

Старичкова Ю.В., Незнанов А.А.

**Выделение, генерация и визуализация семейств  
транзитивных графов степени 4 по характеристикам  
симметрии и структурной сложности**

Рассматривается задача классификации семейств связных транзитивных графов степени 4 (ТГС4) на основе характеристик симметрии (строения группы автоморфизмов) и информации обо всех ТГС4 с числом вершин до 30. Предлагается один из вариантов классификации и конкретные бесконечные и конечные семейства, покрывающие все ТГС4 до 30 вершин, с возможностью расширения состава семейств с ростом числа вершин ТГС4. Построен генератор бесконечных и конечных семейств на основе данной классификации, позволяющий строить представители семейств ТГС4 с заданными характеристиками симметрии и выбором симметричной визуализации их диаграмм.

Ключевые слова: транзитивный граф, семейство, симметрия, структурная сложность, визуализация, генерация.

Keywords: transitive graph, family, symmetry, structural complexity, drawing, generating.

**Введение**

Класс *транзитивных графов* (ТГ), то есть графов, в которых все вершины принадлежат одной орбите и эквивалентны по своим свойствам, играет особую роль, как теоретическую, так и в многочисленных приложениях. С теоретической точки зрения актуальны задачи конструктивного перечисления и классификации ТГ [1, 2], что необходимо для развития смежных разделов дискретной математики.

Практически значимы – анализ, синтез ТГ с необходимыми характеристиками и визуализация, ставящиеся при исследовании топологий вычислительных сетей, химических реакций, строения кристаллов, предельной связности, надёжности и инвариантных преобразований гомогенных систем, кодировании данных и т.п. [3,4]. Данные задачи удобнее всего решать, выделив бесконечные семейства с требуемыми свойствами. Основой выделения семейств являются характеристики симметрии, структурной сложности и прорисовки диаграмм.

Уточним задачу классификации ТГ, сузив исследуемый класс до *связных транзитивных графов степени 4* (ТГС4). Этот класс широко используется на практике, так как, например, предлагает удачный компромисс между уровнями структурной надёжности и структурной сложности (в первую очередь выражаемой числом рёбер). При этом, в отличие транзитивных графов степени 3, ТГС4 исследованы недостаточно.

Целью классификации является выделение (по некоторому набору критериев) из класса ТГС4 семейств подобных графов с растущим числом вершин. Исходными данными является полная база ТГС4 до 30 вершин включительно и информация о строении ГАГ [5]. Результат классификации – определение принадлежности каждого ТГС4 до 30 вершин только к одному семейству и построение генераторов выделенных семейств. Общее число семейств – 59 бесконечных и 72 конечных, причём с ростом числа вершин ТГС4 появляются новые семейства, как полученные параметризацией уже выделенных, так и абсолютно новых.

Данная работа основана на результатах, ранее полученных Н.Р. Уар, В.Д. McKay, G.F. Praeger и C.E. Royle (1973-1998 гг.), В.А. Коховым (1985-2004 гг.), А.А. Незнановым и О.В. Киричек (2002-2004 гг.) и др.

## Основные определения

Базовые понятия теории графов и теории групп можно найти в [1, 2, 5]. Приведём используемые далее термины.

Пусть  $G = (V, E)$  обозначает обыкновенный граф, где идентификаторами (номераами) вершин и ребер выступают числа натурального ряда:  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} = \{1, \dots, p\}$ ,  $p = |V|$  – число вершин; и  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_q\} = \{1, \dots, q\}$ ,  $q = |E|$  – число ребер. Пусть  $Aut(G)$  обозначает *группу автоморфизмов графа  $G$*  (ГАГ), а  $|Aut(G)|$  – порядок группы.

Определение 1. *Фиксатор (стабилизатор) вершины  $v \in V$*  – подгруппа  $Aut(G, v)$ , оставляющая неподвижной вершину  $v$ , то есть

$$Aut(G, v) = \{g \in Aut(G) : g(v) = v\}.$$

Определение 2. *Фиксатор подмножества вершин  $V^0 \subseteq V$*  – подгруппа  $Aut(G, V^0)$ , оставляющая неподвижной каждую вершину множества  $V^0$ , то есть

$$Aut(G, V^0) = \bigcap_{v \in V^0} Aut(G, v).$$

Определение 3. *Стабилизатор подмножества вершин  $V^1 \subseteq V$*  – подгруппа  $Aut[G, V^1]$ , оставляющая множество  $V^1$  неподвижным, то есть  $Aut[G, V^1] = \{g \in Aut(G) : \forall v \in V^1 [g(v) \in V^1]\}$ .

Определение 4. *Орбита вершины  $v \in V$*  – подмножество  $\Theta(Aut(G), v)$  вершин графа  $G$ , которые могут быть отображены на вершину  $v$ :  $\Theta(Aut(G), v) = \{v' : [\exists g \in Aut(G) : g(v') = v]\}$ .

Определение 5. Граф называется *транзитивным*, если все его вершины принадлежат одной орбите.

Определение 6. *Орбита вершины  $v \in V$  относительно фиксатора  $Aut(G, V^0)$*  – подмножество  $\Theta(Aut(G, V^0), v)$  вершин графа  $G$ , которые могут быть отображены на вершину  $v$  при условии фиксации подмножества  $V^0 \subset V$ :  $\Theta(Aut(G, V^0), v) = \{v' : [\exists g \in Aut(G, V^0) : g(v') = v]\}$ .

Определение 7. *Орбита вершины*  $v \in V$  *относительно стабилизатора*  $\text{Aut}[G, V^1]$  – подмножество  $\Theta(\text{Aut}[G, V^1], v)$  вершин графа  $G$ , которые могут быть отображены на вершину  $v$  при условии стабилизации подмножества  $V^1 \subset V$ :

$$\Theta(\text{Aut}[G, V^1], v) = \{v' : [\exists g \in \text{Aut}[G, V^1] : g(v') = v]\}.$$

Определение 8. Подмножество вершин  $V^- \subset V$  называется *экстремальным подмножеством нетождественной стабильности* графа, если справедливо

$(\text{Aut}(G, V^-) \not\approx E_p) \& (\forall v \in V \setminus V^- : \text{Aut}(G, V^- \cup \{v\}) \approx E_p)$ , где  $E_p$  – тождественный автоморфизм.

Определение 9. Подмножество вершин  $V^+ \subset V$  называется *экстремальным подмножеством тождественной стабильности* графа, если справедливо  $(\text{Aut}(G, V^+) \approx E_p) \& (\forall v \in V^+ : \text{Aut}(G, V^+ \setminus \{v\}) \not\approx E_p)$ .

Определение 10. Пусть  $\Pi^-$  и  $\Pi^+$  обозначают соответственно множество всех подмножеств  $V^-$  и  $V^+$  вершин графа  $G$ . Тогда

$\psi = \min_{V^+ \in \Pi^+} |V^+|$  – *число тождественной стабильности* графа, а

$\chi = \max_{V^- \in \Pi^-} |V^-|$  – *число нетождественной стабильности* графа.

Определение 11. *Цикловой индекс*  $\Gamma A \Gamma$  – многочлен от переменных  $z_1, z_2, \dots, z_p$ , определяемый формулой

$$Z(\text{Aut}(G)) = \frac{1}{|\text{Aut}(G)|} \sum_{g \in \text{Aut}(G)} \prod_{k=1}^p z_k^{j_k(g)},$$

где через  $j_k(g)$  обозначено число циклов длины  $k = 1, \dots, p$  в разложении автоморфизма  $g \in \text{Aut}(G)$  в произведение непересекающихся циклов.

Определение 12. *Числом тождественности*  $t(G)$  графа  $G$  называется минимальное число новых вершин, необходимых для построения тождественного надграфа  $OG$  графа  $G$ , то есть

$$t(G) = \min_{Aut(OG) \approx E_p} (|V_{OG}| - |V_G|).$$

Определение 13. *Прорисовкой* диаграммы графа назовём получение одного из визуальных образов графа на плоскости. Мы будем рассматривать симметричные диаграммы ТГС4, то есть диаграммы, хотя бы частично отражающие симметрию графа. *Вариантами прорисовки* ТГС4 назовём получение диаграмм, существенно отличающихся по расположению вершин и рёбер графа относительно осей симметрии. Наиболее популярными вариантами прорисовок транзитивных графов являются прорисовки с расположением вершин по нескольким окружностям с центром в одной и той же точке.

## Исторический экскурс

Рассмотрим историю развития и достигнутые результаты по перечислению и исследованию транзитивных графов. Перечисление ТГ – одна из самых интересных подзадач перечисления регулярных топологий. Исследование ТГ неразрывно связано с исследованиями по теории групп.

Систематическое исследование транзитивных графов началось ещё в середине 20 века [7]. Важной вехой стало создание каталогов конструктивно-перечисленных классов ТГ [8]. Однако, например, в первой существенной попытке перечислить все ТГ до 12 вершин Н.Р. Уар пропустил 3 графа. Серьёзные результаты по конструктивному перечислению ТГ, претендующие на универсальность подхода и подкреплённые алгоритмическими разработками, были получены с 1978 по 1995 год и отражены в работах, *B.D. McKay*, *G.F. Praeger* и *C.E. Royle* [9-10]. На данный момент в каталоге ТГ перечислены все структуры с

числом вершин до 31. Используемые методы перечисления ТГ связаны с вычислением ГАГ. Для обработки ГАГ относительно небольших графов существуют хотя и переборные, но эффективные с практической точки зрения алгоритмы. Отметим, что знание строения ГАГ позволяет намного эффективнее решать другие переборные задачи анализа графов.

Перейдем к задаче классификации ТГС4. Для её решения была использована информация о характеристиках этого класса графов, полученная В.А. Коховым и А.А. Незнановым [5] и опирается на предшествующие работы В.А. Кохова (1988-1994 гг.) [6], А.А. Незнановым (2001-2004 гг.) и О.В. Киричек (2003-2004 гг.). Используемая база ТГС4 с числом вершин до 30 содержит 289 графов.

Следует отметить, что в работе, выполненной ранее О.В. Киричек и А.А. Незнановым, присутствовал ряд проблем, не позволяющих говорить о полной завершённости созданного программного комплекса, в частности:

- неполнота классификации (не все графы, содержащиеся в базе, могли быть классифицированы, как представители одного из семейств, предложенных в работе);
- избыточная сложность классификации (подклассы, которые целесообразно объединять в один класс, были выведены в роли отдельных классов);
- некоторые изоморфные графы были отнесены в различные семейства, таким образом, формально отличаясь друг от друга.

Работа по улучшению классификации ТГ была начата в 2005 году. В ходе работы постоянно уточнялась классификация ТГ по критериям: порядок группы автоморфизмов; число тождественной стабильности; число нетождественной стабильности; структура орбит фиксатора вершины; цикловой индекс; внешний вид диаграммы графа (основной

эстетический критерий выделения семейства). В 2008 году были приведены первые результаты полной классификации ТГС4 [11] до 30 вершин включительно.

## **Определение семейств и классификация ТГС4 на основе симметрии и сложности**

### ***Подход к классификации ТГС4***

Подход к классификации основан на характеристиках симметрии и визуальных образах графов.

Определение 14. *Семейство* – последовательность (конечная или бесконечная) подобных по некоторым характеристикам графов с возрастающим числом вершин, для которых определена процедура построения следующего представителя последовательности по предыдущему.

Следующие критерии будут определять принадлежность графа семейству и выбор первого уникального графа:

1. Одна из симметричных диаграмм графа. Отметим, что число симметричных прорисовок одного транзитивного графа может быть очень велико, поэтому дополнительным критерием выбора прорисовки диаграмм первых представителей семейства является эстетичность. Выбранная прорисовка называется канонической для семейства.

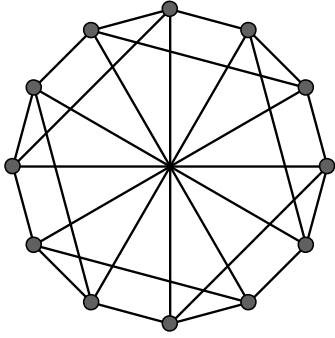
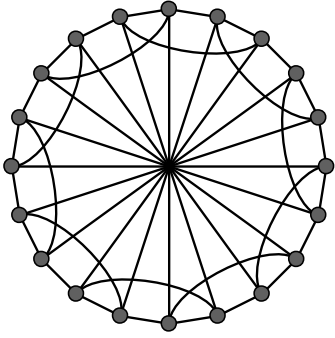
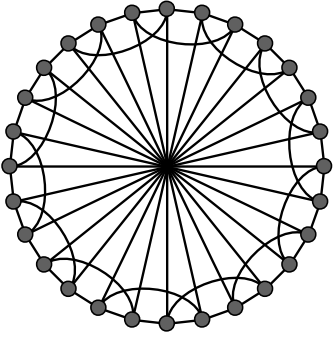
2. Порядок группы автоморфизмов ( $|Aut(G)|$ ), числа тождественной ( $\psi$ ) и нетождественной ( $\chi$ ) стабильности. Одним из признаков принадлежности нескольких графов к одному семейству является идентичность значений  $|Aut(G)|$ ,  $\psi$  и  $\chi$ , либо возможность их объединения одной формулой.

3. Сравнение строения группы автоморфизмов членов семейств. Строение ГАГ для семейства должно оставаться идентичным или изменяться по одним и тем же правилам. В качестве начального крите-

рия используем структуру орбит фиксатора вершины. Уточнение производится по цикловым индексам ГАГ.

Пример информации о семействе  $G_{68}$  приведён в таблице 1, где  $n$  обозначает порядок группы предыдущего представителя семейства, а  $m$  – число нетождественной стабильности предыдущего представителя семейства.

Таблица 1. Пример информации о семействе

| Название: $G_{68}$                                                                                |      |      |                                                                                     |        |                                                                                      |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| $FV$                                                                                              | $UV$ | $SV$ | $\psi$                                                                              | $\chi$ | $ Aut(G_1) $                                                                         | $ Aut(G) $ |
| 12                                                                                                | 12   | 8    | 2                                                                                   | $m+4$  | 48                                                                                   | $n+32$     |
| Ранее конструктивно перечисленные представители, даются по каталогу [5]: 12-4-1, 20-4-16, 28-4-21 |      |      |                                                                                     |        |                                                                                      |            |
| Диаграммы при канонической прорисовке:                                                            |      |      |                                                                                     |        |                                                                                      |            |
|                 |      |      |  |        |  |            |

Обозначения к таблице 1:

- $FV$  – число вершин в первом графе семейства;
- $UV$  – число вершин в первом уникальном представителе семейства, начиная с которого и для каждого следующего графа характеристики симметрии совпадают;
- $FN$  – число вершин последнего графа в семействе, если оно конечное (в таблице 1 отсутствует, так как семейство бесконечно);
- $SV$  – шаг числа вершин (разность числа вершин между  $i$  и  $(i-1)$  графами);
- $\psi$  – число тождественной стабильности;
- $\chi$  – число нетождественной стабильности;

- $|Aut(G)|$  – число симметрии (порядок группы автоморфизмов);
- $n$  – порядок группы предыдущего представителя семейства;
- $m$  – число нетождественной стабильности предыдущего представителя семейства.

Отметим, что кроме канонической прорисовки, которая является основной для конкретного семейства, при генерации представителей возможен выбор других прорисовок (от 0 до 40 вариантов в зависимости от семейства).

### ***Система классификации семейств ТГС4***

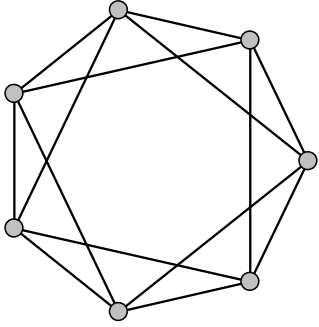
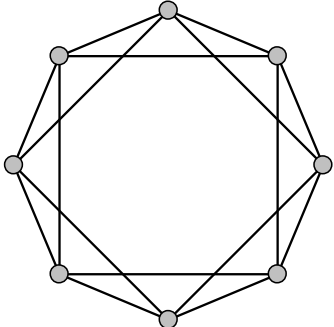
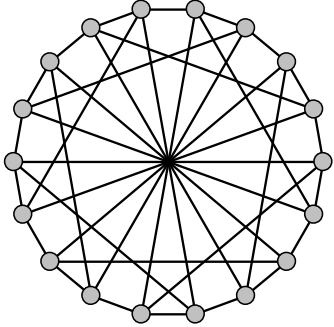
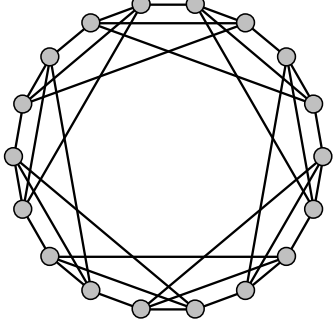
Классифицируем методы построения и приведем статистику количества семейств. При этом используем следующие переменные.

- $i$  – текущая вершина. Для графов с прорисовкой по одной окружности нумерация ведется по этой окружности.
- $k, l, s$  – переменные, используемые для указания смежности вершин.

Все переменные задают номера вершин в соответствии с их расположением на окружности.

Далее приведена (таблицы 2-6) классификация семейств транзитивных графов в соответствии с выбранными каноническими диаграммами. Отметим, что используемая нумерация семейств согласует данную классификацию с другими системами синтеза не рассматриваемыми в данной работе.

**Таблица 2. Вершины расположены на одной окружности, соседние вершины смежны. Подклассы определяются расположением остальных рёбер.**

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1.1. <math>p</math> – нечетное, <math>SV</math> – четное, смежными также являются вершины <math>(i, i+k), (i+p-k)</math>, где <math>k \in [2, (p+1)/2]</math>.</p> <p>11 семейств:<br/> <math>G_1, G_2, G_5, G_6, G_7, G_{102},</math><br/> <math>G_{107}, G_{108}, G_{119}, G_{209}, G_{230}</math><br/> Класс может быть расширен.</p>                                                     |   |
| <p>1.2. <math>p</math> – четное, <math>SV</math> – четное, смежными также являются вершины <math>(i, i+k), (i+p-k)</math>, где <math>k \in [2, p/2-1]</math>.</p> <p>14 семейств:<br/> <math>G_{11}, G_{12}, G_{13}, G_{14}, G_{15}, G_{16},</math><br/> <math>G_{17}, G_{18}, G_{20}, G_{103}, G_{210},</math><br/> <math>G_{211}, G_{231}, G_{239}</math><br/> Класс может быть расширен.</p> |    |
| <p>1.3. смежными также являются вершины <math>(i, p/2-i), (i, i+p+k)</math>.</p> <p>7 семейств:<br/> <math>G_{21}, G_{22}, G_{25}, G_{68}, G_{78}, G_{214},</math><br/> <math>G_{215}</math><br/> Класс может быть расширен.</p>                                                                                                                                                                |   |
| <p>1.4. смежными также являются ребра <math>(i, i+k), (i+k, i+p+s)</math></p> <p>4 семейств:<br/> <math>G_{33}, G_{219}, G_{237}, G_{238}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                            |  |

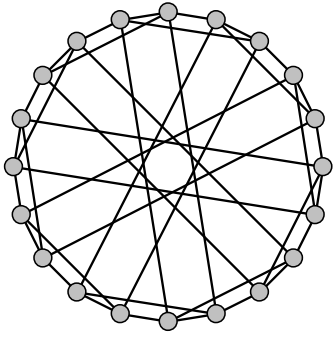
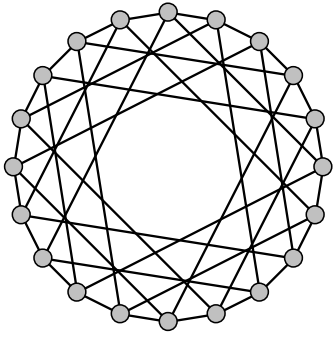
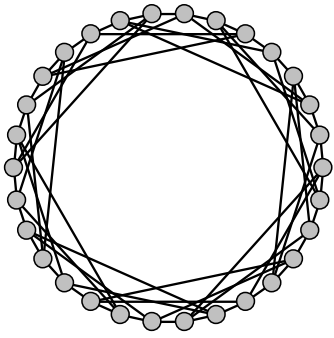
|                                                                                                                                                                      |                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1.5. смежными также являются ребра <math>(i, i+k), (i+k, i+p-l+s)</math></p> <p>4 семейства:<br/>G_26, G_27, G_28, G_35</p>                                       |   |
| <p>1.6. смежными также являются ребра <math>(i, i+k), (i+k, i+p-l)</math></p> <p>10 семейств:<br/>G_29, G_30, G_36, G_37, G_38, G_74, G_117, G_217, G_220, G_233</p> |   |
| <p>1.7. смежными также являются ребра <math>(i, i+k), (i+k, i+2k), (i+2k, i+p+l)</math></p> <p>1 семейство:<br/>G_203</p>                                            |  |

Таблица 3. Графы, вершины расположены на одной окружности и соседние несмежны.

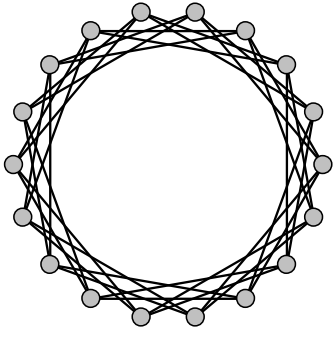
|                                                                                                                                                     |                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Смежными являются ребра <math>(i, i+k), (i, i+l)</math>.</p> <p>4 семейства:<br/>G_42, G_125, G_221, G_222</p> <p>Класс может быть расширен.</p> |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|

Таблица 4. Графы, вершины которых расположены по нескольким окружностям.

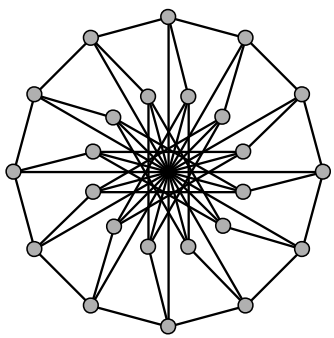
|                                                                                                                                                         |                                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Графы, вершины которых добавляются на две окружности и соединяются между собой в зависимости от строения семейства.</p> <p>1 семейство:<br/>G_56</p> |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|

Таблица 5. Графы, прорисовка которых представляет каркас тора.

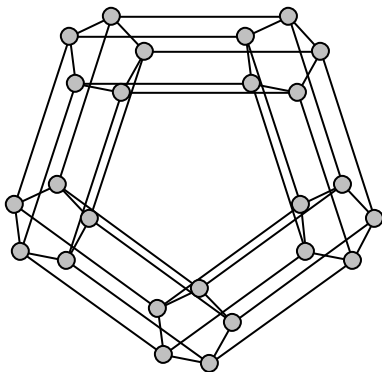
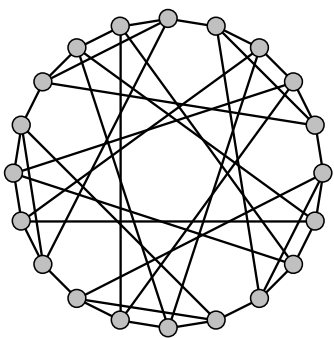
|                                                                                                        |                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>3 семейства:<br/>G_10001 - G_10003</p> <p>Класс может быть расширен (параметр – число сечений).</p> |  |
|                                                                                                        |                                                                                     |

Таблица 6. Семейства с конечным числом вершин.

|                                                                                |                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>72 семейства:<br/>G_1001 – G_1004, G_1006 – G_1027,<br/>G_1029 – G_1074</p> |  |
|--------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|

### **Корректность и полнота классификации**

**Корректность классификации.** Все представители семейств являются ТГ. Это доказано как вычислительным экспериментом (первые 50 представителей каждого семейства), так и сравнением строения группы автоморфизмов семейств с известными группами и тем, что структура группы сохраняется неизменной у всех представителей. Для

конечных семейств достроен последний представитель и подтверждено, путем проверки строения группы автоморфизмов, что он является единственным или последним представителем, имеющим одну орбиту. Отметим, что выделение некоторых семейств и выбор варианта канонической прорисовки неоднозначен и во многом определяется взглядами на эстетичность и выразительность диаграмм.

**Полнота классификации.** Невозможно утверждать, что не существует ТГС4, не принадлежащих выделенным семействам. Однако вычислительным экспериментом подтверждена частичная полнота классификации, смысл которой в том, что все полученные семейства покрывают известные ТГС4 до 30 вершин. Более того, данная классификация семейств безызбыточна, так как при генерации представителей семейств, начиная с первого уникального, мы получаем все ТГС4 до 30 вершин без повторений.

## **Лес семейств ТГС4**

Для обеспечения и проверки уникальности представителей семейств среди всех ТГС4 построен лес семейств. Его основное дерево имеет корнем клику на 5 вершинах. Каждая развилка в лесе обозначает порождение нового семейства с выделением первого уникального представителя семейства. Лес покрывает все ТГС4 до 30 вершин включительно, то есть в нём 289 вершин.

Бесконечные семейства образуют подграф из 194 вершин. Остальные вершины обозначают конечные семейства. Интересно, что некоторые графы малого размера не попали в основной лес бесконечных семейств. Например, из двух графов на 8 вершинах один входит в дерево с корнем в клике на 5 вершинах, а второй расположен отдельно. Это обусловлено требованием безызбыточности семейств.

Сам лес семейств реализован в виде интерактивной графовой модели. На рис. 1 и рис. 2 представлены различные варианты её визуализации.

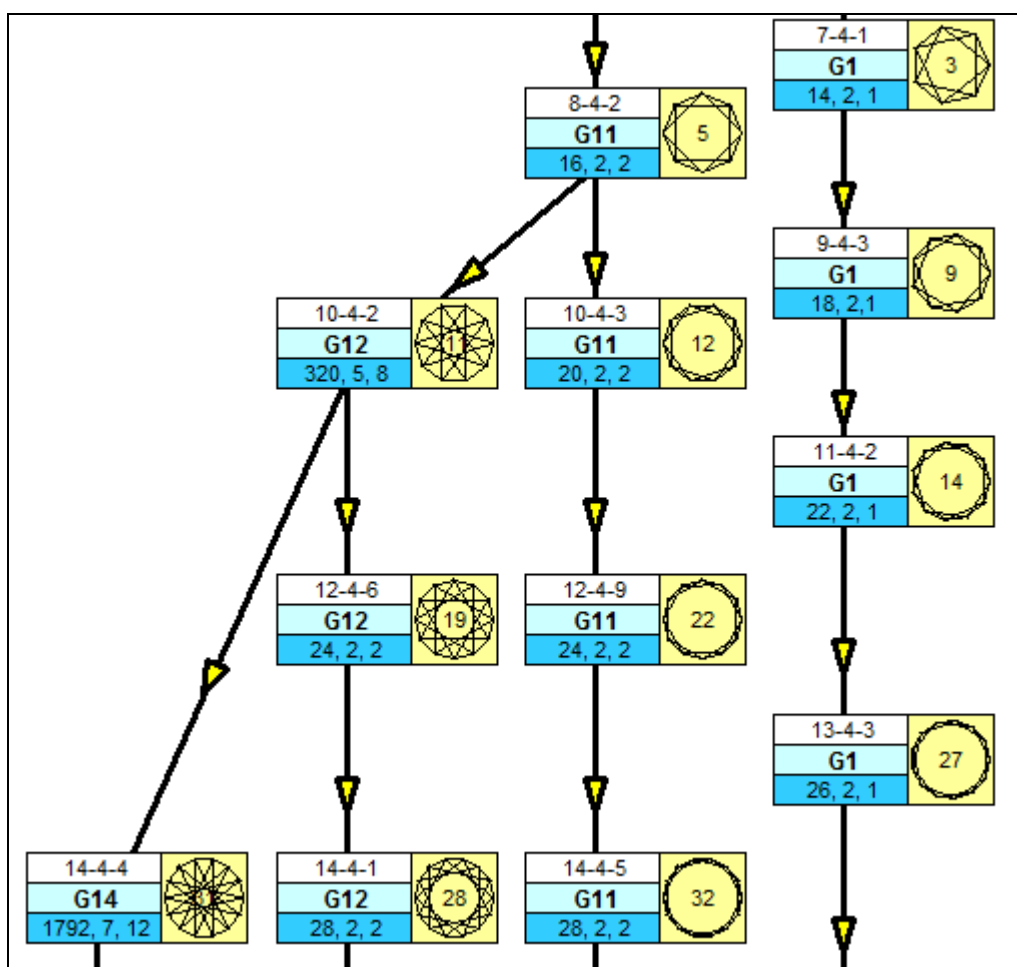


Рис. 1. Фрагмент леса семейств (порождение семейств G\_12 и G\_14)

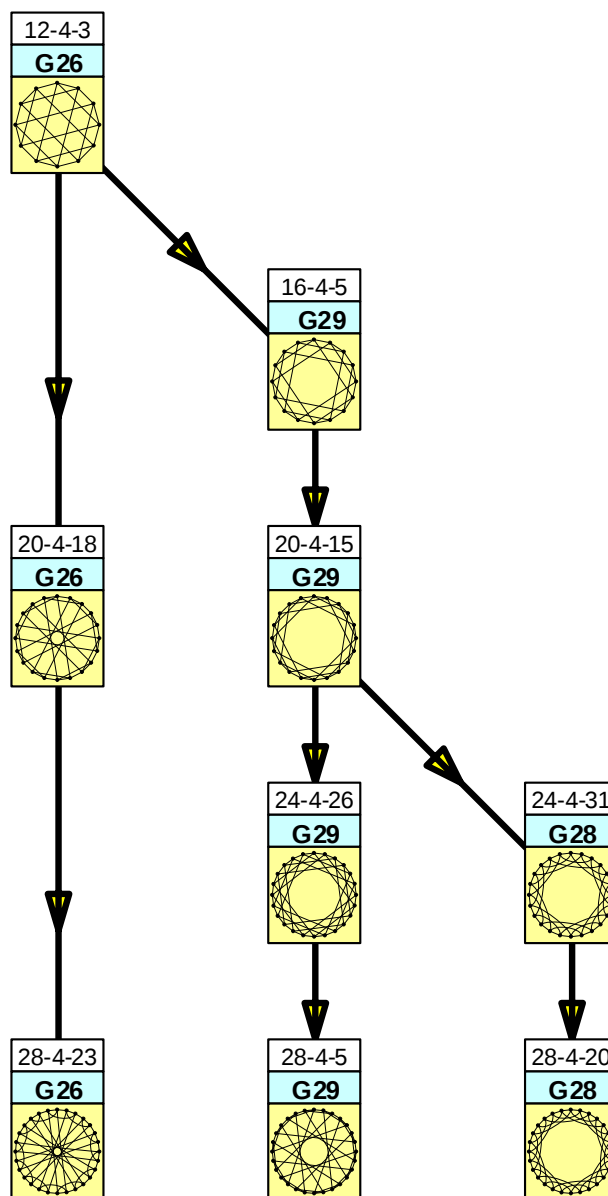


Рис. 2. Фрагмент леса семейств (порождение семейств G\_28 и G\_9)

## Исследование характеристик структурной сложности и симметрии семейств ТГС4

### Входные данные

Для проведения экспериментов были сгенерированы базы, содержащие по 50 первых представителей для каждого из 59 бесконечных семейств ТГС4 (всего 2950 графов).

### Эксперимент по анализу характеристик симметрии

Цель эксперимента: проверить принадлежность представителей семейств, полученных путем классификации базы ТГС4 до 30 вершин.

Суть эксперимента: экспериментально проверить принадлежность генерируемых семейств к классу ТГС4, выявить зависимость характеристик симметрии предыдущего и следующего представителя, уточнить первый уникальный граф для каждого семейства.

С использованием программы поиска ГАГ Незнанова А.А (основанной на работе *B.D. McKay* [12]) представители семейств были проверены на принадлежность к классу ТГС4, а также подтверждены их характеристики симметрии.

### **Эксперимент по анализу характеристик структурной сложности**

Цель эксперимента: определить значения индексов структурной сложности в различных базисах структурных дескрипторов для выделенных семейств ТГС4, выявить взаимозависимости значений индексов и определить экстремальные значения индексов сложности среди исследуемых семейств.

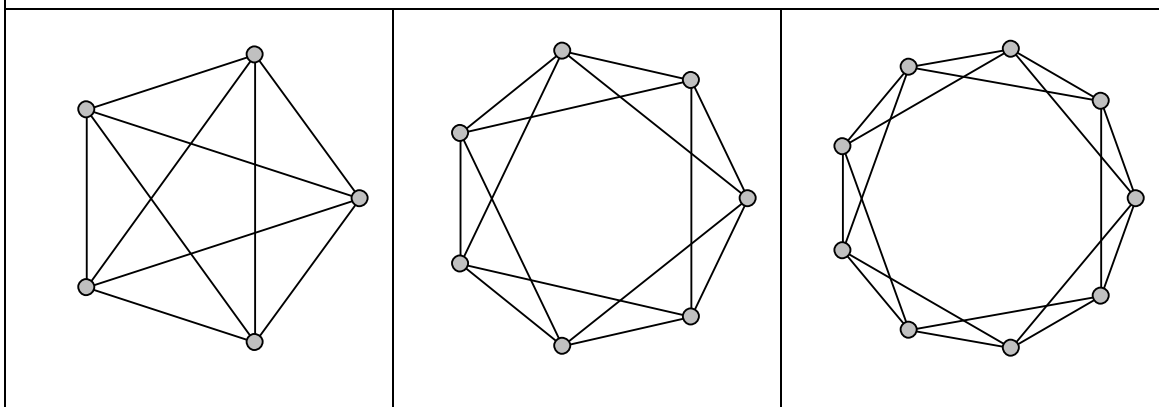
Суть эксперимента: вычисление различных индексов структурной сложности, в основном, структурной спектральной сложности в различных базисах [13]. В результате исследования проведено 22 вычислительных эксперимента, обработано, общее время вычислений – более 300 часов.

Проиллюстрируем полученные результаты. В таблице 7 приведены семейства ТГС4 ( $G_1$ ,  $G_{25}$ ,  $G_{56}$ ,  $G_{68}$ ,  $G_{71}$ ,  $G_{74}$ ,  $G_{203}$ ), используемые в качестве показательных примеров.

**Таблица 7. Информация о выбранных семействах**

| Название: $G_1$                                                                                                                                              |      |      |        |        |              |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------|--------|--------|--------------|------------|
| $FV$                                                                                                                                                         | $UV$ | $SV$ | $\psi$ | $\chi$ | $ Aut(G_1) $ | $ Aut(G) $ |
| 5                                                                                                                                                            | 7    | 2    | 2      | 1      | 14           | $n+4$      |
| Известные ранее представители, даются по каталогу [5]: 5-4-1, 7-4-1, 9-4-3, 11-4-2, 13-4-3, 15-4-7, 17-4-4, 19-4-4, 21-4-10, 23-4-5, 25-4-8, 27-4-13, 29-4-7 |      |      |        |        |              |            |

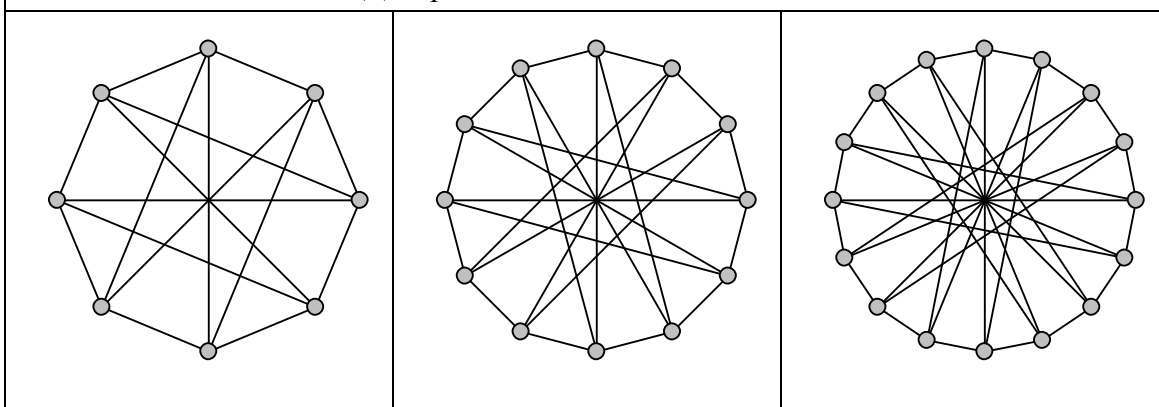
Диаграммы:



Название: G\_25

| $FV$ | $UV$ | $SV$ | $\psi$ | $\chi$ | $ Aut(G_1) $ | $ Aut(G) $                           |
|------|------|------|--------|--------|--------------|--------------------------------------|
| 8    | 12   | 4    | $n+1$  | $n+4$  | 48           | $n_{i-1} \cdot 2 + 16 \cdot 2^{i-1}$ |

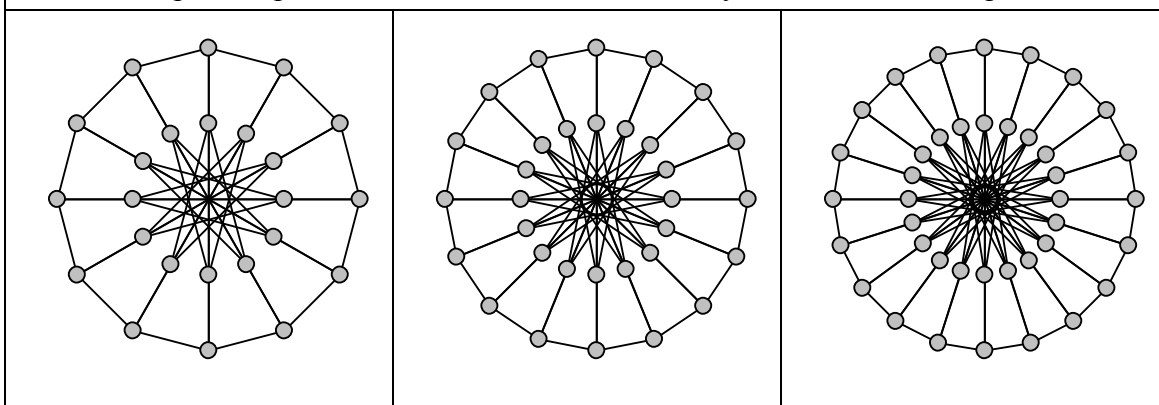
Известные ранее представители, даются по каталогу [5]: 8-4-3, 12-4-10, 16-4-13, 20-4-24, 24-4-60, 28-4-28. Диаграммы:



Название: G\_56

| $FV$ | $UV$ | $SV$ | $\psi$ | $\chi$ | $ Aut(G_1) $ | $ Aut(G) $ |
|------|------|------|--------|--------|--------------|------------|
| 24   | 24   | 8    | 2      | 4      | 48           | $n+16$     |

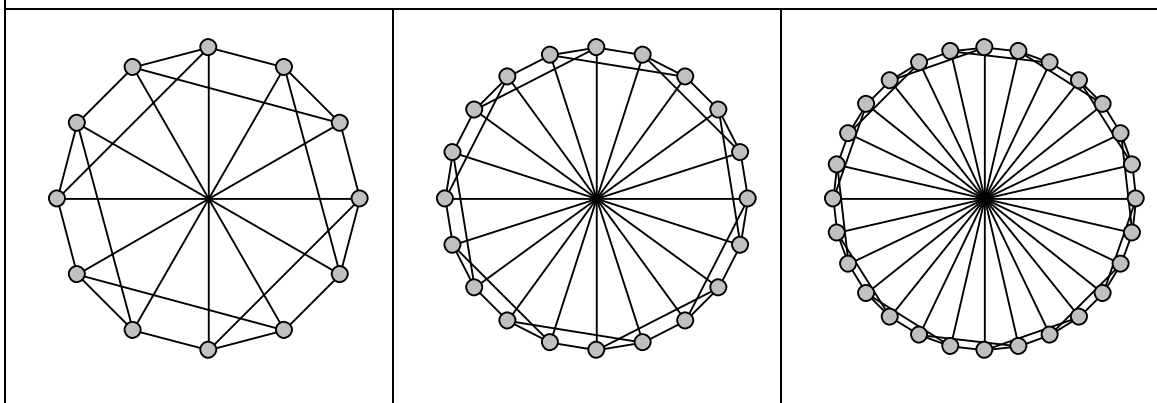
Известные ранее представители, даются по каталогу [5]: 24-4-23. Диаграммы:



Название: G\_68

| $FV$ | $UV$ | $SV$ | $\psi$ | $\chi$ | $ Aut(G_1) $ | $ Aut(G) $ |
|------|------|------|--------|--------|--------------|------------|
| 12   | 12   | 8    | 2      | $m+4$  | 48           | $n+32$     |

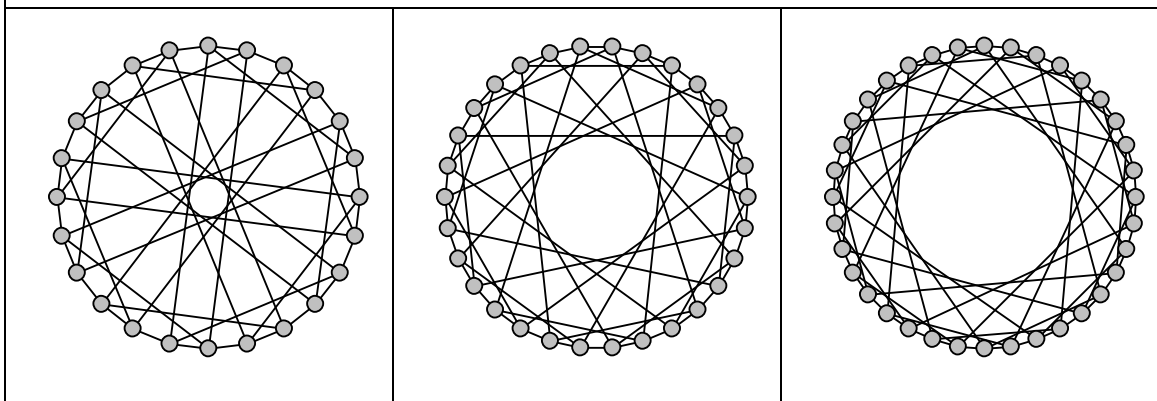
Известные ранее представители, даются по каталогу [5]: 12-4-1, 20-4-16, 28-4-21  
 Диаграммы:



Название:  $G_{74}$

| $FV$ | $UV$ | $SV$ | $\psi$ | $\chi$ | $ Aut(G_1) $ | $ Aut(G) $ |
|------|------|------|--------|--------|--------------|------------|
| 24   | 48   | 6    | 1      | 0      | 48           | $n+48$     |

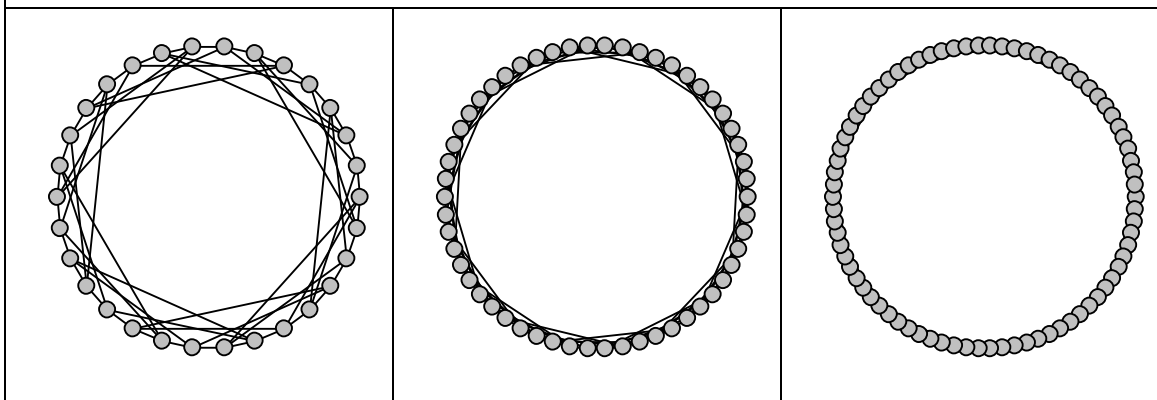
Известные ранее представители, даются по каталогу [5]: 24-4-3, 30-4-2  
 Диаграммы:



Название:  $G_{203}$

| $FV$ | $UV$ | $SV$ | $\psi$ | $\chi$        | $ Aut(G_1) $ | $ Aut(G) $ |
|------|------|------|--------|---------------|--------------|------------|
| 30   | 30   | 24   | 2      | $m_1=10, m+8$ | 120          | $n+96$     |

Известные ранее представители, даются по каталогу [5]: 30-4-24  
 Диаграммы:



На рис. 3-7 приведены примеры графиков зависимости значений индексов структурной сложности и порядка ГАГ от числа вершин для выбранных семейств.

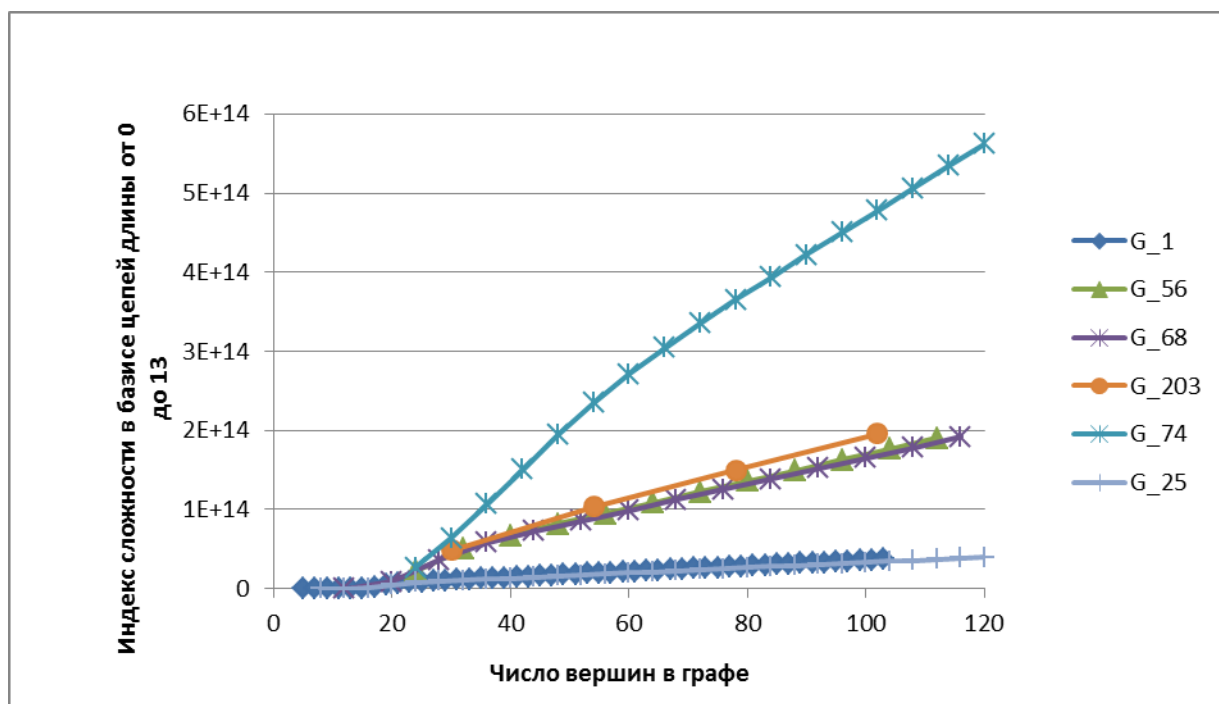


Рис. 3. График зависимости значений индексов сложности в базисе цепей длины от 0 до 13 от числа вершин в графе

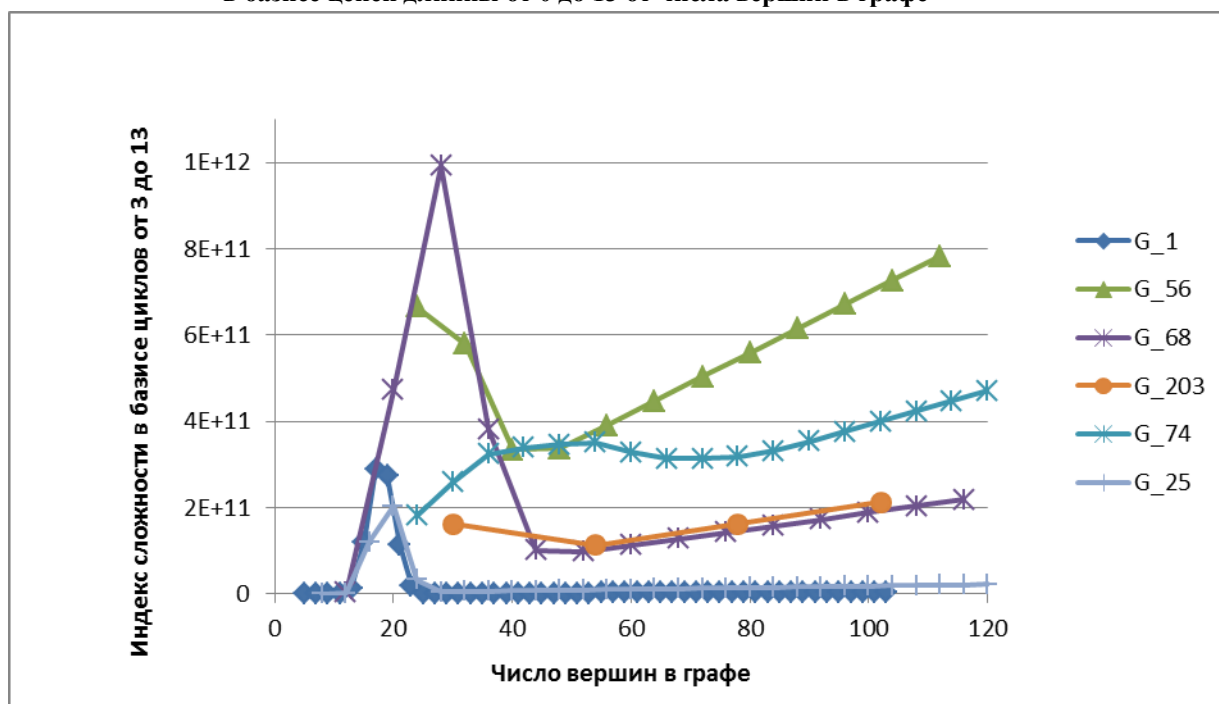


Рис. 4. График зависимости значений индексов сложности в базисе циклов длины от 2 до 13 от числа вершин в графе

Отметим, что стабилизация фрагментарного состава для циклов происходит только после 50 вершин. Возможно, изменение леса се-

мейств позволило бы улучшить поведение подобных графиков, но текущий вариант указания первых уникальных представителей семейств является компромиссом между различными критериями качества.

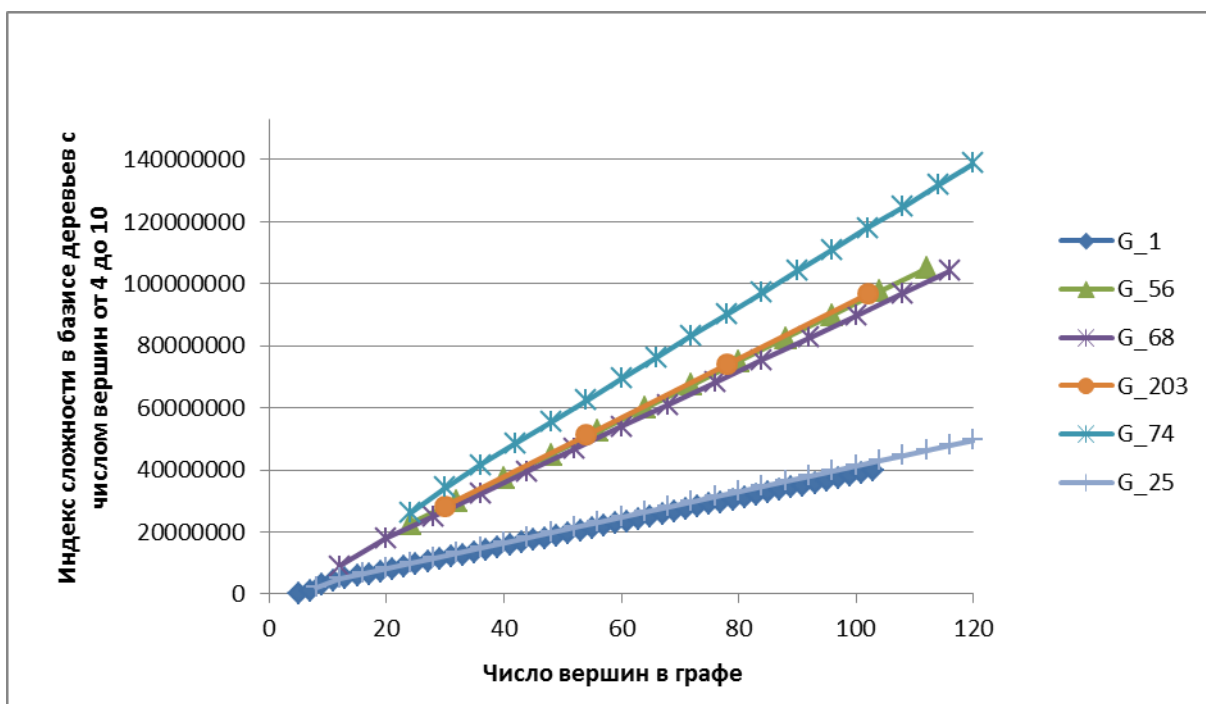


Рис. 5. График зависимости значений индексов сложности в базисе деревьев с числом вершин от 4 до 10 от числа вершин в графе

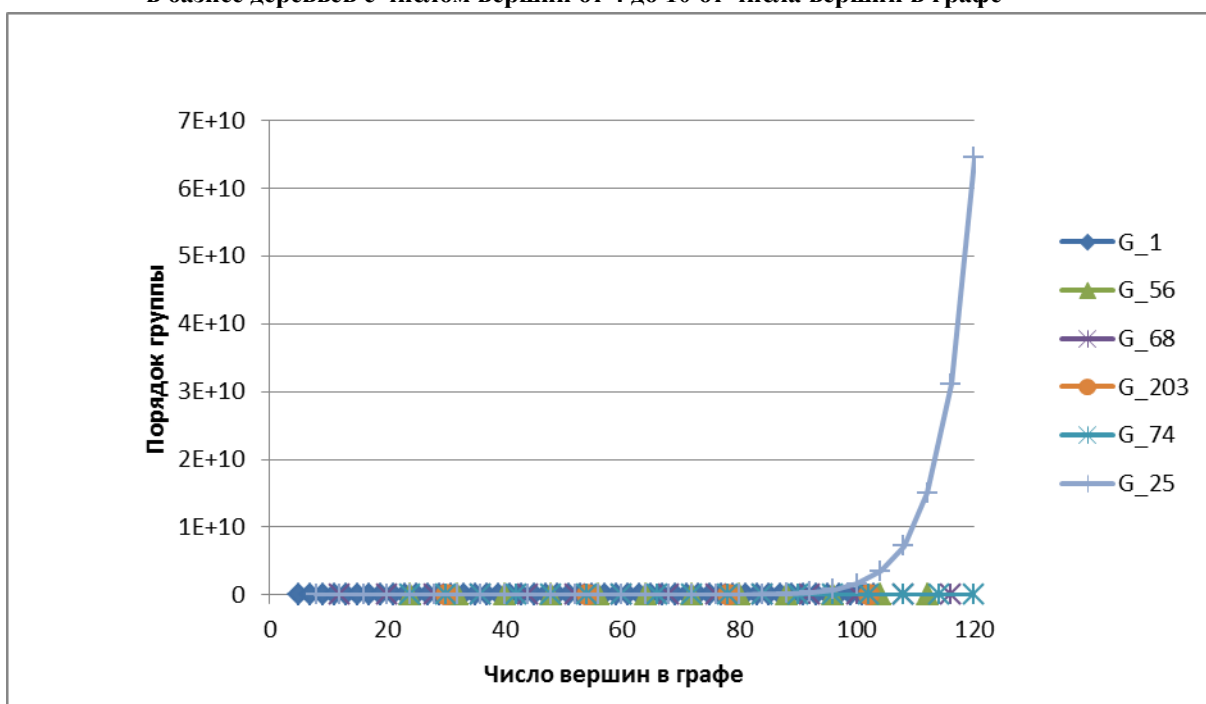


Рис. 6. График зависимости значений характеристик симметрии от числа вершин в графе

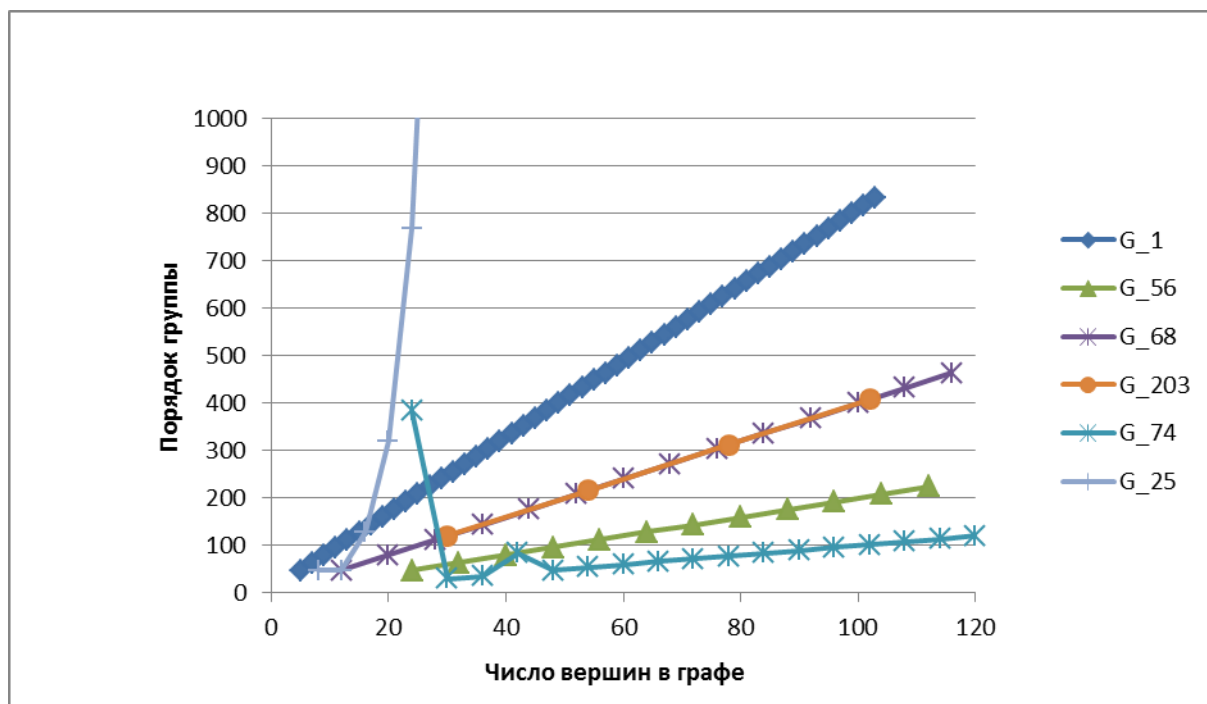


Рис. 7. График зависимости значений характеристик симметрии от числа вершин в графе

Отметим, что спектральная сложность семейств в разных базисах по-разному коррелирует с характеристиками симметрии. Семейство  $G_{25}$ , представители которого имеют наибольший (с огромным отрывом) порядок ГАГ, отстаёт от других семейств по числу фрагментов (цепей, циклов и деревьев малых длин).

## Заключение

На основе ранее достигнутых результатов анализа симметрии и структурной сложности транзитивных графов предложен метод классификации семейств связных транзитивных графов степени 4. На его основе получены бесконечные и конечные семейства ТГС4 с заданными характеристиками. Все известные представители ТГС4 до 30 вершин включительно покрываются выделенными семействами, для которых разработаны программные средства генерации и визуализации (прорисовки симметричных диаграмм). Всего выделено 59 бесконечных семейств и 72 конечных семейств ТГС4, для каждого семейст-

ва найден его *первой уникальнй представитель*, не входящий в иные семейства, для обеспечения *безызбыточной генерации* ТГС4.

Доказана частичная полнота (в смысле порождения всех ТГС4 до 30 вершины) и корректность предложенной классификации. Проведены вычислительные эксперименты по анализу различных характеристик симметрии и по исследованию структурной сложности семейств ТГС4 с использованием различных моделей сложности в различных базисах структурных дескрипторов, включая цепи, циклы, деревья. Все полученные результаты отражены в каталоге семейств ТГС4.

Текущие исследования связаны с расширением системы классификации семейств ТГ других степеней (в первую очередь степени 5) и рассмотрением других практически важных характеристик ТГ (например, параметров структурной надёжности).

## Список литературы

1. *Берж К.* Теория графов и ее применение. М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 320 с.
2. *Харари Ф., Пальмер Э.* Перечисление графов. М.: Мир, 1977. – 326 с.
3. *Райнишке К., Ушаков И.А.* Оценка надёжности систем с использованием графов. М.: Радио и связь, 1988. – 208 с.
4. *Shooman M.L.* Reliability of Computer Systems and Networks: Fault Tolerance, Analysis, and Design. Wiley-Interscience, 2001. – 560 с.
5. *Незнанов А.А., Кохов В.А.* Справочник по теории графов. Характеристики симметрии и сложности связных транзитивных графов степени 4 с числом вершин до 30 включительно. М.: Деп. в ВИНТИ, №1094-В2004, 2004. – 418 с.

6. *Кохов В.А.* Диаграммы, числа стабильности и цикловые индексы групп автоморфизмов транзитивных графов // Исследования по прикладной теории графов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1986. – С. 97-125.
7. *G. Sabidussi*, Vertex-transitive graphs, Monatshefte für Mathematik, volume 68, issue 5, 1964, PP. 426-438.
8. *H.P.Yap*, Point symmetric graphs with  $p < 13$  points, Nanta Math. 6 (1973), PP. 8-20.
9. *G.F. Royle and C.E. Praeger*, Constructing the vertex-transitive graphs of order 24, Journal of Symbolic Computation, Volume 8, Issue 4 (1989), PP. 309-326.
10. *B.D. McKay and G.F. Royle*, The transitive graphs with at most 26 vertices, ArsCombinatoria, 30 (1990), PP. 161-176.
11. *Старичкова Ю.В., Незнанов А.А.* Улучшенная классификация и генерация транзитивных графов степени 4. // Доклады международной конференции «Информационные средства и технологии». (МФИ-2008), Т.2, Москва, 2008. – С. 75-79.
12. *B.D. McKay*, The nauty page (<http://cs.anu.edu.au/~bdm/>) (дата обращения 17.02.2009)
13. *Кохов В.А.* Концептуальные и математические модели сложности графов. М.: Издательство МЭИ, 2002. – 157 с.