МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное агентство по образованию

Московский государственный институт электроники и математики
(Технический университет)

Кафедра математического анализа

Методические указания
по курсу математического анализа для студентов I курса
инженерных факультетов
I семестр

Часть II
Производная и ее приложения

Москва 2005

Составитель ст. препод. Н. К. Ерастова

УДК 517

Методические указания по курсу математического анализа для студентов I курса инженерных факультетов. Часть II. Производная и ее приложения / Моск. гос. ин-т электроники и математики; Сост. Н. К. Ерастова. М., 2005. — 22 с.

Ил. 8

Разработка содержит методические указания к домашней контрольной работе №2 и аудиторным контрольным работам №2 и №3 по математическому анализу для студентов инженерных факультетов I семестра.

ISBN 5-94506-100-X

В этой методической разработке рассматриваются домашняя контрольная работа №2 и аудиторные контрольные работы №2 и №3 для студентов первого семестра инженерных факультетов.

Домашняя работа №2.

Задача 1. Вычислить производную указанной функции исходя из определения.

Напомним это определение: *производной функции* $y = f(x)$ *по переменной* x называется предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

или, что то же самое,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

если этот предел существует.

Например, для функции $y = \dfrac{-3x + 7}{x - 3}$ имеем

$$f(x + \Delta x) = \frac{-3(x + \Delta x) + 7}{x + \Delta x - 3}$$

и, следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{-3(x + \Delta x) + 7}{x + \Delta x - 3} - \dfrac{-3x + 7}{x - 3}}{\Delta x}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и раскрывая скобки, получаем

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-3(x + \Delta x) + 7)(x - 3) - (x + \Delta x - 3)(-3x + 7)}{(x + \Delta x - 3)(x - 3)\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{(x + \Delta x - 3)(x - 3)\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{(x + \Delta x - 3)(x - 3)} = \frac{2}{(x - 3)^2}. \end{aligned}$$

Задача 2. Определить, под каким углом пересекаются данные кривые в данной точке.

Напомним геометрический смысл производной: $f'(x_0)$ — угловой коэффициент k касательной $y = kx + b$, проведенной в точке касания. При этом $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательной к оси Ox.

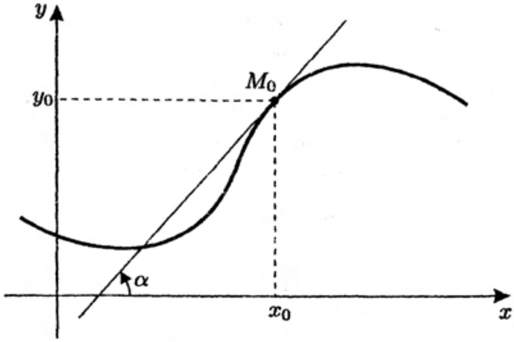


Рис. 1. Геометрический смысл производной $f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$

По определению, *углом между кривыми* в точке их пересечения называется угол между касательными к этим кривым, проведенными в этой точке.

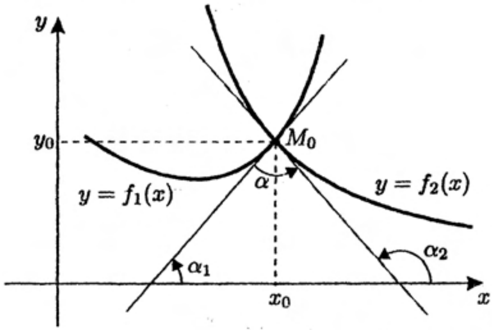


Рис. 2. Угол между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$

Поэтому мы можем воспользоваться формулой для тангенса угла (минимального из двух смежных) между двумя прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| = \left| \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)} \right|. \tag{1}$$

Отметим, что если $f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0) = -1$, то $\alpha = \pi/2$ (графики функций ортогональны, или перпендикулярны в точке их пересечения).

Например, найдем угол между кривыми $y = \sqrt{4x - x^2}$ и $y = \sqrt{4 - x^2}$ в точке их пересечения.

Точка пересечения определяется из уравнения $\sqrt{4x - x^2} = \sqrt{4 - x^2}$, которое равносильно системе

$$\begin{cases} 4x - x^2 = 4 - x^2, \\ 4 - x^2 \geqslant 0, \end{cases}$$

которая легко решается: $x = 1$. При этом $y = \sqrt{3}$, так что $M_0(1, \sqrt{3})$ — точка пересечения кривых.

Вычислим производные функций $f_1(x) = \sqrt{4x - x^2}$ и $f_2(x) = \sqrt{4 - x^2}$ в точке $x_0 = 1$:

$$f_1'(x) = \frac{(4x - x^2)'}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}}, \qquad f_1'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$f_2'(x) = \frac{(4 - x^2)'}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}, \qquad f_2'(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Теперь искомый угол можно найти при помощи формулы (1):

$$\operatorname{tg}\alpha = \left| \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \right| = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{3},$$

откуда $\alpha = \pi/3$.

Дополним решение чертежом (мы нашли искомый угол α без его использования). Кривая $y = \sqrt{4x - x^2}$ является верхней полуокружностью радиуса 2 с центром в точке $(2, 0)$, поскольку по определению корня

$$y = \sqrt{4x - x^2} \iff \begin{cases} y \geqslant 0, \\ y^2 = 4x - x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y \geqslant 0, \\ y^2 + (x - 2)^2 = 4. \end{cases}$$

Кривая $y = \sqrt{4 - x^2}$ также является полуокружностью радиуса 2, но ее центр — начало координат.

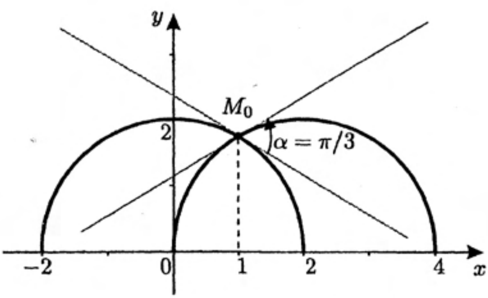


Рис. 3. Угол между кривыми $y = \sqrt{4x - x^2}$ и $y = \sqrt{4 - x^2}$

Задача 3. Определить, при каких значениях A и B функция $y = e^{3x}\cos 2x$ является решением дифференциального уравнения $y'' + Ay' + By = 0$.

По определению функция $y = y(x)$ называется *решением дифференциального уравнения* $y'' + Ay' + By = 0$, если после подстановки $y(x)$ вместо y в это уравнение получается тождественное (т. е. справедливое при всех допустимых значениях x) равенство $y''(x) + Ay'(x) + By(x) \equiv 0$.

Вычислим производные первого и второго порядков заданной функции:

$$y' = 3e^{3x}\cos 2x - 2e^{3x}\sin 2x = e^{3x}(3\cos 2x - 2\sin 2x),$$
$$y'' = 3e^{3x}(3\cos 2x - 2\sin 2x) + e^{3x}(-6\sin 2x - 4\cos 2x) = e^{3x}(5\cos 2x - 12\sin 2x),$$

и подставим результаты вычислений в дифференциальное уравнение:

$$e^{3x}(5\cos 2x - 12\sin 2x) + Ae^{3x}(3\cos 2x - 2\sin 2x) + Be^{3x}\cos 2x = 0.$$

После приведения подобных слагаемых получим равенство

$$(3A + B + 5)\cos 2x + (-2A - 12)\sin 2x = 0,$$

которое будет тождеством (т. е. будет справедливо при всех значениях x), только если коэффициенты, стоящие в круглых скобках перед $\cos 2x$ и $\sin 2x$, равны нулю:

$$\begin{cases} 3A + B + 5 = 0, \\ -2A - 12 = 0. \end{cases}$$

Решая (любым способом) эту систему алгебраических уравнений, получаем $A = -6$, $B = 13$.

Таким образом, искомое уравнение имеет вид $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Ответ: $A = -6$, $B = 13$.

Разберем еще один пример: определить, при каких значениях A и B функция $y = (Ax+B)e^{-x}$ является решением дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 3y = (18x + 13)e^{-x}$.

Схема решения аналогична. Ищем производные первого и второго порядка,

$$y' = e^{-x}(-Ax - B + A), \qquad y'' = e^{-x}(Ax + B - 2A),$$

и подставляем в дифференциальное уравнение:

$$e^{-x}(Ax + B - 2A) - 5e^{-x}(-Ax - B + A) + 3e^{-x}(Ax + B) = (18x + 13)e^{-x}.$$

Сокращая на e^{-x} (это допустимо, поскольку $e^{-x} \neq 0$) и приводя подобные слагаемые, получаем равенство

$$(9A - 18)x - 7A + 9B - 13 = 0,$$

которое является тождеством только в случае, когда коэффициент при x и свободный член в линейном выражении слева равны нулю:

$$\begin{cases} 9A - 18 = 0, \\ -7A + 9B - 13 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему линейных уравнений, получаем $A = 2$ и $B = 3$, т. е. $y = (2x + 3)e^{-x}$ — решение дифференциального уравнения.

Ответ: $A = 2$, $B = 3$.

Задача 4 посвящена вычислению пределов при помощи теоремы о замене функции на эквивалентные, в том числе при помощи формулы линеаризации.

Напомним, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то справедливо равенство

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{при } x \to x_0. \tag{2}$$

Если $f(x_0) = 0$, то

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{при } x \to x_0.$$

Если к тому же $f'(x_0) \neq 0$, то эту формулу можно переписать в виде

$$f(x) \sim f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{при } x \to x_0. \tag{3}$$

Формула (3) — один из вариантов формулы линеаризации.

Если в формуле (2) справа отбросить малое при $x \to x_0$ слагаемое $o(x - x_0)$, то мы получим другой вариант формулы линеаризации:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \approx x_0. \tag{4}$$

Смысл линеаризации состоит в том, что произвольная (но дифференцируемая в точке x_0) функция заменяется на близкую к ней линейную. Разумеется, при этом равенство становится приближенным, а погрешность (т. е. разница между левой и правой частями) равна $o(x - x_0)$ при $x \to x_0$ (т. е. стремится к 0 быстрее, чем $x - x_0$).

Применим формулу (3) при решении следующей задачи:

1) Вычислить

$$\lim_{x \to 1} \frac{\arcsin(x^3 - \sqrt{x})}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}.$$

Здесь числитель и знаменатель являются непрерывными (и даже дифференцируемыми) в точке $x_0 = 1$ функциями, но обращаются в этой точке в 0. Это означает, что мы имеем дело с неопределенностью типа $\dfrac{0}{0}$. Вычислим производные функций в числителе и знаменателе в точке $x_0 = 1$.

Для числителя $f(x) = \arcsin(x^3 - \sqrt{x})$ имеем $f'(x) = \dfrac{3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1 - (x^3 - \sqrt{x})^2}}$ и, следовательно, $f'(1) = \dfrac{5}{2}$. Для знаменателя $g(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}$ имеем $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} - \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ и, следовательно, $g'(1) = -\dfrac{1}{2}$.

Учитывая, что $f(1) = g(1) = 0$, в силу формулы (3) получаем

$$f(x) \sim \frac{5}{2}(x-1) \quad (x \to 1), \qquad g(x) \sim -\frac{1}{2}(x-1) \quad (x \to 1).$$

Таким образом, по теореме о замене функций на эквивалентные

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{5}{2}(x-1)}{-\frac{1}{2}(x-1)} = -5.$$

Ответ: $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\arcsin(x^3 - \sqrt{x})}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}} = -5.$

Следующая задача также решается при помощи теоремы о замене функций на эквивалентные.

2) Вычислить

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{3x^2 + 1} \sin \frac{x+2}{7x^2 + 5x + 3}.$$

Заметим, что функция $\dfrac{x+2}{7x^2 + 5x + 3}$ является бесконечно малой при $x \to -\infty$ $(x \to +\infty)$. В силу формулы $\sin\alpha \sim \alpha$, справедливой для любой бесконечно малой α, имеем

$$\sin\frac{x+2}{7x^2+5x+3}\sim\frac{x+2}{7x^2+5x+3}, \qquad x\to\pm\infty.$$

Кроме того, выделяя главное слагаемое при $x\to\pm\infty$ в сумме $3x^2+1$, получаем, что

$$\sqrt{3x^2+1}\sim\sqrt{3x^2}=\sqrt{3}|x|, \qquad x\to\pm\infty.$$

(Не забывайте, что $\sqrt{a^2}=|a|$.) Таким образом,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{3x^2+1}\sin\frac{x+2}{7x^2+5x+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{3}|x|\,\frac{x+2}{7x^2+5x+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{3}|x|\,\frac{x}{7x^2}.$$

Остается рассмотреть два случая:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{3}}{7x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{3}}{7x}=\frac{\sqrt{3}}{7}, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{3}}{7x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{3}}{7x}=-\frac{\sqrt{3}}{7}$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2+1}\sin\dfrac{x+2}{7x^2+5x+3}=\dfrac{\sqrt{3}}{7}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2+1}\sin\dfrac{x+2}{7x^2+5x+3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{7}$.

Задача 5. При помощи формулы линеаризации решить (приближенно) уравнение

$$x^3+\alpha x-8=0$$

с малым параметром α.

Отбросим сначала слагаемое αx, содержащее малый параметр, и найдем решение упрощенного уравнения

$$x^3-8=0.$$

Полученное решение $x_0=2$ разумно считать нулевым приближением к искомому корню исходного уравнения. Затем при помощи формулы (4) линеаризуем левую часть исходного уравнения $x^3+\alpha x-8=0$ в этой точке:

$$f(x)=x^3+\alpha x-8, \qquad f(2)=2\alpha,$$
$$f'(x)=3x^2+\alpha, \qquad f'(2)=12+\alpha;$$

поэтому (согласно формуле (4))

$$f(x)=x^3+\alpha x-8\approx 2\alpha+(12+\alpha)(x-2).$$

Полученное (при помощи линеаризации) уравнение является линейным:

$$2\alpha+(12+\alpha)(x-2)=0.$$

Решая его, получаем следующее (первое) приближение:

$$x_1=2-\frac{2\alpha}{12+\alpha},$$

к корню исходного уравнения.

Ответ: $x\approx 2-\dfrac{2\alpha}{12+\alpha}$.

Заметим, что можно продолжить рассуждения, линеаризовав исходное уравнение в точке x_1. Решив новое линейное уравнение, получим следующее приближение x_2 и т. д. Такой метод называется *методом Ньютона* приближенного решения нелинейного уравнения.

Задача 6. Найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке функции.

Для решения этой задачи следует:

а) найти все точки отрезка, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю или не существует (т. е. критические точки функции);

б) добавить к полученному набору точек концы отрезка.

Затем во всех этих точках следует вычислить значения функции $f(x)$ и выбирать из них наименьшее m и наибольшее M.

1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x - 2\ln x$ на отрезке $[1, e]$.

а) Поскольку $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$, функция дифференцируема на всем отрезке. Ищем критические точки: $1 - \dfrac{2}{x} = 0 \iff x = 2$, причем $2 \in [1, e]$.

б) Добавляем к единственной полученной точке 2 концы отрезка 1 и e.

Вычисляем значения функции $f(x) = x - 2\ln x$ в этих точках:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2 - 2\ln 2 = 0{,}6137\ldots, \quad f(e) = e - 2 = 0{,}7182\ldots.$$

Таким образом, наименьшее значение функции $f(x) = x - 2\ln x$ равно $m = 2 - 2\ln 2$. Это значение достигается в точке 2. Наибольшее значение функции $f(x) = x - 2\ln x$ равно $M = 1$. Это значение достигается в точке 1.

Задача 7. Последняя задача домашней работы №2 является текстовой задачей на экстремум. Решая такие задачи, следует придерживаться такой схемы:

а) выбрать переменную и определить промежуток ее изменения;

б) выразить исследуемую величину через эту переменную;

в) найти для полученной функции на данном промежутке наибольшее или наименьшее значение.

1) В данный шар радиуса R вписать цилиндр, имеющий наибольшую боковую поверхность.

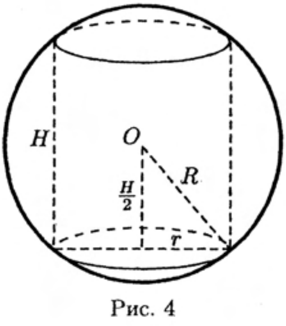


Рис. 4

а) Выберем в качестве переменной высоту цилиндра H. Ясно, что $H \in [0, 2R]$.

б) Пусть r — радиус основания цилиндра. Тогда по теореме Пифагора $r^2 = R^2 - \frac{H^2}{4}$. Площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле

$$S(H) = 2\pi r H = 2\pi H \sqrt{R^2 - \frac{H^2}{4}}.$$

в) Найдем максимум функции $S(H)$ на отрезке $[0, 2R]$: эта функция непрерывна на отрезке $[0, 2R]$ и дифференцируема на интервале $(0, 2R)$,

$$S'(H) = 2\pi\left(\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}H^2} + \frac{-\frac{1}{2}H^2}{2\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}H^2}}\right) = \pi\,\frac{2R^2 - H^2}{\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}H^2}};$$

критические точки определяются из уравнения $S'(H) = 0 \iff 2R^2 - H^2 = 0$. Из двух корней этого уравнения только один, $R\sqrt{2}$, лежит на отрезке $[0, 2R]$. На концах отрезка $[0, 2R]$ функция $S(H)$ обращается в 0. Таким образом, максимальное значение $S_{\max}$ этой функции на отрезке $[0, 2R]$ достигается при $H = \sqrt{2}R$ и равно

$$S_{\max} = S(\sqrt{2}R) = 2\pi R^2.$$

Ответ: Максимальный объем имеет вписанный цилиндр высоты $H = \sqrt{2}R$.

Заметим, что иногда для упрощения вычислений исследуемую функцию можно заменить более простой. Например, вместо функции $\sqrt{g(x)}$ исследовать функцию $g(x)$ (ясно, что они имеют одни и те же точки экстремума).

2) Найти кратчайшее расстояние от точки $M(1,0)$ до кривой $y = \sqrt{x^2+6x+10}$.

Пусть $A(x,y)$ — произвольная точка кривой. Тогда

$$|AM| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + x^2 + 6x + 10} = \sqrt{2x^2 + 4x + 11}.$$

Найдем наименьшее значение величины $f(x) = |AM|^2 = 2x^2 + 4x + 11$, где $x \in (-\infty, +\infty)$. Поскольку $f'(x) = 4x + 4$, функция $f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty, -1)$ (здесь $f'(x) < 0$) и возрастает на промежутке $(-1, +\infty)$ (здесь $f'(x) > 0$). Таким образом, $x = -1$ — точка минимума, и $|AM| = \sqrt{2\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1) + 11} = 3$ — искомое минимальное расстояние.

Ответ: Кратчайшее расстояние равно 3.

Аудиторная контрольная работа №2 состоит из двух частей.

В первой части требуется вычислить производные с помощью правил дифференцирования и таблицы производных основных элементарных функций.

Во второй части требуется провести линеаризацию функции в точке, написать уравнение касательной к графику этой функции и применить формулу линеаризации для приближенного вычисления.

При вычислении производных сложных функций полезно записать таблицу производных в следующем виде:

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u', \qquad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u', \qquad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2},$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}, \qquad (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2},$$

$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}, \qquad (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u',$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \qquad (e^u)' = e^u \cdot u',$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \qquad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}.$$

Рассмотрим примеры:

1) $y = \sin x^3$. Это сложная функция, для которой $u = x^3$ — внутренняя функция, а $y = \sin u$ — внешняя. Согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$y' = \cos u \cdot u' = \cos x^3 \cdot 3x^2.$$

2) $y = \sin^3 x$. Это также сложная функция, но теперь $y = u^3$ — внешняя функция, а $u = \sin x$ — внутренняя, следовательно,

$$y' = 3u^2 \cdot u' = 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

3) $y = \ln^7(\operatorname{tg} 2x)$. Это «многоступенчатая» сложная функция:

$$x \to 2x \to \operatorname{tg}(\ldots) \to \ln(\ldots) \to (\ldots)^7.$$

Она устроена, как матрешка. И дифференцировать ее нужно, постепенно добираясь до самой внутренней функции и четырежды применяя правило дифференцирования сложной функции:

$$y' = 7\ln^6(\operatorname{tg} 2x) \cdot (\ln(\operatorname{tg} 2x))' = 7\ln^6(\operatorname{tg} 2x) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \cdot (\operatorname{tg} 2x)'$$

$$= 7\ln^6(\operatorname{tg} 2x) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot (2x)' = 7\ln^6(\operatorname{tg} 2x) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2.$$

Разумеется, желательно упростить полученный ответ, если это возможно:

$$y' = \frac{14\ln^6(\operatorname{tg} 2x)}{\sin 2x \cdot \cos 2x} = \frac{7\ln^6(\operatorname{tg} 2x)}{\sin 4x}.$$

Наибольшую трудность в этой контрольной работе вызывает дифференцирование функций вида

$$y = f(x)^{g(x)}.$$

Дифференцируя такую функцию, можно воспользоваться любым из двух описанных ниже приемов.

а) Логарифмическое дифференцирование. Состоит в том, что мы сначала логарифмируем исходную функцию,

$$\ln y = g(x) \ln f(x),$$

а затем дифференцируем полученное равенство:

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Отсюда получается формула для y':

$$y' = y\left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Однако не стоит запоминать эту громоздкую формулу. Гораздо полезнее запомнить сам прием и повторять его для каждой конкретной функции.

б) Можно записать исходную функцию $y = f(x)^{g(x)}$ в виде

$$y = (e^{\ln f(x)})^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

и дифференцировать ее как сложную функцию.

Например, вычисляя производную функции $y = x^x$ при помощи логарифмического дифференцирования, записываем равенство

$$\ln y = x \ln x,$$

дифференцируем левую часть как сложную функцию, правую как произведение,

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x},$$

откуда получаем, что

$$y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

Этого же можно добиться при помощи следующей выкладки:

$$y' = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = e^{x \ln x} \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

Приведем еще один пример: $y = x^{\sin x}$.

Применим логарифмическое дифференцирование:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x \implies \frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$
$$\implies y' = y \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

Этот же ответ можно получить другим способом:

$$(x^{\sin x})' = (e^{\sin x \cdot \ln x})' = e^{\sin x \cdot \ln x} \cdot (\sin x \cdot \ln x)'$$
$$= e^{\sin x \cdot \ln x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

Разумеется, двумя способами дифференцировать совсем не обязательно. Вы можете пользоваться любым из двух приемов.

Наконец, при дифференцировании функции, заданной параметрически,

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

следует использовать формулу $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. При этом сама производная y'_x также является функцией, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}\,. \end{cases}$$

Например, дифференцируя параметрически заданную функцию

$$\begin{cases} x(t) = 5t + 1, \\ y(t) = t^3, \end{cases}$$

записываем

$$y'_x = \frac{(t^3)'}{(5t+1)'} = \frac{3t^2}{5},$$

откуда

$$\begin{cases} x(t) = 5t + 1, \\ y'_x(t) = \dfrac{3t^2}{5}\,. \end{cases}$$

Задача 2. Провести линеаризацию функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2+4}$ в точке $x_0 = 2$, написать уравнение касательной к графику в соответствующей точке и с помощью формулы линеаризации вычислить приближенное значение числа $\sqrt[3]{2{,}005^2+4}$.

Напомним еще раз необходимые формулы (см. (2), (4)): если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то справедливо равенство

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{при } x \to x_0.$$

Эту формулу называют асимптотической формулой линеаризации. Если в этой формуле справа отбросить малое при $x \to x_0$ слагаемое $o(x - x_0)$, то мы получим приближенную формулу линеаризации:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{при } x \approx x_0.$$

Кроме того, напомним уравнение касательной к графику дифференцируемой функции в точке с абсциссой x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Проводим вычисления для нашего примера:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+4}, \qquad f(2) = 2,$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+4)^2}}, \qquad f'(2) = \frac{2\cdot 2}{3\cdot\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{3}\,.$$

Следовательно, согласно приближенной формуле линеаризации

$$\sqrt[3]{x^2+4} \approx 2 + \frac{1}{3}(x-2), \quad \text{при } x \approx 2.$$

Уравнение касательной имеет вид

$$y = 2 + \frac{1}{3}(x-2).$$

(Отметим, что здесь раскрывать скобки и приводить подобные слагаемые нет необходимости.)

Для вычисления величины $\sqrt[3]{2,005^2+4} = f(2{,}005)$ вновь воспользуемся приближенной формулой линеаризации: при $x = 2{,}005$ получим

$$\sqrt[3]{2{,}005^2+4} \approx 2 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}005 = 2{,}00166\ldots \approx 2{,}0017.$$

Контрольная работа №3 состоит из трех задач, причем последняя задача состоит из двух частей, аудиторной и домашней.

Задача 1. Вычислить предел при помощи правила Лопиталя.

Имеется в виду следующий (простейший) вариант правила Лопиталя: если функции $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0 и

$$f(x_0) = g(x_0) = 0, \quad g'(x_0) \neq 0,$$

то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

1) Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(2x^2 - \sqrt{x})}{x^{10} - x^9 + \operatorname{tg}(x-1)}$.

Все условия, необходимые для применения простейшего правила Лопиталя, выполнены; поэтому

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(2x^2 - \sqrt{x})}{x^{10} - x^9 + \operatorname{tg}(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{1}{2x^2 - \sqrt{x}} \cdot \left(4x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{10x^9 - 9x^8 + \dfrac{1}{\cos^2(x-1)}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{2-1} \cdot \left(4 - \dfrac{1}{2}\right)}{10 - 9 + 1} = \frac{7/2}{2} = \frac{7}{4}$$

2) Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(3x-2) - \sin(2x-1)}{e^{x^2} - e^{\sqrt{x}}}$.

Вновь пользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(3x-2) - \sin(2x-1)}{e^{x^2} - e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 1} \frac{3\cos(3x-2) - 2\cos(2x-1)}{2xe^{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{3\cos 1 - 2\cos 1}{2e - \dfrac{1}{2}\, e} = \frac{2\cos 1}{3e}.$$

Задача 2. Используя разложение Маклорена, определить знак функции в малой проколотой окрестности нуля.

Приведем необходимые разложения:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \tag{5}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \tag{6}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \tag{7}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \tag{8}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n). \tag{9}$$

Эти разложения справедливы при $x \to 0$. Их следует запомнить.

Из формулы (5) легко получить формулу

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \ldots + \frac{x^n \ln^n a}{n!} + o(x^n).$$

Из формулы (9), в частности, вытекает, что

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + o(x^2), \quad x \to 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x^2 + o(x^2), \quad x \to 0.$$

Наконец, из (9) можно вывести формулу

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}), \qquad x \to 0.$$

Рассмотрим примеры.

1) Определить знак функции $f(x) = \sqrt{1-x^2} - \cos x$ в малой проколотой окрестности нуля.

Для слагаемого $\sqrt{1-x^2}$ воспользуемся разложением (9) с $\alpha = 1/2$, а вместо x подставим величину $(-x^2)$ (которая также является бесконечно малой при $x \to 0$):

$$(1 + (-x^2))^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-x^2)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-x^2)^n + o((-x^2)^n), \qquad x \to 0.$$

Угадать заранее, сколько нужно будет удержать слагаемых в используемых формулах для решения задачи, довольно трудно. Например, выписав разложения для функций $\sqrt{1-x^2}$ и $\cos x$ с двумя слагаемыми (не считая $o(\ldots)$), получим:

$$\sqrt{1-x^2} - \cos x = \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)\right) = o(x^2), \qquad x \to 0.$$

Извлечь необходимую информацию из этой формулы невозможно. (Внимание $o(x^2)-o(x^2)$ не является функцией, равной 0 тождественно. Мы можем лишь утверждать, что $o(x^2)-o(x^2)=o(x^2)$, $x\to 0$.)

Запишем аналогичные формулы с тремя слагаемыми:

$$\sqrt{1-x^2}-\cos x=\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)$$
$$=-\frac{1}{6}x^4+o(x^4)=x^4\left(-\frac{1}{6}+o(1)\right).$$

Здесь $x^4>0$ при $x\neq 0$, а выражение в скобках отрицательно в некоторой окрестности точки 0 (почему?).

Таким образом, в малой проколотой окрестности нуля функция $f(x)$ отрицательна.

2) Определить знак функции $f(x)=2^x+\dfrac{1}{2^x}-2$ в малой окрестности нуля.

Применяем разложения для 2^x и 2^{-x}, удерживая по 3 слагаемых:

$$2^x+\frac{1}{2^x}-2=2^x+2^{-x}-2$$
$$=1+x\ln 2+\frac{x^2\ln^2 2}{2!}+o(x^2)+1-x\ln 2+\frac{x^2\ln^2 2}{2!}+o(x^2)-2$$
$$=x^2\ln^2 2+o(x^2)=x^2(\ln^2 2+o(1)),\qquad x\to 0.$$

В результате имеем $f(x)>0$ в малой проколотой окрестности точки 0.

3) Определить знак функции $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}x-x+\frac{x^3}{3}}{x^4}$ в малой проколотой окрестности нуля.

Использовав формулу Маклорена для функции $\operatorname{arctg}x$ с тремя слагаемыми, получим

$$f(x)=\frac{\operatorname{arctg}x-x+\dfrac{x^3}{3}}{x^4}=\frac{x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+o(x^5)-x+\dfrac{x^3}{3}}{x^4}$$
$$=\frac{\dfrac{x^5}{5}+o(x^5)}{x^4}=x\left(\frac{1}{5}+o(1)\right),\qquad x\to 0.$$

Здесь сумма двух слагаемых в скобках положительна в малой проколотой окрестности нуля. Значит, исследуемая функция имеет в малой проколотой окрестности нуля знак, совпадающий со знаком x (т. е. отрицательна слева от точки 0 и положительна справа от этой точки).

Задача 3. Провести полное исследование с построением графика функции.

Стандартная схема исследования состоит из следующих пунктов:

1) область определения функции, нули функции и промежутки знакопостоянства, четность, периодичность, непрерывность и точки разрыва, поведение в окрестности особых точек и при $x\to-\infty$ и $+\infty$, асимптоты;

2) промежутки монотонности, экстремумы;

3) промежутки выпуклости, точки перегиба.

Например, исследуем функцию $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$.

1) Областью определения $D(y)$ является вся числовая ось $(-\infty, +\infty)$, функция непрерывна на всей оси. Найдем промежутки знакопостоянства и нули функции:

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 = x^2\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right).$$

Здесь квадратный трехчлен в скобках положителен при всех x, поскольку его дискриминант отрицателен. Так что $f(x) > 0$ при $x \neq 0$.

Далее,

$$f(x) \sim \frac{1}{4}x^4 \quad \text{при } x \to \pm\infty.$$

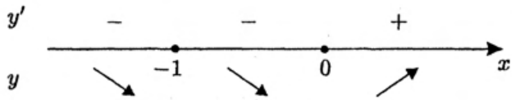
Отсюда следует, в частности, что $f(x) \to +\infty$ при $x \to \pm\infty$.

Асимптот нет.

2) С помощью первой производной

$$y' = x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$$

находим промежутки монотонности и экстремумы, отмечая на оси абсцисс ее нули и знаки:



Таким образом, функция убывает на промежутке $(-\infty, 0]$ и возрастает на промежутке $[0, +\infty)$; точка $x = 0$ — ее точка минимума, $f_{\min} = f(0) = 0$ — наименьшее значение функции.

Критическая точка $x = -1$ не является точкой экстремума, поскольку при переходе через эту точку производная не меняет знак. Однако касательная к графику функции в этой точке горизонтальна.

3) С помощью второй производной

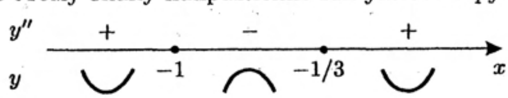
$$y'' = 3x^2 + 4x + 1$$

исследуем функцию на выпуклость и найдем возможные точки перегиба.

Решая квадратное уравнение

$$3x^2 + 4x + 1 = 0,$$

получаем точки $x_1 = -1$ и $x_2 = -1/3$. Отметим на оси Ox знак производной y'' и соответствующее этому знаку направление выпуклости функции y'':



Таким образом, на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(-1/3, +\infty)$ функция выпукла вниз, а на промежутке $(-1, -1/3)$ выпукла вверх. Точки $x = -1$ и $x = -1/3$ являются точками перегиба, поскольку вторая производная меняет в этих точках свой знак. Можно найти значения функции в этих точках:

$$y(-1) = \frac{1}{12}, \qquad y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{4 \cdot 3^4}.$$

На основании проведенного исследования строим график:

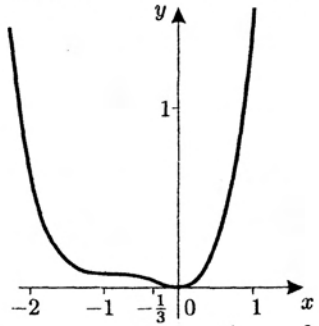


Рис. 5. График функции $y = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2$

Домашняя часть контрольной работы №3 содержит две функции для исследования.

1. Провести полное исследование функции $y = 2\ln|x+4| - \ln|x+2|$ с построением графика.

1) Область определения функции определяется соотношениями $x \neq -4$ и $x \neq -2$, т. е. является объединением трех промежутков:

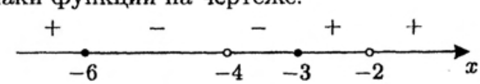
$$D(y) = (-\infty, -4) \cup (-4, -2) \cup (-2, +\infty).$$

Чтобы найти нули функции, решим уравнение $2\ln|x+4| - \ln|x+2| = 0$:

$$2\ln|x+4| - \ln|x+2| = 0 \iff \ln(x+4)^2 = \ln|x+2|$$

$$\iff \begin{cases} (x+4)^2 = |x+2|, \\ |x+2| \neq 0, \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+4)^2 = x+2, \\ x+2 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} (x+4)^2 = -(x+2), \\ x+2 < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Первая из выписанных систем решений не имеет; решениями второй являются числа -6 и -3. Добавив к этим нулям исходной функции ее точки разрыва -4 и -2, изобразим знаки функции на чертеже:



Далее изучаем поведение функции при $x \to \pm\infty$ и в окрестности точек разрыва. Имеем

$$f(x) = \ln\frac{(x+4)^2}{|x+2|} = \ln|x| + \ln\frac{(x+4)^2}{|x(x+2)|}.$$

Здесь $\ln|x| \to +\infty$ и $\ln\dfrac{(x+4)^2}{|x(x+2)|} \to 0$ при $x \to \pm\infty$; поэтому

$$f(x) \sim \ln|x| \quad \text{при } x \to \pm\infty.$$

Кроме того, при $x \to -2$ имеем $\ln|x+4| \to \ln 2$ и $\ln|x+2| \to -\infty$. Отсюда следует, что

$$f(x) \sim -\ln|x+2|, \qquad x \to -2,$$

и, в частности,

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to-2}(-\ln|x+2|) = +\infty.$$

Аналогично при $x \to -4$ имеем $\ln|x+4| \to -\infty$ и $\ln|x+2| \to \ln 2$; поэтому

$$f(x) \sim 2\ln|x+4|, \qquad x \to -4,$$

и, в частности,

$$\lim_{x\to-4} f(x) = \lim_{x\to-4} 2\ln|x+4| = -\infty.$$

Таким образом, прямые $x = -2$ и $x = -4$ являются вертикальными асимптотами.

Точки $x = -4$ и $x = -2$ являются точками разрыва второго рода. В остальных точках числовой оси функция непрерывна (т. е. она непрерывна на всей области определения). Наклонных асимптот нет.

Эту информацию можно следующим образом отобразить на рисунке:

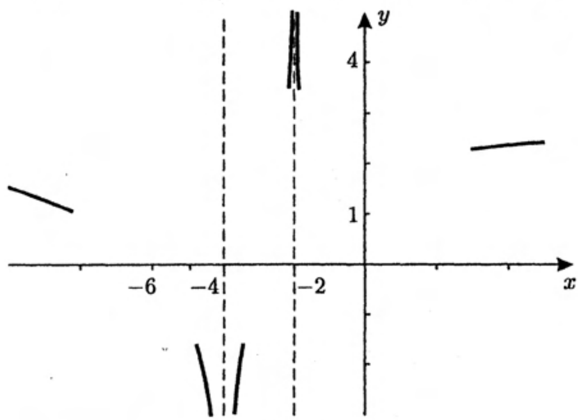
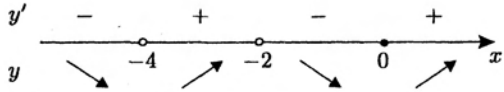


Рис. 6

2) Анализируем первую производную

$$y' = \frac{2}{x+4} - \frac{1}{x+2} = \frac{x}{(x+4)(x+2)}\,.$$

(Обратите внимание, модулей в этой формуле нет; $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$ — табличная производная.) Отмечаем на оси абсцисс нули и знаки производной, которые определяют промежутки возрастания и убывания функции, а также точки экстремума:

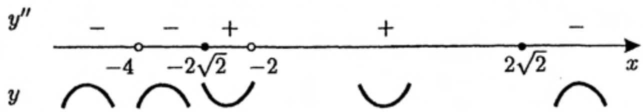


Таким образом, $x = 0$ — точка минимума функции. Значение функции в этой точке равно $y(0) = \ln 8$.

3) Вычисляем и анализируем вторую производную:

$$y'' = -\frac{2}{(x+4)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{8 - x^2}{(x+4)^2(x+2)^2} = \frac{(2\sqrt{2} - x)(2\sqrt{2} + x)}{(x+4)^2(x+2)^2}.$$

Отмечаем на оси абсцисс нули и знаки второй производной, которые определяют промежутки выпуклости функции, а также точки перегиба:



Из этой схемы видно, в частности, что $x = \pm 2\sqrt{2}$ — точки перегиба функции. Окончательный результат изображен на рис. 7

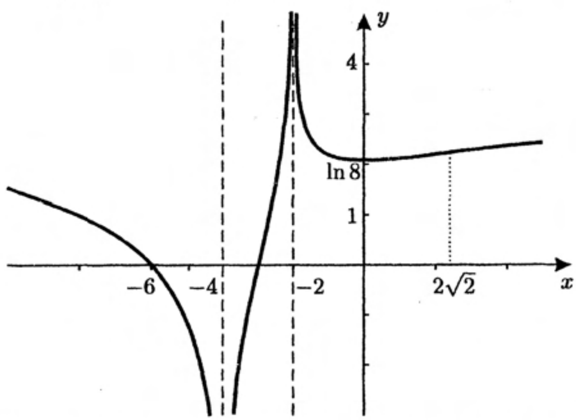


Рис. 7. График функции $y = 2\ln|x+4| - \ln|x+2|$

2. Провести полное исследование функции $y = (x-1)^2 e^x$ с построением графика.

1) Областью определения функции является вся числовая ось. Функция неотрицательна и обращается в ноль только при $x = 1$. Далее,

$$\lim_{x\to+\infty} (x-1)^2 e^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} (x-1)^2 e^x = \{x = -t\} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(-t-1)^2}{e^t} = 0$$

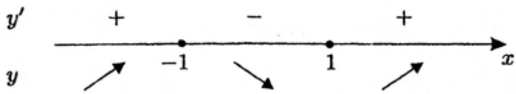
(согласно шкале роста на бесконечности). В частности, $y = 0$ — левая горизонтальная асимптота.

Функция непрерывна на всей числовой оси.

2) Вычисляем производную

$$y' = 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x = e^x(x^2 - 1)$$

и рисуем схему



из которой определяем, что $x = -1$ — точка максимума (значение в этой точке равно $y(-1) = 4/e$), а $x = 1$ — точка минимума (значение в этой точке равно $y(1) = 0$).

3) Вычисляем вторую производную

$$y'' = e^x(x^2 - 1) + e^x \cdot 2x = e^x(x^2 + 2x - 1),$$

из квадратного уравнения $x^2 + 2x - 1 = 0$ находим ее нули $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$. Из схемы

находим точки перегиба $x = -1 \pm \sqrt{2}$ и промежутки выпуклости.

Окончательный результат представлен на рис. 8:

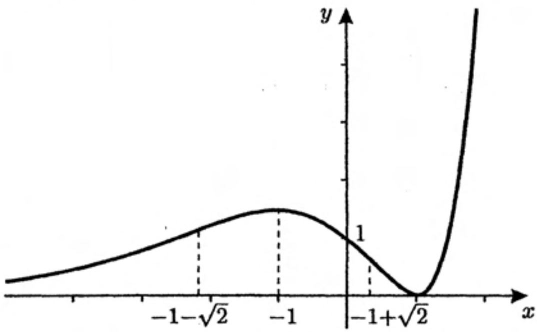


Рис. 8. График функции $y = (x-1)^2 e^x$

Учебное издание

Часть II
Производная и ее приложения

Составитель ЕРАСТОВА Надежда Константиновна

Редактор Е.С. Резникова
Технический редактор О.Г. Завьялова

Подписано в печать 9.12.2005. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная № 2. Ризография. Усл. печ. л. 1,3. Уч.-изд. л. 1,1.
Изд. № 100. Тираж 500 экз. Заказ - 246 Бесплатно.
Московский государственный институт электроники и математики.
109028, Москва, Б. Трехсвятительский пер., 3/12.
Отдел оперативной полиграфии Московского государственного института электроники и математики.
113054, Москва, ул. М. Пионерская, 12.