ЖЭТФ, 2015, том 148, вып. 6 (12), стр. 1092–1097

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ СОЛИТОНЫ В СРЕДАХ С ИНДУЦИРОВАННЫМ РАССЕЯНИЕМ НА ЗАТУХАЮЩИХ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ВОЛНАХ И НЕОДНОРОДНЫМИ ДИСПЕРСИЕЙ И НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Н. В. Асеева, Е. М. Громов, В. В. Тютин *

Национальный исследовательский университет «Высшая Школа Экономики»
603155, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 4 июля 2015 г.

Рассмотрена динамика солитонов высокочастотного поля в рамках расширенного неоднородного нелинейного уравнения Шредингера с индуцированным рассеянием на затухающих низкочастотных волнах (псевдоиндуцированное рассеяние). Данное рассеяние является пространственным аналогом хорошо известного в оптике индуцированного рассеяния Рамана на временных пространственно однородных затухающих низкочастотных модах. Учтены также пространственные неоднородности линейной дисперсии второго порядка и кубичной нелинейности. Показано, что смещение пространственного спектра волновых чисел солитона в длинноволновую область, обусловленное псевдоиндуцированным рассеянием, компенсируется сдвигом спектра волновых чисел солитона в коротковолновую область, обусловленным возрастающей по координате нелинейностью и убывающей дисперсией. Полученные аналитически результаты подтверждаются численным счетом.

DOI: 10.7868/S0044451015120044

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к динамике высокочастотных (ВЧ) солитонов (локализованных стационарных волновых пакетов) вызывает в настоящее время значительный интерес благодаря способности солитонов распространяться на большие расстояния с сохранением своей формы, т. е. переносить энергию и информацию с незначительными потерями. Солитонные решения играют существенную роль в описании распространения интенсивных волновых полей различной природы в средах с дисперсией: оптических импульсов и пучков в волоконных линиях связи и волноводах, электромагнитных и ленгмюровских волн в плазме, поверхностных волн на глубокой воде и т. д. [1–7]. В последнее время вырос интерес к солитонам и в плазмонике [8–10].

Динамика протяженных волновых ВЧ-пакетов достаточно хорошо описывается вторым приближением теории дисперсии нелинейных волн. Основным модельным уравнением этого приближения является нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) [11, 12], учитывающее линейную дисперсию второго порядка и кубичную нелинейность. Солитонное решение в этом случае возникает в результате баланса дисперсионного расплывания и нелинейного сжатия волнового пакета.

Корректное моделирование динамики интенсивных волновых ВЧ-пакетов малой протяженности требует использования более высокого (третьего) порядка теории дисперсии нелинейных волн [1], в котором учитываются эффекты высшего (третьего) порядка, связанные с нелинейной дисперсией [13], вынужденным рассеянием Рамана [14–16] и линейной дисперсией третьего порядка. Модельным уравнением третьего приближения является расширенное НУШ [16–20]. Солитонные решения в рамках расширенного НУШ, включающего дисперсию третьего порядка и нелинейную дисперсию (НУШ-3), были найдены в работах [21–28]. В частности, в [21–23] найдено солитонное решение, существующее при произвольных соотношениях величин дисперсии третьего порядка и нелинейной дисперсии одного знака. Существование данных солитонов обусловлено балансом нелинейной диспер-

* E-mail: vtyutin@hse.ru

сии и линейной дисперсии третьего порядка. Полученное солитонное решение является единственно устойчивым нелинейным локализованным образованием НУШ-3: при существовании данного решения произвольное начальное распределение в рамках НУШ-3 эволюционирует к одному или нескольким солитонам различной амплитуды плюс линейные дисперсионные волны [23]. Стационарные решения с нелинейной фазовой модуляцией получены в рамках расширенного НУШ с вынужденным рассеянием и нелинейной дисперсией [29, 30]: в [29] найдены решения в виде волн перепада, в [30] в виде нелинейных локализованных волновых пакетов (солитонов). Эти решения возникают в результате баланса эффектов нелинейной дисперсии и вынужденного рассеяния. Для локализованных нелинейных волновых пакетов (солитонов) вынужденное рассеяние приводит к смещению временного спектра солитона в область малых частот [14–16], что в итоге приводит к дестабилизации и разрушению солитона. В [31] показана возможность стабилизации временного спектра коротких оптических солитонов при распространении в волоконно-оптических линиях при компенсации вынужденного рассеяния переменными частотными характеристиками импульса. Компенсация эффекта вынужденного рассеяния Рамана излучением из ядра солитона квазилинейных волн рассмотрена в [32]. Компенсация эффектов вынужденного рассеяния в неоднородных средах рассматривалась в нескольких случаях: при периодически изменяемой дисперсии второго порядка [33, 34], при смещении нулевой точки дисперсии [35] и для оптических волокон с убывающей дисперсией [36].

При распространении коротких волновых ВЧ-пакетов электромагнитных или ленгмюровских волн в плазме, поверхностных волн на глубокой стратифицированной жидкости существенным является эффект вынужденного рассеяния при взаимодействии с затухающими низкочастотными (НЧ) волнами. Для плазмы подобными НЧ-волнами являются ионно-звуковые волны, для стратифицированной жидкости — внутренние волны. Модель для описания динамики волновых ВЧ-пакетов с учетом индуцированного рассеяния на диссипативных НЧ-волнах была рассмотрена в работах [37–39]. Данная модель является обобщением хорошо известной захаровской модели взаимодействия ВЧ- и НЧ-волн [40] при учете пространственной неоднородности линейной дисперсии второго порядка ВЧ-волн и кинематической вязкости НЧ-волн. В третьем приближении теории дисперсии нелинейных волн исходная модель сведена к расширенному НУШ, содержащему слагаемое с пространственным аналогом вынужденного рассеяния Рамана (псевдоиндуцированное рассеяние) и пространственную неоднородность дисперсии. Псевдоиндуцированное рассеяние вызывает сдвиг спектра волновых чисел солитона в длинноволновую область, подобно действию рассеяния Рамана при временном описании [1, 13–16] и, подобно ситуации в нелинейных оптических волокнах, приводит к дестабилизации и разрушению солитона. Построенная в работах [37–39] модель также учитывает пространственную неоднородность дисперсии второго порядка. Пространственное уменьшение дисперсии приводит к сдвигу спектра волновых чисел солитона в коротковолновую область и, соответственно, делает возможным компенсировать эффект псевдоиндуцированного рассеяния.

Однако для ряда сред пространственная неоднородность дисперсии сопровождается пространственной неоднородностью коэффициента кубичной нелинейности. Совместное пространственное изменение дисперсии и нелинейности возникает, в частности, при описании динамики интенсивных пакетов ленгмюровских волн в плазме с пространственно неоднородной электронной температурой [41]. Исходной в этом случае является захаровская система взаимодействия ленгмюровских и ионно-звуковых волн при пространственной неоднородности электронной температуры, приводящей к пространственной неоднородности дисперсии ленгмюровских волн и скорости ионно-звуковых волн. Во втором приближении теории дисперсии нелинейных волн исходная система сведена к неоднородному НУШ, в котором дисперсия пропорциональна электронной температуре, а кубичная нелинейность обратно пропорциональна квадратному корню из температуры. Совместное пространственное изменение дисперсии и нелинейности возникает также при распространении интенсивных пакетов поверхностных волн при переменной глубине жидкости [42].

В данной работе исследована динамика волновых ВЧ-пакетов в рамках неоднородного расширенного НУШ, содержащего слагаемые с псевдоиндуцированным рассеянием и пространственно неоднородными дисперсией второго порядка и кубичной нелинейностью. Слагаемое с псевдоиндуцированным рассеянием получено из системы уравнений захаровского типа при учете кинематической вязкости НЧ-волн. Показано, что баланс псевдоиндуцированного рассеяния и пространственно неоднородных дисперсии и нелинейности (при убывании дисперсии и возрастании нелинейности) приводит к стабилизации пространственного спектра волновых чисел солитона. Полученные аналитические результаты хорошо согласуются с результатами численного счета.

2. ОСНОВНОЕ МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим динамику огибающей $U(\xi,t)$ интенсивного ВЧ-поля $U(\xi,t)\exp(-i\omega t)$ в неоднородно диспергирующей среде и с учетом нелинейного взаимодействия с затухающими волновыми НЧ-возмущениями $n(\xi,t)$, обладающими ВЧ-потерями (кинематическая вязкость) и пространственно неоднородной скоростью $V(\xi)$. Здесь ξ — пространственная, а t — временная координата. Исходная система двух эволюционных уравнений для огибающей ВЧ-поля $U(\xi,t)$ и НЧ-возмущений среды $n(\xi,t)$ является модификацией захаровской системы [41, 37–39], обобщенной на случай пространственно неоднородной скорости НЧ-волн:

$$2i\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \xi}\left[q(\xi)\frac{\partial U}{\partial \xi}\right]-nU=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+V(\xi)\frac{\partial n}{\partial \xi}-\nu\frac{\partial^2 n}{\partial \xi^2}=-\frac{\partial(|U|^2)}{\partial \xi}, \tag{2}$$

где $q(\xi)$ — коэффициент линейной дисперсии второго порядка, ν — коэффициент кинематической вязкости НЧ-возмущений. Учет кинематической вязкости НЧ-волн с детальным выводом уравнения, аналогичного (2), приведен в [43] на примере распространения ионно-звуковых волн в плазме. Полагая масштаб неоднородности скорости НЧ-волн $V(\xi)$ много большим характерного масштаба огибающей волнового пакета, в третьем приближении теории дисперсии нелинейных волн нелинейный отклик НЧ-волн на воздействие ВЧ-поля включает в себя слабо нелокальную поправку: $n\approx -|U|^2/V(\xi)-\nu(\partial|U|^2/\partial\xi)/V(0)$. Последнее слагаемое соответствует эффективным ВЧ-потерям НЧ-волн. В результате система (1), (2) сводится к расширенному неоднородному НУШ:

$$2i\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \xi}\left[q(\xi)\frac{\partial U}{\partial \xi}\right]+2\alpha(\xi)U|U|^2+\mu U\frac{\partial(|U|^2)}{\partial \xi}=0, \tag{3}$$

где $\alpha(\xi)=1/(2V(\xi))$ — коэффициент кубичной нелинейности, $\mu=\nu/V(0)$. Последнее слагаемое в (3) является пространственным аналогом вынужденного рассеяния Рамана, хорошо известного во временном представлении.

Уравнение (3) при нулевых граничных условиях на бесконечности $U|_{\xi\to\pm\infty}\to 0$ имеет следующие интегральные соотношения для моментов волнового поля:

$$\frac{dN}{dt}\equiv\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|U|^2d\xi=0, \tag{4}$$

$$2\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K|U|^2d\xi=-\mu\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial(|U|^2)}{\partial\xi}\right]^2d\xi-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{d\xi}\left|\frac{\partial U}{\partial \xi}\right|^2d\xi+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha}{d\xi}|U|^4d\xi, \tag{5}$$

$$N\frac{d\overline{\xi}}{dt}\equiv\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi|U|^2d\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}qK|U|^2d\xi, \tag{6}$$

где $U\equiv|U|\exp(i\phi)$ и $K\equiv\partial\phi/\partial\xi$ — локальное волновое число.

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При аналитическом рассмотрении динамики волнового пакета будем считать масштабы неоднородности дисперсии D_q, нелинейности D_α и локального волнового числа D_K много большими масштаба неоднородности модуля огибающей волнового пакета: $D_{q,\alpha,K}\gg D_{|U|}$. Используя адиабатическое приближение, решение системы (4)–(6) представим в солитоно-подобной форме:

$$U(\xi,t)=A(t)\,\mathrm{sech}\left[\frac{\xi-\overline{\xi}(t)}{\Delta(t)}\right]\times\exp\left[ik(t)\xi-i\int\Omega(t)\,dt\right], \tag{7}$$

где $\Delta(t)=\sqrt{q(\overline{\xi})}/(A(t)\sqrt{\alpha(\overline{\xi})})$, $\Omega(t)=A^2(t)\alpha(\overline{\xi})/2$, $A^2(t)\Delta(t)=\mathrm{const}$, $\overline{\xi}(t)=N^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\xi|U|^2d\xi$ — координата центра масс волнового пакета. С учетом (7) система (4)–(6) сводится к системе двух эволюционных уравнений для свободных параметров волнового пакета:

$$6\frac{dk}{dt}=-\frac{8}{5}\frac{\alpha_0}{q_0}\mu A_0^4Q^3(\overline{\xi})-q'(\overline{\xi})A_0^2Q^2(\overline{\xi})-3q'(\overline{\xi})k^2+2\alpha'(\overline{\xi})A_0^2Q(\overline{\xi}), \tag{8}$$

$$\frac{d\overline{\xi}}{dt}=kq(\overline{\xi}), \tag{9}$$

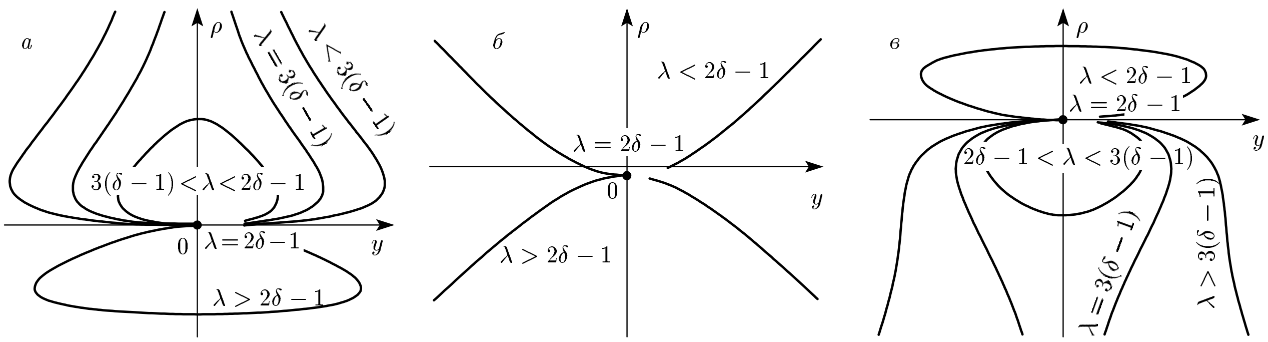

Рис. 1. Первый интеграл (13) на плоскости y, ρ при $y_0 = 0$ и различных δ: *а* — $\delta < 1/2$, *б* — $1/2 \le \delta < 2$, *в* — $\delta > 2$

где

$$Q(\overline{\xi}) \equiv \frac{q_0\alpha(\overline{\xi})}{\alpha_0 q(\overline{\xi})}, \quad \alpha'(\overline{\xi}) = \left(\frac{d\alpha}{d\xi}\right)_{\overline{\xi}}, \quad q'(\overline{\xi}) = \left(\frac{dq}{d\xi}\right)_{\overline{\xi}},$$

$$q_0 = q(0), \quad \alpha_0 = \alpha(0), \quad A_0 = A(0).$$

При

$$\mu = \mu_* \equiv \frac{5q_0\,(2\alpha'(0) - q'(0))}{8\alpha_0 A_0^2} \tag{10}$$

система (8), (9) имеет состояние равновесия, совпадающее с начальными параметрами солитона $k = 0$, $\overline{\xi} = 0$. При $\mu \ne \mu_*$ состояние равновесия отличается от начальных параметров солитона. Для анализа динамики солитонов в неравновесном режиме примем пространственные изменения коэффициентов дисперсии и нелинейности в виде экспоненциальных профилей с различными масштабами неоднородностей:

$$q(\xi) \equiv q_0 \exp\left(\frac{\xi}{D_q}\right), \quad \alpha(\xi) \equiv \alpha_0 \exp\left(\frac{\xi}{D_\alpha}\right). \tag{11}$$

В частности, для оптических волокон экспоненциальные профили коэффициентов дисперсии и нелинейности реализованы экспериментально [44]. С помощью замены переменных $\rho \equiv \overline{\xi}/D_q$, $\tau \equiv \equiv tA_0\sqrt{\alpha_0 q_0}/(\sqrt{3}\,D_q)$ и $y \equiv k\sqrt{3q_0}/(A_0\sqrt{\alpha_0}\,)$ система (8), (9) преобразуется к виду

$$\begin{gathered} 2\frac{dy}{d\tau} = -\lambda e^{3\delta\rho - 3\rho} + (2\delta - 1)e^{2\delta\rho - \rho} - y^2 e^{\rho}, \\ \frac{d\rho}{d\tau} = y e^{\rho}, \end{gathered} \tag{12}$$

где $\delta \equiv D_q/D_\alpha$, $\lambda \equiv 8\mu D_q A_0^2/(5q_0)$. Система (12) имеет состояние равновесия $y = y_* = 0$, $\rho = \rho_* = = (1-\delta)^{-1} \times \ln[\lambda/(2\delta - 1)]$. При $\lambda = 2\delta - 1$, что в исходных переменных соответствует (10), состояние равновесия совпадает с начальными параметрами солитона $y = 0$, $\rho = 0$. При $\delta < 1/2$ и $\delta > 2$ состояние равновесия является центром, а при $1/2 \le \delta \le 2$ — седлом. Первый интеграл системы (12) имеет вид

$$e^{\rho} y^2 + \frac{\lambda}{3(\delta-1)}(e^{3\delta\rho - 3\rho} - 1) + y_0^2[e^{-\rho} - 2] + + 1 - e^{2\delta\rho - \rho} = 0, \tag{13}$$

где $y_0 = y(0)$. На рис. 1 приведен первый интеграл (13) на плоскости y, ρ при начальном условии $y_0 = 0$ и различных значениях δ и λ.

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Рассмотрим численно начальную задачу динамики волнового пакета $U(\xi, t = 0) = \operatorname{sech}\xi$ в рамках (3) при $q(\xi) = e^{\xi/30}$, $\alpha(\xi) = e^{\xi/10}$ и различных значениях μ. Равновесное значение коэффициента псевдоиндуцированного рассеяния из (10) при выбранных параметрах составляет $\mu_* = 5/48$. При численном моделировании уравнения (3) с $\mu = 5/48 \equiv \mu_*$ исходный волновой пакет не меняется во времени (рис. 2).

Отклонение параметра μ от равновесного значения приводит к изменению параметров солитона во времени. Соответствующие пространственно-временные распределения $|U|$ при $\mu = 3/48 \equiv (3/5)\mu_*$ приведены на рис. 3.

На рис. 4 приведены результаты численного счета (сплошные кривые) динамики волнового числа в точке максимума модуля огибающей волнового пакета и аналитические результаты (пунктирные кривые) изменения волнового числа солитона, полученные из решения системы (8), (9), при $q(\xi) = e^{\xi/30}$, $\alpha(\xi) = e^{\xi/10}$ и различных значениях коэффициента μ. Аналитические и численные результаты соответствуют друг другу, что подтверждает корректность этих результатов. Аналогичное соответствие наблю-

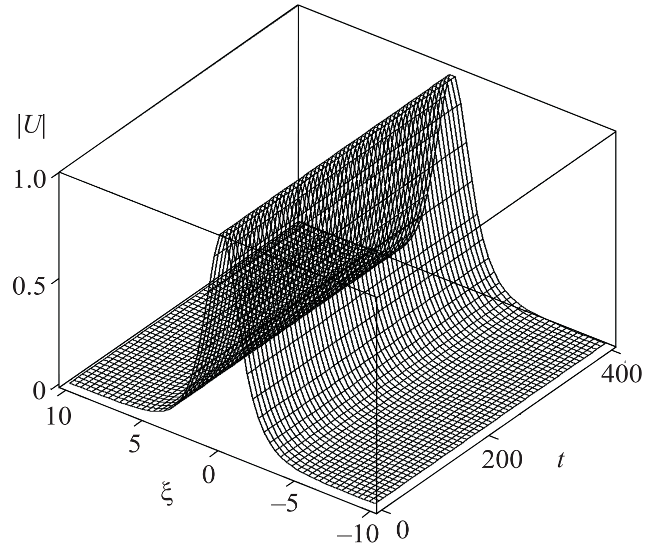

Рис. 2. Численное моделирование динамики модуля огибающей волнового пакета $|U(\xi, t)|$ при $\mu = 5/48 \equiv \mu_*$

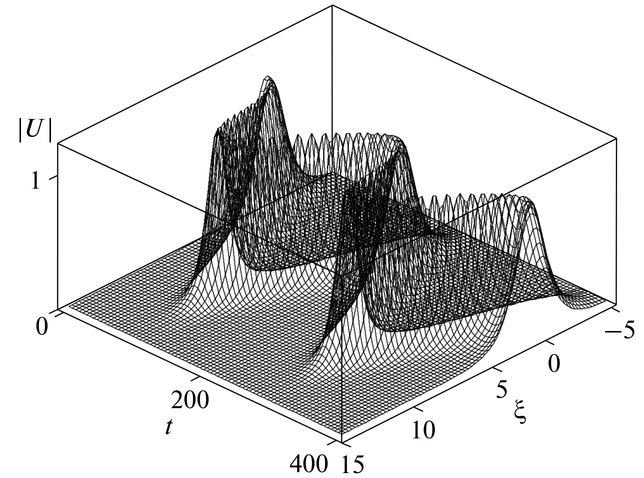

Рис. 3. Численное моделирование динамики огибающей волнового пакета $|U(\xi, t)|$ при $\mu = 3/48 \equiv \equiv (3/5)\mu_*$

дается и при других соотношениях параметров модельного уравнения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована динамика солитонов в рамках расширенного неоднородного НУШ. Модельное уравнение содержит слагаемые с псевдоиндуцированным рассеянием и пространственно неоднородными дисперсией и нелинейностью. Вынужденное рассеяние смещает пространственный спектр волновых чисел солитона в длинноволновую область, а неоднородность дисперсии и нелинейности при определенных соотношениях их градиентов приводит к смещению спектра волновых чисел солитона в коротковолновую область. Солитон в этом случае существует в результате баланса псевдоиндуцированного рассеяния и неоднородных дисперсии и нелинейности. Найдены соотношения параметров среды, при которых параметры солитона не меняются во времени. Полученные аналитические результаты подтверждены численным счетом.

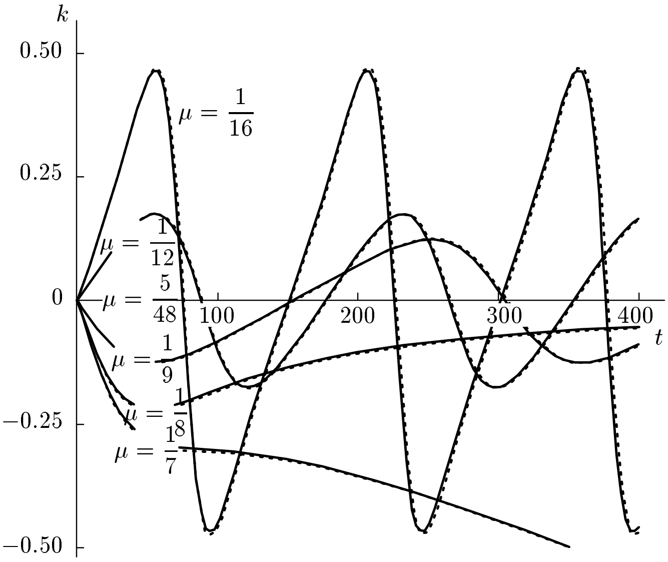

Рис. 4. Результаты численного счета (сплошные кривые) и аналитические результаты (пунктирные кривые) изменения волнового числа солитона во времени при $q(\xi) = e^{\xi/30}$, $\alpha(\xi) = e^{\xi/10}$ и различных μ

В данной работе динамика ВЧ-солитона рассматривалась в пренебрежении членами нелинейной дисперсии и линейной дисперсии третьего порядка. Возможность компенсации разрушающего солитон эффекта псевдоиндуцированного рассеяния с учетом указанных эффектов высших порядков требует отдельного рассмотрения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-02-01919 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Infeld and G. Rowlands, *Nonlinear Waves, Solitons, and Chaos*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).

2. G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optic*, Academic Press, San Diego (2001).

3. J. Yang, *Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis*, Springer, New York (2001).

4. Y. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, San Diego (2003).

5. L. A. Dickey, *Soliton Equation and Hamiltonian Systems*, World Scientific, New York (2005).

6. B. A. Malomed, *Soliton Management in Periodic Systems*, Springer, New York (2006).

7. T. Dauxois and M. Peyrard, *Physics of Solitons*, Cambridge University Press, Cambridge (2006).

8. R. E. Noskov, P. A. Belov, and Yu. S. Kivshar, Phys. Rev. Lett. **108**, 093901 (2012).

9. R. E. Noskov, D. A. Smirnova, and Yu. S. Kivshar, Phys. Engin. Sci. **372**, 20140010 (2014).

10. R. E. Noskov, P. A. Belov, and Yu. S. Kivshar, Opt. Expr. **20**, 2733 (2012).

11. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, ЖЭТФ **34**, 62 (1972).

12. A. Hasegawa and F. Tappert, Appl. Phys. Lett. **23**, 142 (1973).

13. J. R. Oliviera and M. A. Moura, Phys. Rev. E **57**, 4751 (1998).

14. F. M. Mitschke and L. F. Mollenauer, Opt. Lett. **11**, 659 (1986).

15. J. P. Gordon, Opt. Lett. **11**, 662(1986).

16. Y. Kodama, J. Stat. Phys. **39**, 597 (1985).

17. Y. Kodama and A. Hasegawa, IEEE J. Quant. Electron **23**, 510 (1987).

18. C. E. Zaspel, Phys. Rev. Lett. **82**, 723 (1999).

19. B. Hong and D. Lu, Inter. J. Nonlin. Science **7**, 360 (2009).

20. V. I. Karpman, Eur. Phys. J. B **39**, 341 (2004).

21. Е. М. Громов, В. И. Таланов, ЖЭТФ **110**, 73 (1996).

22. E. M. Gromov and V. V. Tyutin, Wave Motion **28**, 13 (1998).

23. E. M. Gromov and V. I. Talanov, Chaos **10**, 551 (2000).

24. M. A. Obregon and Yu. A. Stepanyants, Phys. Lett. A **249**, 315 (1998).

25. M. Scalora, M. Syrchin, N. Akozbek et al., Phys. Rev. Lett. **95**, 013902 (2005).

26. S. C. Wen, Y. Wang, W. Su et al., Phys. Rev. E **73**, 036617 (2006).

27. M. Marklund, P. K. Shukla, and L. Stenflo, Phys. Rev. E **73**, 037601 (2006).

28. N. L. Tsitsas, N. Rompotis, I. Kourakis et al., Phys. Rev. E **79**, 037601 (2009).

29. Y. S. Kivshar and B. A. Malomed, Opt. Lett. **18**, 485 (1993).

30. Е. М. Громов, В. В. Тютин, Изв. вузов, Радиофизика **57**, №4, 311 (2014).

31. B. A. Malomed and R. S. Tasgal, J. Opt. Soc. Amer. B **15**, 162 (1998).

32. F. Biancalama, D. V. Skrybin, and A. V. Yulin, Phys. Rev. E **70**, 011615 (2004).

33. R.-J. Essiambre and G. P. Agraval, J. Opt. Soc. Amer. B **14**, 314 (1997).

34. R.-J. Essiambre and G. P. Agrawal, J. Opt. Soc. Amer. B **14**, 323 (1997).

35. A. Andrianov, S. Muraviev, A. Kim et al., Laser Phys. **17**, 1296 (2007).

36. S. Chernikov, E. Dianov, D. Richardson et al., Opt. Lett. **18**, 476 (1993).

37. E. M. Gromov and B. A. Malomed, J. Plasma Phys. **79**, 1057 (2013).

38. E. M. Gromov and B. A. Malomed, Opt. Comm. **320**, 88 (2014).

39. Н. В. Асеева, Е. М. Громов, В. В. Тютин, Изв. вузов, Радиофизика **56**, №3, 173 (2013).

40. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **35**, 908 (1972).

41. E. M. Gromov and B. A. Malomed, Phys. Scripta **90**, №6, 068021 (2015).

42. А. В. Слюняев, ЖЭТФ **128**, 1061 (2005).

43. Дж. Л. Лем, *Введение в теорию солитонов*, Меркурий-Пресс, Москва (2001).

44. V. A. Bogatyrev, M. M. Bubnov, E. M. Dianov et al., J. Lightwave Tech. **9**, 561 (1991).