

ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ОСНОВАНИИ НА ЛОКАЛЬНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

А. В. МИХЕЕВ

Рассматривается модель ортотропной оболочки на упругом основании, учитывающая предварительные напряжения в основании. В качестве объекта исследования берется сфера с изотропным наполнителем. Сравниваются численные результаты, полученные в моделях с учетом и без учета напряжений наполнителя.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть у нас имеется ортотропная оболочка на упругом изотропном основании, находящаяся под действием безмоментных начальных усилий (T_1^0, T_2^0, S^0) . Введем параметр нагружения λ : $(T_1^0, T_2^0, S^0) = -\lambda(t_1, t_2, t_3)$. Прогиб w будем рассматривать в виде дwoякопериодической функции, характеризуемой волновыми числами p, q :

$$w = w_0 e^{(px+qy)i/R}.$$

Здесь R — характерный линейный размер срединной поверхности, $(x, y) = (\alpha A, \beta B)$, A, B — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки, (α, β) — координатные линии срединной поверхности оболочки, направления которых совпадают с направлениями главных кривизн. Главные радиусы кривизны срединной поверхности в точке (x, y) равны соответственно R_1, R_2 . Реакцию основания P примем в виде, указанном в [1]:

$$P = \sigma_{zz}(0) = -\frac{c_{zz} r w}{R}, \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07.01.00250а.

Доклад на семинаре 17 октября 2006 г.

© А. В. Михеев, 2008

где

$$c_{33} = G_0 \frac{4(1 - \nu_0)}{3 - 4\nu_0} + \sigma^0 \frac{13 - 28\nu_0 + 16\nu_0^2}{2(3 - 4\nu_0)^2} - \sigma_{33}^0 \frac{5 - 20\nu_0 + 16\nu_0^2}{2(3 - 4\nu_0)^2}. \quad (2)$$

Упругое основание характеризуется модулем Юнга E_0 , модулем сдвига G_0 и коэффициентом Пуассона ν_0 ; σ_{ij}^0 , σ_{ij} — компоненты тензоров предварительного и дополнительного напряжений соответственно, величина σ_0 зависит от волнообразования при деформации основания и σ_{11} , σ_{22} . Толщина оболочки равна h , модули Юнга материала оболочки вдоль направлений α и β равны соответственно E_1 и E_2 , модуль сдвига в касательной плоскости — G_{12} , модули сдвига в трансверсальном направлении — G_{13} , G_{23} . Коэффициенты Пуассона ν_{12} , ν_{21} связаны с E_1 , E_2 соотношением $E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}$. Введем новую нормировку параметра нагружения: $\Lambda' = \frac{\lambda R}{E_1 h^2}$. Подставляя функцию прогиба $w(x, y)$, а также дополнительно введенную функцию нагружения и функции углов поворота в уравнение устойчивости ([2]), мы получаем следующее неявное выражение функции нагружения $\Lambda'(s, \varphi, \omega, x, y)$:

$$\Lambda' = \frac{1}{f_T(\varphi)} \left(\frac{f_R(\varphi)}{s^2 f(\varphi)} + \frac{s^2}{12n_\nu} \frac{g_1(s, \varphi) \cos^2 \varphi + g_2(s, \varphi) \sin^2 \varphi}{g_3(s, \varphi)} + \frac{\hat{\omega}}{s} \right), \quad (3)$$

где $\hat{\omega} = \frac{c_{33}}{E_1 h_*^{3/2}}$. Определим новые параметры: $n_\nu = 1 - \nu_{12}\nu_{21}$, h_* —

безразмерная толщина оболочки, $\rho_i = \frac{R}{R_i}$ ($i = 1, 2$) — безразмерные параметры кривизны, параметры c_1 , c_2 равны отношениям упругих характеристик оболочки: $c_1 = \frac{E_2}{E_1}$, $c_2 = \frac{G_{12}}{E_1}$. Волновые числа s , φ связаны с волновыми числами p , q подстановками:

$$p = \frac{s \cos \varphi}{h_*^{1/2}}, \quad q = \frac{s \sin \varphi}{h_*^{1/2}}. \quad (4)$$

Коэффициенты a_1, a_2 определяют величину сдвига:

$$\begin{aligned}
 f_R(\varphi) &= (\rho_2 \cos^2 \varphi + \rho_1 \sin^2 \varphi)^2, \\
 f_T(\varphi) &= t_1 \cos^2 \varphi + 2t_3 \cos \varphi \sin \varphi + t_2 \sin^2 \varphi, \\
 f(\varphi) &= \sin^4 \varphi + \frac{\cos^4 \varphi}{c_1} + \left(\frac{1}{c_2} - \frac{\nu_{12}}{c_1} - c_1 \nu_{12} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\
 g_1(s, \varphi) &= c_1 c_2 a_2 n_\nu s^2 \sin^4 \varphi + c_2 a_2 n_\nu s^2 \cos^4 \varphi + \\
 &+ c_1 a_2 (1 - 2c_2 \nu_{12}) n_\nu s^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + (2c_2 n_\nu + c_1 \nu_{12}) \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi, \\
 g_2(s, \varphi) &= c_1 c_2 a_1 n_\nu s^2 \sin^4 \varphi + c_2 a_1 n_\nu s^2 \cos^4 \varphi + \\
 &+ c_1 a_1 (1 - 2c_2 \nu_{12}) n_\nu s^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + (2c_2 n_\nu + c_1 \nu_{12}) \cos^2 \varphi + c_1 \sin^2 \varphi, \\
 g_3(s, \varphi) &= c_1 c_2 a_1 a_2 n_\nu s^4 \sin^4 \varphi + c_2 a_1 a_2 n_\nu s^4 \cos^4 \varphi + \\
 &+ c_1 a_1 a_2 (1 - 2c_2 \nu_{12}) n_\nu s^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + (c_1 a_2 + c_2 a_1 n_\nu) s^2 \sin^2 \varphi + \\
 &+ (a_1 + c_2 a_2 n_\nu) s^2 \cos^2 \varphi + 1.
 \end{aligned}$$

Для ортотропной сферической оболочки с заполнителем выражение параметра нагружения (3) принимает явную форму:

$$\Lambda' = \frac{s}{s f_T(\varphi) + \zeta} \left(\frac{f_R(\varphi)}{s^2 f(\varphi)} + \frac{s^2}{12 n_\nu} \frac{g_1(s, \varphi) \cos^2 \varphi + g_2(s, \varphi) \sin^2 \varphi}{g_3(s, \varphi)} + \frac{\omega}{s} \right), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \frac{E_0 \gamma'}{h_*^{1/2}}, \quad \omega = \frac{E_0 a_0}{E_1 h_*^{3/2}}, \quad \gamma' = \frac{4(1 - \nu_0)}{(3 - 4\nu_0)^2} \gamma; \\
 a_0 &= \frac{2(1 - \nu_0)}{(1 + \nu_0)(3 - 4\nu_0)}, \quad \gamma = \frac{2(1 - \nu_{12} \nu_{21})}{(1 - 2\nu_0)(E_1(1 + \nu_{21}) + E_2(1 + \nu_{12}))}.
 \end{aligned}$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Значение параметра критической нагрузки получаем минимизацией функции нагружения (5) по волновым числам s, φ . В качестве примера рассмотрим трансверсально-изотропную сферическую оболочку радиуса $R = 1$ с упругим заполнителем, подвергнутую однородному сжатию ($t_1 = t_2 = 1, t_3 = 0$). Коэффициенты Пуассона у материала оболочки — $\nu = 0.3$, у основания — $\nu_0 = 0.4$.

На рис. 1 и в таблице приведены зависимости параметров критической нагрузки от относительной жесткости основания $e = \frac{E_0}{E_1}$ с учетом предварительных напряжений в основании (график, заданный сплошной линией, в таблице — Н) и без учета таковых (на графике — пунктирная линия, в таблице — БН) при относительной толщине оболочки $h_* = 0.01$.

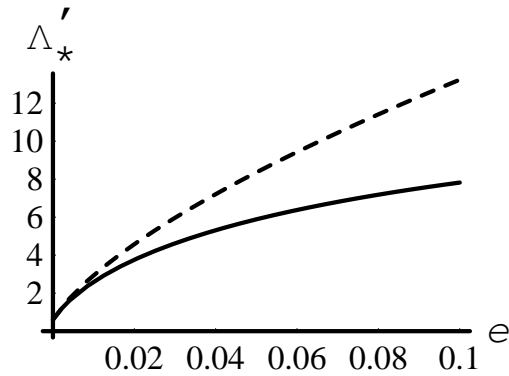


Рис. 1. График зависимости параметра критической нагрузки Λ'_* от относительной жесткости основания $e = E_0/E_1$ при $h_* = 0.01$ с учетом предварительных напряжений в заполнителе (Н) и без учета таковых (БН).

При больших значениях относительной жесткости основания разница между двумя моделями становится весьма существенной. Чтобы проиллюстрировать их отличие, определим **относительное приращение** параметров критической нагрузки следующим образом:

$$\Delta_R = \frac{\Lambda'_{2*} - \Lambda'_{1*}}{\Lambda'_{2*}} \cdot 100\%.$$

Здесь Λ'_{1*} — значение параметра критической нагрузки, полученное в модели с учетом предварительных напряжений заполнителя, Λ'_{2*} — значение аналогичного параметра в модели без учета таковых. Графическая зависимость $\Delta_R(e)$ приведена на рис. 2.

Таблица 1. Параметры критической нагрузки Λ'_{1*} , Λ'_{2*} и волнообразования p, q

e	Н		БН	
	Λ'_{1*}	$p = q$	Λ'_{2*}	$p = q$
0.0001	0.634	13.013	0.635	13.021
0.0005	0.756	13.666	0.765	13.711
0.001	0.899	14.420	0.918	14.519
0.005	1.792	18.793	1.934	19.429
0.01	2.595	22.197	2.939	23.528
0.05	5.888	32.931	8.357	39.157
0.1	7.822	37.894	13.234	49.219

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно из рис. 2 и таблицы, с увеличением жесткости основания e величина $\Delta_R(e)$ также увеличивается.

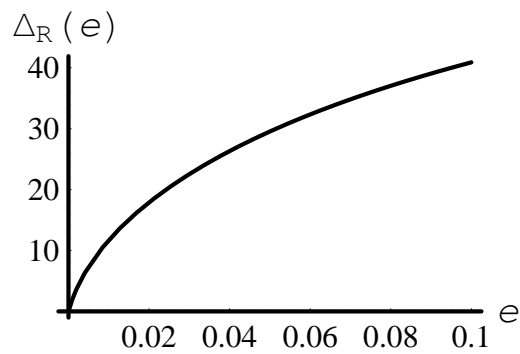


Рис. 2. График зависимости относительного приращения параметров критической нагрузки $\Delta_{\text{ОТН}}$ от относительной жесткости основания $e = E_0/E_1$.

Так, при $e = 0.001$ значения обеих нагрузок весьма близки — они отличаются всего лишь на $\Delta_R(0.001) = 0.1\%$, а при $e = 0.1$, когда жесткость заполнителя в 10 раз меньше жесткости материала