Математические труды (Новосибирск) (2006), т. 9, № 1

В. В. Чистяков[1]

Поточечный принцип выбора для функций одной переменной со значениями в равномерном пространстве[2]

Посвящается академику Юрию Григорьевичу Решетняку в связи с его семидесятипятилетним юбилеем

Аннотация: *Для последовательности функций, действующих из подмножества вещественной прямой в хаусдорфово равномерное пространство, представлено новое достаточное условие, которое гарантирует, что эта последовательность содержит поточечно сходящуюся подпоследовательность. Это новое условие гораздо слабее, чем известные условия типа ограниченности обобщенных вариаций функций, и выражается в терминах некоторого роста модулей вариации функций последовательности. Кроме того, на основе понятия модулей вариации изучены правильные функции (т. е. имеющие в каждой точке односторонние левый и правый пределы) относительно плотного множества и показано, что принципы выбора типа Хелли с ограничениями на обобщенную вариацию функций последовательности, которые в контексте функций со значениями в равномерном пространстве являются новыми, вытекают из нашего основного результата о существовании поточечно сходящейся подпоследовательности.*

Ключевые слова: Модули вариации, принцип выбора, поточечная сходимость, правильная функция относительно плотного множества, равномерное пространство, обобщенная вариация.

1. Введение

Классическая теорема Больцано-Вейерштрасса утверждает, что всякая ограниченная последовательность точек вещественной прямой $\mathbb{R}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Первым обобщением этой теоремы на последовательности функций служит также классическая теорема Хелли, называемая *принципом выбора Хелли*, которая гласит, что *всякая равномерно ограниченная последовательность монотонных функций на множестве $T \subset \mathbb{R}$ содержит поточечно сходящуюся на T подпоследовательность*

[1]Кафедра математики, государственный университет Высшая школа экономики, ул. Большая Печерская 25, Нижний Новгород 603600, Россия. E-mail: czeslaw@mail.ru

[2]Работа представлялась на Международной школе-конференции по анализу и геометрии, посвященной 75-летию академика Юрия Григорьевича Решетняка (23 августа – 2 сентября 2004 г., Новосибирск, Россия).

([1], а также, например, [2, Гл. VIII, § 4, лемма 2] для отрезка $T = [a, b]$ и [3, шаг 1 доказательства теоремы 1.3] для произвольного множества T). Поскольку любая функция ограниченной по Жордану вариации является разностью двух неубывающих ограниченных на T функций, принцип выбора Хелли справедлив для равномерно ограниченной последовательности функций, жордановы вариации которых равномерно ограничены. Дальнейшие обобщения принципа выбора Хелли, базирующиеся на принципе выбора для монотонных функций, связаны с заменой вариации по Жордану на более общие (или более слабые) вариации ([3]–[10]).

В работе [11], основной результат которой отражен в [12, 13], предложен новый универсальный подход к поточечному принципу выбора для функций, действующих из $T \subset \mathbb{R}$ в метрическое пространство X. Вместо ограничения на обобщенную вариацию какого-либо типа для функций исходной последовательности в [11] используется весьма слабое ограничение на *модуль вариации* (в смысле Чантурия [14, 15], см. также § 2) этих функций. Следует отметить, что это ограничение на модуль вариации является не только достаточным для того, чтобы из последовательности функций извлечь поточечно сходящуюся подпоследовательность, но в некоторых случаях и необходимым (например, в случае равномерной сходимости, см. также теорему 6 в § 5). Кроме того, результаты [11] содержат как частные случаи многие известные принципы выбора типа Хелли с ограничениями на обобщенные вариации (см. ссылки выше).

Цель настоящей работы — распространить принципы выбора из [11]–[13] на функции со значениями в равномерном пространстве X и показать, что принципы выбора с ограничениями на обобщенные вариации, которые в представленном контексте также являются новыми, получаются как следствия нашего принципа выбора.

План работы — следующий. В § 2 представлены основные определения и сформулирован центральный результат работы — теорема 1. В § 3 устанавливаются свойства модулей вариации функций со значениями в равномерном пространстве. В § 4 изучаются правильные функции (т. е. имеющие в каждой точке правый и левый односторонние пределы) относительно плотного множества, что позволяет лучше понять идею введения и роль модулей вариации. § 5 посвящен доказательству центрального результата. Наконец, в § 6 показано, что многие известные принципы выбора типа Хелли с ограничениями на обобщенные вариации являются следствиями нашего принципа выбора.

2. Основные определения и результаты

Всюду ниже предполагается, что $(X, \mathcal{U})$ — хаусдорфово равномерное пространство с комплектом псевдометрик $\{d_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ равномерности $\mathcal{U}$ (см. [16, Гл. 6]), где $\mathcal{P}$ — некоторое индексное множество. В качестве напоминания опишем эти предположения несколько подробнее. Во-первых, при любом $p \in \mathcal{P}$ функция $d_p : X \times X \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ является псевдометрикой, т. е. для всех $x, y, z \in X$ удовлетворяет условиям: $d_p(x, x) = 0$, $d_p(x, y) = d_p(y, x)$ и $d_p(x, z) \leqslant d_p(x, y) + d_p(y, z)$; кроме того, если из условий $x, y \in X$ и $d_p(x, y) = 0$ для всех $p \in \mathcal{P}$ вытекает, что $x = y$, то X называется хаусдорфовым (или отделимым). Во-вторых, термин “комплект псевдометрик

$\{d_p\}_{p\in\mathcal{P}}$" означает, что $\{d_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ есть семейство всех псевдометрик на X, равномерно непрерывных на $X\times X$ относительно равномерности произведения; напомним, что псевдометрика d_p равномерно непрерывна на $X\times X$ относительно равномерности произведения (см. [16, Гл. 6, теорема 11]) тогда и только тогда, когда $U_{p,r}\in\mathcal{U}$ для любого $r>0$, где $U_{p,r}=\{(x,y)\in X\times X \mid d_p(x,y)<r\}$. В-третьих, отметим, что из того, что $\{d_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ — комплект псевдометрик равномерности $\mathcal{U}$, вытекает, что семейство $\{U_{p,r}\mid p\in\mathcal{P},\ r>0\}$ является базой равномерности $\mathcal{U}$, т. е. для любого $U\in\mathcal{U}$ найдутся $p\in\mathcal{P}$ и $r>0$ такие, что $U_{p,r}\subset U$ (см. также [16, Гл. 6, теорема 18]).

Напомним, что в равномерном пространстве $(X,\mathcal{U})$ последовательность $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}\subset X$ сходится к элементу $x\in X$ (при $j\to\infty$) тогда и только тогда, когда $\lim_{j\to\infty} d_p(x_j,x)=0$ для всех $p\in\mathcal{P}$. В силу хаусдорфовости X такой предел x определен однозначно.

Подмножество $Y\subset X$ равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ называется *секвенциально компактным* (*относительно секвенциально компактным*), если в каждой последовательности точек из Y имеется подпоследовательность, сходящаяся в X к некоторому элементу из Y (соответственно к некоторому элементу из X).

Если $\varnothing\neq T\subset\mathbb{R}$, через X^T обозначаем множество всех функций $f: T\to X$, действующих из T в X. Пусть $\{f_j\}\equiv\{f_j\}_{j=1}^{\infty}\subset X^T$ — некоторая последовательность функций из T в X. Будем говорить, что она *сходится поточечно на* T (*равномерно на* T) к функции $f\in X^T$, если $\lim_{j\to\infty} d_p(f_j(t),f(t))=0$ для всех $p\in\mathcal{P}$ и всех $t\in T$ (соответственно если $\lim_{j\to\infty}\sup_{t\in T} d_p(f_j(t),f(t))=0$ для всех $p\in\mathcal{P}$). Последовательность $\{f_j\}$ называется *поточечно относительно секвенциально компактной*, если последовательность $\{f_j(t)\}$ относительно секвенциально компактна при любом $t\in T$.

Для $p\in\mathcal{P}$, натурального $n\in\mathbb{N}$, $f\in X^T$ и $\varnothing\neq E\subset T$ положим

$$\nu_p(n,f,E)=\sup\Biggl\{\sum_{i=1}^{n} d_p\bigl(f(b_i),f(a_i)\bigr)\ \Bigg|\ \{a_i\}_{i=1}^n,\ \{b_i\}_{i=1}^n\subset E \text{ такие, что } a_1\leqslant b_1\leqslant a_2\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant a_{n-1}\leqslant b_{n-1}\leqslant a_n\leqslant b_n\Biggr\}.$$

Последовательность $\{\nu_p(n,f,E)\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty]$ называется *модулем вариации функции f на E относительно псевдометрики d_p*. Понятие модуля вариации (изменения) впервые определено Чантурия в [14, 15] для отрезка $E=T=[a,b]$ и $X=\mathbb{R}$ в связи с задачами сходимости из теории рядов Фурье и рассматривалось в [11] для $T\subset\mathbb{R}$ и метрического пространства (X,d) для установления поточечного принципа выбора.

Отметим, что каково бы ни было $p\in\mathcal{P}$ из определения величины $\nu_p(n,f,E)$ следует, что она конечна при любом $n\in\mathbb{N}$ и, следовательно, $\nu_p(\cdot,f,E):\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$, тогда и только тогда, когда $\sup_{t,s\in E} d_p(f(t),f(s))<\infty$. Всюду ниже все рассматриваемые функции $f\in X^T$ предполагаются *ограниченными*, т. е. $\sup_{t,s\in T} d_p(f(t),f(s))<\infty$ для всех $p\in\mathcal{P}$.

Следуя Э. Ландау, условие $\lim_{n\to\infty}\mu(n)/n=0$ для последовательности $\mu:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ будем записывать кратко в виде $\mu(n)=o(n)$.

Основной результат работы — следующий *поточечный принцип выбора* для функций одной переменной со значениями в равномерном пространстве в терминах модулей вариации.

Теорема 1. *Пусть* $\varnothing \neq T \subset \mathbb{R}$ *и* $(X,\mathcal{U})$ — *хаусдорфово равномерное пространство с не более чем счетным комплектом псевдометрик* $\{d_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ *равномерности* $\mathcal{U}$. *Предположим, что* $\{f_j\} \subset X^T$ — *поточечно относительно секвенциально компактная последовательность функций такая, что*

$$\mu_p(n) \equiv \limsup_{j\to\infty} \nu_p(n, f_j, T) = o(n) \quad \text{для всех} \quad p \in \mathcal{P}. \tag{1}$$

Тогда найдется подпоследовательность в $\{f_j\}$, *которая сходится поточечно на* T *к некоторой функции* $f \in X^T$, *удовлетворяющей условию:* $\nu_p(n, f, T) \leqslant \mu_p(n)$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $p \in \mathcal{P}$.

Эта теорема содержит в качестве частных случаев результаты работ [11, 12], когда X — метрическое пространство. Примеры, иллюстрирующие "оптимальность" условий теоремы 1, приведены в [11, 13]. Из этой теоремы вытекают многие известные принципы выбора типа Хелли для функций ограниченной и ограниченной обобщенной вариации (см. § 6 ниже).

3. Свойства модулей вариации

Для доказательства теоремы 1 и других результатов работы (см. § 4) нам понадобятся некоторые свойства модулей вариации $\{\nu_p\}_{p\in\mathcal{P}}$. Они собраны в следующей лемме.

Лемма 2. *Для* $f \in X^T$ *и любых* $\varnothing \neq E \subset T$, $n \in \mathbb{N}$ *и* $p \in \mathcal{P}$ *имеем*:

(a) $\nu_p(n, f, E) \leqslant \nu_p(n+1, f, E)$;

(b) $\nu_p(n, f, E_0) \leqslant \nu_p(n, f, E)$ *для всех* $\varnothing \neq E_0 \subset E$;

(c) $d_p(f(t), f(s)) + \nu_p(n, f, (-\infty, s] \cap E) \leqslant \nu_p(n+1, f, (-\infty, t] \cap E)$ *для всех* $t, s \in E$ *таких, что* $s \leqslant t$;

(d) $\nu_p(n+1, f, E) \leqslant \nu_p(n, f, E) + \dfrac{\nu_p(n+1, f, E)}{n+1}$;

(e) $\nu_p(n, f, E) \leqslant \liminf\limits_{j\to\infty} \nu_p(n, f_j, E)$, *если последовательность функций* $\{f_j\} \subset X^T$ *сходится к* f *поточечно на* E;

(f) $\nu_p(n, g, E) \leqslant \nu_p(n, f, E) + 2n \sup\limits_{t\in E} d_p(f(t), g(t))$, *если* $g \in X^T$.

Доказательство. Свойства (a), (b) и (c) вытекают непосредственно из определения модуля вариации относительно псевдометрики d_p.

Доказательство (d) по существу совпадает с приведенным в [15, Лемма] для случая, когда $E = [a, b]$ и $X = \mathbb{R}$, и напоминается для удобства. По определению $\nu_p(n+1, f, E)$ для любого $\varepsilon > 0$ существуют точки $a_i, b_i \in E$, $i = 1, \ldots, n+1$ (зависящие от ε, p и n, вообще говоря), такие, что $a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$ и

$$\sum_{i=1}^{n+1} d_p(f(b_i), f(a_i)) \leqslant \nu_p(n+1, f, E) \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{n+1} d_p(f(b_i), f(a_i)).$$

Обозначая через δ_0 наименьшее слагаемое в сумме слева, найдем, что $(n+1)\delta_0 \leqslant \nu_p(n+1, f, E)$. С другой стороны, из правого неравенства вытекает, что $\nu_p(n+1, f, E) \leqslant \varepsilon + \nu_p(n, f, E) + \delta_0$, откуда и следует неравенство в (d) ввиду произвольности $\varepsilon > 0$.

(e) Пусть точки $a_1 \leqslant b_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n$ лежат в E. В силу определения величины $\nu_p(n, f_j, E)$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} d_p(f_j(b_i), f_j(a_i)) \leqslant \nu_p(n, f_j, E), \qquad j \in \mathbb{N},$$

откуда для любого $k \in \mathbb{N}$ находим, что

$$\inf_{j \geqslant k} \sum_{i=1}^{n} d_p(f_j(b_i), f_j(a_i)) \leqslant \inf_{j \geqslant k} \nu_p(n, f_j, E).$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ и учитывая поточечную сходимость f_j к f, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} d_p(f(b_i), f(a_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{j \to \infty} d_p(f_j(b_i), f_j(a_i)) \leqslant \liminf_{j \to \infty} \nu_p(n, f_j, E),$$

и остается взять супремум по всем указанным a_i, b_i, $i = 1, \ldots, n$.

(f) Следует заметить лишь, что для всех точек $a_1 \leqslant b_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n$ из E в силу неравенства треугольника для d_p имеют место неравенства

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} d_p(g(b_i), g(a_i)) \leqslant \sum_{i=1}^{n} d_p(g(b_i), f(b_i)) + \sum_{i=1}^{n} d_p(f(b_i), f(a_i)) +& \\ + \sum_{i=1}^{n} d_p(f(a_i), g(a_i)) \leqslant& \\ \leqslant n \sup_{t \in E} d_p(g(t), f(t)) + \nu_p(n, f, E) + n \sup_{s \in E} d_p(f(s), g(s)).& \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Отметим, что неравенство в лемме 2(d) эквивалентно неравенству

$$\frac{\nu_p(n+1, f, E)}{n+1} \leqslant \frac{\nu_p(n, f, E)}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

поэтому конечный предел $\lim_{n \to \infty} \nu_p(n, f, E)/n \in \mathbb{R}^+$ существует всегда для ограниченной функции $f \in X^T$.

4. Правильные функции относительно плотного множества

Цель этого раздела (см. последнее замечание в § 3) состоит в том, чтобы охарактеризовать функции $f : [a, b] \to X$ на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию: $\nu_p(n, f, [a, b]) = o(n)$ для всех $p \in \mathcal{P}$ (и даже несколько более общему условию, см. теорему 3 ниже).

Пусть $S \subset [a, b]$ — фиксированное плотное множество. Обозначим через $U_S([a, b]; X)$ множество всех функций $f : [a, b] \to X$ таких, что (выполнены условия Коши относительно S)

$$\lim_{S \ni t, s \to \tau - 0} d_p(f(t), f(s)) = 0 \quad \forall\, p \in \mathcal{P} \quad \text{в каждой точке } \tau \in (a, b] \tag{3}$$

и

$$\lim_{S \ni t, s \to \tau + 0} d_p(f(t), f(s)) = 0 \quad \forall\, p \in \mathcal{P} \quad \text{в каждой точке } \tau \in [a, b). \tag{4}$$

Функции f из $U_S([a,b];X)$ будем называть *правильными относительно* S (просто *правильными*, если $S=[a,b]$, см. [17, Гл. III, § 2], [18], [11, Lemma 3]).

В том случае, когда X полное, функция $f:[a,b]\to X$ лежит в $U_S([a,b];X)$ тогда и только тогда, когда в каждой точке $\tau\in(a,b]$ существует левый относительно S предел $f_{|S}(\tau-)=\lim_{S\ni t\to\tau-0}f(t)\in X$ значений $f(t)$, когда t стремится к $\tau-0$ по точкам S, и в каждой точке $\tau\in[a,b)$ существует правый относительно S предел $f_{|S}(\tau+)=\lim_{S\ni t\to\tau+0}f(t)\in X$, где $f_{|S}$ означает сужение функции f на множество S.

Действительно, условие (3) означает, что для точек $a<\tau\leqslant b$ пара $(f, S\ni t\to\tau-0)$ является направленностью Коши (здесь запись $S\ni t\to\tau-0$ в указанной паре понимается как направленное множество $(S\cap[a,\tau),\succcurlyeq)$, в котором направление $\succcurlyeq$ задается для $t,s\in S\cap[a,\tau)$ правилом: $t\succcurlyeq s$ тогда и только тогда, когда $t\geqslant s$, см. [16, Гл. 2]), поэтому в силу полноты X она сходится в X к некоторому элементу, обозначаемому через $f_{|S}(\tau-)$, так что $\lim_{S\ni t\to\tau-0}d_p(f(t),f_{|S}(\tau-))=0$ для всех $p\in\mathcal{P}$. Аналогично устанавливается существование правого относительно S предела $f_{|S}(\tau+)$ в точках $\tau\in[a,b)$ (следует лишь в множестве $S\cap(\tau,b]$ задать направление $\succcurlyeq$ правилом: $t\succcurlyeq s$, если и только если $t\leqslant s$).

Множество $U_S=U_S([a,b];\mathbb{R})$ было впервые рассмотрено в работе [19], поэтому и в общем случае $U_S([a,b];X)$ будем называть (*обобщенным*) *классом Джеффери*.

Имеет место следующая характеризация класса Джеффери $U_S([a,b];X)$ в терминах модулей вариации $\{\nu_p\}_{p\in\mathcal{P}}$:

Теорема 3. *Пусть S — плотное множество в $[a,b]$ и $(X,\mathcal{U})$ — хаусдорфово равномерное пространство (с необязательно счетным) комплектом псевдометрик $\{d_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ равномерности $\mathcal{U}$. Тогда*

$$U_S([a,b];X)=\{f:[a,b]\to X\mid \nu_p(n,f,S)=o(n)\ \textit{для всех}\ p\in\mathcal{P}\}.$$

Эта теорема содержит в качестве частных случаев результаты [14, теорема 5] ($S=[a,b]$ и $X=\mathbb{R}$), [13, теорема 3] ($S\subset[a,b]$ — плотное множество и $X=\mathbb{R}$) и [11, лемма 3] ($S=[a,b]$ и X — метрическое пространство).

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется следующая ниже лемма 4, представляющая и самостоятельный интерес. Напомним, что функция $g:[a,b]\to X$ называется *ступенчатой*, если существуют такие разбиение $a=c_0<c_1<\ldots<c_{m-1}<c_m=b$ отрезка $[a,b]$ и элементы $x_1,\ldots,x_m\in X$ (зависящие от g), что $g(t)=x_i$ для всех $t\in(c_{i-1},c_i)$, $i=1,\ldots,m$. Для модуля вариации такой функции g имеем следующую оценку:

$$\nu_p(n,g,[a,b])\leqslant\sum_{i=1}^m\Big(d_p(g(c_{i-1}),x_i)+d_p(x_i,g(c_i))\Big),\quad n\in\mathbb{N},\quad p\in\mathcal{P}. \tag{5}$$

Лемма 4. *Для любой функции $f\in U_S([a,b];X)$ и любого $p\in\mathcal{P}$ найдется последовательность ступенчатых функций $\{f_j\}\subset X^{[a,b]}$ такая, что* $\lim_{j\to\infty}\sup_{t\in S}d_p(f_j(t),f(t))=0$.

Для $S=[a,b]$ и банахова пространства X лемма 4 хорошо известна [20, Гл. 7, § 6] (где доказательство годится и для полного метрического пространства X). Частные случаи леммы 4 содержатся также в [18, теорема 1.1] ($S=[a,b]$ и X — полное хаусдорфово равномерное пространство) и [13, теорема 3] ($S\subset[a,b]$ — плотное и $X=\mathbb{R}$).

Доказательство леммы 4 адаптировано на наш случай из [20, теорема (7.6.1)]. Зафиксируем произвольное $p \in \mathcal{P}$. Пусть $j \in \mathbb{N}$. Из условий (3) и (4) вытекает, что для любого $\tau \in [a,b]$ существует (зависящий от p и j) открытый интервал $(\alpha(\tau), \beta(\tau))$ с концами $\alpha(\tau)$ и $\beta(\tau)$, содержащий точку τ, такой, что

$$\text{если } t,s \in (\alpha(\tau),\tau) \cap S \text{ или } t,s \in (\tau,\beta(\tau)) \cap S, \text{ то } d_p(f(t),f(s)) \leqslant 1/j. \quad (6)$$

Семейство интервалов $\{(\alpha(\tau),\beta(\tau)) \mid \tau \in [a,b]\}$ образует открытое покрытие отрезка $[a,b]$, поэтому найдется конечное число точек $\tau_1,\dots,\tau_N \in [a,b]$ таких, что $[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^N (\alpha(\tau_k),\beta(\tau_k))$. Среди точек a, b, τ_k, $\alpha(\tau_k)$, $\beta(\tau_k)$, $k=1,\dots,N$, примем во внимание лишь те, которые лежат на $[a,b]$, и упорядочим их по (строгому) возрастанию. Получившиеся точки обозначим через $c_0,c_1,\dots,c_m \in [a,b]$, так что $a = c_0 < c_1 < \dots < c_{m-1} < c_m = b$. Благодаря плотности множества S в $[a,b]$, на каждом интервале (c_{i-1},c_i) произвольно выберем и зафиксируем точку $s_i \in (c_{i-1},c_i) \cap S$, $i=1,\dots,m$, и искомую функцию $f_j : [a,b] \to X$ определим по правилу:

$$f_j(t) = \begin{cases} f(c_i), & \text{если} \quad t = c_i,\ i \in \{0,1,\dots,m\}, \\ f(s_i), & \text{если} \quad t \in (c_{i-1},c_i),\ i \in \{1,\dots,m\}. \end{cases}$$

Ясно, что f_j — ступенчатая функция. Покажем, что $\sup_{t\in S} d_p(f_j(t),f(t))$ не превосходит $1/j$. Если $t \in S$ и $t = c_i$ для некоторого $i \in \{0,1,\dots,m\}$, то $f_j(t) = f(t)$. Поэтому наше утверждение будет вытекать из следующего наблюдения: для любого $i \in \{1,\dots,m\}$ найдется $k \in \{1,\dots,N\}$ такой, что

$$(c_{i-1},c_i) \subset (\alpha(\tau_k),\tau_k) \quad \text{или} \quad (c_{i-1},c_i) \subset (\tau_k,\beta(\tau_k)). \quad (7)$$

Действительно, если $t \in S \setminus \{c_i\}_{i=0}^m$, то $t \in (c_{i-1},c_i) \cap S$ для некоторого $i \in \{1,\dots,m\}$, поэтому в силу (7) обе точки t и s_i лежат в $(\alpha(\tau_k),\tau_k) \cap S$ или $(\tau_k,\beta(\tau_k)) \cap S$ при некотором $k \in \{1,\dots,N\}$, а тогда на основе определения f_j и (6) найдем, что

$$d_p(f_j(t),f(t)) = d_p(f(s_i),f(t)) \leqslant 1/j.$$

Осталось установить (7). Пусть $i \in \{1,\dots,m\}$ и $t \in (c_{i-1},c_i)$. Из определения точек $c_0,c_1,\dots,c_m$ следует, что $t \notin \bigcup_{k=1}^N \{\alpha(\tau_k),\tau_k,\beta(\tau_k)\}$, но в то же время в силу выбранного выше покрытия $t \in \bigcup_{k=1}^N \bigl[(\alpha(\tau_k),\tau_k) \cup \{\tau_k\} \cup (\tau_k,\beta(\tau_k))\bigr]$, поэтому $t \in (\alpha(\tau_k),\tau_k)$ или $t \in (\tau_k,\beta(\tau_k))$ при некотором $k \in \{1,\dots,N\}$. Если $t \in (\alpha(\tau_k),\tau_k)$, то из неравенств $c_{i-1} < t < c_i$ и $\alpha(\tau_k) < t < \tau_k$ по определению точек $\{c_i\}_{i=0}^m$ найдем, что $\alpha(\tau_k) \leqslant c_{i-1}$ и $c_i \leqslant \tau_k$, т.е. $(c_{i-1},c_i) \subset (\alpha(\tau_k),\tau_k)$. Аналогично если $t \in (\tau_k,\beta(\tau_k))$, то $(c_{i-1},c_i) \subset (\tau_k,\beta(\tau_k))$, что доказывает (7) и вместе с этим лемму. ■

Доказательство теоремы 3. 1. *Включение* “$\subset$”. Пусть $f \in U_S([a,b];X)$. Для произвольного $p \in \mathcal{P}$ обозначим через $\{f_j\} \subset X^{[a,b]}$ последовательность ступенчатых функций (зависящую от p) из леммы 4. Для всех $j \in \mathbb{N}$ в силу оценки (5) имеем $\nu_p(n,f_j,[a,b]) = o(n)$, поэтому $\nu_p(n,f_j,S) = o(n)$ благодаря лемме 2(b). Из леммы 2(f) следует, что

$$\frac{\nu_p(n,f,S)}{n} \leqslant \frac{\nu_p(n,f_j,S)}{n} + 2\sup_{t\in S} d_p(f_j(t),f(t)), \quad n,\, j \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Для $\varepsilon > 0$ выберем такое $j = j(\varepsilon, p) \in \mathbb{N}$, что $\sup_{t\in S} d_p(f_j(t), f(t)) \leqslant \varepsilon/3$, а затем найдем такое $n_0 = n_0(\varepsilon, j, p) \in \mathbb{N}$, что $\nu_p(n_0, f_j, S)/n_0 \leqslant \varepsilon/3$. В силу (8) и (2) имеем: $\nu_p(n, f, S)/n \leqslant \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$. Таким образом, $\nu_p(n, f, S) = o(n)$ для всех $p \in \mathcal{P}$.

2. *Включение "$\supset$".* Пусть функция $f : [a, b] \to X$ такова, что $\nu_p(n, f, S) = o(n)$ для всех $p \in \mathcal{P}$. Для $p \in \mathcal{P}$ и $n \in \mathbb{N}$ положим $\nu_{p,n}(s) = \nu_p(n, f, [a, s] \cap S)$ для всех $s \in S$. По лемме 2(b) функция $\nu_{p,n} : S \to \mathbb{R}^+$ является неубывающей; она также ограничена, поскольку существует номер $n_0 = n_0(p) \in \mathbb{N}$ такой, что $\nu_p(n, f, S)/n \leqslant 1$ для всех $n \geqslant n_0$, откуда в силу леммы 2(b),(a) будет $\nu_{p,n}(s) \leqslant \nu_p(n, f, S) \leqslant \max\{n_0, n\}$ для всех $s \in S$. Поэтому в любой точке $\tau \in (a, b]$ существует левый предел $\nu_{p,n}(\tau-) = \lim_{S\ni t\to\tau-0} \nu_{p,n}(t) \in \mathbb{R}^+$ вдоль точек S. Покажем, что в любой такой точке τ функция f удовлетворяет соотношениям (3) (соотношения (4) проверяются аналогичным образом). Зафиксируем произвольное $p \in \mathcal{P}$. Для $t, s \in S$, $s \leqslant t < \tau$, в силу леммы 2(c),(d),(b) имеем:

$$
\begin{aligned}
d_p(f(t), f(s)) &\leqslant \nu_p(n+1, f, [a, t] \cap S) - \nu_p(n, f, [a, s] \cap S) \leqslant \\
&\leqslant \nu_p(n, f, [a, t] \cap S) + \frac{\nu_p(n+1, f, [a, t] \cap S)}{n+1} - \nu_p(n, f, [a, s] \cap S) \leqslant \\
&\leqslant \nu_{p,n}(t) + \frac{\nu_p(n+1, f, S)}{n+1} - \nu_{p,n}(s) \leqslant \\
&\leqslant |\nu_{p,n}(t) - \nu_{p,n}(\tau-)| + \frac{\nu_p(n+1, f, S)}{n+1} + |\nu_{p,n}(\tau-) - \nu_{p,n}(s)|.
\end{aligned}
$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем номер $n = n(\varepsilon, p) \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\frac{\nu_p(n+1, f, S)}{n+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

и найдем такое $\delta = \delta(\varepsilon, p, n) \in (0, \tau - a)$, что

$$|\nu_{p,n}(t) - \nu_{p,n}(\tau-)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех} \quad t \in [\tau - \delta, \tau) \cap S.$$

В силу приведенных выше вычислений для любых $t, s \in [\tau - \delta, \tau)$ будем иметь $d_p(f(t), f(s)) \leqslant \varepsilon$, так что $\lim_{S\ni t,s\to\tau-0} d_p(f(t), f(s)) = 0$, и остается учесть произвольность $p \in \mathcal{P}$. ■

В связи с теоремой 3 интересно отметить еще одно свойство правильных относительно S функций:

Теорема 5. *Если в условиях теоремы* 3 $f \in U_S([a, b]; X)$*, то образ* $f(S)$ *множества* S *является вполне ограниченным подмножеством* X*; если, кроме того,* X *полное, то множество* $f(S)$ *относительно компактно.*

Доказательство. Нужно показать, что каково бы ни было $p \in \mathcal{P}$ для любого $\varepsilon > 0$ образ $f(S)$ можно покрыть конечным набором шаров $B_p(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d_p(y, x) < \varepsilon\}$ d_p-радиуса ε с центрами $x \in f(S)$. От противного предположим, что найдутся такие $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$, что $f(S)$ нельзя покрыть конечным набором указанных шаров. Зафиксируем произвольно $t_0 \in S$ и положим $x_0 = f(t_0)$. Выберем $x_1 \in f(S) \setminus B_p(x_0, \varepsilon)$; тогда $x_1 = f(t_1)$ для некоторого $t_1 \in S$, $t_1 \neq t_0$. По индукции если $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, и элементы $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in f(S)$ уже выбраны, по предположению найдем

$x_n \in f(S) \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} B_p(x_i, \varepsilon)$, так что $x_n = f(t_n)$ для некоторого $t_n \in S$, $t_n \neq t_i$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Таким образом получим две последовательности попарно различных элементов $\{t_i\}_{i=0}^{\infty} \subset S$ и $\{x_i\}_{i=0}^{\infty} \subset X$, причем $d_p(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$ для всех $i \neq j$. Без ограничения общности считаем, что $t_{i-1} < t_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и точек $a_i = t_{i-1}$ и $b_i = t_i$, $i = 1, \ldots, n$, найдем, что

$$\nu_p(n, f, S) \geqslant \sum_{i=1}^{n} d_p(f(b_i), f(a_i)) = \sum_{i=1}^{n} d_p(x_i, x_{i-1}) \geqslant n\varepsilon.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty} \nu_p(n, f, S)/n \geqslant \varepsilon > 0$, что в силу теоремы 3 противоречит включению $f \in U_S([a, b]; X)$.

Последнее утверждение теоремы вытекает из хорошо известного результата, см. [16, Гл. 6, теорема 32]. ■

Теорема 5 содержит как частные случаи результаты [20, Гл. 7, § 6] ($S = [a, b]$ и X — банахово или полное метрическое пространство) и [18, Лемма 1.1] ($S = [a, b]$ и X — полное хаусдорфово равномерное пространство). Ее можно распространить на мультифункции с компактными значениями подобно тому, как это проделано в [21, Лемма 11] для метрического пространства X.

5. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1. Прежде всего отметим, что величина $\mu_p(n)$, определенная в теореме 1, конечна при любом $n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathcal{P}$: действительно, из (1) вытекает, что найдется номер $n_0 = n_0(p) \in \mathbb{N}$ такой, что $\limsup_{j\to\infty} \nu_p(n, f_j, T) \leqslant n$ при всех $n \geqslant n_0$, а тогда из леммы 2(a) следует, что если $1 \leqslant n \leqslant n_0$, то $\limsup_{j\to\infty} \nu_p(n, f_j, T) \leqslant \limsup_{j\to\infty} \nu_p(n_0, f_j, T) \leqslant n_0$.

Доказательство теоремы разобьем на пять шагов. Всюду в нем без ограничения общности считаем, что $\mathcal{P} = \mathbb{N}$.

1. *Первая серия диагональных процессов.* Используя диагональный процесс, покажем, что в $\{f_j\}$ найдется подпоследовательность, за которой сохраним обозначение исходной последовательности $\{f_j\}$, и для любого $p \in \mathcal{P}$ найдется неубывающая последовательность $\gamma_p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ такие, что

$$\lim_{j\to\infty} \nu_p(n, f_j, T) = \gamma_p(n) \leqslant \mu_p(n) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N} \text{ и } p \in \mathcal{P}. \tag{9}$$

Сначала рассуждаем для $p = 1$. Поскольку $\limsup_{j\to\infty} \nu_1(1, f_j, T) = \mu_1(1)$, то существует подпоследовательность $\{f_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ в $\{f_j\}$ такая, что $\lim_{j\to\infty} \nu_1(1, f_j^{(1)}, T) = \mu_1(1)$. Положим $\gamma_1(1) = \mu_1(1)$. По индукции если $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, и подпоследовательность $\{f_j^{(n-1)}\}_{j=1}^{\infty}$ в изначальной последовательности $\{f_j\}$ со свойством $\lim_{j\to\infty} \nu_1(n-1, f_j^{(n-1)}, T) = \gamma_1(n-1)$ уже выбрана, положим $\gamma_1(n) = \limsup_{j\to\infty} \nu_1(n, f_j^{(n-1)}, T)$ и заметим, что $\gamma_1(n) \leqslant \mu_1(n)$ (а также, что $\gamma_1(n-1) \leqslant \gamma_1(n)$), поэтому существует подпоследовательность $\{f_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty}$ в $\{f_j^{(n-1)}\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что $\lim_{j\to\infty} \nu_1(n, f_j^{(n)}, T) = \gamma_1(n)$. Тогда для диагональной последовательности $\{f_j^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$, которую обозначим через $\{{}^1\!f_j\} \equiv \{{}^1\!f_j\}_{j=1}^{\infty}$ и скажем про нее, что она *первой ступени*, получаем:

$$\lim_{j\to\infty} \nu_1(n, {}^1\!f_j, T) = \gamma_1(n) \leqslant \mu_1(n) \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Теперь (для $p=2$) полагаем $\gamma_2(1)=\limsup_{j\to\infty}\nu_2(1,{}^1f_j,T)$ и замечаем, что $\gamma_2(1)\leqslant\limsup_{j\to\infty}\nu_2(1,f_j,T)=\mu_2(1)$. Тогда найдется подпоследовательность $\{{}^1f_j^{(1)}\}_{j=1}^\infty$ в $\{{}^1f_j\}$ такая, что $\lim_{j\to\infty}\nu_2(1,{}^1f_j^{(1)},T)=\gamma_2(1)$. Применим индукционный шаг: если $n\geqslant 2$ и подпоследовательность $\{{}^1f_j^{(n-1)}\}_{j=1}^\infty$ в $\{{}^1f_j\}$ уже построена, положим $\gamma_2(n)=\limsup_{j\to\infty}\nu_2(n,{}^1f_j^{(n-1)},T)$ и, замечая, что $\gamma_2(n)\leqslant\mu_2(n)$, выберем такую подпоследовательность $\{{}^1f_j^{(n)}\}_{j=1}^\infty$ в $\{{}^1f_j^{(n-1)}\}_{j=1}^\infty$, что $\lim_{j\to\infty}\nu_2(n,{}^1f_j^{(n)},T)=\gamma_2(n)$. Тогда диагональная последовательность $\{{}^1f_j^{(j)}\}_{j=1}^\infty$, которую будем обозначать через $\{{}^2f_j\}\equiv\{{}^2f_j\}_{j=1}^\infty$ и причислять ко *второй ступени*, удовлетворяет соотношениям:

$$\lim_{j\to\infty}\nu_2(n,{}^2f_j,T)=\gamma_2(n)\leqslant\mu_2(n)\quad\text{для всех}\quad n\in\mathbb{N}.\tag{11}$$

Принимая во внимание (10) и (11), еще раз привлекаем индукционное рассуждение: если $p\in\mathcal{P}$, $p\geqslant 3$, и уже выбрана подпоследовательность $(p-1)$-ой ступени $\{{}^{p-1}f_j\}\equiv\{{}^{p-1}f_j\}_{j=1}^\infty$ исходной последовательности $\{f_j\}$, обладающая свойством: $\lim_{j\to\infty}\nu_{p-1}(n,{}^{p-1}f_j,T)=\gamma_{p-1}(n)\leqslant\mu_{p-1}(n)$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и некоторой неубывающей последовательности $\gamma_{p-1}:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$, то полагаем $\gamma_p(1)=\limsup_{j\to\infty}\nu_p(1,{}^{p-1}f_j,T)$ и замечаем, что $\gamma_p(1)\leqslant\limsup_{j\to\infty}\nu_p(1,f_j,T)=\mu_p(1)$; отсюда следует, что существует подпоследовательность $\{{}^{p-1}f_j^{(1)}\}_{j=1}^\infty$ в $\{{}^{p-1}f_j\}$ такая, что $\lim_{j\to\infty}\nu_p(1,{}^{p-1}f_j^{(1)},T)=\gamma_p(1)$. По индукции если $n\geqslant 2$ и подпоследовательность $\{{}^{p-1}f_j^{(n-1)}\}_{j=1}^\infty$ в $\{{}^{p-1}f_j\}$ уже построена, то положим $\gamma_p(n)=\limsup_{j\to\infty}\nu_p(n,{}^{p-1}f_j^{(n-1)},T)$, учтем, что $\gamma_p(n)\leqslant\mu_p(n)$, и найдем подпоследовательность $\{{}^{p-1}f_j^{(n)}\}_{j=1}^\infty$ в $\{{}^{p-1}f_j^{(n-1)}\}_{j=1}^\infty$ такую, что $\lim_{j\to\infty}\nu_p(n,{}^{p-1}f_j^{(n)},T)=\gamma_p(n)$. Как и выше, диагональная последовательность *p-ой ступени* $\{{}^{p-1}f_j^{(j)}\}_{j=1}^\infty$, которую обозначим через $\{{}^pf_j\}_{j=1}^\infty$, будет удовлетворять соотношениям:

$$\lim_{j\to\infty}\nu_p(n,{}^pf_j,T)=\gamma_p(n)\leqslant\mu_p(n)\quad\text{для всех}\quad n\in\mathbb{N}.\tag{12}$$

Утверждается, что диагональная последовательность $\{{}^jf_j\}_{j=1}^\infty$, которую теперь и обозначаем символом $\{f_j\}\equiv\{f_j\}_{j=1}^\infty$, обладает искомыми свойствами (9). Действительно, поскольку $\{{}^jf_j\}_{j=p}^\infty$ является подпоследовательностью $\{{}^pf_j\}_{j=1}^\infty$, то и для нее выполнено (12), что и требовалось для (9).

2. *Использование теоремы Хелли и вторая серия диагональных процессов.* Докажем, что существует подпоследовательность последовательности $\{f_j\}$ из (9), снова обозначаемая через $\{f_j\}$, и для любых $n\in\mathbb{N}$ и $p\in\mathcal{P}$ существует неубывающая ограниченная функция $\nu_{n,p}:T\to\mathbb{R}^+$ такие, что

$$\lim_{j\to\infty}\nu_p(n,f_j,(-\infty,t]\cap T)=\nu_{n,p}(t)\quad\text{для всех } n\in\mathbb{N},\ p\in\mathcal{P}\text{ и } t\in T.\tag{13}$$

Для любых $n\in\mathbb{N}$ и $p\in\mathcal{P}=\mathbb{N}$ по лемме 2(b) функция

$$\eta_p(n,f_j,t)=\nu_p(n,f_j,(-\infty,t]\cap T)$$

является неубывающей по $t\in T$, а из равенства в (9) вытекает, что найдется постоянная $C(n,p)\in\mathbb{R}^+$ такая, что $\nu_p(n,f_j,T)\leqslant C(n,p)$ для всех $j\in\mathbb{N}$, так что в силу леммы 2(b) на множестве T последовательность функций $\{\eta_p(n,f_j,\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$ равномерно ограничена постоянной $C(n,p)$.

Снова воспользуемся диагональными процессами.

Начнем со случая, когда $p=1$. Последовательность неубывающих функций $\{\eta_1(1,f_j,\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на T постоянной $C(1,1)$, поэтому по классической теореме Хелли существует подпоследовательность $\{f_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ в $\{f_j\}$ и неубывающая ограниченная функция $\nu_{1,1}:T\to\mathbb{R}^+$ такие, что

$$\lim_{j\to\infty}\eta_1(1,f_j^{(1)},t)=\nu_{1,1}(t)\quad\text{для всех}\quad t\in T.$$

По индукции если $n\geqslant 2$ и подпоследовательность $\{f_j^{(n-1)}\}_{j=1}^{\infty}$ в исходной последовательности $\{f_j\}$ уже выбрана, то по теореме Хелли, примененной к последовательности неубывающих функций $\{\eta_1(n,f_j^{(n-1)},\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$, которая равномерно ограничена на T постоянной $C(n,1)$, найдем подпоследовательность $\{f_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty}$ в $\{f_j^{(n-1)}\}_{j=1}^{\infty}$ и неубывающую ограниченную функцию $\nu_{n,1}:T\to\mathbb{R}^+$ такие, что

$$\lim_{j\to\infty}\eta_1(n,f_j^{(n)},t)=\nu_{n,1}(t)\quad\text{для всех}\quad t\in T.$$

Тогда диагональная последовательность $\{f_j^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ (*первой ступени*), которую мы обозначим через $\{{}^1f_j\}\equiv\{{}^1f_j\}_{j=1}^{\infty}$, удовлетворяет условию:

$$\lim_{j\to\infty}\nu_1(n,{}^1f_j,(-\infty,t]\cap T)=\nu_{n,1}(t)\quad\text{для всех } n\in\mathbb{N}\text{ и } t\in T. \tag{14}$$

Исходя из (14), снова воспользуемся индукцией: если $p\in\mathcal{P}$, $p\geqslant 2$, и подпоследовательность $(p-1)$-ой ступени $\{{}^{p-1}f_j\}_{j=1}^{\infty}$ в исходной последовательности $\{f_j\}$ уже определена, то заметим, что последовательность неубывающих функций $\{\eta_p(1,{}^{p-1}f_j,\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на T постоянной $C(1,p)$, поэтому по теореме Хелли найдутся подпоследовательность $\{{}^{p-1}f_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ в $\{{}^{p-1}f_j\}_{j=1}^{\infty}$ и неубывающая ограниченная функция $\nu_{1,p}:T\to\mathbb{R}^+$ такие, что

$$\lim_{j\to\infty}\eta_p(1,{}^{p-1}f_j^{(1)},t)=\nu_{1,p}(t)\quad\text{для всех}\quad t\in T.$$

По индукции если $n\geqslant 2$ и подпоследовательность $\{{}^{p-1}f_j^{(n-1)}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности $\{{}^{p-1}f_j\}_{j=1}^{\infty}$ уже построена, применим теорему Хелли к последовательности неубывающих функций $\{\eta_p(n,{}^{p-1}f_j^{(n-1)},\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$, равномерно ограниченной на T постоянной $C(n,p)$: существует подпоследовательность $\{{}^{p-1}f_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty}$ в $\{{}^{p-1}f_j^{(n-1)}\}_{j=1}^{\infty}$ и неубывающая ограниченная функция $\nu_{n,p}:T\to\mathbb{R}^+$, для которых

$$\lim_{j\to\infty}\eta_p(n,{}^{p-1}f_j^{(n)},t)=\nu_{n,p}(t)\quad\text{при всех}\quad t\in T.$$

Тогда диагональная последовательность p-ой ступени $\{{}^{p-1}f_j^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$, для которой используем обозначение $\{{}^pf_j\}_{j=1}^{\infty}$, обладает свойством:

$$\lim_{j\to\infty}\nu_p(n,{}^pf_j,(-\infty,t]\cap T)=\nu_{n,p}(t)\quad\text{для всех } n\in\mathbb{N}\text{ и } t\in T.$$

Отсюда вытекает, что диагональная последовательность $\{{}^j f_j\}_{j=1}^{\infty}$, которую снова обозначим через $\{f_j\}$, удовлетворяет (13) (а также и (9)).

3. *Выделение сходящейся подпоследовательности на счетном плотном множестве.* Обозначим через Q не более чем счетное плотное подмножество T, так что $Q \subset T \subset \overline{Q}$, где $\overline{Q}$ — замыкание множества Q в $\mathbb{R}$ (существование Q устанавливается так: если $k \in \mathbb{Z}$ — целое и множество $T_k = T \cap [k, k+1]$ непусто, то оно вполне ограничено, а потому, сепарабельно, и, значит, найдется не более чем счетное подмножество $S_k \subset T_k$ такое, что $T_k \subset \overline{S_k}$, и остается положить $Q = \bigcup_k S_k$ и заметить, что $T = \bigcup_k T_k$, где объединение $\bigcup_k$ берется по всем тем $k \in \mathbb{Z}$, для которых $T_k \neq \varnothing$). Отметим, что любая точка $t \in T$, не являющаяся предельной для T, принадлежит множеству Q: действительно, для такой точки t и некоторого интервала (α, β) имеем $T \cap (\alpha, \beta) = \{t\}$, откуда $Q \cap (\alpha, \beta) \subset T \cap (\alpha, \beta) = \{t\}$, так что если предположить, что $t \notin Q$, то $Q \cap (\alpha, \beta) = \varnothing$ или $Q \subset \mathbb{R} \setminus (\alpha, \beta)$ и, значит, $t \in T \subset \overline{Q} \subset \mathbb{R} \setminus (\alpha, \beta)$, то есть $t \notin (\alpha, \beta)$, что противоречит выбору интервала (α, β).

Поскольку при любых $n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathcal{P}$ функция $\nu_{n,p}$ монотонна на T, то множество $Q_{n,p} \subset T$ ее точек разрыва (все из которых первого рода) не более чем счетно. Положим $S = Q \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \in \mathcal{P}} Q_{n,p}$. Тогда S — не более чем счетное плотное подмножество T, причем если $T \setminus S \neq \varnothing$, то функция

$$\nu_{n,p} \text{ непрерывна в точках } t \in T \setminus S \text{ для всех } n \in \mathbb{N} \text{ и } p \in \mathcal{P}. \tag{15}$$

Так как при любом $t \in T$ множество $\{f_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$ относительно секвенциально компактно, а множество $S \subset T$ не более чем счетно, то без ограничения общности можно предположить (еще раз привлекая диагональный процесс и переходя к подпоследовательности $\{f_j\}$, если необходимо), что при любом $s \in S$ последовательность $\{f_j(s)\}$ сходится в X к некоторому элементу, обозначаемому через $f(s) \in X$, так что $\lim_{j\to\infty} d_p(f_j(s), f(s)) = 0$ для всех $p \in \mathcal{P}$.

Если $S = T$, то доказательство завершено.

4. *Использование свойств модулей вариации и сходимость всюду на T.* Пусть теперь $S \neq T$ и $t \in T \setminus S$. Покажем, что последовательность $\{f_j(t)\}$ является последовательностью Коши в X, т. е. $\lim_{j,k\to\infty} d_p(f_j(t), f_k(t)) = 0$ при любом $p \in \mathcal{P}$. Зафиксируем произвольное $p \in \mathcal{P}$, и пусть $\varepsilon > 0$. По предположению $\mu_p(n)/n \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому найдем и зафиксируем такой номер $n = n(\varepsilon, p) \in \mathbb{N}$, что

$$\frac{\mu_p(n+1)}{n+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{15}. \tag{16}$$

Благодаря равенству в (9), существует номер $J_1 = J_1(\varepsilon, n, p) \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\nu_p(n+1, f_j, T) \leqslant \gamma_p(n+1) + \frac{\varepsilon}{15} \quad \text{для всех} \quad j \geqslant J_1. \tag{17}$$

Из определения множества S и свойства (15) следует, что t есть предельная точка для T и точка непрерывности функции $\nu_{n,p}$, так что в силу плотности множества S в T найдется точка $s = s(\varepsilon, t, n, p) \in S$ такая, что

$$|\nu_{n,p}(t) - \nu_{n,p}(s)| \leqslant \frac{\varepsilon}{15}. \tag{18}$$

Из (13) вытекает существование такого номера $J_2 = J_2(\varepsilon, t, s, n, p) \in \mathbb{N}$, что для всех $j \geqslant J_2$ выполнены неравенства:

$$|\nu_p(n, f_j, (-\infty, t] \cap T) - \nu_{n,p}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{15}\,, \tag{19}$$

$$|\nu_p(n, f_j, (-\infty, s] \cap T) - \nu_{n,p}(s)| \leqslant \frac{\varepsilon}{15}\,. \tag{20}$$

Предполагая (без ограничения общности), что $s < t$, и применяя последовательно лемму 2(c), (d), (19), (18), (20), лемму 2(b), (17), неравенство в (9) и (16), для всех $j \geqslant \max\{J_1, J_2\}$ найдем, что

$$\begin{aligned}
d_p(f_j(t), f_j(s)) &\leqslant \nu_p(n+1, f_j, (-\infty, t] \cap T) - \nu_p(n, f_j, (-\infty, s] \cap T) \leqslant \\
&\leqslant \nu_p(n+1, f_j, (-\infty, t] \cap T) - \nu_p(n, f_j, (-\infty, t] \cap T) + \\
&\qquad + |\nu_p(n, f_j, (-\infty, t] \cap T) - \nu_{n,p}(t)| + \\
&\qquad + |\nu_{n,p}(t) - \nu_{n,p}(s)| + \\
&\qquad + |\nu_{n,p}(s) - \nu_p(n, f_j, (-\infty, s] \cap T)| \leqslant \\
&\leqslant \frac{\nu_p(n+1, f_j, (-\infty, t] \cap T)}{n+1} + \frac{\varepsilon}{15} + \frac{\varepsilon}{15} + \frac{\varepsilon}{15} \leqslant \\
&\leqslant \frac{\nu_p(n+1, f_j, T)}{n+1} + \frac{3\varepsilon}{15} \leqslant \\
&\leqslant \frac{\gamma_p(n+1)}{n+1} + \frac{\varepsilon}{15(n+1)} + \frac{3\varepsilon}{15} \leqslant \\
&\leqslant \frac{\mu_p(n+1)}{n+1} + \frac{4\varepsilon}{15} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Поскольку последовательность $\{f_j(s)\}$ сходится в равномерном пространстве X, то (см. [16, Гл. 6, теорема 21]) она является последовательностью Коши, поэтому существует такой номер $J_3 = J_3(\varepsilon, s, p) \in \mathbb{N}$, что

$$d_p(f_j(s), f_k(s)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех} \quad j,\, k \geqslant J_3.$$

Номер $J = \max\{J_1, J_2, J_3\}$ зависит всего лишь от ε и p, причем для всех $j,\, k \geqslant J$ имеем:

$$d_p(f_j(t), f_k(t)) \leqslant d_p(f_j(t), f_j(s)) + d_p(f_j(s), f_k(s)) + d_p(f_k(s), f_k(t)) \leqslant \varepsilon.$$

В силу произвольности $p \in \mathcal{P}$ заключаем, что $\{f_j(t)\}$ — последовательность Коши в X. Так как эта последовательность относительно секвенциально компактна, она имеет предельную точку, которую обозначим через $f(t) \in X$, но (см. [16, Гл. 6, теорема 21]) любая последовательность Коши в равномерном пространстве сходится к своей предельной точке, откуда $\lim_{j\to\infty} d_p(f_j(t), f(t)) = 0$ для всех $p \in \mathcal{P}$.

5. *Завершение доказательства.* В силу хаусдорфовости пространства X однозначная функция $f : T \to X$, определенная в конце шагов 3 и 4 соответственно на S и $T \setminus S$, корректно определена на T и является поточечным пределом на T последовательности $\{f_j\}$, которая по построению является подпоследовательностью исходной последовательности. Применяя лемму 2(e), получаем, что

$$\nu_p(n, f, T) \leqslant \liminf_{j\to\infty} \nu_p(n, f_j, T) \leqslant \limsup_{j\to\infty} \nu_p(n, f_j, T) \leqslant \mu_p(n)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathcal{P}$.

Доказательство теоремы 1 завершено. ■

Замечание 1. Справедлив и *локальный вариант* теоремы 1: следует в этой теореме заменить условие (1) на следующее:

$$\limsup_{j\to\infty} \nu_p(n, f_j, T\cap[a,b]) = o(n) \quad \text{для всех } a,\ b\in T,\ a<b, \text{ и } p\in\mathcal{P};$$

тогда некоторая подпоследовательность $\{f_j\}$ будет поточечно на T сходиться к функции $f \in X^T$ такой, что $\nu_p(n, f, T\cap[a,b]) = o(n)$ для всех a, $b \in T$, $a < b$, и $p \in \mathcal{P}$. Это утверждение сразу следует, если на основе теоремы 1 применить диагональный процесс по расширяющимся отрезкам.

Отметим, что условие (1) в теореме 1 является *необходимым* в случае равномерной сходимости последовательности $\{f_j\}$ к своему пределу f (другое необходимое условие см. в [11, Лемма 4(b)]), так что следующее утверждение в определенном смысле обратно к теореме 1.

Теорема 6. *Если последовательность* $\{f_j\} \subset X^T$ *сходится равномерно на* T *к функции* $f \in X^T$ *такой, что* $\nu_p(n, f, T) = o(n)$ *для всех* $p \in \mathcal{P}$, *то* $\lim_{j\to\infty} \nu_p(n, f_j, T) = o(n)$ *для всех* $p \in \mathcal{P}$.

Доказательство. Пусть $p \in \mathcal{P}$. По лемме 2(f) для всех n, $j \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\nu_p(n, f_j, T) \leqslant \nu_p(n, f, T) + 2n \sup_{t\in T} d_p(f(t), f_j(t)),$$

откуда в силу равномерной сходимости f_j к f получаем:

$$\limsup_{j\to\infty} \nu_p(n, f_j, T) \leqslant \nu_p(n, f, T) \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из леммы 2(e) вытекает, что $\nu_p(n, f, T) \leqslant \liminf_{j\to\infty} \nu_p(n, f_j, T)$, а потому, предел $\lim_{j\to\infty} \nu_p(n, f_j, T)$ существует и равен $\nu_p(n, f, T) = o(n)$, и остается учесть произвольность $p \in \mathcal{P}$. ■

Однако условие (1) не является необходимым для поточечной сходимости $\{f_j\}$ к f — соответствующие примеры построены в работах [11, § 3] и [13, § 5] для $X = \mathbb{R}$.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает, что если для последовательности $\{f_j\} \subset X^T$ из теоремы 1 условие (1) выполнено с заменой T на $T \setminus E$, где $E \subset T$ — некоторое множество меры (Лебега) нуль, то некоторая подпоследовательность в $\{f_j\}$ сходится почти всюду (п.в.) на T к некоторой функции $f \in X^T$ такой, что $\nu_p(n, f, T\setminus E) = o(n)$ для всех $p \in \mathcal{P}$.

Следующий более тонкий результат представляет собой *принцип выбора для сходимости п.в.* в терминах модулей вариации для функций одной переменной со значениями в равномерном пространстве.

Теорема 7. *Пусть* T *и* $(X, \mathcal{U})$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Предположим, что последовательность функций* $\{f_j\} \subset X^T$ *такова, что для п.в.* $t \in T$ *множество* $\{f_j(t)\}$ *относительно секвенциально компактно* *и для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E_\varepsilon \subset T$ меры $\leqslant \varepsilon$ такое, что*

$$\limsup_{j\to\infty} \nu_p(n, f_j, T \setminus E_\varepsilon) = o(n) \quad \text{для всех} \quad p \in \mathcal{P}.$$

Тогда некоторая подпоследовательность $\{f_j\}$ сходится п.в. на T к некоторой функции $f \in X^T$, обладающей свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется измеримое множество $E'_\varepsilon \subset T$ меры $\leqslant \varepsilon$, для которого $\nu_p(n, f, T \setminus E'_\varepsilon) = o(n)$ при всех $p \in \mathcal{P}$.

В этой теореме сходимость п.в. подпоследовательности $\{f_j\}$ к f понимается в том смысле, что существует множество $E \subset T$ меры нуль такое, что $\lim_{j\to\infty} d_p(f_j(t), f(t)) = 0$ для всех $p \in \mathcal{P}$ и $t \in T \setminus E$. С привлечением теоремы 1 и диагонального процесса по множествам $E_1, E_{1/2}, \ldots, E_{1/k}, \ldots$ доказательство теоремы 7 проводится также, как теорема 6 из [11], поэтому оно опускается.

6. Принципы выбора в классах функций ограниченной обобщенной вариации

Всюду в этом разделе, если не оговорено противное, предполагаем, что $\varnothing \neq T \subset \mathbb{R}$, $(X, \mathcal{U})$ — хаусдорфово равномерное пространство с не более чем счетным комплектом псевдометрик $\{d_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ равномерности $\mathcal{U}$ и последовательность функций $\{f_j\} \subset X^T$ такова, что для любого $t \in T$ последовательность $\{f_j(t)\}$ относительно секвенциально компактна в X.

6.1. Функции ограниченной вариации.
Для $f \in X^T$ и $p \in \mathcal{P}$ положим

$$V_p(f, T) = \sup \sum_{i=1}^{m} d_p(f(t_i), f(t_{i-1})),$$

где супремум берется по всем разбиениям $\{t_i\}_{i=0}^m$ множества T, т.е. $m \in \mathbb{N}$, $\{t_0, t_1, \ldots, t_m\} \subset T$ и $t_{i-1} \leqslant t_i$, $i = 1, \ldots, m$. Если $V_p(f, T) < \infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$, пишем $f \in \mathrm{BV}(T; X)$ и называем f *функцией ограниченной* (или *конечной*) *вариации на* T (при $T = [a, b]$ см. [18]).

Как следствие теоремы 1 получаем *принцип выбора в* $\mathrm{BV}(T; X)$:

Теорема 8. *Если в указанных выше условиях $\sup_{j\in\mathbb{N}} V_p(f_j, T) = C_p$ конечен для всех $p \in \mathcal{P}$, то $\{f_j\}$ содержит сходящуюся поточечно на T подпоследовательность, предел f которой лежит в $\mathrm{BV}(T; X)$.*

Доказательство. Покажем вначале, что если $f \in \mathrm{BV}(T; X)$, то

$$\nu_p(n, f, T) \leqslant V_p(f, T) = \lim_{m\to\infty} \nu_p(m, f, T) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N} \text{ и } p \in \mathcal{P}. \tag{21}$$

Действительно, для любых точек $a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n$ из T имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} d_p(f(b_i), f(a_i)) \leqslant V_p(f, T),$$

откуда $\nu_p(n,f,T)\leqslant V_p(f,T)$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $p\in\mathcal{P}$. Если же $m\in\mathbb{N}$ и точки $t_0\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant t_m$ лежат в T, то в силу леммы 2(a)

$$\sum_{i=1}^{m} d_p(f(t_i),f(t_{i-1}))\leqslant \nu_p(m,f,T)\leqslant \lim_{m\to\infty}\nu_p(m,f,T),$$

откуда $V_p(f,T)\leqslant \lim_{m\to\infty}\nu_p(m,f,T)\leqslant V_p(f,T)$, и (21) следует.

В силу оценки (21) для последовательности $\{f_j\}$ из теоремы 8 имеем $\sup_{j\in\mathbb{N}}\nu_p(n,f_j,T)\leqslant C_p$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $p\in\mathcal{P}$, поэтому $\{f_j\}$ удовлетворяет условию (1). По теореме 1 некоторая подпоследовательность в $\{f_j\}$, которую снова обозначим через $\{f_j\}$, сходится поточечно на T к некоторой функции $f\in X^T$. Поскольку

$$V_p(f,T)\leqslant \liminf_{j\to\infty} V_p(f_j,T)\leqslant C_p \quad \text{для всех} \quad p\in\mathcal{P},$$

то $f\in \mathrm{BV}(T;X)$; здесь первое неравенство, выражающее секвенциальную полунепрерывность снизу, устанавливается также, как лемма 2(e). ∎

Теорема 8 содержит в качестве частных случаев результаты работ [8, теорема 7.1], [9, теорема 5.1] и [10, теорема 1] (когда X — метрическое пространство).

Замечание 2. Из оценки (21) и теоремы 3, в частности, находим, что если $S\subset[a,b]$ — плотное множество, то

$$\{f:[a,b]\to X \mid f_{|S}\in \mathrm{BV}(S;X)\}\subset U_S([a,b];X).$$

Это усиливает соответствующий результат из [18, теорема 1.1], установленный для $S=[a,b]$ другим способом.

6.2. Функции, непрерывные по Липшицу.

Функция $f\in X^T$ называется *непрерывной по Липшицу на* T, если (наименьшие постоянные Липшица)

$$L_p(f,T)=\sup\{d_p(f(t),f(s))/|t-s| \,:\, t,\, s\in T,\, t\neq s\}<\infty \ \text{ для всех } p\in\mathcal{P};$$

при этом пишем $f\in \mathrm{Lip}(T;X)$. Отметим, что если T ограничено, то $\mathrm{Lip}(T;X)$ вложено в $\mathrm{BV}(T;X)$, причем $V_p(f,T)\leqslant L_p(f,T)(\sup T-\inf T)$ для всех $p\in\mathcal{P}$, $f\in \mathrm{Lip}(T;X)$.

Замечая, что из поточечной сходимости на T последовательности $\{f_j\}\subset X^T$ к функции $f\in X^T$ вытекает, что

$$L_p(f,T)\leqslant \liminf_{j\to\infty} L_p(f_j,T) \quad \text{для всех} \quad p\in\mathcal{P},$$

приходим к аналогу теоремы 8 для пространства $\mathrm{Lip}(T;X)$, где из условия $\sup_{j\in\mathbb{N}} L_p(f_j,T)=C_p<\infty$ для всех $p\in\mathcal{P}$ следует, что поточечный предел f извлеченной подпоследовательности лежит в $\mathrm{Lip}(T;X)$.

6.3. Функции ограниченной (обобщенной) φ-вариации.

Пусть функция $\varphi: T\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) для любого $t\in T$ функция $\varphi(t,\cdot)=[u\mapsto\varphi(t,u)]$ является неубывающей и непрерывной на $\mathbb{R}^+$ и $\lim_{u\to\infty}\varphi(t,u)=\infty$;

(ii) $\varphi(t,0)=0$ для любого $t\in T$ и $\inf_{t\in T}\varphi(t,u)>0$ для всех $u>0$.

Будем говорить, что $f\in X^T$ является *функцией ограниченной φ-вариации на T* (при $T=[a,b]$ и $X=\mathbb{R}$ см. [5] или [22, § 10.4]) и писать $f\in \mathrm{BV}_\varphi(T;X)$, если для любого $p\in\mathcal{P}$ конечна величина

$$V_{\varphi,p}(f,T)=\sup\sum_{i=1}^m \varphi\Big(s_i, d_p\big(f(t_i),f(t_{i-1})\big)\Big),$$

где супремум берется по всем $m\in\mathbb{N}$ и всем наборам $\{t_i\}_{i=0}^m$, $\{s_i\}_{i=1}^m\subset T$ таким, что $t_0\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant t_m$ и $s_i\in[t_{i-1},t_i]\cap T$, $i=1,\ldots,m$.

Определение в § 6.1 получается отсюда при $\varphi(t,u)=u$.

Следующая теорема является *принципом выбора в классе* $\mathrm{BV}_\varphi(T;X)$.

Теорема 9. *Пусть выполнены предположения в начале § 6 и начале § 6.3. Если $\sup_{j\in\mathbb{N}}V_{\varphi,p}(f_j,T)=C_{\varphi,p}<\infty$ для всех $p\in\mathcal{P}$, то в $\{f_j\}$ существует подпоследовательность, которая сходится поточечно на T к некоторой функции $f\in\mathrm{BV}_\varphi(T;X)$.*

Доказательство проведем в три шага. В первых двух шагах будет обоснована возможность применения теоремы 1 (т. е. условие (1)); в этих шагах предполагается, что $p\in\mathcal{P}$ произвольно и фиксировано.

1. По определению величины $V_{\varphi,p}(f_j,T)$ при фиксированном $t_0\in T$ и любом $j\in\mathbb{N}$ найдем, что

$$\varphi\Big(t_0, d_p\big(f_j(t),f_j(t_0)\big)\Big)\leqslant V_{\varphi,p}(f_j,T)\leqslant C_{\varphi,p},\quad t\in T,$$

поэтому в силу условия (i)

$$d_p(f_j(t),f_j(t_0))\leqslant M_{\varphi,p}\equiv\sup\{u\in\mathbb{R}^+\mid \varphi(t_0,u)\leqslant C_{\varphi,p}\},\quad t\in T.$$

Отсюда следует, что для всех t, $s\in T$ и $j\in\mathbb{N}$

$$d_p(f_j(t),f_j(s))\leqslant d_p(f_j(t),f_j(t_0))+d_p(f_j(t_0),f_j(s))\leqslant 2M_{\varphi,p}. \tag{22}$$

(В частности, из (22) вытекает, что последовательность $\{f_j\}$ равномерно ограничена, т. е. $\sup_{j\in\mathbb{N}}\sup_{t,s\in T}d_p(f_j(t),f_j(s))\leqslant 2M_{\varphi,p}<\infty$ для всех $p\in\mathcal{P}$.)

2. Оценим теперь модуль вариации $\nu_p(n,f_j,T)$ для n, $j\in\mathbb{N}$. Пусть $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n\subset T$, $a_1\leqslant b_1\leqslant a_2\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant a_n\leqslant b_n$, и $s_i\in[a_i,b_i]\cap T$, $i=1,\ldots,n$. Из определения $V_{\varphi,p}(f_j,T)$ вытекают неравенства

$$\sum_{i=1}^n\varphi\Big(s_i,d_p\big(f_j(b_i),f_j(a_i)\big)\Big)\leqslant V_{\varphi,p}(f_j,T)\leqslant C_{\varphi,p},\quad j\in\mathbb{N}.$$

Принимая во внимание (22), получим:

$$\sum_{i=1}^n d_p(f_j(b_i),f_j(a_i))\leqslant\sup\bigg\{\sum_{i=1}^n u_i\;\bigg|\;\{u_i\}_{i=1}^n\subset\mathbb{R}^+\text{ такие, что } u_i\leqslant 2M_{\varphi,p}\\ \text{для всех } i=1,\ldots,n \text{ и } \sum_{i=1}^n\varphi(s_i,u_i)\leqslant C_{\varphi,p}\bigg\}$$

для всех $s_i \in [a_i, b_i] \cap T$, $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, в силу произвольности наборов $\{a_i\}_{i=1}^n$ и $\{b_i\}_{i=1}^n$ таких, как выше, найдем, что

$$\nu_p(n, f_j, T) \leqslant \sup_{s_1, \ldots, s_n} \sup\biggl\{ \sum_{i=1}^n u_i \biggm| \{u_i\}_{i=1}^n \subset [0, 2M_{\varphi,p}] \text{ и } \sum_{i=1}^n \varphi(s_i, u_i) \leqslant C_{\varphi,p} \biggr\}, \tag{23}$$

где внешний супремум $\sup_{s_1, \ldots, s_n}$ берется по всем наборам $\{s_i\}_{i=1}^n \subset T$ таким, что $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n$.

Обозначая правую часть (23) через $\xi_{\varphi,p}(n)$, получим неравенство

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \nu_p(n, f_j, T) \leqslant \xi_{\varphi,p}(n) \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Покажем, что $\xi_{\varphi,p}(n) = o(n)$.

Произвольно зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $n_0 = n_0(\varepsilon, \varphi, p) \in \mathbb{N}$ — наименьший номер такой, что (см. условие (ii))

$$n_0 \inf_{t \in T} \varphi(t, \varepsilon) \geqslant C_{\varphi,p}.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, $\{s_i\}_{i=1}^n \subset T$, $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n$, и $\{u_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^+$ такие, что $u_i \leqslant 2M_{\varphi,p}$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и $\sum_{i=1}^n \varphi(s_i, u_i) \leqslant C_{\varphi,p}$. Положим $I_1(n) = \{1 \leqslant i \leqslant n \mid u_i \leqslant \varepsilon\}$ и $I_2(n) = \{1 \leqslant i \leqslant n \mid u_i > \varepsilon\}$ и обозначим через $|I_1(n)|$ и $|I_2(n)|$ количество элементов в $I_1(n)$ и $I_2(n)$ соответственно. В силу монотонности функции $u \mapsto \varphi(s, u)$ (см. условие (i)) найдем, что

$$C_{\varphi,p} \geqslant \sum_{i=1}^n \varphi(s_i, u_i) \geqslant \sum_{i \in I_2(n)} \varphi(s_i, u_i) \geqslant \sum_{i \in I_2(n)} \varphi(s_i, \varepsilon) \geqslant |I_2(n)| \inf_{t \in T} \varphi(t, \varepsilon),$$

откуда

$$|I_2(n)| \leqslant \frac{C_{\varphi,p}}{\inf\limits_{t \in T} \varphi(t, \varepsilon)} \leqslant n_0.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n u_i \leqslant \sum_{i \in I_1(n)} u_i + \sum_{i \in I_2(n)} u_i \leqslant |I_1(n)|\varepsilon + |I_2(n)| \cdot 2M_{\varphi,p} \leqslant n\varepsilon + 2n_0 M_{\varphi,p}.$$

Взяв здесь супремум по всем наборам $\{u_i\}_{i=1}^n$ с указанными свойствами, а затем супремум по всем $\{s_i\}_{i=1}^n \subset T$ таким, что $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n$, получим:

$$\xi_{\varphi,p}(n) \leqslant n\varepsilon + 2n_0 M_{\varphi,p} \leqslant 2n\varepsilon \quad \text{для всех} \quad n \geqslant \max\{n_0, 2n_0 M_{\varphi,p}/\varepsilon\},$$

так что $\lim_{n\to\infty} \xi_{\varphi,p}(n)/n = 0$, что и требовалось.

3. Из оценки (24) и только что доказанного вытекает условие (1), поэтому по теореме 1 в $\{f_j\}$ найдется подпоследовательность (которую снова обозначим через $\{f_j\}$), сходящаяся поточечно на T к некоторой функции $f \in X^T$. Покажем, что $f \in \mathrm{BV}_\varphi(T; X)$. Для любого $p \in \mathcal{P}$ в силу определения $V_{\varphi,p}(f_j, T)$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и $\{t_i\}_{i=0}^m$, $\{s_i\}_{i=0}^m \subset T$ таких, что $t_{i-1} \leqslant t_i$ и $s_i \in [t_{i-1}, t_i] \cap T$, $i = 1, \ldots, m$, имеем:

$$\sum_{i=1}^m \varphi\Bigl(s_i, d_p\bigl(f_j(t_i), f_j(t_{i-1})\bigr)\Bigr) \leqslant V_{\varphi,p}(f_j, T), \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Переходя к нижнему пределу при $j \to \infty$, учитывая поточечную сходимость f_j к f и непрерывность функций $u \mapsto \varphi(s,u)$ (см. условие (i)), получим:

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi\Big(s_i, d_p\big(f(t_i), f(t_{i-1})\big)\Big) \leqslant \liminf_{j\to\infty} V_{\varphi,p}(f_j,T).$$

Взяв супремум по указанным наборам $\{t_i\}_{i=0}^m$ и $\{s_i\}_{i=1}^m$, найдем, что

$$V_{\varphi,p}(f,T) \leqslant \liminf_{j\to\infty} V_{\varphi,p}(f_j,T) \leqslant C_{\varphi,p} \quad \text{для всех} \quad p \in \mathcal{P},$$

а это означает, что $f \in \mathrm{BV}_\varphi(T;X)$. ■

Принцип выбора теоремы 9 содержит в качестве частных случаев результаты работ [4, теорема 1.3] ($\varphi(t,u) = \varphi(u)$, $T = [a,b]$ и $X = \mathbb{R}$), [3, теорема 1.3] и [11, § 3, пример 7] ($\varphi(t,u) = \varphi(u)$, $T \subset \mathbb{R}$ и X — метрическое пространство) и [5] (см. также [22, теорема 10.7(e)]), когда $\varphi : [a,b] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $T = [a,b]$ и $X = \mathbb{R}$.

Замечание 3. Отметим, что из оценок (23) и (24) (при $f_j = f$ для всех $j \in \mathbb{N}$) и теоремы 3 вытекает, что если $S \subset T = [a,b]$ — плотное множество, то

$$\{f : [a,b] \to X \mid f_{|S} \in \mathrm{BV}_\varphi(S;X)\} \subset U_S([a,b];X).$$

Это уточняет утверждение из [22, теорема 10.9] при $S = [a,b]$ и $X = \mathbb{R}$, установленное другим методом.

Замечание 4. Теорему 9 можно несколько обобщить. Скажем, что функция $f \in X^T$ является *функцией ограниченной обобщенной φ-вариации на T*, если найдется число $\lambda > 0$ (зависящее от f) такое, что $V_{\varphi_\lambda,p}(f,T) < \infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$, где $\varphi_\lambda(t,u) = \varphi(t,u/\lambda)$, $t \in T$, $u \in \mathbb{R}^+$. Пусть в теореме 9 существует такое число $\lambda > 0$, что $\sup_{j\in\mathbb{N}} V_{\varphi_\lambda,p}(f_j,T) = C_{\varphi,p} < \infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$; тогда поточечный на T предел $f \in X^T$ извлеченной из $\{f_j\}$ подпоследовательности будет таков, что $V_{\varphi_\lambda,p}(f,T) \leqslant C_{\varphi,p}$ для всех $p \in \mathcal{P}$.

6.4. Функции (обобщенной) Φ-ограниченной вариации.

Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность φ-функций, т. е. каждая функция $\varphi_k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ является непрерывной, неубывающей, неограниченной, и такой, что $\varphi_k(u) = 0$ лишь при $u = 0$. Последовательность Φ называется Φ-*последовательностью* [7], если она удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\varphi_{k+1}(u) \leqslant \varphi_k(u) \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{N} \text{ и } u \in \mathbb{R}^+ \tag{25}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(u) = \infty \quad \text{для всех} \quad u > 0. \tag{26}$$

Эти два условия для Φ предполагаются выполненными всюду в § 6.4.

Скажем, что $f \in X^T$ является *функцией Φ-ограниченной вариации на T* (см. [7], [23] при $T = [a,b]$ и $X = \mathbb{R}$), если для любого $p \in \mathcal{P}$ конечна следующая величина

$$V_{\Phi,p}(f,T) = \sup \sum_{k=1}^{m} \varphi_k\Big(d_p\big(f(b_{\sigma(k)}), f(a_{\sigma(k)})\big)\Big),$$

где супремум берется по всем $m \in \mathbb{N}$, всем наборам $\{a_k\}_{k=1}^m$, $\{b_k\}_{k=1}^m \subset T$ таким, что $a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant a_m \leqslant b_m$, и всем перестановкам $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$ (обозначение $V_{\Phi,p}(f, T)$ выглядит так же, как соответствующее обозначение из § 6.3, но это не приведет к недоразумениям в дальнейшем).

Определение в § 6.1 получается отсюда при $\varphi_k(u) = u$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Следующий результат — это *принцип выбора* в классе функций Φ-ограниченной вариации, действующих из T в равномерное пространство X.

Теорема 10. *Пусть выполнены предположения начала § 6 и начала § 6.4. Если $\sup_{j\in\mathbb{N}} V_{\Phi,p}(f_j, T) = C_p < \infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$, то $\{f_j\}$ содержит подпоследовательность, которая сходится поточечно на T к некоторой функции $f \in X^T$ такой, что $V_{\Phi,p}(f, T) \leqslant C_p$ для всех $p \in \mathcal{P}$.*

Доказательство. 1. В первом шаге покажем, что последовательность $\{f_j\}$ из теоремы 10 удовлетворяет условию (1) теоремы 1. Зафиксируем произвольное $p \in \mathcal{P}$.

При любом $j \in \mathbb{N}$ по определению $V_{\Phi,p}(f_j, T)$ найдем, что для всех t, $s \in T$ имеет место неравенство

$$\varphi_1\Big(d_p(f_j(t), f_j(s))\Big) \leqslant V_{\Phi,p}(f_j, T) \leqslant C_p,$$

откуда

$$\sup_{t,s\in T} d_p(f_j(t), f_j(s)) \leqslant M_p \equiv \sup\{u \in \mathbb{R}^+ \mid \varphi_1(u) \leqslant C_p\}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n \subset T$ — произвольные наборы чисел таких, что $a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n$. Каково бы ни было $j \in \mathbb{N}$ по определению величины $V_{\Phi,p}(f_j, T)$ для любой перестановки $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ имеем:

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k\Big(d_p\big(f_j(b_{\sigma(k)}), f_j(a_{\sigma(k)})\big)\Big) \leqslant V_{\Phi,p}(f_j, T) \leqslant C_p,$$

поэтому из определения модуля вариации $\nu_p(n, f_j, T)$ вытекает, что

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \nu_p(n, f_j, T) \leqslant \sup \sum_{i=1}^n u_i, \tag{28}$$

где супремум в правой части неравенства берется по всем наборам n чисел $\{u_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^+$ таким, что (см. (27)) $\max_{1\leqslant i\leqslant n} u_i \leqslant M_p$ и

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k(u_{\sigma(k)}) \leqslant C_p \text{ для всех перестановок } \sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}. \tag{29}$$

Обозначим через $\xi_p(n)$ правую часть в (28) и покажем, что $\xi_p(n) = o(n)$. В силу условия (26) для любого $\varepsilon > 0$ корректно определен номер

$$n_0 = n_0(\varepsilon, p) \equiv \min\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \sum_{k=1}^n \varphi_k(\varepsilon) > C_p\right\}.$$

Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$ и $\{u_i\}_{i=1}^n \subset [0, M_p]$ — произвольный набор n чисел, удовлетворяющих условию (29). Положим $I_1(n) = \{1 \leqslant k \leqslant n \mid u_k \leqslant \varepsilon\}$ и $I_2(n) = \{1 \leqslant k \leqslant n \mid u_k > \varepsilon\}$ и обозначим через $|I_1(n)|$ и $|I_2(n)|$ количество элементов в $I_1(n)$ и $I_2(n)$ соответственно. Покажем, что $|I_2(n)| \leqslant n_0$. Действительно, если бы $|I_2(n)| > n_0$, то $I_2(n) = \{k_1, \ldots, k_{i_0}\}$ для некоторых $i_0 \in \{n_0, \ldots, n\}$ и $k_i \in \{1, \ldots, n\}$, $i = 1, \ldots, i_0$. Определим перестановку $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ по правилу:

$$\sigma(i) = \begin{cases} k_i, & \text{если} \quad i \in \{1, \ldots, i_0\}, \\ \text{произвольно}, & \text{если} \quad i \in \{i_0 + 1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Тогда в силу неубывания каждой функции φ_k и определения номера n_0 для такой перестановки σ получим:

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(u_{\sigma(k)}) \geqslant \sum_{i \in I_2(n)} \varphi_i(u_{\sigma(i)}) \geqslant \sum_{i=1}^{n_0} \varphi_i(u_{k_i}) \geqslant \sum_{i=1}^{n_0} \varphi_i(\varepsilon) > C_p,$$

что противоречит (29). Следовательно, сумма под знаком супремума в правой части (28) оценивается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{k \in I_1(n)} u_k + \sum_{k \in I_2(n)} u_k \leqslant |I_1(n)|\varepsilon + |I_2(n)| M_p \leqslant$$
$$\leqslant n\varepsilon + n_0 M_p \leqslant 2n\varepsilon \quad \text{для всех} \quad n \geqslant N_0 \equiv \max\{n_0, n_0 M_p/\varepsilon\}.$$

В силу произвольности набора $\{u_i\}_{i=1}^n$, удовлетворяющего (29), отсюда вытекает, что $\xi_p(n)/n \leqslant 2\varepsilon$ для всех $n \geqslant N_0$, так что $\lim_{n\to\infty} \xi_p(n)/n = 0$.

2. Из только что доказанного и (28) вытекает, что для последовательности $\{f_j\}$ выполнено условие (1), поэтому по теореме 1 она содержит поточечно на T сходящуюся подпоследовательность, которую снова обозначим через $\{f_j\}$, а ее предел — через $f \in X^T$. Установим, что $V_{\Phi,p}(f, T) < \infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$. Пусть $p \in \mathcal{P}$, $m \in \mathbb{N}$, $\{a_i\}_{i=1}^m$, $\{b_i\}_{i=1}^m \subset T$, $a_1 \leqslant b_1 \leqslant \ldots \leqslant a_m \leqslant b_m$ и $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$ — перестановка. Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k\Big(d_p\big(f_j(b_{\sigma(k)}), f_j(a_{\sigma(k)})\big)\Big) \leqslant V_{\Phi,p}(f_j, T), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Переходя к нижнему пределу при $j \to \infty$, учитывая поточечную сходимость f_j к f и непрерывность функций φ_k, найдем, что

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k\Big(d_p\big(f(b_{\sigma(k)}), f(a_{\sigma(k)})\big)\Big) \leqslant \liminf_{j\to\infty} V_{\Phi,p}(f_j, T).$$

Следовательно,

$$V_{\Phi,p}(f, T) \leqslant \liminf_{j\to\infty} V_{\Phi,p}(f_j, T) \leqslant C_p,$$

и остается учесть произвольность $p \in \mathcal{P}$. ∎

Теорема 10 содержит в качестве частных случаев результаты работ [6, теорема 5] ($T = [a, b]$, $X = \mathbb{R}$ и $\varphi_k(u) = u/\lambda_k$, где $0 < \lambda_k \leqslant \lambda_{k+1}$ для $k \in \mathbb{N}$ и $\sum_{k=1}^\infty 1/\lambda_k = \infty$), [7, теорема 2.8], [23, теорема 2.6] и [13, § 6.1], где $T = [a, b]$, $X = \mathbb{R}$ и Φ есть произвольная Φ-последовательность.

Замечание 5. Если $S \subset [a,b] = T$ — плотное множество, то в силу оценок (28), (29) и теоремы 3 имеем включение

$$\{f : [a,b] \to X \mid V_{\Phi,p}(f,S) < \infty \text{ для всех } p \in \mathcal{P}\} \subset U_S([a,b];X).$$

Замечание 6. Теорему 10 можно несколько усилить. Скажем, что $f \in X^T$ является *функцией обобщенной Φ-ограниченной вариации на T*, если существует число $\lambda > 0$ (зависящее от f) такое, что $V_{\Phi_\lambda,p}(f,T) < \infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$, где $\Phi_\lambda = \{\varphi_{k,\lambda}\}_{k=1}^\infty$ и $\varphi_{k,\lambda}(u) = \varphi_k(u/\lambda)$, $k \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}^+$. Пусть в рамках теоремы 10 найдется число $\lambda > 0$ такое, что $\sup_{j\in\mathbb{N}} V_{\Phi_\lambda,p}(f_j,T) = C_p < \infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$; тогда подпоследовательность в $\{f_j\}$ будет поточечно на T сходиться к некоторой функции $f \in X^T$ такой, что $V_{\Phi_\lambda,p}(f,T) < \infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$.

Список литературы

[1] E. Helly, *Über lineare Funktionaloperationen.* Sitzungsber. Naturwiss. Kl. Kaiserlichen Akad. Wiss. Wien **121** (1912), 265–297.

[2] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной.* М.: Наука, 3-е изд., 1974.

[3] V. V. Chistyakov, *Selections of bounded variation.* J. Appl. Anal. **10** (2004), 1–82.

[4] J. Musielak, W. Orlicz, *On generalized variations* (I). Studia Math. **18** (1959), 11–41.

[5] S. Gniłka, *On the generalized Helly's theorem.* Functiones et Approximatio **4** (1976), 109–112.

[6] D. Waterman, *On Λ-bounded variation.* Studia Math. **57** (1976), 33–45.

[7] M. Schramm, *Functions of Φ-bounded variation and Riemann-Stieltjes integration.* Trans. Amer. Math. Soc. **287** (1985), 49–63.

[8] V. V. Chistyakov, *On mappings of bounded variation.* J. Dynam. Control Systems **3**, no. 2 (1997), 261–289.

[9] В. В. Чистяков, *К теории многозначных отображений ограниченной вариации одной вещественной переменной.* Матем. сборник **189**, no. 5 (1998), 153–176.

[10] S. A. Belov, V. V. Chistyakov, *A selection principle for mappings of bounded variation.* J. Math. Anal. Appl. **249**, no. 2 (2000), 351–366.

[11] V. V. Chistyakov, *The optimal form of selection principles for functions of a real variable.* J. Math. Anal. Appl. **310**, no. 2 (2005), 609–625.

[12] V. V. Chistyakov, *A new pointwise selection principle for mappings of one real variable.* Междунар. школа-конфер. по анализу и геометрии, посвященная 75-летию академика Ю. Г. Решетняка. Тез. докл. Новосибирск, 2004, 30–31.

[13] V. V. Chistyakov, *A selection principle for functions of a real variable.* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena e Reggio Emilia **LIII**, no. 1 (2005), 25–43.

[14] З. А. Чантурия, *Модуль изменения функции и его применения в теории рядов Фурье.* ДАН СССР **214** (1974), 63–66.

[15] З. А. Чантурия, *Об абсолютной сходимости рядов Фурье.* Матем. заметки **18**, no. 2 (1975), 185–192.

[16] Дж. Л. Келли, *Общая топология.* М.: Наука, 2-е изд., 1981.

[17] Л. Шварц, *Анализ. Том 1.* М.: Мир, 1972.

[18] А. А. Толстоногов, *О некоторых свойствах пространства правильных функций.* Матем. заметки **35**, no. 6 (1984), 803–812.

[19] R. L. Jeffery, *Generalised integrals with respect to functions of bounded variation*, Canad. J. Math., **10** (1958), 617–628.

[20] Ж. Дьедонне, *Основы современного анализа.* М.: Мир, 1964.

[21] В. В. Чистяков, *О многозначных отображениях конечной обобщенной вариации.* Матем. заметки **71**, no. 4 (2002), 611–632.

[22] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces.* Lecture Notes in Math. **1034**, Springer-Verlag, 1983.

[23] N. P. Schembari, M. Schramm, $\Phi V[h]$ *and Riemann-Stieltjes integration.* Colloq. Math. **60/61** (1990), 421–441.