построение уравнения разветвления.

Поставленную задачу запишем в матричной форме:

$$(\mathcal{B}_0 - \lambda_0 \mathcal{A}_0) \Phi = \mu \mathcal{A}(\varepsilon) \Phi + \lambda_0 \mathcal{A}_1(\varepsilon) \Phi$$

где

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} A^*(\varepsilon) & 0 \\ 0 & A(\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1(\varepsilon) = \mathcal{A}(\varepsilon) - \mathcal{A}_0.$$

Строим операторы

$$(\overline{\mathcal{B}_0 - \lambda \mathcal{A}(\varepsilon)})_i = \mathcal{B}_0 - \lambda \mathcal{A}(\varepsilon) + \sum_{j \neq i} \langle \cdot, \Gamma_{j0} \rangle Z_{j0}. \quad (2.3)$$

Т е о р е м а 2.1. При каждом $i = \overline{1, n}$ и достаточно малых ε существуют постоянные $c_{is}, d_{is}, s \neq i$ такие, что $\lambda_i(\varepsilon)$ является простым собственным значением оператора (2.3) с соответствующим собственным элементом $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = \Phi_i + \sum_{s \neq i} c_{is} \Phi_s$ и дефектным функционалом $\tilde{\Psi}_i(\varepsilon) = \Psi_i + \sum_{s \neq i} d_{is} \Psi_s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lambda_i(\varepsilon)$ - собственное значение с соответствующим собственным элементом $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ оператора (2.3). Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= (\overline{\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon) \mathcal{A}(\varepsilon)})_i \tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = \\ &= \sum_{j \neq i} c_{ij} (\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon) \mathcal{A}(\varepsilon)) \Phi_j(\varepsilon) + \sum_{j \neq i} \langle \Phi_i(\varepsilon), \Gamma_{j0} \rangle Z_{j0} + \sum_{j \neq i} \sum_{s \neq i} c_{is} \langle \Phi_s(\varepsilon), \Gamma_{j0} \rangle Z_{j0} \end{aligned}$$

или после применения функционалов $\Psi_{k0}, k \neq i$ к обеим частям равенства

$$\sum_{j \neq i} c_{ij} [\langle \Phi_j(\varepsilon), \Gamma_{k0} \rangle + \langle (\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon) \mathcal{A}(\varepsilon)) \Phi_j(\varepsilon), \Psi_{k0} \rangle] = - \langle \Phi_i(\varepsilon), \Gamma_{k0} \rangle, k \neq i. \quad (2.4)$$

Здесь в силу разложений $\Phi_s(\varepsilon) = \Phi_{s0} + O(\varepsilon)$ и $\mathcal{A}(\lambda_i; \varepsilon) = \mathcal{A}(\lambda_0; 0) + O(\varepsilon)$ имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon) \mathcal{A}(\varepsilon)) \Phi_s(\varepsilon) &= (\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon) \mathcal{A}(\varepsilon)) \Phi_i(\varepsilon) + \\ &+ (\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon) \mathcal{A}(\varepsilon)) (\Phi_s(\varepsilon) - \Phi_i(\varepsilon)) = (\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon) \mathcal{A}(\varepsilon)) (\Phi_s(\varepsilon) - \Phi_i(\varepsilon)) = \\ &= [(\mathcal{B}_0 - \lambda_0 \mathcal{A}_0) + O(\varepsilon)] [\Phi_{s0} - \Phi_{i0} + O(\varepsilon)] = O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Так как $\langle \Phi_i(\varepsilon), \Gamma_{j0} \rangle = \langle \Phi_{i0} + O(\varepsilon), \Gamma_{j0} \rangle = \delta_{ij} + O(\varepsilon)$, то определитель системы (2.4) отличен от нуля и поэтому она имеет единственное решение. Единственность $\tilde{\Psi}_i(\varepsilon)$ доказывается аналогично.

Для каждого $i = \overline{1, n}$ уравнение $(\overline{\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon) \mathcal{A}(\varepsilon)})_i \tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = 0$ записывается в виде

$$(\mathcal{B}_0 - \lambda_0 \mathcal{A}_0) \tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = \mu_i(\varepsilon) \mathcal{A}(\varepsilon) \tilde{\Phi}_i(\varepsilon) + \lambda_0 \mathcal{A}_1(\varepsilon) \tilde{\Phi}_i(\varepsilon) - \sum_{j \neq i} \langle \tilde{\Phi}_i(\varepsilon), \Gamma_{j0} \rangle Z_{j0}.$$

С помощью регуляризатора Шмидта [7] оно сводится к системе

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = \xi_i [I - \mu_i \Gamma \mathcal{A}(\varepsilon) - \lambda_0 \Gamma \mathcal{A}_1(\varepsilon)]^{-1} \Phi_{i0}, \\ \xi_i = \langle \tilde{\Phi}_i(\varepsilon), \Gamma_{i0} \rangle, \end{cases} \quad (2.5)$$

где $\Gamma = \left[\mathcal{B}_0 - \lambda_0 \mathcal{A}_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \Gamma_{i0} \rangle Z_{i0} \right]^{-1}$. Подставляя $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ во второе уравнение (2.5) строим уравнение разветвления:

$$L_i(\mu_i, \varepsilon) \equiv \sum_{k+s=1}^{\infty} L_{ks}^{(i)} \mu_i^k \varepsilon^s \equiv \langle (\mu_i \mathcal{A}(\varepsilon) + \lambda_0 \mathcal{A}_1(\varepsilon)) [I - \mu_i \Gamma \mathcal{A}(\varepsilon) - \lambda_0 \Gamma \mathcal{A}_1(\varepsilon)]^{-1} \Phi_{i0}, \Psi_{i0} \rangle = 0. \quad (2.6)$$

где в частности $L_{s0}^{(i)} = \langle \mathcal{A}_0 (\Gamma \mathcal{A}_0)^{s-1} \Phi_{i0}, \Psi_{i0} \rangle$, $s = 1, 2, \dots$, $L_{0k}^{(i)} = \left\langle \sum_{\alpha=1}^k \lambda_0^\alpha \sum_{k_1+k_2+\dots+k_\alpha=k} \Gamma \mathcal{A}_{k_1} \dots \Gamma \mathcal{A}_{k_\alpha} \Phi_{i0}, \Gamma_{i0} \right\rangle$, $k = 1, 2, \dots$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Т е о р е м а 2.2. Пусть $N(\mathcal{B}_0 - \lambda \mathcal{A}_0) = \{\Phi_i\}_1^n$, $N(\mathcal{B}_0^* - \lambda \mathcal{A}_0^*) = \{\Psi_i\}_1^n$. При отсутствии ОЖЦ для достаточно малых ε существует ровно n простых собственных значений $\lambda_i(\varepsilon)$ ($\lambda_i(0) = \lambda_0$) с соответствующими собственными элементами $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ и дефектными функционалами $\tilde{\Psi}_i(\varepsilon)$, представимые в виде сходящегося ряда по целым степеням ε .

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условия теоремы $L_{10}^{(i)} = \langle \mathcal{A}_0 \Phi_{i0}, \Psi_{i0} \rangle \neq 0$, $i = \overline{1, n}$. Если $L_{0q}^{(i)}$ первый отличный от нуля коэффициент из последовательности $\{L_{0j}^{(i)}\}_1^\infty$, то применяя к (2.6) диаграмму Ньютона [4], определяем убывающую часть, состоящую из отрезка, соединяющего точки $(1, 0)$ и $(0, q)$. Отсюда следует, что $\lambda_i(\varepsilon)$ и $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ представляются рядами по степеням ε^q .

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Т е о р е м а 2.3. Если для каждого $i = \overline{1, n}$ ОЖЦ имеют длины p_i , причем $\langle \mathcal{A}_0 \Phi_{i0}^{(p_i)}, \Psi_{i0}^{(1)} \rangle \neq 0$, то для достаточно малых ε существуют ровно $N = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ непрерывных по ε собственных значений $\lambda_i(\varepsilon) = \lambda_0 + \mu_i(\varepsilon)$ с отвечающими им собственными элементами $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$, представимые сходящимися рядами по целым степеням ε и по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай, когда $L_{0j}^{(i)} = 0$, $j = \overline{1, \infty}$, и $L_{11}^{(i)} \neq 0$. Тогда убывающая часть диаграммы Ньютона для уравнения разветвления (2.6) состоит из отрезка соединяющего точки $(1, 1)$ и $(p_i, 0)$. Отсюда следует, что $\lambda_i(\varepsilon)$ и $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ представляются сходящимися рядами по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$, т.е. задача (2.2) имеет ровно $N = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ собственных значений, представимых сходящимися рядами по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$.

Если же $L_{0j}^{(i)} = 0$, $j = \overline{1, q_i-1}$, $L_{0q_i-1}^{(i)} \neq 0$ и $L_{11}^{(i)} \neq 0$, то убывающая часть диаграммы Ньютона состоит из двух отрезков, один из которых соединяет точки $(1, 1)$ и $(p_i, 0)$, а второй точки $(1, 1)$ и $(0, q_i)$. Первому отрезку отвечает показатель $\frac{1}{p_i-1}$, а второму отрезку в любом случае - целочисленный показатель. Следовательно, задача (2.2) имеет n собственных значений, представимых сходящимися рядами по целым степеням ε и $N - n$ собственных значений, представимых сходящимися рядами по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$. Каждому $\lambda_i(\varepsilon)$ отвечает собственный элемент $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$, представимый сходящимся рядом по тем же степеням ε , что и соответствующий ему $\lambda_i(\varepsilon)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

З а м е ч а н и е 2.1. Условие теоремы $\langle \mathcal{A}_0 \Phi_{i0}^{(p_i)}, \Psi_{i0}^{(1)} \rangle \neq 0$ допускает возможность неполноты обобщенного жорданова набора [7].

З а м е ч а н и е 2.2. Полученные результаты обобщаются на банаховы пространства E_1, E_2 с операторами $B_0, A_0(A(\varepsilon)) \in L(E_1, E_2)$, при плотном вложении $E_1 \subset E_2 \subset H$.

3. Уточнение собственных значений Э. Шмидта методом ложных возмущений

Теперь на основе метода регуляризации рассмотрим уточнение приближенно заданных собственных значений Шмидта и соответствующих им элементов ОЖЦ методом ложных возмущений. Результаты представлены в гильбертовых пространствах для упрощения изложения (см. замечание 2.2.).

В прямой сумме $H \oplus H$ рассмотрим спектральную задачу Э. Шмидта (2.1). Пусть для n -кратного собственного числа Шмидта λ и отвечающих ему собственных и присоединенных элементов Шмидта $\{\varphi_k^{(j)}, \psi_k^{(j)}\}_{k=\overline{1, n}, j=\overline{1, p_k}}, \{\tilde{\varphi}_k^{(j)}, \tilde{\psi}_k^{(j)}\}_{k=\overline{1, n}, j=\overline{1, p_k}}$ известны достаточно хорошие приближения $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon, \|\varphi_i^{(j)} - \varphi_{i0}^{(j)}\| \leq \varepsilon, \|\psi_i^{(j)} - \psi_{i0}^{(j)}\| \leq \varepsilon, \|\tilde{\varphi}_i^{(j)} - \tilde{\varphi}_{i0}^{(j)}\| \leq \varepsilon, \|\tilde{\psi}_i^{(j)} - \tilde{\psi}_{i0}^{(j)}\| \leq \varepsilon$. Тем самым определены достаточно хорошие приближения $\lambda_0, \Phi_{k0}^{(j)}, \Psi_{k0}^{(j)}$ к собственному числу λ и элементам ОЖЦ $\Phi_k^{(j)}, \Psi_k^{(j)}, k = \overline{1, n}, j = \overline{1, p_k}$ соответствующих спектральных задач в прямых суммах гильбертовых пространств.

Справедлива (см. [2], [3]) лемма.

Переходя к линейным комбинациям, определяем системы

$$\{\Gamma_{k0}^{(l)}\}_{k=\overline{1, n}, l=\overline{1, p_k}}, \Gamma_{k0}^{(l)} = A^* \Psi_{k0}^{(p_k+1-l)}, \{Z_{k0}^{(l)}\}_{k=\overline{1, n}, l=\overline{1, p_k}}, Z_{k0}^{(l)} = A \Phi_{k0}^{(p_k+1-l)},$$

удовлетворяющие соотношениям биортогональности

$$\langle \Phi_{i0}^{(j)}, \Gamma_{k0}^{(l)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad \langle Z_{i0}^{(j)}, \Psi_{k0}^{(l)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

Производим регуляризацию

$$\overline{\mathcal{B}} - t\mathcal{A} = \mathcal{B} - t\mathcal{A} + \sum_{k=2}^{p_1} \left\langle \cdot, \Gamma_{10}^{(k)} \right\rangle Z_{10}^{(p_1+1-k)} + \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^{p_i} \left\langle \cdot, \Gamma_{i0}^{(k)} \right\rangle Z_{i0}^{(p_i+1-k)}. \quad (3.1)$$

Согласно теореме 2.1. искомое собственное значение λ является простым фредгольмовым собственным значением оператор-функции (3.1). Более того, существуют постоянные $c_{is}, d_{is}, s = \overline{1, p_i}, i = \overline{1, n}$, такие, что соответствующие собственный элемент и дефектный функционал будут иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &= \Phi_1^{(p_1)} + \sum_{i=1}^n c_{i1} \Phi_i + \sum_{i=2}^n \sum_{s=2}^{p_i} c_{is} \Phi_i^{(s)} + \sum_{s=1}^{p_1-1} c_{1s} \Phi_1^{(s)}, \\ \tilde{\Psi} &= \Psi_1 + \sum_{i=2}^n d_{i1} \Psi_i + \sum_{i=1}^n \sum_{s=2}^{p_i} d_{is} \Psi_i^{(s)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В качестве начальных приближений к $\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}$ выбираем элементы $\tilde{\Phi}_0 = \Phi_{10}^{(p_1)} - \Phi_{10}^{(p_1-1)}, \tilde{\Psi}_0 = \Psi_{10}$. За начальное приближение к собственному значению λ берем решение уравнения $\langle (\mathcal{B} - t\mathcal{A})\tilde{\Phi}_0, \tilde{\Psi}_0 \rangle = 0$, т.е. $\lambda_0 = \frac{\langle \mathcal{B}\tilde{\Phi}_0, \tilde{\Psi}_0 \rangle}{\langle \mathcal{A}\tilde{\Phi}_0, \tilde{\Psi}_0 \rangle}$.

Так как $\tilde{k}_0 = \langle \mathcal{A}\tilde{\Phi}_0, \tilde{\Psi}_0 \rangle = \langle \mathcal{A}\Phi_{10}^{(p_1)}, \Psi_{10} \rangle - \langle \mathcal{A}\Phi_{10}^{(p_1-1)}, \Psi_{10} \rangle = \langle \mathcal{A}\Phi_{10}^{(p_1)}, \Psi_{10} \rangle \neq 0$, то биортогональные элементы к $\tilde{\Phi}_0, \tilde{\Psi}_0$ можно выбрать в виде $\tilde{\Gamma}_0 = \frac{1}{\tilde{k}_0} \mathcal{A}^* \Psi_{10}, \tilde{Z}_0 = \frac{1}{\tilde{k}_0} \mathcal{A} \tilde{\Phi}_0$.

Оператор ложного возмущения определим следующим образом:

$$\mathcal{D}_0 x = \langle x, \tilde{\Gamma}_0 \rangle (\overline{\mathcal{B} - \lambda_0 \mathcal{A}}) \tilde{\Phi}_0 + \langle x, (\overline{\mathcal{B}^* - \lambda_0 \mathcal{A}^*}) \tilde{\Psi}_0 \rangle \tilde{Z}_0,$$

$$\mathcal{D}_0^* y = \langle (\overline{\mathcal{B} - \lambda_0 \mathcal{A}}) \tilde{\Phi}_0, y \rangle \tilde{\Gamma}_0 + \langle \tilde{Z}_0, y \rangle (\overline{\mathcal{B}^* - \lambda_0 \mathcal{A}^*}) \tilde{\Psi}_0.$$

Тогда $\mathcal{D}_0 \tilde{\Phi}_0 = (\overline{\mathcal{B} - \lambda_0 \mathcal{A}}) \tilde{\Phi}_0$, $\mathcal{D}_0^* \tilde{\Psi}_0 = (\overline{\mathcal{B}^* - \lambda_0 \mathcal{A}^*}) \tilde{\Psi}_0$, т.е. $N(\overline{\mathcal{B} - \lambda_0 \mathcal{A}}) = \{\tilde{\Phi}_0\}$, $N(\overline{\mathcal{B}^* - \lambda_0 \mathcal{A}^*}) = \{\tilde{\Psi}_0\}$.

Изменением регуляризатора Шмидта [7] уравнение $(\overline{\mathcal{B} - t \mathcal{A}})x = 0$ сводится к системе

$$\begin{cases} x = \xi [I + \overline{\Gamma}_0 (\mathcal{D}_0 - (t - \lambda_0) \mathcal{A})]^{-1} \tilde{\Phi}_0, \\ \xi = \langle x, \tilde{\Gamma}_0 \rangle. \end{cases} \quad (3.3)$$

где $\overline{\Gamma}_0 = [\overline{\mathcal{B} - \lambda_0 \mathcal{A}} - \mathcal{D}_0 + \langle \cdot, \tilde{\Gamma}_0 \rangle \tilde{Z}_0]^{-1}$.

Подстановка первого равенства во второе дает уравнение разветвления

$$F(t) \equiv 1 - \langle [I + \overline{\Gamma}_0 (\mathcal{D}_0 - (t - \lambda_0) \mathcal{A})]^{-1} \tilde{\Phi}_0, \tilde{\Gamma}_0 \rangle = 0, \quad (3.4)$$

Искомое λ является простым корнем уравнения разветвления.

Тогда согласно теореме 2.1. работы [6] при достаточно хороших начальных приближений уравнение (3.4) имеет единственное решение, которое можно определить модифицированным методом Ньютона:

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m - [F'(\lambda_0)]^{-1} F(\lambda_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

Заметим, что на каждом шаге необходимо решать одно операторное уравнение

$$[\overline{\mathcal{B} - \lambda_m \mathcal{A}} + \langle \cdot, \tilde{\Gamma}_0 \rangle \tilde{Z}_0] x = \tilde{Z}_0.$$

Элементы ОЖЦ $\Phi_i^{(j)}, \Psi_k^{(l)}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p_i}, l = \overline{1, p_k}, k = \overline{1, m}$ определяются из следующих рекуррентных уравнений:

$$\left[\mathcal{B} - \lambda \mathcal{A} + \sum_{s=1}^n \langle \cdot, \Gamma_{s0} \rangle Z_{s0} \right] X = Z_{i0}, \quad \left[\mathcal{B}^* - \lambda \mathcal{A}^* + \sum_{s=1}^n \langle Z_{s0}, \cdot \rangle \Gamma_{s0} \right] Y = \Gamma_{i0},$$

$$\left[\mathcal{B} - \lambda \mathcal{A} + \sum_{s=1}^n \langle \cdot, \Gamma_{s0} \rangle Z_{s0} \right] X_{j,i} = \mathcal{A} X_{j-1,i} + Z_{i0}, \quad X_{1i} = \Phi_i, \quad X_{j,i} = \Phi_i^{(j)};$$

$$j = \overline{1, p_i}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$\left[\mathcal{B}^* - \lambda \mathcal{A}^* + \sum_{s=1}^n \langle Z_{s0}, \cdot \rangle \Gamma_{s0} \right] Y_{j,i} = \mathcal{A}^* Y_{j-1,i} + \Gamma_{i0}, \quad Y_{1i} = \Psi_i, \quad Y_{j,i} = \Psi_i^{(j)};$$

$$j = \overline{1, p_i}, \quad i = \overline{1, m}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Логинов Б.В., “О нахождении собственных чисел и фундаментальных элементов Шмидта вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве”, *ДАН УзССР*, 1965, № 10, 5-8.
2. Логинов Б.В., Макеева О.В., “Метод ложных возмущений в применении к спектральным задачам Э.Шмидта”, *Вестник СамГУ*, серия "Математическая", № 1(5), Самара, 2007, 65-74.
3. Логинов Б.В., Макеева О.В., “Метод ложных возмущений в обобщенных задачах на собственные значения”, *Доклады РАН. Математика*, **419**, № 5, 2008, 160-163.
4. Макеева О.В., *Метод ложных возмущений в обобщенной задаче на собственные значения*, Кандидатская диссертация, Ульяновск, 2007, 142 с.
5. Рахимов Д.Г., “О вычислении кратных собственных значений редукционным методом ложных возмущений”, *Жур. СВМО*, 2010, № 3, 106-112.
6. Рахимов Д.Г., “О регуляризации кратных собственных значений редукционным методом ложных возмущений”, *Вестник Самарского Государственного Университета*, Естественная серия, № 6(97), 2012, 35-41.
7. Вайнберг М. М., Треногин В. А., *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, "Наука", М., 1969.
8. Гавурин М.К., “О методе ложных возмущений для нахождения собственных значений”, *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, **1:5** (1961), 751-770.

On the perturbations in the E.Schmid's spectrum of the linear operators in Hilbert spaces.

© D. G. Rakhimov²

Abstract. In perturbation theory of discrete spectrum of Fredholm operators in the articles [5], [6] it is suggested the regularization, allowing to reduce the multiple eigenvalues cases to simple ones. In this article the regularized perturbation methods among them in pseudoperturbation aspect on M.K.Gavurin [8] are applied to E.Schmidt spectral problems.

Key Words: bifurcation theory methods, E.Schmidt spectrum, perturbation theory, branching equation, generalized Jordan chains, regularization

² Docent, National University of Uzbekistan, Tashkent; Davranaka@yandex.ru

УДК 517.9

Прогнозные оценки в моделях системной динамики

© С. И. Спивак¹, О. Г. Кантор², И. Р. Салахов³

Аннотация. Разработана процедура получения интервальных прогнозных оценок в модели системной динамики, апробация которой осуществлена на примере модели численности населения Российской Федерации.

Ключевые слова: системная динамика, интервальные прогнозные оценки

Социально-экономическое прогнозирование является одним из решающих научных факторов формирования стратегии и тактики общественного развития, способствующих обоснованию ключевых траекторий развития общества и предвидению последствий принимаемых решений.

Для непосредственной реализации социально-экономического прогнозирования разработаны общие научные методы, которые образуют группы формальных и экспертных методов.

Формализованные методы принято подразделять на модели временных рядов и модели предметных областей. В последних подразумевается детальное изучение всех вводимых в рассмотрение факторов, выявление связей и закономерностей между ними. Все формализованные методы базируются на использовании некой исходной статистической информации и от того, насколько построенная модель соотносится с ними, можно судить о ее качественных характеристиках, и в первую очередь о точности.

Прогнозные оценки в рамках формализованных методов получают на основе экстраполяции построенных моделей. При этом можно говорить о точечных и интервальных прогнозных оценках, под которыми в первом случае подразумевается фиксированное значение показателя, а во втором – возможные границы его изменения. Интервальные оценки значений показателя целесообразно дополнять информацией о вероятности, с которой наблюдаемая величина может принимать указанные значения. Это позволит с большей степенью доверия относиться к получаемым прогнозным оценкам.

С позиций сказанного авторами была поставлена цель разработать алгоритм получения интервальных прогнозных оценок в модели системной динамики, позволяющий учитывать вероятности попадания наблюдаемых величин в соответствующие интервалы. Реализация поставленной цели осуществлялась на модели системной динамики численности населения Российской Федерации, исследованной авторами в работах [2][3][4][5].

Системная динамика – один из методов изучения сложных задач с нелинейными обратными связями, разработанный Дж. Форрестером, признанным специалистом в области теории управления [1][6]. Согласно методу системной динамики предполагается исследование поведения наблюдаемых величин, связи между которыми описываются дифференциальными уравнениями и имеют вполне конкретную спецификацию. Непосредственный вид функциональных зависимостей подразумевает, что параметры моделей должны быть известны. Однако такое возможно далеко не всегда, а лишь в тех случаях, когда между переменными модели существует очевидная связь. Для более сложных ситуаций определяются параметры уравнений системной динамики, обеспечивающих адекватное описание

¹ Заведующий кафедрой математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; s. spivak@bashnet.ru.

² Старший научный сотрудник, ИСЭИ УНЦ РАН, г. Уфа; o_kantor@mail.ru.

³ Аспирант, Башкирский государственный университет, г. Уфа; salah-off@mail.ru.

имеющихся экспериментальных наблюдений. При этом с целью снижения неопределенности, целесообразным является в дополнение к экспериментальным наблюдениям, учитывать любую имеющуюся в распоряжении исследователя информацию.

По своей сути задача определения параметров любых зависимостей, описывающих поведение наблюдаемых величин на основании экспериментальных данных, является обратной, а непосредственная реализация обратных задач предполагает проведение вычислительного эксперимента.

Для построения модели системной динамики численности населения Российской Федерации в качестве переменных, были выбраны следующие три:

- N - численность населения РФ, чел.;
- D - душевые доходы за год, руб./чел. в год;
- I - индекс потребительских цен, доля ед.

Также в модель была включена вспомогательная переменная $S = \frac{ND}{I}$, которая по своей сути представляет реальный денежный доход, которым обладало население страны за год с учетом изменяющихся цен. Исходная информация для построения модели была взята из официальных статистических источников РФ за период с 1998 по 2009 гг. По результатам специально организованного численного эксперимента, описанного в работах [2][3][4] были получены значения параметров модели – показатели степеней переменных и константы-сомножители каждого слагаемого модели (1.1)-(1.3):

$$\frac{dN}{dt} = 8,139 \cdot 10^{-22} N^{0,05} S^2 - 64,1 \cdot N^{0,03} S^{0,3} \quad (1.1)$$

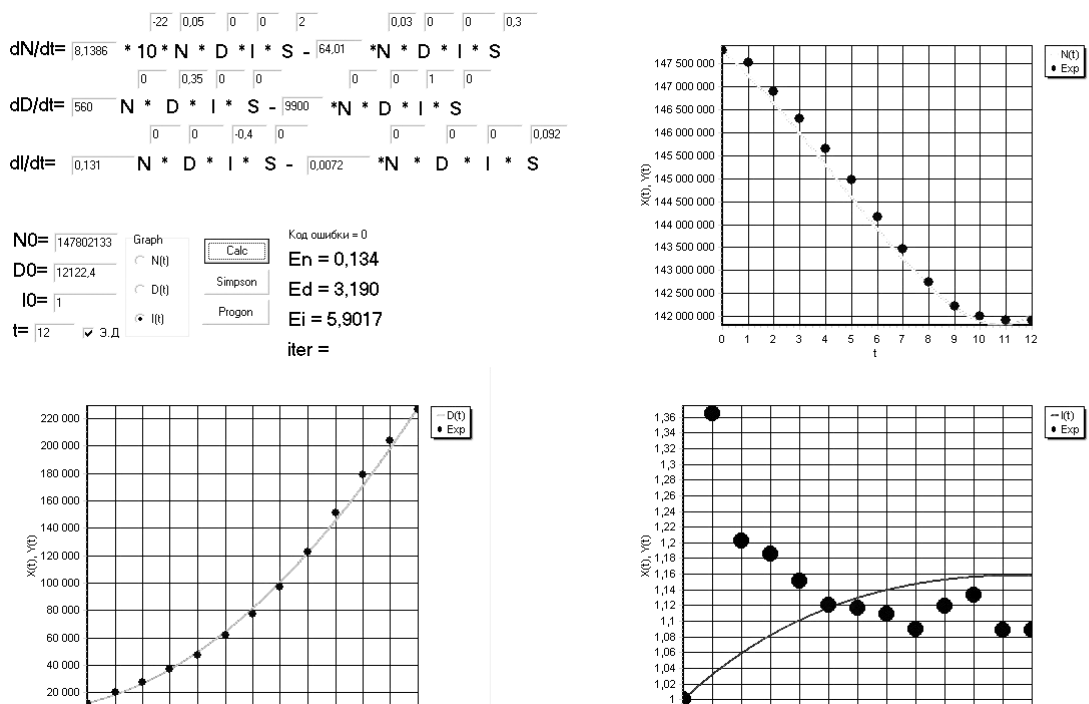
$$\frac{dD}{dt} = 560 \cdot D^{0,35} - 9900 \cdot I \quad (1.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = 0,131 \cdot I^{-0,4} - 0,0072 \cdot S^{0,092} \quad (1.3)$$

Для непосредственной реализации численного эксперимента в среде программирования Delphi был разработан модуль, позволяющий учитывать ряд вытекающих из смысла решаемой задачи дополнительных условий и давать наглядную интерпретацию проводимых расчетов.

Для численного интегрирования систем дифференциальных уравнений авторами был выбран метод Рунге-Кутты четвертого порядка в силу его высокой точности и меньшей склонности к возникновению неустойчивости решения.

Интерфейс программы представляет из себя рабочее поле, включающее: область задания параметров и начальных данных системы, область выбора необходимых расчетов, область вывода результатов. Результаты, для удобства анализа, представляются как в виде графиков с соответствующими экспериментальными значениями, так и в виде получаемых показателей средних ошибок аппроксимации.



Р и с у н о к 1.1

Результаты численной реализации модели (1.1)-(1.3) методом Рунге Кутты

Функциональные возможности программы позволяют в ходе работы изменять параметры модели и начальные условия, что облегчает анализ получаемых результатов. Параметр t определяет конечную точку по независимой координате, изменяя которую можно задавать момент времени для получения прогнозных значений переменных системы. Переключатель ЭД позволяет отобразить на графиках имеющиеся экспериментальные значения переменных, относительно которых можно визуально оценить полученные результаты.

На основании модели (1.1)-(1.3) достаточно простым является получение точечных прогнозных оценок для каждой из переменных модели.

Для получения интервальных прогнозных оценок была разработана следующая процедура:

– показатели степеней переменных модели (1.1)-(1.3) полагались неизвестными, а коэффициенты-сомножители слагаемых модели для простоты принимались неизменными:

$$\frac{dN}{dt} = 8,139 \cdot 10^{-22} N^{\alpha_1} D^{\beta_1} I^{\gamma_1} - 64,1 \cdot N^{\alpha_2} D^{\beta_2} I^{\gamma_2} \quad (1.4)$$

$$\frac{dD}{dt} = 560 \cdot N^{\alpha_3} D^{\beta_3} I^{\gamma_3} - 9900 \cdot N^{\alpha_4} D^{\beta_4} I^{\gamma_4} \quad (1.5)$$

$$\frac{dI}{dt} = 0,131 \cdot N^{\alpha_5} D^{\beta_5} I^{\gamma_5} - 0,0072 \cdot N^{\alpha_6} D^{\beta_6} I^{\gamma_6} \quad (1.6)$$

– по каждому показателю степеней модели (1.4)-(1.6) вводились коридоры допустимой вариации. Границы этих коридоров определялись как пятипроцентные изменения соответствующих параметров модели (1.1)-(1.3);

– в каждом из введенных коридоров рассматривались по три точки, определяемые как центры отрезков, получаемых при равномерном разбиении коридоров на три части. Таким образом, были определены 3^{18} возможных комбинаций параметров модели (1.4)-(1.6);

– для каждой из возможных комбинаций параметров модели осуществлялась проверка на соответствие заданным условиям, в качестве которых были использованы ограничения на величины максимальных приростов каждой из переменных модели:

$$|\Delta N|_t \leq 0,006N \quad (1.7)$$

$$|\Delta D|_t \leq 0,7D \quad (1.8)$$

$$|\Delta I|_t \leq 0,7I \quad (1.9)$$

$$t = \overline{1, 12}$$

Условие (1.7) обусловлено максимальным за весь период 1998-2009 гг. изменением показателя численности населения: в 2004 г. численность населения РФ сократилась на 0,6% (что соответствует примерно 800 тыс. чел.). Условия (1.8) и (1.9) ограничивают рост переменных D (душевых доходов за год) и I (индекса потребительских цен) величиной в 70%. И хотя порог величиной 70% в существующих экономических условиях может быть расценен как нереальный, тем не менее, в целях получения более детальной информации об изучаемой модели, авторами было установлено именно это значение.

– для тех комбинаций параметров, которые удовлетворяли условиям (1.7)-(1.9) проводилось численное интегрирование соответствующей системы по методу Рунге-Кутты и вычислялись средние ошибки аппроксимации по каждому уравнению;

– если величины средних ошибок аппроксимации не превышали 10%, то проверялись условия, отражающие требования на прогнозные значения переменных N и D ($N_{13}^{расч}$ и $D_{13}^{расч}$):

$$|N_{13}^{расч} - N_{12}^{расч}| \leq 100000 \quad (1.10)$$

$$|D_{13}^{расч} - D_{12}^{расч}| \leq 120000 \quad (1.11)$$

каждое из которых отражает тенденцию изменения соответствующих переменных, сложившуюся к 2010 г. ($N_{12}^{расч}$ и $D_{12}^{расч}$ - экспериментальные данные соответствующих переменных в 2009 г.);

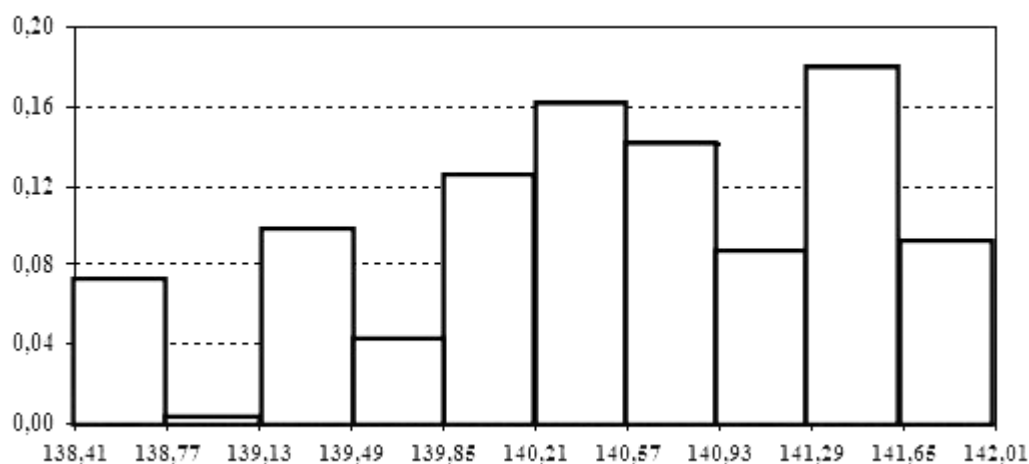
– в случае, если набор параметров обеспечивал выполнение условий (1.10) и (1.11), он записывался в файл. В эту же запись включались значения средних ошибок аппроксимации по каждому уравнению $\{\overline{A_N}, \overline{A_D}, \overline{A_I}\}$, значение критерия оптимальности, в качестве которого был выбран корень квадратный из суммы квадратов средних ошибок аппроксимации, что соответствует минимальной длине вектора $\{\overline{A_N}, \overline{A_D}, \overline{A_I}\}$, и точечные прогнозные оценки переменных модели N, D, I на следующий, ближайший по отношению к имеющейся информации, период.

Для численной реализации описанной процедуры был разработан программный модуль, с помощью которого формировалась база данных, содержащая все перечисленные выше компоненты. Внутри этого модуля было осуществлено 3^{18} итераций (по числу комбинаций значений параметров модели (1.4) - (1.6)), каждая из которых содержала громоздкие расчеты, в том числе связанные с численным интегрированием системы, что при прямой последовательности проводимых вычислений требует достаточно большого количества времени и высокой производительности вычислительных машин. В целях экономии ресурсов, весь перебор значений параметров модели был разбит на 81 часть. Это позволило запускать одновременно несколько полученных компиляцией исполняемых файлов, что значительно ускорило процесс обработки данных.

Следует заметить, что введенные условия (1.7) - (1.11) в сочетании с проверкой требований на значения средних ошибок аппроксимации позволили сократить число записей с

3^{18} до примерно 44 миллионов, что отразилось почти в 10-тикратном сокращении временных затрат. В результате была получена своеобразная база данных, состоящая из 81 файла, примерный объем каждого из которых составил 160 МВ. Информация, содержащаяся в этих файлах, позволила рассчитать ряд очень важных для анализа изучаемой модели характеристик, в том числе определить диапазоны вариации параметров $\{\alpha_j, \beta_j, \gamma_j\}$, $j = \overline{1, 6}$ и прогнозных значений каждой из переменных модели (1.4) - (1.6) (см. табл.). Для этого было разработано отдельное приложение, которое осуществляло построчное чтение все файлов полученной базы. Строка разбивалась на части согласно типу данных: коэффициенты, результаты, погрешности. Это реализовывалось вводом специального класса строкового типа со специальным разделителем строк, упрощающего считывание значений с файла. Далее, используя необходимый отступ в строке в зависимости от типа, данные вносились в соответствующие массивы, которые анализировались согласно принятым условиям выборки. В качестве начальных максимальных, минимальных и оптимальных значений приняты данные первой записи в информационной базе. Далее, при сравнении с данными очередной записи, если они оказывались лучше точки зрения введенных условий, то рассчитываемые значения заменялись. В качестве условий оптимальности принято минимальное значение корня квадратного из суммы квадратов средних ошибок аппроксимации, то есть данные записи принимались как оптимальные, если значения средних ошибок аппроксимации, записанные в конце каждой записи, обеспечивали минимальное значение выражения $\sqrt{\overline{A}_N^2 + \overline{A}_D^2 + \overline{A}_I^2}$. Результаты анализа выводились в специальное поле программы.

Важным итогом реализации разработанной процедуры явилась возможность расчета вероятностных оценок прогнозируемых значений величины численности населения Российской Федерации на 2010 г. (рис. 2).



Р и с у н о к 1.2

Гистограмма прогнозных оценок численности населения РФ на 2010 г.

Согласно проведенным расчетам заданный уровень вариации прогнозируемого значения численности населения Российской Федерации на 2010 г. в размере 0,6% от фактического значения данного показателя в 2009 г. (141,9 млн. чел.) можно ожидать с вероятностью 0,35.

Для непосредственной реализации всех этапов описанной процедуры был разработан специальный программный продукт в среде объектного программирования Delphi, функциональные возможности которого позволили авторам достичь поставленной цели и осу-

Таблица 1: Характеристики параметров и прогнозных оценок переменных модели (1.4) - (1.6) (* - оптимальным считался набор параметров, обеспечивающий минимальное значение выражению $\sqrt{A_N^2 + A_D^2 + A_I^2}$)

Параметры / переменные	Минимальное значение	Максимальное значение	Оптимальное значение*
α_1	1,948	2,050	1,948
α_2	1,900	2,100	2,000
α_3	-2,100	-1,900	-2,000
α_4	0,314	0,347	0,314
α_5	0,285	0,315	0,285
α_6	-0,315	-0,285	-0,285
β_1	0,000	0,000	0,000
β_2	0,333	0,350	0,350
β_3	0,000	0,000	0,000
β_4	0,000	0,000	0,000
β_5	0,000	0,000	0,000
β_6	0,950	1,050	1,050
γ_1	0,000	0,000	0,000
γ_2	0,000	0,000	0,000
γ_3	-0,420	-0,380	-0,380
γ_4	0,087	0,097	0,092
γ_5	0,087	0,097	0,097
γ_6	-0,097	-0,087	-0,097
N_{13} , млн. чел.	138,407	142,015	141,885
D_{13} , тыс. руб.	95,862	236,572	232,053
I_{13} , доли ед.	1,048	1,363	1,100

существовать более обоснованный подход к проблеме получения прогнозных оценок в рамках изучаемой модели системной динамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Махов С. А., “Математическое моделирование мировой динамики и устойчивого развития на примере модели Форрестера”, *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*, **6** (2005), 24.
2. Спивак С.И., Кантор О.Г., Салахов И.Р., “Моделирование численности населения Российской Федерации методом системной динамики”, *Статистика. Моделирование. Оптимизация.*, 2011, 339.
3. Спивак С.И., Кантор О.Г., Салахов И.Р., “Оценка параметров моделей системной динамики”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **13:3** (2011), 107–113.

4. Спивак С.И., Кантор О.Г., Салахов И.Р., “О программе, корректирующей систему уравнений”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **13**:4 (2011), 87–93.
5. Спивак С.И., Кантор О.Г., “Оценка качества спецификации моделей системной динамики”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:2 (2012), 34–39.
6. Форрестер Дж., *Мировая динамика*, Наука, М., 1978.

Forecasts in system dynamics models

© S. I. Spivak⁴, O. G. Kantor⁵, I. R. Salakhov⁶

Abstract. Developed the procedure of obtaining the interval forecasts in system dynamics models, which has been tested on the model of the Russian population.

Key Words: system dynamics, interval forecasts

⁴ Head of the Department of Mathematical Modelling, Bashkir state university, Ufa; s.spivak@bashnet.ru.

⁵ Senior Research Scientist, Institute for Social and Economic Research, Ufa; o_kantor@mail.ru.

⁶ graduate student, Bashkir state university, Ufa; salah-off@mail.ru.

УДК 621.3.078

Реализация расширенного фильтра Калмана в среде MATLAB для восстановления угловой скорости вращения ротора асинхронного двигателя

© М. В. Таланов,¹ А. В. Карасев,² В. М. Таланов³

Аннотация. В статье рассматривается реализация расширенного фильтра Калмана в среде MATLAB и предлагается улучшенная структура наблюдателя на его основе для получения оценки угловой скорости вращения ротора асинхронного электродвигателя.

Ключевые слова: датчик скорости, асинхронный электродвигатель, расширенный фильтр Калмана, улучшенная структура наблюдателя, MATLAB, матрица ковариации, дискретизация, неподвижная система координат, библиотека Digital Motor Control

1. Введение

Расширенный фильтр Калмана является статистически оптимальным рекурсивным алгоритмом идентификации переменных состояния и параметров нелинейных динамических систем [1],[2]. Он позволяет учесть случайные возмущения в системе и ошибки, возникающие при измерении доступных параметров системы. Предполагается, что ошибки измерений и возмущения в системе некоррелированы и матрицы ковариации для них известны. В статье рассматривается структура наблюдателя на основе расширенного фильтра Калмана, которая позволяет получить более точную оценку угловой скорости вращения ротора асинхронного электродвигателя по сравнению с реализациями наблюдателей, приведенными в [1],[2].

В алгоритме фильтрации использовались уравнения электродвигателя, записанные в неподвижной системе координат (1.1),(1.2), поскольку такая модель имеет следующие преимущества:

1. меньшее время расчета;
2. меньшее число шагов моделирования;
3. повышенная точность;
4. более стабильное поведение.

Далее приводится математическая модель асинхронного электродвигателя в пространстве состояний, которая дополнена неизмеряемой величиной – угловой скоростью вращения ротора [1],[2]. Эта модель была использована для получения дискретной модели двигателя при реализации фильтра Калмана в среде MATLAB.

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (1.1)$$

¹ Аспирант факультета электронной техники, Мордовский государственный университет, г. Саранск; izen_18@mail.ru

² Доцент кафедры «Промышленная электроника», Мордовский государственный университет, г. Саранск; izen_18@mail.ru

³ Доцент кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления», Мордовский государственный университет, г. Саранск; izen_18@mail.ru

$$y = Cx, \quad (1.2)$$

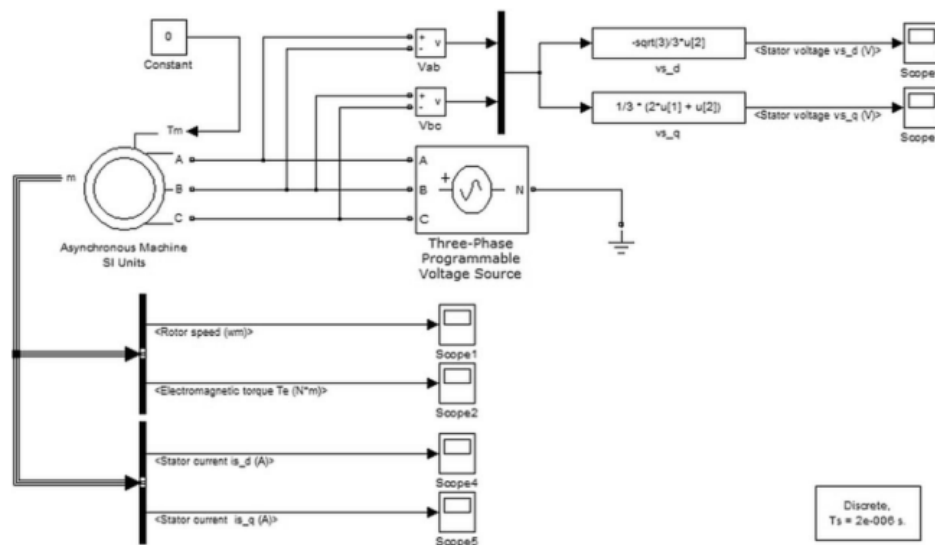
где

$$A = \begin{bmatrix} -1/T_s'^* & 0 & L_m/(L_s' L_r T_r) & \omega_r L_m/(L_s' L_r) & 0 \\ 0 & -1/T_s'^* & -\omega_r L_m/(L_s' L_r) & L_m/(L_s' L_r T_r) & 0 \\ L_m/T_r & 0 & -1/T_r & -\omega_r & 0 \\ 0 & L_m/T_r & \omega_r & -1/T_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/L_s' & 0 \\ 0 & 1/L_s' \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и $x = [i_{s\alpha} \ i_{s\beta} \ \psi_{r\alpha} \ \psi_{r\beta} \ \omega_r]^T$ – вектор состояния, $u = [u_{s\alpha} \ u_{s\beta}]^T$ – вектор управления, A – матрица состояний, C – матрица выхода, $L_s' = \sigma L_s$ – переходная индуктивность статора, где $\sigma = 1 - L_m^2/(L_s L_r)$ – коэффициент рассеяния, L_s – индуктивность обмотки статора; L_m – индуктивность намагничивания; $L_r = L_{lr} + L_m$ – индуктивность обмотки ротора, где L_{lr} – индуктивность рассеяния обмотки ротора; $T_r = L_r/R_r$ – постоянная времени ротора; $\omega_r = \omega_m p$ – электрическая угловая скорость вращения ротора, где ω_m – механическая угловая скорость вращения ротора, p – число пар полюсов электродвигателя; $T_s'^* = L_s'/(R_s + R_r(L_m/L_r)^2)$ – комбинированный параметр, где R_s – активное сопротивление обмотки статора, R_r – активное сопротивление обмотки ротора; $i_{s\alpha}$ и $i_{s\beta}$ – проекции токов в обмотках статора на оси неподвижной системы координат, $u_{s\alpha}$ и $u_{s\beta}$ – проекции линейных напряжений обмоток статора на оси неподвижной системы координат, $\psi_{r\alpha}$ и $\psi_{r\beta}$ – проекции вектора потокоцепления ротора на оси неподвижной системы координат.

Для численного моделирования объекта управления использовалась модель асинхронного электродвигателя из библиотеки SIMULINK (рисунок 1.1). Моделирование проводилось в дискретном времени с шагом моделирования 2 мкс – это было сделано для ускорения процесса моделирования.

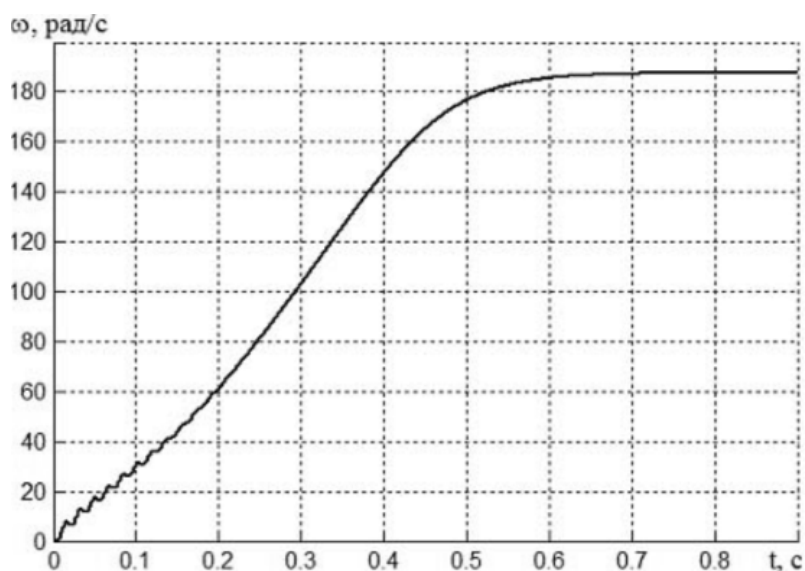


Р и с у н о к 1.1

Модель асинхронного двигателя в SIMULINK

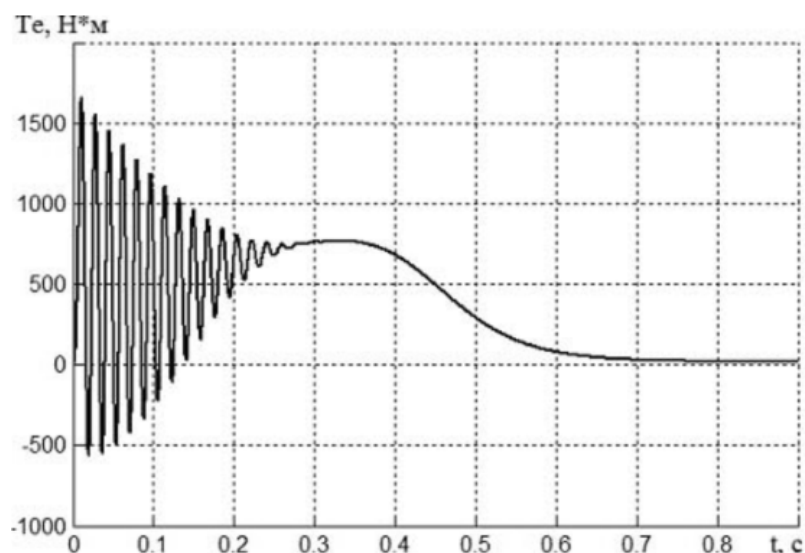
2. Результаты моделирования в среде MATLAB

Рассмотрим результаты моделирования. На рисунке 2.1 показан разгон двигателя до установившегося режима – 188,5 рад/с (1800 об/мин). На рисунке 2.2 показан развиваемый двигателем электромагнитный вращающий момент.



Р и с у н о к 2.1

Измеренная угловая скорость вращения ротора двигателя



Р и с у н о к 2.2

Электромагнитный вращающий момент двигателя

Преобразование линейных напряжений из трехфазной в неподвижную систему координат выполняется по следующей формуле [3],[4]:

$$\begin{bmatrix} V_{qs} \\ V_{ds} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \cos \varphi & \cos \varphi + \sqrt{3} \sin \varphi \\ 2 \sin \varphi & \sin \varphi - \sqrt{3} \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{abs} \\ V_{bcs} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

где V_{abs} и V_{bcs} – линейные напряжения обмоток статора, φ – угол поворота системы координат, в которой записаны уравнения электродвигателя. В нашем случае $\varphi = 0$.

Напомним, что считаются доступными для измерения только напряжения и токи статора.

Для выполнения алгоритма расширенного фильтра Калмана цифровыми процессорами необходимо записать уравнения электродвигателя в дискретном времени. Дискретизация выражений (1.1) и (1.2) производится по следующим формулам:

$$A_d = \exp[AT] \approx I + AT \quad (2.2)$$

$$B_d = BT, \quad (2.3)$$

где T – период дискретизации. Матрица выхода вычисляется как $C_d = C$, где матрица C определяется из формулы (1.2). В [2] и [5] приведены рекомендации по выбору периода дискретизации.

В расширенном фильтре Калмана должны быть учтены как случайные возмущения входного воздействия, так и случайные ошибки при измерениях выхода. Математическая модель рассматриваемой наблюдаемой системы имеет вид [6]:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + v(t), t \geq t_0 \quad (2.4)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + w(t). \quad (2.5)$$

Недоступный непосредственному наблюдению вектор состояния $x(t)$ имеет размерность n . Предположим, что его начальное значение $x(t_0)$ есть случайный вектор с заданной ковариационной матрицей $P(t_0)$. Измеряемый вектор $y(t)$ имеет размерность m . Вектор возмущений $v(t)$ размерности n и ошибка измерений $w(t)$ размерности m представляют собой векторные случайные процессы. Симметричные, неотрицательно определенные матрицы ковариации этих процессов заданы следующими формулами:

$$Evv' = Q(t) \quad (2.6)$$

$$Eww' = R(t), \quad (2.7)$$

где E означает математическое ожидание.

Во время численного моделирования двигатель разгоняется из состояния покоя, то есть априорная информация о начальном положении системы известна. Следовательно, ошибка в знании начального вектора состояния $x(t_0)$ равна нулю, а значит: матрица ковариации начального вектора $P(t_0)$ равна нулю, то есть $P(0) = 0$. Поскольку параметры случайных процессов $v(t)$ и $w(t)$ неизвестны, то во время экспериментальной настройки алгоритма фильтрации были подобраны значения матриц Q и R таким образом, чтобы обеспечить удовлетворительную динамику и точность восстановления переменных состояния [1].

Алгоритм фильтрации состоит из двух основных шагов: экстраполяции и коррекции [2]. Экстраполяция вектора состояния наблюдаемой системы осуществляется на основе

математической модели асинхронного электродвигателя в дискретном времени. Оценка вектора состояния наблюдаемой системы получается в результате второго шага – коррекции, – которая осуществляется путем добавления корректирующего члена к значению, полученному в результате экстраполяции. Корректирующий член вычисляется как произведение матрицы усиления фильтра K на разность измеренного вектора состояния и оценки вектора состояния.

Уравнение расширенного фильтра (наблюдателя) Калмана имеет вид (рисунок 2.3):

$$\hat{\dot{x}} = A(\hat{x})\hat{x} + Bu + K(i_s - \hat{i}_s), \quad (2.8)$$

где последнее слагаемое в правой части выражения является корректирующим членом.

Численная реализация алгоритма фильтрации состоит из следующих этапов [1], [2], [6]. На первых двух этапах имеющаяся оценка и ее матрица ковариации экстраполируются на следующий интервал:

$$X[n+1|n] = A_d X[n|n] + B_d U[n] \quad (2.9)$$

$$P[n+1|n] = f(n+1|n)P[n|n]f^T(n+1|n) + Q, \quad (2.10)$$

где $f(n+1|n) = \frac{\partial}{\partial x}(A_d X + B_d U)|_{X=X[n|n]}$.

На третьем шаге вычисляется оптимальная матрица усиления K и оценка, полученная в результате экстраполяции, улучшается с использованием новых результатов наблюдений:

$$K[n] = P[n|n-1]h^T[n|n-1](h[n|n-1]P[n|n-1]h^T[n|n-1] + R)^{-1} \quad (2.11)$$

$$X[n|n] = X[n|n-1] + K[n](Y[n] - C_d X[n|n-1]), \quad (2.12)$$

где $h[n|n-1] = \frac{\partial}{\partial x}(C_d X)|_{X=X[n|n-1]}$.

При реализации улучшенного наблюдателя на основе фильтра Калмана вычисление оценки вектора состояния предлагается модифицировать следующим образом:

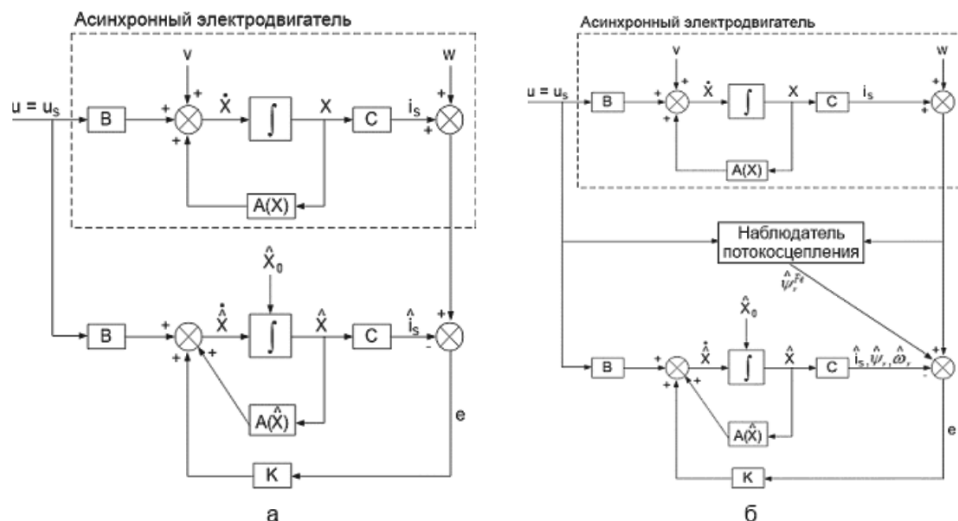
$$X[n|n] = X[n|n-1] + K[n]([Y[n]; \hat{\psi}_r^{Fe}[n]] - C_d X[n|n-1]), \quad (2.13)$$

где $\hat{\psi}_r^{Fe}$ – вектор оценки $\psi_{r\alpha}$ и $\psi_{r\beta}$, полученный с помощью дополнительного наблюдателя потокосцепления. Кроме того, размер матрицы R следует увеличить до 4×4 . Матрица C также должна быть дополнена двумя строками, учитывающими влияние потокосцепления.

На последнем шаге определяется матрица ковариации новой модифицированной оценки:

$$P[n|n] = P[n|n-1] - K[n]h[n|n-1]P[n|n-1]. \quad (2.14)$$

Структуры расширенного фильтра Калмана и улучшенного наблюдателя на его основе приведены на рисунке 2.3, где: $u = [u_{s\alpha} \ u_{s\beta}]^T$, $i = [i_{s\alpha} \ i_{s\beta}]^T$, $v(k)$ – вектор возмущений, $w(k)$ – вектор ошибок измерений, $\hat{i}_s$ – вектор оценки i_s , ψ_r – вектор оценки $\psi_{r\alpha}$ и $\psi_{r\beta}$; $\hat{\psi}_r^{Fe}$ – вектор оценки $\psi_{r\alpha}$ и $\psi_{r\beta}$, полученный с помощью дополнительного наблюдателя потокосцепления; $\hat{\omega}_r$ – оценка ω_r , $\hat{x}_r$ – начальная оценка вектора состояния x , $\hat{x}$ – оценка x .



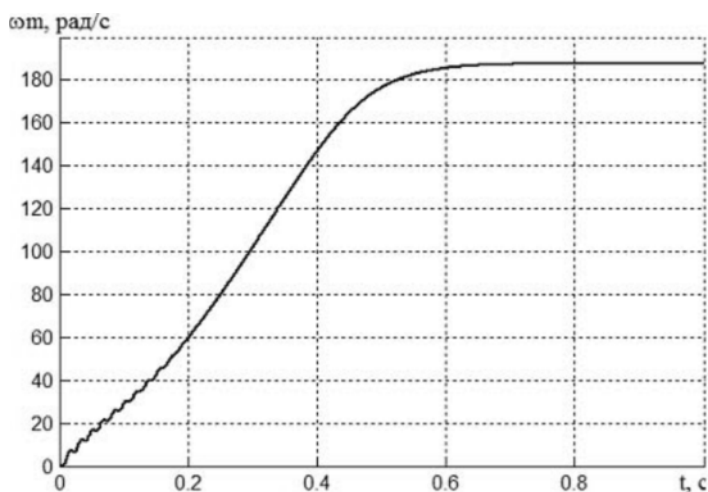
Р и с у н о к 2.3

Сравнение структурных схем наблюдателей: а – расширенный фильтр Калмана; б – улучшенный наблюдатель на основе расширенного фильтра Калмана

Алгоритм фильтрации с помощью улучшенного наблюдателя был реализован в среде MATLAB. В качестве вектора управления выступали проекции линейных напряжений обмоток статора на оси неподвижной системы координат (рисунок 1.1 и выражение (2.1)). В качестве измеренного вектора состояния использовались проекции токов статорных обмоток на оси неподвижной системы координат (рисунок 1.1). Дополнительный наблюдатель потокосцепления был взят из библиотеки Digital Motor Control от фирмы Texas Instruments [7], который также был реализован в среде MATLAB.

Далее приведены результаты оценки переменных состояния электродвигателя с помощью улучшенного наблюдателя на основе расширенного фильтра Калмана.

На рисунке 2.4 показана восстановленная наблюдателем механическая угловая скорость вращения ротора.

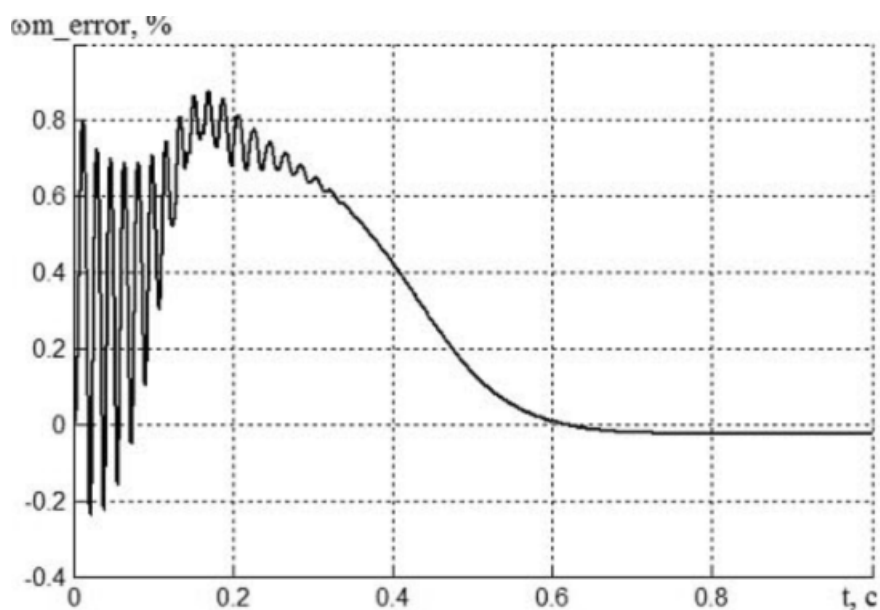


Р и с у н о к 2.4

Оценка угловой скорости вращения ротора

На рисунке 2.5 показана ошибка оценки механической угловой скорости вращения ротора (изображена погрешность относительно амплитудного значения в установившемся

режиме измеренной угловой скорости вращения ротора, которая показана на рисунке 2.1).



Р и с у н о к 2.5

Ошибка оценки угловой скорости вращения ротора

В статье была предложена модель в среде MATLAB и структура улучшенного наблюдателя на основе расширенного фильтра Калмана, которая позволяет получить оценку угловой скорости вращения ротора асинхронного электродвигателя с точностью до 1,0% для переходного режима и с точностью 0,025% для установившегося режима, что исключает необходимость использования датчика скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпунов А. М., «*Sensorless Control with Kalman Filter on TMS320 Fixed-Point DSP*,» *Texas Instruments, Literature Number: BPRA057*, ОНТИ, Л., М., July 1997, 336 с.
2. Peter Vas, *Sensorless Vector and Direct Torque Control*, Oxford University Press, 1998.
3. Krause, P.C., O.Wasynczuk, and S.D. Sudhoff, *Analysis of Electric Machinery*, IEEE Press, 2002.
4. Mohan, N., T.M. Undeland, and W.P. Robbins, *Power Electronics: Converters, Applications, and Design*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995, 576 с.
5. Burak Ozpineci, Leon M. Tolbert, "Simulink Implementation of Induction Machine Model – A Modular Approach", *The 29th Annual Conference of the IEEE industrial Electronics Society (IECON'03)*, 5:1 (2003), 728-734.
6. Браммер К., Зиффлинг Г., *Фильтр Калмана-Бьюси. Пер. с нем.*, Наука. Главная редакция физико-математической литературы., М., 1982.
7. Akin, B., Bhardwaj, M., "Sensorless Field Oriented Control of 3-Phase Induction Motors", *Texas Instruments*, 10:2 (Feb. 2010), 213–217.

Implementation of the extended Kalman filter using MATLAB for the estimation of the rotor speed of an induction motor.

© M. V. Talanov⁴, A. V. Karasev⁵, V. M. Talanov⁶

Abstract. In this paper the application of the extended Kalman filter using MATLAB is explored and improved structure of this observer for estimation of the rotor angular velocity is suggested.

Key Words: stationary reference frame, extended Kalman filter, improved observer based on Kalman filter, induction motor, Digital Motor Control library, MATLAB, speed sensor

⁴ Postgraduate student of faculty of electronic engineering, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; mvtal@mail.ru

⁵ Associate Professor of the department «Industrial Electronics», Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; izen_18@mail.ru

⁶ Associate Professor of the department «Automated information processing and management», Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; izen_18@mail.ru

УДК 517.3

Решение обратной задачи дифракции в прямоугольном волноводе методом асимптотических интегральных уравнений

© А. А. Цупак¹, М. Ю. Медведик²

Аннотация. Рассмотрена обратная задача дифракции электромагнитного поля на объемном анизотропном неоднородном теле, помещенном в прямоугольный волновод. Доказана теорема об асимптотике тензора Грина на бесконечности. Выведена система асимптотических уравнений электромагнитного поля. Описан метод вращений объемного тела для определения компонент тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей. Приведены результаты расчетов.

Ключевые слова: обратная электромагнитная задача дифракции, тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей, тензорная функция Грина, асимптотические уравнения, метод вращений

1. Введение

Рассматривается задача восстановления тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей объемного тела, расположенного в прямоугольном резонаторе, по известным значениям падающего и проходящего полей - эта задача рассматривалась в ряде работ, например в [1] - [3]. В настоящей работе (в отличие от перечисленных) предполагается, что тензор $\hat{\mu}(x)$ является неизвестным. Основная цель данной работы — исследование асимптотических свойств тензорной функции Грина рассматриваемой задачи и вывод системы асимптотических уравнений электромагнитного поля. Описывается метод вращений тела, позволяющий преобразовать асимптотические уравнения таким образом, чтобы в них входили любые компоненты неизвестных тензор-функций.

2. Постановка задачи. Интегро-дифференциальные уравнения.

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитного поля на объемном теле V , расположенном в прямоугольном волноводе $P := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in (0, a), \quad x_2 \in (0, b)\}$ с идеально проводящей границей ∂P . V характеризуется неизвестными тензор-функциями диэлектрической и магнитной проницаемостей $\hat{\varepsilon}(x)$, $\hat{\mu}(x)$; вне V среда однородна и изотропна — $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \hat{I}$, $\hat{\mu} = \mu_0 \hat{I}$. Потребуем также выполнения следующих условий:

$$\hat{\varepsilon}(x), \hat{\mu}(x), \hat{\varepsilon}^{-1}(x), \hat{\mu}^{-1}(x) \in L_{\infty}(V).$$

Падающее поле $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ является решением краевой задачи для уравнений Максвелла в однородном волноводе и распространяется в направлении возрастания x_3 .

Требуется по известным амплитудам приходящего из $-\infty$ поля и прошедшего поля определить диэлектрическую и магнитную проницаемости тела V .

¹ Доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет, г. Пенза; altsupak@yandex.ru.

² Доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет, г. Пенза; _medv@mail.ru.

Задача сводится к интегро-дифференциальным уравнениям электромагнитного поля по области неоднородности [4]:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x) &= \mathbf{E}_0(x) + (k_0^2 + \text{grad div}) \int_V \hat{G}_E(x, y) \hat{\xi}(y) \mathbf{E}(y) dy + i\omega\mu_0 \text{rot} \int_V \hat{G}_H(x, y) \hat{\eta}(y) \mathbf{H}(y) dy \\ \mathbf{H}(x) &= \mathbf{H}_0(x) + (k_0^2 + \text{grad div}) \int_V \hat{G}_H(x, y) \hat{\eta}(y) \mathbf{H}(y) dy - i\omega\varepsilon_0 \text{rot} \int_V \hat{G}_E(x, y) \hat{\xi}(y) \mathbf{E}(y) dy\end{aligned}$$

где $\hat{\xi} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - \hat{I}$, $\hat{\eta} = \frac{\mu}{\mu_0} - \hat{I}$; ε , μ — неизвестные проницаемости; $\hat{G}_E(x, y)$, $\hat{G}_H(x, y)$ — тензорные функции Грина (ТФГ), удовлетворяющие уравнению Гельмгольца и обеспечивающие выполнение краевых условий на ∂P для электромагнитного поля.

3. Тензорные функции Грина. Асимптотические свойства ТФГ.

Тензорные функции Грина имеют диагональный вид [5]:

$$\begin{aligned}G_E^1 &= \frac{i}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2-\delta_{n0}}{\gamma_{nm}} \cos \frac{\pi nx_1}{a} \sin \frac{\pi mx_2}{b} \cos \frac{\pi ny_1}{a} \sin \frac{\pi my_2}{b} e^{i\gamma_{nm}|x_3-y_3|} \\ G_E^2 &= \frac{i}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2-\delta_{m0}}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi nx_1}{a} \cos \frac{\pi mx_2}{b} \sin \frac{\pi ny_1}{a} \cos \frac{\pi my_2}{b} e^{i\gamma_{nm}|x_3-y_3|} \\ G_E^3 &= \frac{i}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi nx_1}{a} \sin \frac{\pi mx_2}{b} \sin \frac{\pi ny_1}{a} \sin \frac{\pi my_2}{b} e^{i\gamma_{nm}|x_3-y_3|} \\ G_H^1 &= G_E^2, \quad G_H^2 = G_E^1 \\ G_H^3 &= \frac{i}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2-\delta_{n0})(2-\delta_{m0})}{\gamma_{nm}} \cos \frac{\pi nx_1}{a} \cos \frac{\pi mx_2}{b} \cos \frac{\pi ny_1}{a} \cos \frac{\pi my_2}{b} e^{i\gamma_{nm}|x_3-y_3|}\end{aligned} \quad (3.1)$$

Принятая в настоящей работе запись функций Грина отличается от обозначений в [5] определением γ_{nm} ; полагаем

$$\gamma_{nm} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}.$$

Выберем ветвь квадратного корня так, чтобы обеспечить экспоненциальное убывание к нулю членов рядов при достаточно больших n , m . Для этого выполним разрез комплексной плоскости от точки ветвления $w_0 = 0$ вдоль нижней части мнимой оси. Отображение

$$z = \sqrt{w} = \sqrt{|w|} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right), \quad \varphi = \arg(w) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$$

является однолиственным, причем

$$w \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \sqrt{w} \in \mathbb{R}_+; \quad w \in \mathbb{R}_- \Rightarrow \sqrt{w} \in i\mathbb{R}_+.$$

Исследуем поведение компонент ТФГ, а также их производных при $x_3 \rightarrow \pm\infty$.

Большинство волноводов, применяемых в исследовании распространения волн и свойств материальных сред работают в так называемом *одномодовом* режиме, при котором свободно может распространяться одна волна на некоторой частоте. Чаще всего используется следующее соотношение ширины и высоты волновода: $a = 2b$.

Будем предполагать, что частота ω выбирается так, что $k_0 \in \left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}\right)$. Тогда

$$\gamma_{nm} \in \begin{cases} \mathbb{R}_+, & \text{если } m = n = 0 \text{ или } m = 0, n = 1, \\ i\mathbb{R}_+ & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Значению γ_{10} отвечает незатухающая в волноводе мода; волн, отвечающих паре $n = m = 0$, не существует [6].

Рассмотрим основное утверждение об асимптотике ТФГ, по аналогии с которым выводятся и остальные асимптотические свойства.

Л е м м а 3.1. $G_E^1(x, y) \rightarrow 0$ при $x_3 \rightarrow \infty$ равномерно по $y \in V$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Суммирование по m ведется, начиная с единицы, поэтому члены ряда G_E^1 равномерно убывают к нулю при $x_3 \rightarrow \infty$. Пусть $G_E^1 = \Sigma' + \Sigma''$; причем в первой сумме n, m таковы, что

$$\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 > \frac{4}{3}k_0^2, \quad (3.2)$$

а во втором - по всем остальным n, m . Оценим каждое из слагаемых.

Так как в Σ'' присутствует лишь конечное число слагаемых N , то

$$|\Sigma''| \leq C \cdot N |e^{i\gamma_{nm}^*|x_3-y_3|}| \Rightarrow 0, \quad y_3 \in V,$$

где C — некоторая константа, а γ_{nm}^* — значение корня, обеспечивающее оценку сверху.

Рассмотрим теперь ряд Σ' . В силу условия ((3.2)) для n, m верно

$$|\gamma_{nm}| > \frac{1}{2} \left| \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} \right|,$$

поэтому

$$|\Sigma'| \leq C_1 \sum e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}|x_3-y_3|} \leq C_1 \sum e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi n}{a} + \frac{\pi m}{b}\right)|x_3-y_3|}$$

; в силу интегрального признака сходимости знакопостоянного ряда получим окончательно

$$|\Sigma'| \leq C_1 \int_{u_0}^{+\infty} \int_{v_0}^{+\infty} e^{-(u+v)|x_3-y_3|} du dv \leq C_2 \left(\int_{u_*}^{+\infty} e^{-u|x_3-y_3|} du \right)^2 = \frac{C_2}{|x_3 - y_3|^2} e^{-2u_*|x_3-y_3|} \Rightarrow 0,$$

где $u_0, v_0 > 0$, $u_* := \min\{u_0, v_0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Аналогично доказывается существование следующих важных пределов:

$$\begin{aligned} G_E^3 &\Rightarrow 0, \quad G_H^2 \Rightarrow 0, \\ G_E^2 - \frac{i}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} &\Rightarrow 0, \\ G_H^1 - \frac{i}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} &\Rightarrow 0 \\ G_H^3 - \frac{i}{ab\gamma_{00}} e^{i\gamma_{00}|x_3-y_3|} - \frac{2i}{ab\gamma_{10}} \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} &\Rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Видно, что некоторые компоненты ТФГ не имеют предела при $x_3 \rightarrow \infty$, однако впредь будем писать, например, так:

$$G_E^2 \Rightarrow \frac{i}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi a}{x_1} \sin \frac{\pi a}{y_1} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|},$$

понимая предельный переход в смысле формул (3.3)

Все равномерно убывающие к нулю члены рядов ТФГ имеют производные любого порядка по каждой из переменных, также равномерно исчезающие на бесконечности. Поэтому несложно получить асимптотику для производных компонент ТФГ. В качестве примеров приведем некоторые из результатов:

$$\frac{\partial G_E^1}{\partial x_k}, \frac{\partial G_E^3}{\partial x_k}, \frac{\partial G_H^2}{\partial x_k}, \frac{\partial G_E^2}{\partial x_2}, \frac{\partial G_H^3}{\partial x_2} \Rightarrow 0, \quad \frac{\partial G_H^3}{\partial x_1} \Rightarrow -\frac{2\pi i}{a^2 b \gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|},$$

$$\frac{\partial G_H^3}{\partial x_3} \Rightarrow \text{sign}(y_3 - x_3) \left[\frac{e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|}}{a} b + \frac{2}{ab} \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \right]$$

4. Асимптотические интегральные уравнения электромагнитного поля

Записанные выше интегро-дифференциальные уравнения можно рассматривать и как представление поля $\mathbf{E}(x)$, $\mathbf{H}(x)$ вне V области неоднородности через значения падающего поля $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ и полей в области неоднородности ($\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ в интегро-дифференциальных операторах). В так понимаемых уравнениях и осуществим предельный переход.

В полученных ниже формулах, вытекающих из доказанной леммы, предполагается суммирование по повторяющемуся индексу и подразумевается стремление при $x_3 \rightarrow \pm\infty$ равномерно по $y \in V$.

$$\hat{G}_E \hat{\xi} \mathbf{E} \Rightarrow \frac{i}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\xi_{2l} E^l) \cdot \mathbf{e}_2, \quad \text{grad div } \hat{G}_E \hat{\xi} \mathbf{E} \Rightarrow 0$$

$$\text{rot } \hat{G}_E \hat{\xi} \mathbf{E} \Rightarrow \frac{\text{sign}(x_3 - y_3)}{ab} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\xi_{2l} E^l) \cdot \mathbf{e}_1 +$$

$$+ \frac{\pi i}{a^2 b \gamma_{10}} \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\xi_{2l} E^l) \cdot \mathbf{e}_3$$

$$\hat{G}_E \hat{\eta} \mathbf{H} \Rightarrow \frac{i}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{1l} H^l) \cdot \mathbf{e}_1 +$$

$$+ \left(\frac{i}{ab\gamma_{00}} e^{i\gamma_{00}|x_3-y_3|} + \frac{2i}{ab\gamma_{10}} \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \right) (\eta_{3l} H^l) \cdot \mathbf{e}_3$$

$$\text{rot } \hat{G}_E \hat{\eta} \mathbf{H} \Rightarrow \frac{\text{sign}(y_3 - x_3)}{ab} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{1l} H^l) \cdot \mathbf{e}_2 +$$

$$+ \frac{2\pi i}{a^2 b \gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{3l} H^l) \cdot \mathbf{e}_2$$

$$\text{grad div } \hat{G}_H \hat{\eta} \mathbf{H} \Rightarrow \frac{-i\pi^2}{a^3 b \gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{1l} H^l) \cdot \mathbf{e}_1 +$$

$$+ \frac{2\pi \text{sign}(x_3 - y_3)}{a^2 b} \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{3l} H^l) \cdot \mathbf{e}_1 +$$

$$+ \frac{\pi \text{sign}(y_3 - x_3)}{a^2 b} \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{1l} H^l) \cdot \mathbf{e}_3 -$$

$$- \left(\frac{i\gamma_{00}}{ab} e^{i\gamma_{00}|x_3-y_3|} + \frac{2i\gamma_{10}}{ab} \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \right) (\eta_{3l} H^l) \cdot \mathbf{e}_3$$

(4.1)

Из последних формул вытекают уравнения для компонент поля:

$$\begin{aligned}
 E_{\infty}^1 &= E_0^1, \quad E_{\infty}^3 = E_0^3, \quad H_{\infty}^2 = H_0^2 \\
 E_{\infty}^2 &= E_0^2 + \frac{ik_0^2}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\xi_{2l} E^l) dy + \\
 &\quad + \frac{i\omega\mu_0 \text{sign}(y_3 - x_3)}{ab} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{1l} H^l) dy - \\
 &\quad - \frac{2\pi\omega\mu_0}{a^2b\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{3l} H^l) dy \\
 H_{\infty}^1 &= H_0^1 + \frac{ik_0^2}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{1l} H^l) dy - \\
 &\quad - \frac{i\pi^2}{a^3b\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{1l} H^l) dy + \\
 &\quad + \frac{2\pi \text{sign}(x_3 - y_3)}{a^2b} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{3l} H^l) dy + \\
 &\quad + \frac{i\omega\varepsilon_0 \text{sign}(y_3 - x_3)}{ab} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\xi_{2l} E^l) dy \\
 H_{\infty}^3 &= H_0^3 + \frac{2ik_0^2}{ab\gamma_{10}} \cos \frac{\pi x_1}{a} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{3l} H^l) dy - \\
 &\quad - \frac{2i\gamma_{10}}{ab} \cos \frac{\pi x_1}{a} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{3l} H^l) dy + \\
 &\quad + \frac{\pi \text{sign}(y_3 - x_3)}{a^2b} \cos \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{1l} H^l) dy + \\
 &\quad + \frac{\pi\omega\varepsilon_0}{a^2b\gamma_{10}} \cos \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\xi_{2l} E^l) dy
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Для получения асимптотических уравнений в окончательном виде определим вид поля $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ и поля на бесконечности. Следуя [6], запишем электрическое поле в виде:

$$\mathbf{E}_0 = \left[0, \frac{i\pi\omega\mu_0}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3}, 0 \right]^T,$$

а соответствующее ему магнитное поле получим из однородных уравнений Максвелла в полом волноводе:

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}_0 = \frac{-i\pi\gamma_{10}}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3} \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3} \cdot \mathbf{e}_3$$

Таким образом, компоненты падающего поля определяются формулами:

$$\begin{aligned}
 E_0^1 &= E_0^3 = H_0^2 = 0; \quad E_0^2 = F^{(+)} \frac{i\pi\omega\mu_0}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3} \\
 H_0^1 &= F^{(+)} \frac{-i\pi\gamma_{10}}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3}; \quad H_0^3 = F^{(+)} \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь коэффициент $F^{(+)}$ определяет амплитуду падающей волны и считается известным.

Прошедшее поле также считается известным, а его амплитуда может быть определена экспериментально; обозначим ее $T^{(+)}$. Учитывая, что поляризация прошедшего поля сохраняется, запишем его в виде:

$$\begin{aligned} E_{+\infty}^1 &= E_{+\infty}^3 = H_{+\infty}^2 = 0; & E_{+\infty}^2 &= T^{(+)} \frac{i\pi\omega\mu_0}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3} \\ H_{+\infty}^1 &= T^{(+)} \frac{-i\pi\gamma_{10}}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3}; & H_{+\infty}^3 &= T^{(+)} \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Подставляя (4.3) и (4.4) в интегро-дифференциальные уравнения и сокращая общие множители, получим окончательный вид асимптотических интегральных уравнений электромагнитного поля в волноводе с локальной анизотропной неоднородностью:

$$\begin{aligned} T^{(+)} &= F^{(+)} + \frac{k_0^2}{\omega\mu_0\pi\gamma_{10}} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\xi_{2l}E^l) dy - \\ &\quad - \frac{1}{b\pi} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\eta_{1l}H^l) dy + \\ &\quad + \frac{2i}{ab\gamma_{10}} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\eta_{3l}H^l) dy \\ T^{(+)} &= F^{(+)} - \frac{k_0^2}{\pi b\gamma_{10}^2} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\eta_{1l}H^l) dy - \\ &\quad - \frac{\pi}{a^2 b\gamma_{10}^2} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\eta_{1l}H^l) dy + \\ &\quad + \frac{2i}{ab\gamma_{10}} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\eta_{3l}H^l) dy + \\ &\quad + \frac{\omega\varepsilon_0}{b\pi\gamma_{10}} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\xi_{2l}E^l) dy \\ T^{(+)} &= F^{(+)} + \frac{2iak_0^2}{b\pi^2\gamma_{10}} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\eta_{3l}H^l) dy - \\ &\quad - \frac{1}{b\pi} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\eta_{3l}H^l) dy + \\ &\quad + \frac{2ia\gamma_{10}}{b\pi^2} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\eta_{1l}H^l) dy + \\ &\quad + \frac{\omega\varepsilon_0}{b\pi\gamma_{10}} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\xi_{2l}E^l) dy \end{aligned} \quad (4.5)$$

Уравнения (4.5) не содержат всех компонент искомых тензоров — отсутствуют элементы 2-ой строки тензора $\hat{\eta}$, а также компоненты 1-ой и 3-ей строк для $\hat{\varepsilon}$. Поэтому рассматриваемая задача может быть решена, если задан некоторый известный заранее класс материалов и соответствующая им структура тензора: например, могут рассматриваться только кристаллы фиксированного типа или только изотропные тела. Эта проблема решается вращением тела V .

Проведем подробные рассуждения для тензора $\hat{\varepsilon}$. При самых общих предположениях относительно рассматриваемого тела V его диэлектрическая проницаемость характеризуется двухвалентным тензором:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 & \varepsilon_3^1 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \\ \varepsilon_1^3 & \varepsilon_2^3 & \varepsilon_3^3 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Если $[P]$ — матрица перехода от старого ортонормального базиса $\mathcal{B}$ к новому $\mathcal{B}'$, определяющая преобразование декартовой системы координат, то

$$\hat{\varepsilon}'(x') = [P]^{-1} \hat{\varepsilon}(x) [P].$$

при условии, что тело V не меняет своего положения (если же вместе с осями поворачивается и тело, то компоненты его тензора не меняются). Обратно, если по отношению к осям изменить положение тела V , то получится новый набор коэффициентов.

Пусть V содержится в объеме $Q = \{x : x_1 \in (0, a), x_2 \in (0, b), x_3 \in (-c, c)\}$. Будем рассматривать повороты тела вокруг центра области Q на угол φ в плоскостях, параллельных трем координатным. Такие повороты равносильны композиции трех преобразований: сдвиг тела на вектор $(-a/2, -b/2, 0)^T$, его поворот вокруг начала координат в нужной плоскости и обратный сдвиг; при этом сдвиги не меняют структуры тензора.

Посмотрим, как преобразуется тензор $\hat{\varepsilon}$ при повороте тела на угол φ по часовой стрелке вокруг оси Ox_3 . Это преобразование равносильно повороту системы координат тела на угол φ против часовой стрелки и определяется матрицей (преобразования базисов)

$$[P^{(3)}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обозначив $\cos \varphi =: c$, $\sin \varphi =: s$, вычислим

$$\hat{\varepsilon}^{(3)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^1 c^2 + \varepsilon_1^2 cs + \varepsilon_2^1 cs + \varepsilon_2^2 s^2 & -\varepsilon_1^1 cs + \varepsilon_1^2 c^2 - \varepsilon_2^1 s^2 + \varepsilon_2^2 cs & \varepsilon_3^1 c + \varepsilon_3^2 s \\ -\varepsilon_1^1 cs - \varepsilon_1^2 s^2 + \varepsilon_2^1 c^2 + \varepsilon_2^2 cs & \varepsilon_1^1 s^2 - \varepsilon_1^2 cs - \varepsilon_2^1 cs + \varepsilon_2^2 c^2 & -\varepsilon_3^1 s + \varepsilon_3^2 c \\ \varepsilon_3^1 c^2 + \varepsilon_3^2 s & -\varepsilon_3^1 s + \varepsilon_3^2 c & \varepsilon_3^3 \end{bmatrix}.$$

Аналогично определяются матрицы поворотов вокруг двух других координатных осей. При повороте тела на угол $\varphi = \pi/2$ вокруг осей Ox_3 , Ox_2 , Ox_1 получим соответственно вид преобразованного тензора:

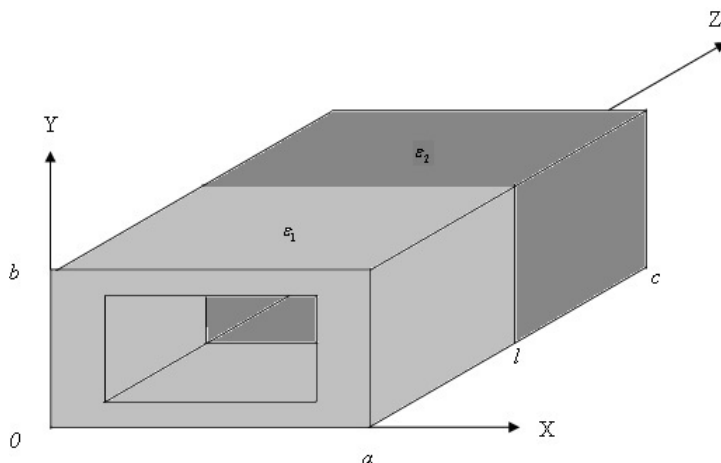
$$\hat{\varepsilon}^{(3)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_2^2 & -\varepsilon_2^1 & \varepsilon_2^3 \\ -\varepsilon_1^2 & \varepsilon_1^1 & -\varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_3^2 & -\varepsilon_3^1 & \varepsilon_3^3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\varepsilon}^{(2)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3^3 & -\varepsilon_3^2 & -\varepsilon_3^1 \\ -\varepsilon_2^3 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2^1 \\ -\varepsilon_1^3 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1^1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\varepsilon}^{(1)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_1^3 & -\varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_3^1 & \varepsilon_3^3 & -\varepsilon_3^2 \\ -\varepsilon_2^1 & -\varepsilon_2^3 & \varepsilon_2^2 \end{bmatrix}.$$

Эти преобразования позволяют записать асимптотические уравнения с вхождением в них всех требуемых компонент. Например, при повороте вокруг оси Ox_3 уравнения будут содержать неизвестные ε_1^j и μ_2^j .

5. Результаты вычислений

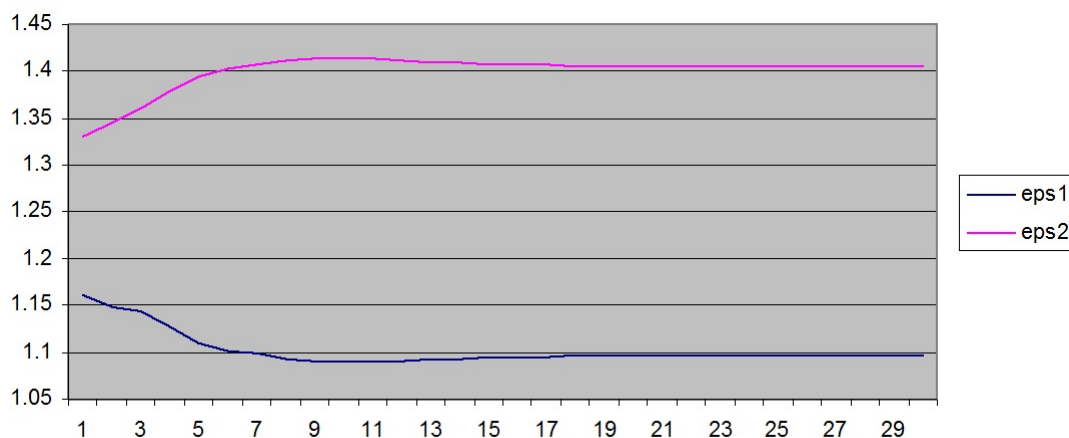
На приведенных ниже графиках представлены результаты восстановления диэлектрической проницаемости для тел, имеющих сложную геометрическую форму. На рисунке 5.1 изображено неоднородное тело — первая половина тела, изображенная светло серым цветом, имеет проницаемость $\hat{\varepsilon} = 1.1\hat{I}$, а вторая половина тела — проницаемость $\hat{\varepsilon} = 1.4\hat{I}$. Обе части тела представляют собой прямоугольные параллелепипеды с прямоугольными отверстиями, ориентированными вдоль оси Ox_3 и равноотстоящими от осей Ox_1 и Ox_2 . На рисунке 5.2 представлен график восстановления диэлектрической проницаемости тела по коэффициенту прохождения — вычисления производились при волновых числах $k_0 = 1.6$ и $k_0 = 1.7$. Начальное приближение диэлектрической проницаемости каждой половины тела равнялось $\hat{\varepsilon} = 1.2\hat{I}$, и $\hat{\varepsilon} = 1.3\hat{I}$ соответственно.

На рисунке 5.4 представлены результаты расчетов для тела, изображенного на рисунке 5.3, и характеризующего проницаемостями $\hat{\varepsilon} = 1.1\hat{I}$ и $\hat{\varepsilon} = 1.6\hat{I}$. Вычисления производились при волновых числах $k_0 = 1.6$ и $k_0 = 1.7$. Начальное приближение диэлектрической проницаемости каждой половины тела равнялось $\hat{\varepsilon} = 1.2\hat{I}$, и $\hat{\varepsilon} = 1.5\hat{I}$ соответственно.



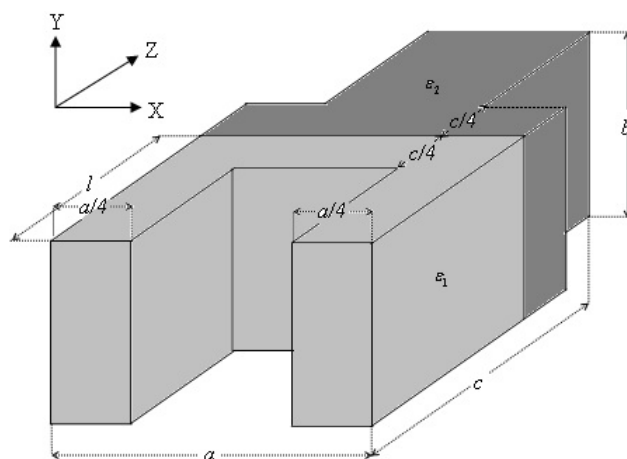
Р и с у н о к 5.1

Форма тела: $a=2$, $b=1$, $c=2$, $l=1$



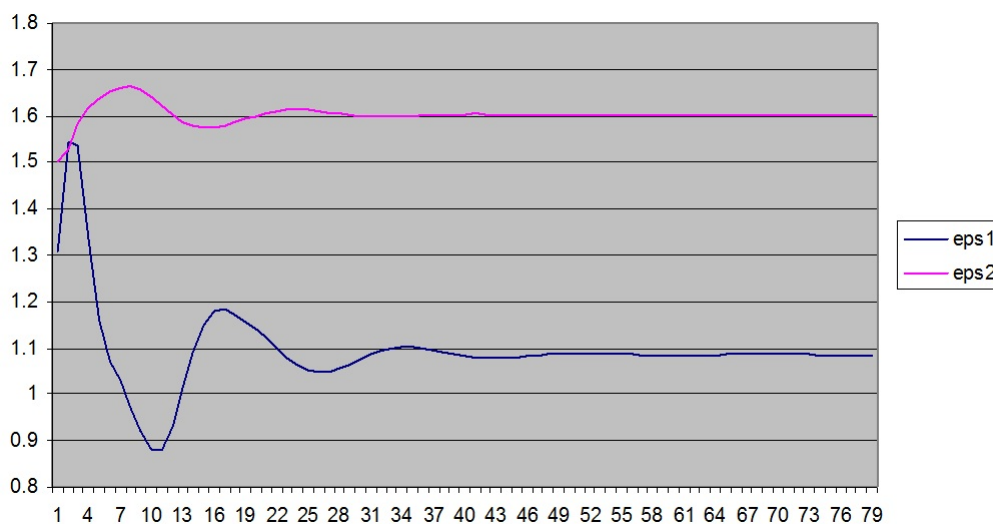
Р и с у н о к 5.2

График восстановления диэлектрической проницаемости



Р и с у н о к 5.3

Форма тела: $a=2$, $b=1$, $c=2$, $l=1$



Р и с у н о к 5.4

График восстановления диэлектрической проницаемости

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов Ю.Г., “О существовании и единственности решений обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2009, № 1, 11–24.
2. Смирнов Ю.Г., Медведик М.Ю., Васюнин Д.И., “Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2009, № 3, 71–87.

3. Деревянчук Е. Д., “Решение обратной задачи определения диэлектрической проницаемости диафрагмы в волноводе”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2011, № 4, 36–44.
4. Самохин А. Б., *Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии*, Радио и Связь, М., 1998.
5. Марков Г. Т., Панченко Б. А., “Тензорные функции Грина прямоугольных волноводов и резонаторов”, *Известия Вузов СССР. Радиотехника*, 1966, № 1, 34–41.
6. Вайнштейн Л. А., *Электромагнитные волны*, Советское радио, М., 1957, 336 с.

Solving the inverse electromagnetic diffraction problem in rectangular waveguide using the method of asymptotic integral equations

© А. А. Tsupak³, М. Yu. Medvedik⁴

Abstract. Inverse electromagnetic diffraction problem on anisotropic heterogeneous dielectric body in rectangular waveguide is considered. Theorem considering Green's tensor asymptotic behavior is proved. The system of asymptotic integral equations for electromagnetic field is obtained. Rotation method for tensor permittivity and permeability determination is described. Numerical results

Key Words: inverse electromagnetic diffraction problem, tensor permittivity and permeability tensors, tensor Green's function, asymptotic equations, rotation method

³ Associate professor, sub-department of mathematics and supercomputer modelling, Penza State University; altsupak@yandex.ru

⁴ Associate professor, sub-department of mathematics and supercomputer modelling, Penza State University; _medv@mail.ru

УДК 517.95

О разрешимости смешанной задачи для линейного парабола-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

© Т. К. Юлдашев¹

Аннотация. В данной работе рассматриваются вопросы однозначной разрешимости смешанной задачи для линейного парабола-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в бесконечной полосе.

Ключевые слова: смешанная задача, уравнение смешанного типа, интегро-дифференциальное уравнение, однозначная разрешимость, вырожденные ядра

В области $D \equiv D^+ \cup D^-$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма смешанного типа

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \int_0^T K_1(t, s) \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2} ds + f_1(t, x), & (t, x) \in D^+, \\ \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \int_{-T}^0 K_2(t, s) \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2} ds + f_2(t, x), & (t, x) \in D^- \end{cases} \quad (1.1)$$

с условиями

$$u(T, x) = \varphi_1(x), \quad u(-T, x) = \varphi_2(x), \quad u(+0, x) = u(-0, x), \quad x \in R, \quad (1.2)$$

$$u(t, 0) = \begin{cases} \varphi_1(0) - M_1 \int_t^T a_1(s) ds - \int_t^T f_1(s, 0) ds, & t \in D_T^+, \\ \varphi_1(0) + \varphi_2(0)(t + T) + N_1 \int_{-T}^t (t - s) a_2(s) ds + \\ + \int_{-T}^t (t - s) f_2(s, 0) ds, & t \in D_T^-, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$u_x(t, 0) = \begin{cases} \varphi_1'(0) - M_2 \int_t^T a_1(s) ds - \int_t^T f_{1x}(s, 0) ds, & t \in D_T^+, \\ \varphi_1'(0) + \varphi_2'(0)(t + T) + N_2 \int_{-T}^t (t - s) a_2(s) ds + \\ + \int_{-T}^t (t - s) f_{2x}(s, 0) ds, & t \in D_T^-, \end{cases} \quad (1.4)$$

где $f_i(t, x) \in C^{0,2}(D)$, $\varphi_i(x) \in C^2(R)$, $K_i(t, s) = a_i(t) \cdot b_i(s)$, $i = 1, 2$, $a_1(t), b_1(s) \in C(D_T^+)$, $a_2(t), b_2(s) \in C(D_T^-)$, M_i, N_i – заданные постоянные, $i = 1, 2$, $D^+ \equiv D_T^+ \times R$, $D^- \equiv D_T^- \times R$, $D_T^+ \equiv [0, T]$, $D_T^- \equiv [-T, 0]$, $R \equiv (-\infty, \infty)$, $0 < T < \infty$.

Отметим, что изучению дифференциальных уравнений смешанного типа посвящено много работ (см., напр. [1] – [4]). Но, изучению интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа посвящено сравнительно мало. Интегро-дифференциальные уравнения имеют особенностей в вопросе однозначной разрешимости [5], [6]. В работе [7] изучена

¹ Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursunbay@rambler.ru.

краевая задача для парабола-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в прямоугольнике.

В данной работе рассматриваются вопросы однозначной разрешимости смешанной задачи для линейного парабола-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в бесконечной полосе. При этом предполагается, что интегральные ядра у заданных уравнений - вырожденные.

Под решением задачи (1.1)-(1.4) в области $D \equiv D^+ \cup D^-$ понимается функция $u(t, x)$, которая в областях D^+ и D^- является регулярным решением соответствующего уравнения и удовлетворяет заданным условиям (1.2)-(1.4).

Сначала рассматривается первое уравнение из (1.1) в области D^+

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \int_0^T K_1(t, s) \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2} ds + f_1(t, x), \quad (t, x) \in D^+. \quad (1.5)$$

Используется метод интегральных уравнений Фредгольма с вырожденными ядрами. При помощи обозначения

$$c_1(x) = \int_0^T b_1(s) \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2} ds \quad (1.6)$$

интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма (1.5) перепишется в простейшем виде

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a_1(t)c_1(x) + f_1(t, x), \quad (t, x) \in D^+.$$

С учетом условия (1.2) интегрирование последнего равенства по t дает

$$u(t, x) = \varphi_1(x) - c_1(x) \int_t^T a_1(s) ds - \int_t^T f_1(s, x) ds, \quad (t, x) \in D^+. \quad (1.7)$$

Теперь определим $c_1(x)$ в (1.7). Дифференцируя (1.7) два раза по x , получаем

$$u_x(t, x) = \varphi_1'(x) - c_1'(x) \int_t^T a_1(s) ds - \int_t^T f_{1x}(s, x) ds, \quad (t, x) \in D^+, \quad (1.8)$$

$$u_{xx}(t, x) = \varphi_1''(x) - c_1''(x) \int_t^T a_1(s) ds - \int_t^T f_{1xx}(s, x) ds, \quad (t, x) \in D^+. \quad (1.9)$$

Подстановка (1.9) в (1.6) дает следующее дифференциальное уравнение относительно $c_1(x)$

$$c_1(x) = \int_0^T b_1(s) \left[\varphi_1''(x) - c_1''(x) \int_s^T a_1(\theta) d\theta - \int_s^T f_{1xx}(\theta, x) d\theta \right] ds$$

или

$$c_1(x) = -A \cdot c_1''(x) + F_0(x), \quad (1.10)$$

где

$$A = \int_0^T b_1(s) q_1(s) ds, \quad q_1(t) = \int_t^T a_1(s) ds,$$

$$F_0(x) = \varphi_1''(x) \int_0^T b_1(s) ds - \int_0^T b_1(s) \int_s^T f_{1xx}(\theta, x) d\theta ds.$$

Пусть

$$A = \int_0^T b_1(s) q_1(s) ds > 0. \quad (1.11)$$

Тогда уравнение (1.10) запишется в виде

$$c_1''(x) + B \cdot c_1(x) = F(x), \quad (1.12)$$

где $B = A^{-1}$, $F(x) = B \cdot F_0(x)$.

Решая дифференциальное уравнение (1.12) методом вариации произвольных постоянных, получаем

$$c_1(x) = D_1 \cos \mu x + D_2 \sin \mu x + \frac{1}{\mu} \int_0^x F(y) Q(x, y) dy, \quad (1.13)$$

где $Q(x, y) = \sin \mu(x - y)$, $\mu = \sqrt{B}$, коэффициенты D_i подлежат определению, $i = 1, 2$.

Из (1.13) имеем

$$c_1(0) = D_1, \quad c_1'(0) = \mu D_2. \quad (1.14)$$

С учетом (1.14) из (1.7) и (1.8) получаем, что

$$u(t, 0) = \varphi_1(0) - D_1 \int_t^T a_1(s) ds - \int_t^T f_1(s, 0) ds, \quad (1.15)$$

$$u_x(t, 0) = \varphi_1'(0) - \mu D_2 \int_t^T a_1(s) ds - \int_t^T f_{1x}(s, 0) ds. \quad (1.16)$$

Сравнение соотношений (1.15) и (1.16) с заданными условиями (1.3) и (1.4) дает

$$D_1 = M_1, \quad D_2 = \frac{M_2}{\mu}.$$

Итак, функция (1.13) принимает вид

$$c_1(x) = M_1 \cos \mu x + \frac{M_2}{\mu} \sin \mu x + \frac{1}{\mu} \int_0^x F(y) Q(x, y) dy. \quad (1.17)$$

Подстановка (1.17) в (1.7) дает

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \varphi_1(x) + q_1(t) \left\{ M_1 \cos \mu x + \frac{M_2}{\mu} \sin \mu x + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\mu} \int_0^x F(y) Q(x, y) dy \right\} - \int_t^T f_1(s, x) ds, \quad (t, x) \in D^+ \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
u(t, x) = & \varphi_1(x) - \int_t^T f_1(s, x) ds - \\
& - q_1(t) \left\{ M_1 \cos \mu x + \frac{M_2}{\mu} \sin \mu x + \mu \int_0^T b_1(s) ds \int_0^x \varphi_1''(y) Q(x, y) dy - \right. \\
& \left. - \mu \int_0^x Q(x, y) \int_0^T b_1(s) \int_s^T f_{1yy}(\theta, y) d\theta ds dy \right\}, (t, x) \in D^+,
\end{aligned} \quad (1.18)$$

где $Q(x, y) = \sin \mu(x - y)$, $\mu = \sqrt{B}$, $A = \int_0^T b_1(s) q_1(s) ds$, $q_1(t) = \int_t^T a_1(s) ds$.

Итак, в области D^+ решение уравнения (1.5) при соответствующих условиях (1.2)-(1.4) имеет вид (1.18).

Теперь рассмотрим второе уравнение из (1.1) в области D^-

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \int_{-T}^0 K_2(t, s) \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2} ds + f_2(t, x), (t, x) \in D^-. \quad (1.19)$$

Пусть

$$\bar{A} = \int_{-T}^0 b_2(s) q_2(s) ds > 0, \quad (1.20)$$

где $q_2(t) = \int_{-T}^t a_2(s) ds$.

Тогда, решая уравнения (1.19) в области D^- аналогичным образом, получим его общее решение в следующем виде

$$\begin{aligned}
u(t, x) = & E_1(x) + E_2(x)(t + T) + \int_{-T}^t (t - s) f_2(s, x) ds + \\
& + q_2(t) \left\{ N_1 \operatorname{ch} \nu x + \frac{N_2}{\nu} \operatorname{sh} \nu x - \nu \int_{-T}^0 b_2(s) \int_0^x \bar{Q}(x, y) (E_1''(y) + E_2''(y)(s + T)) ds dy - \right. \\
& \left. - \nu \int_0^x \bar{Q}(x, y) \int_{-T}^0 b_2(s) \int_{-T}^s (s - \theta) f_{2yy}(\theta, y) d\theta ds dy \right\}, (t, x) \in D^-,
\end{aligned} \quad (1.21)$$

где $E_i(x)$ – произвольные функции, которые подлежат определению, $i = 1, 2$, $\bar{Q}(x, y) = \operatorname{sh} \nu(x + y) + \operatorname{sh} \nu(x - y)$, $\nu = \sqrt{A^{-1}}$, $\bar{A} = \int_{-T}^0 b_2(s) q_2(s) ds$, $q_2(t) = \int_{-T}^t a_2(s) ds$.

Используя условие (1.2), из (1.18) и (1.21) получаем

$$u(-T, x) = \varphi_2(x) = E_1(x), \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned}
u(+0, x) = & \varphi_1(x) - \int_0^T f_1(s, x) ds - \\
& - q_1(0) \left\{ M_1 \cos \mu x + \frac{M_2}{\mu} \sin \mu x + \mu \int_0^T b_1(s) ds \int_0^x \varphi_1''(y) Q(x, y) dy - \right. \\
& \left. - \mu \int_0^x Q(x, y) \int_0^T b_1(s) \int_s^T f_{1yy}(\theta, y) d\theta ds dy \right\}, \quad (1.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(-0, x) = & \varphi_2(x) + T \cdot E_2(x) - \int_{-T}^0 s f_2(s, x) ds + \\
& + q_2(0) \left\{ N_1 \operatorname{ch} \nu x + \frac{N_2}{\nu} \operatorname{sh} \nu x - \nu \int_{-T}^0 b_2(s) \int_0^x \overline{Q}(x, y) \left(\varphi_2''(y) + E_2''(y)(s + T) \right) ds dy - \right. \\
& \left. - \nu \int_0^x \overline{Q}(x, y) \int_{-T}^0 b_2(s) \int_{-T}^s (s - \theta) f_{2yy}(\theta, y) d\theta ds dy \right\}. \quad (1.24)
\end{aligned}$$

В силу того, что $u(+0, x) = u(-0, x)$, из (1.23) и (1.24) придем к интегро-дифференциальному уравнению относительно неизвестного коэффициента $E_2(x)$:

$$E_2(x) = \Psi(x) + \lambda \int_0^x \overline{Q}(x, y) E_2''(y) dy, \quad (1.25)$$

где

$$\begin{aligned}
\Psi(x) = & \frac{1}{T} \left\{ \Phi(x) - \varphi_2(x) + \int_{-T}^0 s f_2(s, x) ds - q_2(0) \left[N_1 \operatorname{ch} \nu x + \frac{N_2}{\nu} \operatorname{sh} \nu x - \right. \right. \\
& - \nu \int_{-T}^0 b_2(s) \int_0^x \overline{Q}(x, y) \varphi_2''(y) ds dy - \\
& \left. \left. - \nu \int_0^x \overline{Q}(x, y) \int_{-T}^0 b_2(s) \int_{-T}^s (s - \theta) f_{2yy}(\theta, y) d\theta ds dy \right] \right\},
\end{aligned}$$

$\Phi(x)$ определяет правую часть (1.23), $\lambda = \nu \int_{-T}^0 b_2(s)(s + T) ds$.

Поскольку $\Psi(x)$ и $\overline{Q}(x, y)$ – по x два раза непрерывно дифференцируемые функции, то нетрудно убедиться, что интегро-дифференциальное уравнение (1.25) имеет единственное два раза непрерывно дифференцируемое решение на числовой оси. Это решение находится методом последовательных приближений. При этом итерационный процесс Пикара можно строить следующим образом:

$$E_2^1(x) = \Psi(x), \quad E_2^{k+1}(x) = \Psi(x) + \lambda \int_0^x \overline{Q}(x, y) E_2^{k''}(y) dy, \quad k = 1, 2, \dots$$

Подставляя (1.22) и решение интегро-дифференциального уравнения (1.25) в (1.21), завершим процесс отыскания решения поставленной задачи (1.1)-(1.4).

Таким образом, доказано, что справедлива следующая

Т е о р е м а 1.1. Пусть:

- 1) Выполняются условия (1.11) и (1.20) ;
- 2) $K_i(t, s) = a_i(t) \cdot b_i(s)$, $i = 1, 2$;
- 3) $\max\{|\varphi_i(x)|; |f_i(t, x)|\} < \infty$, $i = 1, 2$;
- 4) $\left| \int_0^x \varphi_1''(y) Q(x, y) dy \right| < \infty$;
- 5) $\left| \int_0^x Q(x, y) f_{1yy}(t, y) dy \right| < \infty$;
- 6) $\left| \int_0^x \overline{Q}(x, y) \left(\varphi_1''(y) + \varphi_2''(y)(t + T) \right) dy \right| < \infty$;
- 7) $\left| \int_0^x \overline{Q}(x, y) f_{2yy}(t, y) dy \right| < \infty$.

Тогда в области D существует единственное решение задачи (1.1)-(1.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А.В., Уравнения смешанного типа, Изд-во АН СССР, М., 1959, 164 с.
2. Джуроев Т. Дж., Сопуев А., Мамажонов М., Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа, Фан, Ташкент, 1986, 220 с.
3. Моисеев Е.И., Уравнения смешанного типа со спектральным параметром, Изд-во МГУ, М., 1988, 152 с.
4. Салахитдинов М.С., Уринов А.К., Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром, Фан, Ташкент, 1997, 165 с.
5. Быков Я.В., О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений, Изд-во Кирг.ГУ, Фрунзе, 1957, 328 с.
6. Иманалиев М., Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем, Илим, Фрунзе, 1974, 352 с.
7. Юлдашев Т.К., "Краевая задача для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений парабола-гиперболического типа второго порядка с максимумами", *Исследования по интегро-дифференц. уравнениям*, **25** (1994), 24–29.

On solvability of mixed value problem for linear parabelo-hyperbolic Fredholm integro-differential equation

© Т. К. Yuldashev²

Abstract. In this paper it is considered the questions of one-value solvability of mixed value problem for linear parabelo-hyperbolic Fredholm integro-differential equation in an infinite strip.

Key Words: mixed value problem, mixed type equation, integro-differential equation, one-value solvability, degenerate kernels

² Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.929

Исследование поведения возмущенной системы дифференциальных уравнений

© С. В. Зубов ¹

Аннотация. В данной статье изучается поведение возмущенной системы при различных возможных возмущениях, или иначе сохраняется ли автоколебательный характер в системах дифференциальных уравнений. Изучается вопрос существования асимптотического автоколебания у систем дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: решение, расстояние, движение, множество, функция, ограничение

Рассмотрим систему

$$\frac{dy_s}{dt} = f_s(y_1, \dots, y_{n+1}), \quad s = 1, \dots, n+1. \quad (1.1)$$

Пусть она имеет периодическое решение

$$y_s = \varphi_s(t), \quad s = 1, \dots, n+1 \quad (1.2)$$

периода 2π . Обозначим через M график этого периодического решения.

О п р е д е л е н и е 1.1. Периодическое решение (2) называется периодическим автоколебанием системы (1), если решение (2) орбитально асимптотически устойчиво по Ляпунову: по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при $\rho(Y_0, M) < \delta$ будет $\rho(Y(t, Y_0), M) < \varepsilon$ при $t \geq 0$ и, кроме того, $\rho(Y(t, Y_0), M) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, где

$$\rho(Y, M) = \inf_{\bar{Y} \in M} \|Y - \bar{Y}\|$$

является расстоянием от точки Y до множества M .

Будем изучать поведение возмущенной системы

$$\frac{dy_s}{dt} = f_s + g_s, \quad s = 1, \dots, n+1, \quad (1.3)$$

при различных возможных возмущениях $g_s = g_s(t, y_1, \dots, y_{n+1})$, $s = 1, \dots, n+1$, а именно, сохраняется ли автоколебательный характер в системах вида (3), иначе говоря, происходит ли затягивание движений этой системы в процесс автоколебания.

Это усложняется тем, что множество M , инвариантное для системы (1), уже не будет в общем случае инвариантным множеством для системы (3).

О п р е д е л е н и е 1.2. Будем говорить, что система (3) имеет асимптотическое автоколебание M , если для любого $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ существует $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что при $\rho(Y_0, M) < \delta$ будет $\rho(Y(t, Y_0, t_0), M) < \varepsilon$ при $t \geq t_0 + T$ и, кроме того, $\rho(Y(t, Y_0, t_0), M) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, где

¹ Доцент, факультет ПМ-ПУ СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

$$Y = Y(t, Y_0, t_0) \quad (1.4)$$

Т е о р е м а 1.2. Пусть 1) все решения (4), начинающиеся в некоторой окрестности множества M , ограничены;

2) существует функция $V(t, y_1, \dots, y_{n+1})$, обладающая свойствами $V \equiv 0$ при $Y \in M$, $V > \alpha > 0$ при $\rho(Y, M) > \beta > 0$, $V \rightarrow 0$ равномерно относительно $t \geq 0$ при $\rho(Y, M) \rightarrow 0$;

3) полная производная функции V в силу системы (3) удовлетворяет условию $\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n+1} (f_s + g_s) \frac{\partial V}{\partial y_s} = W + W_1$, где $W \equiv 0$ при $Y \in M$, $W < -\alpha < 0$ при $\rho(Y, M) > \beta > 0$, $W_1 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ в некоторой ограниченной окрестности, содержащей ограниченное решение.

Тогда множество M является асимптотическим автоколебанием системы (3).

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 10-08-000624.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., *Теория колебаний*, Наука, М., 1981.
2. Zubov B. I., *Лекции по теории колебаний*, Наука, М., 1975.

The investigation of behavior indignant system of differential equations

© S.V. Zubov ²

Abstract. In giving article is learning of behavior indignant system by different possible indignities, or differently is preserves auto oscillation character in systems of differential equations. Is learning the question of existing asymptotical auto oscillation on systems of differential equations.

Key Words: solution, distance, motion, multitude, function, restriction

² Docent, faculty AM-PC SPbGU, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

УДК 517.929

Существование автоколебаний в динамических системах, устойчивых по Лагранжу

© В. И. Зубов¹, И. В. Зубов², А. Ф. Зубова³, О. С. Стрекопытова⁴

Аннотация. В данной статье изучается динамика систем и характер предельного поведения решений.

Ключевые слова: динамическая система, множество, асимптотическая устойчивость, автоколебание, параметр

Пусть исследуемая система описывается динамической системой $f(p, t)$ в ограниченном замкнутом множестве R евклидова пространства E_n .

О п р е д е л е н и е 1.3. Множество $M \subset R$ называется инвариантным по отношению к динамической системе $f(p, t)$, если оно состоит из траекторий этой динамической системы, т.е. из $p \in M$ следует $f(p, I) \subset M$.

О п р е д е л е н и е 1.4. Инвариантное множество $M \subset R$ динамической системы $f(p, t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \rho(p, M) < \delta \Rightarrow \rho(f(p, t), M) < \varepsilon \quad \forall t > 0$.

Если δ к тому же можно выбрать так, что будет выполняться

$$\rho(f(p, t), M) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

то инвариантное множество M называется асимптотически устойчивым.

Согласно терминологии А.М. Ляпунова, устойчивость инвариантного множества M означает устойчивость всех движений $f(p, t)$, где $p \in M$, по отношению к величине $\rho(p, M)$.

О п р е д е л е н и е 1.5. Автоколебанием динамической системы $f(p, t)$ называется инвариантное устойчивое по Ляпунову и асимптотически устойчивое множество M , не имеющее собственного подмножества с такими же свойствами [1].

О п р е д е л е н и е 1.6. Точка $q \in R$ называется ω - предельной точкой движения динамической системы $f(p, t)$, если существует последовательность значений параметра $\{t_k\}: t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ такая, что

$$f(p, t_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} q.$$

Множество ω - предельных точек индивидуального движения $f(p, t)$ обозначим Ω_p . Это множество является инвариантным и связным [2]. В нашем случае, когда траектории всех движений принадлежат ограниченному множеству R , множество Ω_p не пусто для любой точки $p \in R$ [3]. Обозначим Ω_f совокупность всех ω - предельных точек движения $f(p, t)$ при $p \in R$: $\Omega_f = \bigcup_{p \in R} \Omega_p$.

¹ аспирант СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

² профессор СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

³ профессор СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

⁴ аспирант СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Т е о р е м а 1.3. Множество Ω_f является инвариантным, устойчивым по Ляпунову и асимптотически устойчивым множеством динамической системы $f(p, t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество Ω_f является инвариантным, так как представляет собой совокупность инвариантных множеств Ω_p , где точки p принадлежат замкнутому множеству R . Докажем свойство его устойчивости по Ляпунову. Покажем сначала, что $f(p, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} M \quad \forall p \in R$. Действительно [4], для каждого индивидуального движения $f(p, t)$ выполнено

$$\rho(f(p, t), \Omega_p) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Но по свойству метрического расстояния справедливо

$$\rho(f(p, t), \Omega_f) \leq \rho(f(p, t), \Omega_p).$$

Это означает, что по любому $\varepsilon > 0$ можно указать T такое, что при $t > T$ будет выполнено $\rho(f(p, t), \Omega_f) < \varepsilon \quad \forall p \in R$. По свойству непрерывности $f(p, t)$ по своим аргументам по величинам T, ε можно указать величину $\delta > 0$ такую, что при $\rho(p, \Omega_f) < \delta$ будет выполнено $\rho(f(p, t), \Omega_f) < \varepsilon$ при $0 \leq t \leq T$.

Покажем, что найденная величина δ удовлетворяет определению устойчивости по Ляпунову. Действительно, при выполнении условия $\rho(p, \Omega_f) < \delta$ величина $\rho(f(p, t), \Omega_f)$ остается меньше величины ε на интервале $[0, T]$ по свойству интегральной непрерывности и на интервале $(T, +\infty)$ по доказанному выше свойству, из которого следует также асимптотическая устойчивость множества Ω_f .

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Т е о р е м а 1.4. Множество Ω_f содержит автоколебание.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если у Ω_f нет собственного подмножества с установленными свойствами, то оно само является автоколебанием, если есть, то возьмем это подмножество в качестве "подозрительного" на автоколебание. Продолжая данный процесс, можно найти множество, обладающее установленными в теореме 1 свойствами и не имеющее собственного подмножества с указанными свойствами, которое и будет являться автоколебанием.

Из полученного результата следует наличие предельного режима у броуновского движения. Иными словами, совокупность движений в ограниченном множестве имеет предельный режим, однако структура этого предельного режима может быть весьма сложной. Имеющиеся примеры странных аттракторов доказывают это.

Наличие только неустойчивых по отношению к расстоянию между ними движений, принадлежащих предельному режиму, показывает, что в этом случае траектории предельного режима Ω_f будут плотными [4].

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

З а м е ч а н и е 1.1. Следует отметить, что понятие устойчивости и асимптотической устойчивости инвариантного множества подразумевает его изолированность, т.е. что существуют точки пространства, не принадлежащие инвариантному множеству и находящиеся в его достаточно малой окрестности. Если таких точек нет, то и исследование устойчивости инвариантного множества становится бессмысленным. Возможно, что условие следовало бы включить

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. В. Зубов, Н. В. Зубов, М. В. Стрекопытова, *Анализ управляемых систем и равновесных движений*, ООП НИИ Химии, СПб., 2012, 322 с.
2. А. Ф. Зубова, *Математические методы моделирования промышленных процессов и технологий*, СПбГУ, СПб., 2004, 472 с.
3. С. В. Зубов, М. В. Стрекопытова, *Анализ равновесных движений и расчетная устойчивость*, СПбГУ, СПб., 2010, 446 с.
4. А. В. Зубов, С. В. Зубов, *Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений*, ВВМ, СПб., 2011, 323 с.

The existing auto oscillations in dynamics systems is stabilizes on Lagransh

© V.I. Zubov⁵, I.V. Zubov⁶, A.F. Zubova⁷, O.S. Strekopitova⁸

Abstract. In giving article is learning dynamics of systems and character of limiting behavior solutions.

Key Words: dynamical system, multitude, asymptotical stability, auto oscillation, parameter

⁵ Post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

⁶ Lecturer, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

⁷ Professor, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

⁸ Post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

УДК 517.929

Обобщение реберной теоремы

© С. В. Зубов ¹, М. В. Стрекопытова ², О. С. Стрекопытова ³

Аннотация. Работа является продолжением исследований авторов по робастному поведению интервальных семейств полиномов. Доказано обобщение реберной теоремы для аффинных семейств полиномов из класса (n, k) - эквивалентности. Обсуждаются сходство и различия непрерывного и дискретного случаев.

Ключевые слова: семейство полиномов, параллелепипед, реберный полином, мнимая ось, эквивалентность.

Как известно, для интервальных семейств полиномов неопределенными параметрами являются сами коэффициенты полиномов. Здесь рассматривается более сложный случай - аффинное семейство полиномов

$$\tilde{F}(s, Q) = \{F(s, q) = F_0(s) + q_1 F_1(s) + \dots + q_l F_l(s), \quad |q_i| \leq \gamma, i = \overline{1, l}\}. \quad (1.1)$$

с параметрами, изменяющимися в кубе, γ - размах неопределенности коэффициентов,

$$Q = \{q \in R^l : \|q\|_\infty \leq \gamma\}. \quad (1.2)$$

где $\|q\|_\infty$ - норма, $\|q\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq l} |q_i|$.

Заметим, что Q может быть параллелепипедом, если $|q_i| \leq \alpha_i \gamma$, α_i - масштабные множители, $\alpha_i > 0$. Однако, заменой $\tilde{q}_i = \frac{q_i}{\alpha_i}$ можно легко свести задачу, где Q - параллелепипед, к задаче, где $\tilde{Q}$ - куб.

О п р е д е л е н и е 1.7. Одномерное семейство вида

$$\{F(s, q) : |q_i| = \gamma, i \neq k, |q_k| \leq \gamma\} \quad (1.3)$$

называется *реберным полиномом*, а *вершинными полиномами* называются полиномы вида $F(s, q)$, $q_i = \pm \gamma$, $i = \overline{1, l}$.

Геометрически вершинные и реберные полиномы соответствуют вершинам и ребрам куба (1.2), т. е. реберный полином "соединяет" два "соседних" вершинных полинома (соответствующих соседним вершинам куба), и всего имеется $l \cdot 2^{l-1}$ реберных полиномов.

О п р е д е л е н и е 1.8. Назовем полином степени n из класса (n, k) - эквивалентности, если у него k корней справа, а $n - k$ слева от мнимой оси с учетом кратностей.

Т е о р е м а 1.5. Если полиномы с комплексными коэффициентами $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ принадлежат классу (n, k) - эквивалентности, то для принадлежности этому классу линейного политопа $\alpha \varphi_1(s) + (1 - \alpha) \varphi_2(s)$, $\alpha \in [0, 1]$ не пересекал отрицательную вещественную полуось. Очевидно что, при $k = 0$ получим известный критерий устойчивости линейного политопа [2].

¹ Доцент, факультет ПМ-ПУ СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

² Доцент, факультет ПМ-ПУ СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

³ Аспирант, факультет ПМ-ПУ СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Справедливо следующее утверждение - обобщение реберной теоремы.

Т е о р е м а 1.6. Пусть $\tilde{F}(s, Q)$ - аффинное семейство полиномов (1.1) с вещественными коэффициентами и выполняются условия:

$$\deg F_i(s) \leq F_0(s), \quad i = \overline{1, l}, \quad \deg F_0(s) = n, \quad (1.4)$$

$$\gamma \sum_{i=1}^l |a_n^i| < |a_n^0|, \quad \gamma \sum_{i=1}^l |a_0^i| < |a_0^0|, \quad (1.5)$$

где a_m^i , $i = \overline{1, l}$ - коэффициенты при s^m полиномов $F_i(s)$. Пусть полином $F_0(s)$ из класса (n, k) - эквивалентности. Тогда для принадлежности всего аффинного семейства (1.1) классу (n, k) - эквивалентности необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий:

• либо для любой пары $F_\mu(s)$, $F_\eta(s)$ вершинных полиномов, являющихся концами реберного полинома, для их годографов

$$F_\mu(j\omega) = g_\mu(\omega) + jh_\mu(\omega) \text{ и } F_\eta(j\omega) = g_\eta(\omega) + jh_\eta(\omega)$$

выполняется: если $\omega = \omega_0$ вещественный положительный корень уравнения

$$g_\mu(\omega)h_\eta(\omega) - g_\eta(\omega)h_\mu(\omega) = 0, \quad (1.6)$$

то при $\omega = \omega_0$ выполняется неравенство

$$g_\mu(\omega)g_\eta(\omega) + h_\mu(\omega)h_\eta(\omega) > 0. \quad (1.7)$$

Проверка первого условия - принадлежность линейного политопа (реберного полинома) классу (n, k) - эквивалентности, проводится с помощью графического критерия принадлежности линейного политопа классу (n, k) - эквивалентности, для вещественного случая (теорема 1), для которого робастный критерий Найквиста является частным случаем при $k = 2$ [2], как и реберная теорема об устойчивости аффинного семейства полиномов для приведенной выше теоремы [4].

Д о к а з а т е л ь с т в о . Достаточность. Мы воспользуемся теоремой из [55] (обобщение принципа исключения нуля) с $q^0 = 0$ (это значит, что $F_0(s)$ из класса (n, k) - эквивалентности), тогда неравенства (4-5) гарантируют условие $a_n(q) \neq 0$, $q \in Q$, для старшего коэффициента полинома $F(s, q)$. Остается проверить $0 \notin S(\omega)$. Область $S(\omega)$ имеет вид

$$S(\omega) = \{z \in C : z = F_0(j\omega) + \sum_{i=1}^l q_i F_i(j\omega), \|q\|_\infty \leq \gamma\},$$

т. е. аффинный двумерный образ l - мерного куба. Такой образ является многоугольником, стороны которого - образы ребер куба Q . Поскольку $0 \notin S(0)$ (в силу (1.5)), то может оказаться $0 \in S(\omega)$, лишь если 0 будет принадлежать границе $S(\omega)$ для некоторого $\omega > 0$. Однако это невозможно, так как граница соответствует реберным полиномам, а они по предположению находятся в классе (n, k) - эквивалентности.

Во втором случае, если ноль попал на ребро границы $S(\omega)$ для некоторого $\omega = \omega_0$, $\omega_0 > 0$, то это означало бы, что векторы $(g_\mu(\omega_0), h_\mu(\omega_0))$, $(g_\eta(\omega_0), h_\eta(\omega_0))$ являются коллинеарными для какой-то пары (μ, η) , $\mu \notin \eta$ и выполняется равенство из (1.6). Но, так как эти векторы разнонаправлены, то неравенство (1.7) было бы нарушено.

Необходимость очевидна, так как из принадлежности аффинного семейства классу (n, k) - эквивалентности следует принадлежность реберных полиномов этому же классу. Второе условие следует из того, что ребра границы множества $S(\omega)$ не содержат нуля, что означает отсутствие разнонаправленных пар векторов $(g_\mu(\omega), h_\mu(\omega))$ и $(g_\eta(\omega), h_\eta(\omega))$ при некотором $\omega_0 > 0$. Хотя ребра $S(\omega)$ могут пересекать мнимую и вещественную оси комплексной плоскости и при некоторых ω_0 равенство в (1.6) может выполняться.

Доказательство закончено.

Замечание 1.2. При $k = 0$ из теоремы 1.6. получим реберную теорему для аффинного семейства полиномов с вещественными коэффициентами.

Обобщение реберной теоремы (теорема 1.6.) позволяет получить эффективную формулировку принадлежности аффинного семейства классу (n, k) - эквивалентности, если число l неопределенных параметров мало. В этом случае следует проверить все реберные полиномы. Они представляют собой однопараметрические семейства вида $\alpha M(s) + (1 - \alpha)N(s)$ (где $0 \leq \alpha \leq 1$ и $M(s)$, $N(s)$ - два соседних вершинных полинома), и в соответствии с обобщенным критерием Найквиста (теорема 1.5.), роль точки -1 здесь играет $(1 - \alpha)/\alpha$ их принадлежность тому же классу (n, k) - эквивалентности равносильна тому, что полиномы $M(s)$, $N(s)$ из класса (n, k) - эквивалентности, а годограф $G(j\omega) = M(j\omega)/N(j\omega)$ не пересекает отрицательную вещественную полуось. Действительно,

$$\begin{aligned} \Delta \text{Arg}(\alpha M(j\omega) + (1 - \alpha)N(j\omega)) &= \\ &= \Delta \text{Arg}N(j\omega) + \Delta \text{Arg}\left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} + \frac{M(j\omega)}{N(j\omega)}\right) = \frac{\pi}{2}(n - 2k). \end{aligned}$$

Так как $\Delta \text{Arg}N(j\omega) = \frac{\pi}{2}(n - 2k)$, то $\Delta \text{Arg}((1 - \alpha)/\alpha + W(j\omega)) = 0$. Однако, если l велико, то число таких проверок значительно (даже для $l = 5$ нужно проверить $l \cdot 2^{l-1} = 80$ реберных полиномов).

Пусть аффинное семейство строится на базе полиномов $F_i(s)$ с комплексными коэффициентами, а множество параметров Q , $Q \in R^l$. Тогда имеет место обобщение теоремы 1.6. с почти той же формулировкой, если добавить, что все $F_i(s)$ - полиномы с комплексными коэффициентами. Кроме того, в условиях (6-7) надо рассматривать частоты ω_0 , $\omega \in (-\infty, +\infty)$. В доказательстве применяются обобщение принципа исключения нуля или обобщение критерия Михайлова для семейств полиномов с комплексными коэффициентами.

Замечание 1.3. Построить критерии принадлежности аффинных семейств полиномов с комплексными параметрами, т. е. $q = (q_1, q_2, \dots, q_l)^T$, $q \in Q$, $Q \in C^l$ не удастся даже в простейшем случае - исследование робастной устойчивости такого семейства ($k = 0$).

Дело в том, что граница множества $S(\omega)$ в этом случае состоит из кусков кривых и множество $S(\omega)$ может быть невыпуклым.

Для аффинного семейства дискретных полиномов верны реберная теорема для исследования робастной устойчивости и ее обобщение (теорема 1.6.) для исследования неустойчивости в соответствующих формулировках. Кроме того, максимальный размах неопределенности принадлежности аффинного семейства классу (n, k) - эквивалентности можно

найти не только графически, но и по формулам из [4], аналогичным формулам для интервальных дискретных семейств (множество $S(\omega)$ для аффинного семейства является $2l$ -угольником, где множество параметров $q \in Q$, $Q \subset R^l$).

Таким образом, как в случае исследования на робастную устойчивость аффинных семейств полиномов, так и в случае их проверки на робастную неустойчивость эти полиномы можно исследовать с помощью аналитических и графических критериев, как в непрерывном, так и в дискретных случаях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-00624).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блистанова Л.Д., Зубов И.В., Зубов Н.В., Северцев Н.А., *Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа*, ООП НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2002, 119 с.
2. Жабко А.П., Прасолов В.Л., Харитонов В.Л., *Сборник задач и упражнений по теории управления: стабилизация программных движений*, Высшая школа, М., 2003, 285 с.
3. Зеленков Г.А., *Робастная устойчивость в системах первого приближения. Вопросы теории безопасности и устойчивости систем*, ВЦ РАН, М., 2005.
4. Поляк Б.Т., Щербаков П.С., *Робастная устойчивость и управление*, Наука, М., 2002, 303 с.
5. Постников М.М., *Устойчивые многочлены*, Наука, М., 1981, 176 с.
6. Стрейц В., *Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления*, Наука, М., 1985.
7. Marden M., *Geometry of polynomials*, amer. Math. Soc., RI, 1966.

Generalization of rib theorem

© S. V. Zubov ⁴, M. V. Streopitova ⁵, O. S. Streopitova ⁶

Abstract. The work is appears continuation of investigations authors on robust behavior interval families of polynoms. Is proofs summarization of rib theorem for affine families polynoms from class (n, k) - equivalent. Is discusses resemblance and distinctions in breaking off and discreet cases.

Key Words: the families of polynoms, parallelepiped, rib polynomial, mistakes axis, equivalent

⁴ Docent, faculty AM-PC SPbGU, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

⁵ Docent, faculty AM-PC SPbGU, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

⁶ Post-graduate, faculty AM-PC SPbGU, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе $\TeX$ (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой `\input` в преамбуле). Например,

```
\input{voskresensky.tex}
```

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду `\headerRus`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность,  
место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, го-  
род; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду `\headerEn`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место рабо-  
ты, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-  
mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerRus`.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром:

```
\sect{Заголовок}
```

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defn**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т.д.

Для вставок букв φ и ε необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами `\px{i}` и `\pxtog{u}{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`, `\textit`. Например, для вставок формул Γ_i , $\mathcal{D}_i$ в текст статьи необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{\mathcal{D}}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}`

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}` {подпись_под_рисунком}

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия}` {подпись_под_рисунком}

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение **thebibliography**. Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате **AMSBIB**. Подробности смотрите в прилагаемом файле *amsbib.pdf*. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл *svmobib.sty* (прилагается).

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд `\Rbibitem{метка для ссылки на источник}`.

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcite` (параметры см. в преамбуле).

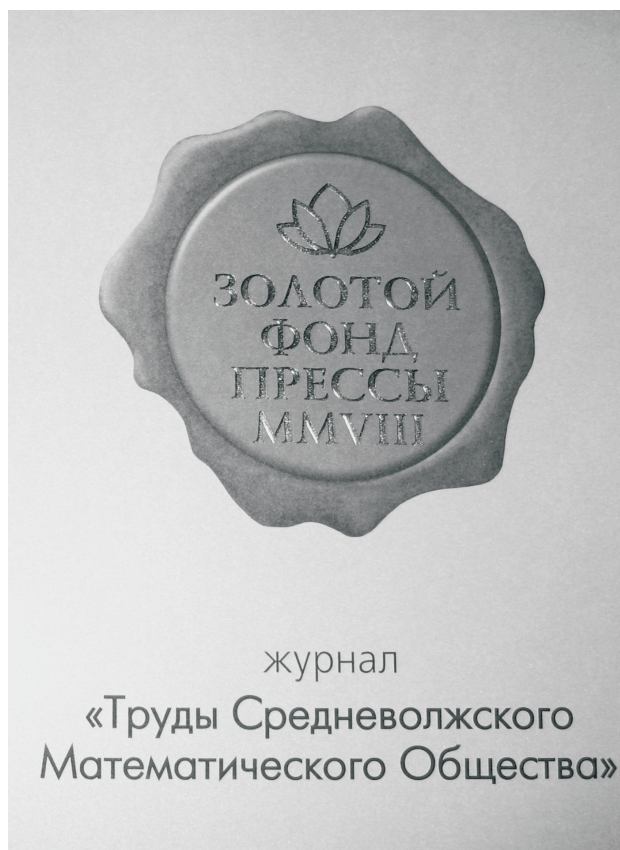
Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи **MiKTeX 2.9**, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

Алфавитный указатель

Абзалилова Л. Р.	35	Литвинов В. Л.	112
Анкилов А. В.	49	Логинов Б. В.	8, 100
Березовская Ю. В.	58	Медведев В. С.	21
Блистанова Л. Д.	41	Медведик М. Ю.	148
Вельмисов П. А.	49	Починка О. В.	120
Воробьев В. А.	58	Рахимов Д. Г.	126
Гринес В. З.	21	Романов А. А.	120
Губайдуллин И. М.	70	Руссак Ю. Б.	8
Еникеев М. Р.	70	Рябова Е. А.	89
Жужома Е. В.	21	Рязанцева И. П.	29
Зубов В. И.	41, 166	Салахов И. Р.	133
Зубов И. В.	41, 166	Спивак С. И.	35, 133
Зубов С. В.	164, 169	Стрекопытов С. А.	41
Зубова А. Ф.	166	Стрекопытова М. В.	41, 169
Кантор О. Г.	133	Стрекопытова О. С.	166, 169
Капкаева С. Х.	76	Судаков В. А.	49
Карасев А. В.	140	Таланов В. М.	140
Ким-Тян Л. Р.	8	Таланов М. В.	140
Кочнев А. Ю.	58	Треногин В. А.	173
Кузенков О. А.	89	Цупак А. А.	148
Кяшкин А. А.	100	Шаманаев П. А.	100
Левченко Ю. А.	108	Шиловская А. А.	108
Юлдашев Т. К.	158		

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Уважаемые читатели и подписчики!

Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.

Подписной индекс журнала в каталоге Российской прессы «Почта России» – 38278.

Для заметок

Для заметок