Функциональный анализ и его приложения
2015, т. 49, вып. 2, с. 70–78

УДК 514.747.2

Исчезающие циклы на пуассоновых многообразиях*

© 2015. Д. В. Кубрак, М. В. Финкельберг

Вадиму Шехтману к шестидесятилетию

Мы немного обобщаем результаты Мирковича–Эванса и «вычисляем» характеристические циклы пучков Горески–Макферсона на трансверсальных срезах в двойном аффинном грассманиане. Мы также выдвигаем гипотезу, связывающую гиперболические слои и микролокализацию в неподвижной относительно действия тора точке пуассонова многообразия.

1. Введение

1.1. Стандартная задача микролокальной геометрии состоит в том, чтобы для извращенного пучка $\mathcal{F}$ на гладком многообразии Y подсчитать характеристический цикл $\mathrm{CC}(\mathcal{F}) = \sum_{S\in\mathcal{S}} c_S\overline{T^*_SY}$ — положительную целочисленную комбинацию замыканий конормальных расслоений к локально замкнутым стратам $S \subset Y$. Эта задача была решена Эвансом и Мирковичем в [3] для пучков Горески–Макферсона $G[[z]]$-орбит в аффинном грассманиане Gr_G полупростой комплексной группы G. А именно, они смогли доказать обращение в нуль всех препятствий Эйлера с помощью вычисления A-эквивариантной эйлеровой характеристики комплексных линков ($\mathsf{A} \subset G$ — картановский тор). Для их подхода было важно, что страты S являлись орбитами действия некоторой алгебраической группы и что конормальные слои могли быть отождествлены с некоторыми алгебраическими алгебрами Ли.

Результаты из [3] наводят на мысль о существовании микролокального функтора слоя из геометрической категории Сатаке $\mathrm{Perv}_{G[[z]]}(\mathrm{Gr}_G)$ в категорию представлений двойственной по Ленглендсу группы $\check{G}$. Предполагаемый аффинный аналог грассманиана Gr_G — двойной аффинный грассманиан $\mathrm{Gr}_G^{\mathrm{aff}}$ — был введен в [2]. Точнее, весь $\mathrm{Gr}_G^{\mathrm{aff}}$ слишком бесконечномерен для доступного на данный момент математического аппарата, поэтому приходится думать о нем как о наборе (конечномерных) трансверсальных срезов. Цена, которую приходится заплатить за ущербность такого подхода, состоит в том, что страты уже не являются орбитами действия каких-либо групп.

К счастью, они все еще являются симплектическими листами для пуассоновой структуры. Это наделяет конормальные слои структурой алгебры Ли и дает возможность применить аргумент Эванса–Мирковича. Мы доказываем это в §3 после некоторой общей подготовки в §2, отвечая на вопрос Эванса.

*Исследование М. Ф. выполнено в ИППИ РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-50-00150). Статья подготовлена Д. К. в ходе проведения исследования с использованием средств субсидии на государственную поддержку ведущих университетов Российской Федерации в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, выделенной НИУ ВШЭ.

Изоморфизм (возможного) микролокального функтора слоя со стандартным функтором слоя Мирковича–Вилонена дается равенством между гиперболическими слоями и микролокализацей в неподвижных относительно действия тора точках. Похоже, что оно должно выполняться и в наших более общих условиях, см. гипотезу 4.1. Если эта гипотеза верна, то она позволяет выразить классические R-матрицы в [5, §4.8] как действие микролокальной фундаментальной группы.

Есть еще один богатый класс алгебраических пуассоновых многообразий с конечным числом симплектических листов: колчанные многообразия Накаджимы. Они удовлетворяют почти всем условиям разд. 2.2 кроме одного (за исключением случая типа A, конечного или аффинного): множество точек, неподвижных относительно действия тора, не дискретно. Уже в простейших примерах клейновых особенностей типа D и E (колчанные многообразия конечного типа, соответствующие нулевому весу присоединенного фундаментального представления) препятствие Эйлера не обращается в нуль. Более точно, для всех клейновых особенностей типа D и E (там всего 2 страта) оно равно 1; поэтому кратность кокасательного слоя в особой точке в характеристическом цикле (постоянного) IC-пучка равна 2. Зато для аффинных гиперторических многообразий (другой класс алгебраических пуассоновых многообразий с конечным числом симплектических листов) все наши условия выполнены, так что кратность вхождения конормального расслоения к страту в характеристический цикл IC-пучка совпадает с размерностью тотального слоя IC-пучка на этом страте, вычисленной в [6].

Благодарности. Эта статья является результатом терпеливых объяснений В. Гинзбурга, А. Кузнецова, Л. Рыбникова, П. Шапира и Дж. Вильямсона.

§2. Обращение в нуль препятствий Эйлера

2.1. Обзор [3]**.** Мы напоминаем рассуждение Эванса и Мирковича.

Пусть $\mathcal{L}$ — стратификация Уитни комплексного многообразия Y, и пусть $D_{\mathcal{L}}(Y)$ обозначает производную категорию $\mathcal{L}$-конструктивных пучков. Пусть $\mathcal{F}$ — объект категории $D_{\mathcal{L}}(Y)$. Тогда он определяет две важные конструктивные (относительно $\mathcal{L}$) функции на Y. Первая, χ, просто равна эйлеровой характеристике $\chi(\mathcal{F}_y)$ слоя пучка $\mathcal{F}$ в точке y. Так как $\mathcal{F}$ лежит в $D_{\mathcal{L}}(Y)$, χ является $\mathcal{L}$-конструктивной, и мы обозначаем через $\chi_\alpha(\mathcal{F})$ ее значение на страте α. Вторая функция, $c(\mathcal{F})$, приходит из характеристического цикла

$$CC(\mathcal{F}) = \sum_{\alpha\in\mathcal{L}} c_\alpha(\mathcal{F}) \cdot \overline{T^*_\alpha(Y)},$$

ее значение на страте α равняется величине $c_\alpha(\mathcal{F})$, которая называется микролокальной кратностью пучка $\mathcal{F}$ вдоль α. Здесь $T^*_\alpha(Y) \subset T^*(Y)$ обозначает конормальное расслоение к страту α.

Для любой пары стратов α и β препятствие Эйлера $e_{\alpha,\beta}$ определяется как $c_\alpha(\mathbb{C}_\beta)$, где $\mathbb{C}_\beta$ — постоянный пучок на β, продолженный нулем на Y.

Ковектор $\xi \in T^*_\alpha(Y)$ называется не-$\mathcal{L}$-характеристичным, если он лежит в

$$T^*_\alpha(Y)^r := T^*_\alpha(Y) - \bigcup_{\alpha\neq\beta} \overline{T^*_\beta(Y)}.$$

Множество не-$\mathcal{L}$-характеристичных элементов открыто и плотно в $T^*_\alpha(Y)$, и его фундаментальная группа называется микролокальной фундаментальной группой страта α.

Следующую теорему можно найти в [4, гл. 9]:

Теорема 2.1. (a) *В группе Гротендика $\mathcal{L}$-конструктивных комплексов*

$$c_\alpha = \sum_{\beta\in\mathcal{L}} e_{\alpha,\beta}\cdot\chi_\beta.$$

(b) $e_{\alpha,\alpha} = (-1)^{\dim(\alpha)}$ *и* $e_{\alpha,\beta}=0$, *если* $\alpha\not\subseteq\overline{\beta}$. *Если* $\alpha\subset\partial\overline{\beta}$, *то мы выбираем*

- *нормальный срез N в $(Y,\mathcal{L})$ к α в точке $y\in\alpha$,*
- *голоморфную функцию ϕ на N, обращающуюся в нуль в y и такую, что $d_y\phi\in T^*_y(N)$ является $\mathcal{L}$-общим вектором,*
- *маленький шарик B вокруг y в Y,*
- *маленькое $t\in\mathbb{C}$.*

Тогда

$$e_{\alpha,\beta} = (-1)^{\dim(\alpha)+1}\chi_c(\beta\cap\phi^{-1}(t)\cap B)$$

равняется, с точностью до знака, эйлеровой характеристике когомологий с компактным носителем пересечения страта β с нормалью к α и близкой гиперплоскостью $\phi^{-1}(t)$ вблизи точки y.

Пересечение $\beta\cap\phi^{-1}(t)\cap B$ называется комплексным линком стратов α и β.

Миркович и Эванс предлагают следующее: имея действие компактного тора A^c на Y, стабилизирующее y и β, выбрать B в теореме 2.1 A^c-инвариантным и попытаться найти A^c-инвариантную функцию ϕ на N, такую, чтобы ее дифференциал был нехарактеристичным. Тогда комплексный линк будет также инвариантен относительно действия A^c, и можно применить классический результат Бореля. А именно, пусть Z — паракомпактное пространство конечной когомологической размерности с действием компактного тора A^c; тогда $\chi_c(Z)=\chi_c(Z^{\mathsf{A}^c})$, где Z^{A^c} обозначает множество неподвижных точек. В частности, если Z^{A^c} пусто, то мы получаем $\chi_c(Z)=0$, или, что то же самое, $e_{\alpha,\beta}=0$.

Поэтому главный вопрос состоит в существовании A^c-инвариантной функции с нехарактеристичным дифференциалом. В следующем разделе мы формулируем некоторые технические условия, которые ее существование гарантируют. В следующем параграфе мы проверяем эти условия для нашего основного примера.

2.2. Действующие лица. X — аффинное комплексное пуассоново многообразие с конечным числом симплектических листов X_i, $i\in L$. Во избежание путаницы мы поясним определение симплектических листов в этой ситуации. Пусть $X_{\mathrm{sing}}\subset X$ обозначает сингулярный локус многообразия X. Тогда $X - X_{\mathrm{sing}}$ — гладкое пуассоново многообразие, и мы требуем, чтобы оно имело конечное число пуассоновых листов. Более того, X_{sing} наследует пуассонову структуру от X, но $\dim X_{\mathrm{sing}} < \dim X$; поэтому симплектические листы определены и на X_{sing} (индукцией по размерности). Замыкание листа X_i обозначается через $\overline{X}_i$. Скобка Пуассона на $R:=\mathbb{C}[X]$ обозначается через $\{\ ,\ \}$. Редуктивная группа G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ действует на X, сохраняя скобку $\{\ ,\ \}$. Мы предполагаем существование отображения моментов $\mu\colon X\to\mathfrak{g}^*$ и, следовательно, $\mu^*\colon \mathrm{Sym}(\mathfrak{g})=\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]\to R$. Множество неподвижных точек X^{A} действия максимального тора $\mathsf{A} \subset G$ состоит из одной точки $x \in X$, 0-мерного симплектического листа. Кроме того, имеется действие однопараметрической группы $\mathbb{C}^{\times}$ на X, коммутирующее с действием G. Мы предполагаем, что соответствующее действие на R имеет только положительные веса: оно индуцирует градуировку $R = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{l>0} R_l$ и $\mathfrak{m}_x = \bigoplus_{l>0} R_l$. Мы предполагаем также, что скобка Пуассона имеет вес $w > 0$ относительно однопараметрической группы $\mathbb{C}^{\times}$, т.е. $\{R_l, R_m\} \subset R_{l+m-w}$. Наконец, мы предполагаем, что $R_l = 0$ для $0 < l < w$ и R_w совпадает с образом отображения μ^* пространства линейных функций на $\mathfrak{g}^*\colon \mathfrak{g} \xrightarrow{\mu^*} R$.

2.3. Кокасательная алгебра Ли. Скобка Пуассона на R индуцирует структуру алгебры Ли на кокасательном пространстве Зарисского $T_x^*X := \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

Действительно, так как x является симплектическим листом, пуассонов бивектор обращается в нуль в x и $\{\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_x\} \subset \mathfrak{m}_x$. По правилу Лейбница $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$ мы также имеем $\{\mathfrak{m}_x^2, \mathfrak{m}_x\} \subset \mathfrak{m}_x^2$. Другими словами, скобка Пуассона на $\mathfrak{m}_x$ спускается на $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ и снабжает его структурой алгебры Ли, обозначаемой через $\mathfrak{q}$. Градуировка на $\mathfrak{m}_x$ дает градуировку на $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q} = \bigoplus_{l \geq w} \mathfrak{q}_w$. Мы полагаем $\mathfrak{q}^m := \mathfrak{q}_{w+m}$. Относительно этой новой сдвинутой градуировки скобка Ли однородна, что делает $\mathfrak{q}$ неотрицательно градуированной алгеброй Ли.

Лемма 2.2. $\mathfrak{q}$ — *алгебраическая алгебра Ли, т.е. существует комплексная алгебраическая группа Ли* Q *с алгеброй Ли* $\mathfrak{q}$.

Доказательство. Благодаря условиям из разд. 2.2, $\mathfrak{q}^0$ есть фактор алгебры $\mathfrak{g}$, более того, этот фактор алгебраический, т.е. $\mathfrak{q}^0 = \operatorname{Lie} \mathsf{Q}^0$ для фактора Q^0 группы G. Действительно, пусть $\mathfrak{k} := \operatorname{Ker} \mu^* \subset \mathfrak{g}$. Тогда $\xi \in \mathfrak{g}$ лежит в $\mathfrak{k}$ в том и только том случае, когда он действует нулевым векторным полем на касательный конус Зарисского $C_xX = \operatorname{Spec} \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}_x^k/\mathfrak{m}_x^{k+1}$. Однако ядро действия алгебры $\mathfrak{g}$ на C_xX есть алгебра Ли ядра действия группы G на C_xX (которое, в свою очередь, совпадает с ядром действия группы G на X благодаря редуктивности группы G). Нильпотентный идеал $\mathfrak{q}^{>0}$ интегрируется до унипотентной группы $\mathsf{Q}^{>0}$, и присоединенное действие алгебры $\mathfrak{q}^0$ на $\mathfrak{q}^{>0}$ интегрируется до действия группы G на $\mathfrak{q}^{>0}$ (пропускаясь через $G \twoheadrightarrow \mathsf{Q}^0$). Лемма доказана. $\square$

2.4. Вычисление препятствий Эйлера. Существует открытая по Зарисскому окрестность U точки x в X и замкнутое вложение $U \hookrightarrow Y$ в *гладкое* алгебраической многообразие, индуцирующее изоморфизм касательных пространств Зарисского $T_xX = T_xU \xrightarrow{\sim} T_xY$. Двойственно, $T_x^*Y \xrightarrow{\sim} \mathfrak{q}$. Регулярная часть $\mathfrak{q}^{\mathrm{reg}} \subset \mathfrak{q}$ определяется как $\mathfrak{q} \setminus \bigcup_{i \in L, X_i \neq \{x\}} \overline{T^*_{X_i \cap U} Y} \cap T_x^*Y$. Это непустое открытое подмножество в $\mathfrak{q}$. Оно, очевидно, не зависит от выбора U и Y, сделанного выше. Более того, если мы выберем замкнутое вложение $U \hookrightarrow Y'$, дающее сюръекцию $p\colon T_x^*Y' \twoheadrightarrow \mathfrak{q}$, то регулярная часть векторного пространства T_x^*Y' (равная $T_x^*Y' \setminus \bigcup_{i \in L, X_i \neq \{x\}} \overline{T^*_{X_i \cap U} Y'} \cap T_x^*Y'$) будет в точности равна $p^{-1}(\mathfrak{q}^{\mathrm{reg}})$.

Лемма 2.3. $\mathfrak{q}^{\mathrm{reg}} \subset \mathfrak{q}$ *инвариантно относительно присоединенного действия группы* Q *на* $\mathfrak{q}$.

Доказательство. Пусть $C_x\overline{X_i} \subset C_xX \subset T_xX = T_xY$ — нормальные конусы. Пусть, кроме того, $C_x^{\mathrm{sm}}\overline{X_i} \subset C_x\overline{X_i}$ — это гладкая часть. Конструкция деформации к нормальному конусу доказывает, что $\overline{T^*_{C_x^{\mathrm{sm}}\overline{X_i}} T_xY} \cap T_x^*Y = \overline{T^*_{X_i \cap U} Y} \cap T_x^*Y$.

Левая часть равенства есть конус над замкнутым подмногообразием проективизации $\mathbb{P}\mathfrak{q} = \mathbb{P}T_x^*Y$, проективно двойственным $\mathbb{P}C_x\overline{X_i} \subset \mathbb{P}T_xY$. Так как $C_x\overline{X_i} \subset \mathfrak{q}^*$ — пуассоново подмногообразие, оно Q-инвариантно; значит, его проективно двойственное также Q-инвариантно. $\square$

Теорема 2.4. *Препятствия Эйлера $e_{x,\overline{X}_i}$ равны 0 для любого $X_i \neq x$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $e_{x,X}$. Согласно [7, 2.13], найдется ненулевой элемент $q \in \mathfrak{q}^{\mathrm{reg}}$, неподвижный относительно действия максимального тора $T \subset \mathsf{Q}$. Так как все максимальные торы в Q сопряжены и $\mathfrak{q}^{\mathrm{reg}}$ инвариантно относительно Q, то мы можем найти другой ненулевой элемент $q' \in \mathfrak{q}^{\mathrm{reg}}$, стабилизируемый максимальным тором $\mathsf{A} \subset G \to \mathsf{Q}$ (в обозначениях разд. 2.2). Выберем A-эквивариантное замкнутое вложение $X \hookrightarrow \mathbb{A}^N$ и подъем элемента q' до A-инвариантной линейной функции ϕ на $\mathbb{A}^N$. Теперь рассуждение в [3, доказательство теоремы 2.2] доказывает, что $e_{x,X} = 0$.

В случае произвольного симплектического листа $X_i \subset X$, $X_i \neq x$, мы просто заменяем X на $\overline{X}_i$ в проведенном выше рассуждении: все условия из разд. 2.2 выполняются для тех же $\mathsf{A} \subset G$ и $\mathbb{C}^\times$. $\square$

§3. Применения к трансверсальным срезам в двойных аффинных грассманианах

3.1. Пространства Уленбек. Мы следуем обозначениям [2]. Начнем с того, что для почти простой односвязной комплексной алгебраической группы H мы обозначим через $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$ замыкание Уленбек пространства $\mathrm{Bun}_H^a(\mathbb{A}^2)$ модулей H-расслоений на $\mathbb{P}^2$, тривиализованных вдоль $\mathbb{P}^1$ и со вторым классом Черна, равным a. Оно снабжается действием группы $H \times \mathrm{Aff}(2)$. Здесь H действует заменой тривиализации, а $\mathrm{Aff}(2) = \mathrm{GL}(2) \ltimes \mathbb{G}_a^2$ (группа аффинных преобразований пространства $\mathbb{A}^2$, т.е. $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^1)$) действует переносом структуры. Нормальная подгруппа $\mathbb{G}_a^2$ действует на $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$ свободно, и фактор обозначается через $'\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$ — приведенное пространство Уленбек, снабженное действием группы $H \times \mathrm{GL}(2)$. Вложим $\mathbb{C}^\times \subset \mathrm{GL}(2)$ в качестве центральной подгруппы, и пусть G — подгруппа $H \times \mathrm{SL}(2)$.

Предложение 3.1. *Многообразие $X = {'\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)}$ с действием группы $G \times \mathbb{C}^\times$ удовлетворяет условиям разд.* 2.2.

Доказательство. В случае $H = \mathrm{SL}(r)$ пространство Уленбек $\mathcal{U}_{\mathrm{SL}(r)}^a(\mathbb{A}^2)$ было построено Дональдсоном как гамильтонова редукция пространства представлений двухпетлевого колчана; оно обычно обозначается через $M_0(V, W)$, где $V = \mathbb{C}^a$, $W = \mathbb{C}^r$. Эта конструкция снабжает $\mathcal{U}_{\mathrm{SL}(r)}^a(\mathbb{A}^2)$ пуассоновой структурой. Для произвольной группы H и представления $\varrho\colon H \to \mathrm{SL}(r)$ мы имеем соответствующее вложение $\varrho_*\colon \mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2) \hookrightarrow \mathcal{U}_{\mathrm{SL}(r)}^{a'}(\mathbb{A}^2)$ для некоторого a'. Ограничение пуассоновой структуры многообразия $\mathcal{U}_{\mathrm{SL}(r)}^{a'}(\mathbb{A}^2)$ на $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$ не зависит от ϱ с точностью до (ненулевого) скалярного множителя. Мы фиксируем пуассонову структуру на $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$, выбирая, скажем, присоединенное представление ϱ.

Хорошо известная стратификация $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2) = \bigsqcup_{0 \leqslant b \leqslant a} \mathrm{Bun}_H^b(\mathbb{A}^2) \times \mathrm{Sym}^{a-b}\mathbb{A}^2$ измельчается до *диагональной* стратификации $\mathrm{Sym}^{a-b}\mathbb{A}^2 = \bigsqcup_{\mathfrak{P} \in P(a-b)} \mathrm{Sym}^{\mathfrak{P}}\mathbb{A}^2$, см. [1, §10] (здесь $P(a-b)$ обозначает множество разбиений числа $a-b$). Диагональные страты есть не что иное, как симплектические листы пуассоновой структуры; в частности, всего симплектических листов конечное число. Для краткости мы будем обозначать страт $\mathrm{Bun}^b_H(\mathbb{A}^2)\times \mathrm{Sym}^{\mathfrak{P}}\mathbb{A}^2$ через $\mathcal{U}^{b,\mathfrak{P}}_H$, а его образ в приведенном пространстве Уленбек $'\mathcal{U}^a_H(\mathbb{A}^2)$ через $'\mathcal{U}^{b,\mathfrak{P}}_H$. Таким образом, $'\mathcal{U}^a_H(\mathbb{A}^2)=\bigsqcup_{0\leqslant b\leqslant a}^{\mathfrak{P}\in P(a-b)}{}'\mathcal{U}^{b,\mathfrak{P}}_H$ есть разложение на симплектические листы. Среди них есть единственный 0-мерный лист: для $b=0$, $\mathfrak{P}=(a)$. Эта точка x является единственной неподвижной точкой относительно действия максимального тора $\mathsf{A}\subset G$.

Для того чтобы вычислить вес w пуассоновой структуры относительно действия группы $\mathbb{C}^\times$, мы напомним конструкцию гамильтоновой редукции $\mathcal{U}^a_{\mathrm{SL}(r)}(\mathbb{A}^2)=M_0(V,W)$. А именно, для $M=\mathrm{Hom}(W,V)\oplus\mathrm{Hom}(V,W)\oplus\mathrm{End}(V,V)\oplus\mathrm{End}(V,V)$ (с типичным элементом (p,q,A,B)) и $M\supset M':=\{(p,q,A,B): AB-BA+pq=0\}$ с естественным действием группы $\mathrm{GL}(V)$ мы имеем $M_0(V,W)=M'/\!/\,\mathrm{GL}(V)$. Действие группы $\mathbb{G}_a^2$ на $M_0(V,W)$ приходит из действия

$$(a,b)\cdot(p,q,A,B)=(p,q,A+a\,\mathrm{Id}_V,B+b\,\mathrm{Id}_V)$$

на M. Поэтому $'\mathcal{U}^a_{\mathrm{SL}(r)}(\mathbb{A}^2)=M_0(V,W)/\mathbb{G}_a^2=M''/\!/\,\mathrm{GL}(V)$, где $M'\supset M'':=\{(p,q,A,B): AB-BA+pq=0,\ \mathrm{Tr}\,A=\mathrm{Tr}\,B=0\}$. Векторное пространство M имеет естественную симплектическую структуру, которая дает пуассонову структуру на категорном факторе $M_0(V,W)$. Действие группы $\mathbb{C}^\times$ на $M_0(V,W)$ приходит из стягивающего действия $t\cdot(p,q,A,B)=(tp,tq,tA,tB)$ на M. Очевидно, что симплектическая форма на M имеет вес 2 относительно этого действия, поэтому $w=2$. По определению пуассоновой структуры на $'\mathcal{U}^a_H(\mathbb{A}^2)$ она имеет вес 2 и для произвольной группы H.

Остается найти все функции на $'\mathcal{U}^a_H(\mathbb{A}^2)$ веса 1 и 2 относительно $\mathbb{C}^\times$. Снова мы начинаем со случая $H=\mathrm{SL}(r)$. По классической теории инвариантов все $\mathrm{GL}(V)$-инвариантные функции на M'' порождаются следующими: (a) матричными элементами матрицы $qCp\in\mathrm{End}(W)$, где C есть слово из букв (A,B); (b) следами матриц $C\in\mathrm{End}(V)$, где C есть слово из букв (A,B). Очевидно, что $\mathbb{C}^\times$-вес для случая (a) равен длина$(C)+2$, а вес$(\mathrm{Tr}\,C)$ = длина(C). Заметим, что единственные слова длины 1 — это A, B и что их следы обращаются в нуль по определению многообразия M''. Таким образом, функций веса 1 нет.

Функции веса 2 линейно порождены матричными элементами матрицы qp и следами $\mathrm{Tr}\,A^2$, $\mathrm{Tr}\,B^2$, $\mathrm{Tr}\,AB$. Заметим, что $\mathrm{Tr}\,qp=\mathrm{Tr}\,pq=0$. Очевидно, что функции веса 2 из первой группы подняты при помощи отображения моментов $M''/\!/\,\mathrm{GL}(V)\to\mathfrak{sl}(W)^*=\mathfrak{sl}(r)^*$, а из второй — при помощи отображения моментов $M''/\!/\,\mathrm{GL}(V)\to\mathfrak{sl}(2)^*$. Поэтому $\mathfrak{sl}(r)\oplus\mathfrak{sl}(2)\twoheadrightarrow\mathbb{C}[{}'\mathcal{U}^a_{\mathrm{SL}(r)}]_2$.

Наконец, для произвольного представления $H\xrightarrow{\varrho}\mathrm{SL}(r)$ функции веса k на $'\mathcal{U}^a_H$ являются ограничениями функций веса k на $'\mathcal{U}^{a'}_{\mathrm{SL}(r)}$ при замкнутом вложении $\varrho_*\colon {}'\mathcal{U}^a_H\hookrightarrow{}'\mathcal{U}^{a'}_{\mathrm{SL}(r)}$. Коммутативная диаграмма отображений моментов

$$\begin{tikzcd}
{}'\mathcal{U}^a_H \arrow[r, "\varrho_*"'] \arrow[d] & {}'\mathcal{U}^{a'}_{\mathrm{SL}(r)} \arrow[d] \\
\mathfrak{g}^*=\mathfrak{h}^*\oplus\mathfrak{sl}(2)^* & \mathfrak{sl}(r)^*\oplus\mathfrak{sl}(2)^* \arrow[l, "\varrho^*\oplus\mathrm{Id}"']
\end{tikzcd}$$

завершает доказательство. □

3.2. Характеристический цикл пучка $\mathbf{IC}('\mathcal{U}^a_H)$. Мы выбираем замкнутое вложение $'\mathcal{U}^a_H \hookrightarrow Y$ в гладкое многообразие Y и рассматриваем $\mathrm{IC}('\mathcal{U}^a_H)$ как извращенный пучок на Y.

Следствие 3.2. *Кратность конормального расслоения $T^*_{'\mathcal{U}^{b,\mathfrak{P}}_H}Y$ в характеристическом цикле $\mathrm{CC}(\mathrm{IC}('\mathcal{U}^a_H))$ равна полной размерности слоя пучка $\mathrm{IC}('\mathcal{U}^a_H)$ на страте $'\mathcal{U}^{b,\mathfrak{P}}_H$ (подсчитанной в* [1, теорема 7.10]).

Доказательство. Рассуждение в [3, разд. 2.5] сводит доказательство к обращению в нуль препятствий Эйлера $e_{'\mathcal{U}^{b',\mathfrak{P}'}_H,'\overline{\mathcal{U}}^{b,\mathfrak{P}}_H}$, где $'\overline{\mathcal{U}}^{b,\mathfrak{P}}_H \supset {'\mathcal{U}^{b',\mathfrak{P}'}_H}$ обозначает замыкание страта $'\mathcal{U}^{b,\mathfrak{P}}_H$. Разберемся сначала с наименьшим стратом $x = {'\mathcal{U}^{b',\mathfrak{P}'}_H}$ для $b' = 0$, $\mathfrak{P}' = (a)$. Здесь обращение в нуль следует из теоремы 2.4 и предложения 3.1. В общем случае равенство $e_{'\mathcal{U}^{b',\mathfrak{P}'}_H,'\overline{\mathcal{U}}^{b,\mathfrak{P}}_H} = 0$ эквивалентно равенству $e_{\mathcal{U}^{b',\mathfrak{P}'}_H,\overline{\mathcal{U}}^{b,\mathfrak{P}}_H} = 0$, где $\overline{\mathcal{U}}^{b,\mathfrak{P}}_H \supset \mathcal{U}^{b',\mathfrak{P}'}_H$ обозначает замыкание страта $\mathcal{U}^{b,\mathfrak{P}}_H$ в неприведенном пространстве Уленбек $\mathcal{U}^a_H(\mathbb{A}^2)$. По принципу факторизации [1, предложение 6.5] искомое препятствие есть произведение $\prod_{l=1}^m e_{\mathcal{U}^{0,(a_l)}_H,\overline{\mathcal{U}}^{b_l,\mathfrak{P}_l}_H}$ (где m — число слагаемых в разбиении $\mathfrak{P}$). Эти множители, как уже было доказано, обращаются в нуль. □

3.3. Трансверсальные срезы в двойных аффинных грассманианах. Пусть $\Gamma_k = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \subset G = H \times \mathrm{SL}(2)$ — циклическая подгруппа; трансверсальный срез $\mathcal{U}^\lambda_{H,\mu}(\mathbb{A}^2/\Gamma_k)$ определяется (см. [2]) как некоторая связная компонента множества неподвижных точек многообразия $\mathcal{U}^a_H(\mathbb{A}^2)^{\Gamma_k}$. Пуассонова структура ограничивается с $\mathcal{U}^a_H(\mathbb{A}^2)$, и симплектические листы суть пересечения среза $\mathcal{U}^\lambda_{H,\mu}(\mathbb{A}^2/\Gamma_k)$ с симплектическими листами (стратами диагональной стратификации) многообразия $\mathcal{U}^a_H(\mathbb{A}^2)$.

В случае $k = 2$ циклическая подгруппа Γ_2 центральна в $\mathrm{SL}(2)$ и централизатор $G = Z_{H\times\mathrm{SL}(2)}(\Gamma_2) = Z_H(\Gamma_2) \times \mathrm{SL}(2)$ действует на $\mathcal{U}^\lambda_{H,\mu}(\mathbb{A}^2/\Gamma_2)$, сохраняя пуассонову структуру. В случае $k > 2$ на $\mathcal{U}^\lambda_{H,\mu}(\mathbb{A}^2/\Gamma_k)$ мы имеем действие только группы $G = Z_{H\times\mathrm{SL}(2)}(\Gamma_k) = Z_H(\Gamma_k)\times T$, где T — тор, централизирующий Γ_k в $\mathrm{SL}(2)$. Действие центральной подгруппы $\mathbb{C}^\times \subset \mathrm{GL}(2)$ на $\mathcal{U}^a_H(\mathbb{A}^2)$ сохраняет $\mathcal{U}^\lambda_{H,\mu}(\mathbb{A}^2/\Gamma_k)$.

Предложение 3.3. *Пусть $X = \mathcal{U}^\lambda_{H,\mu}(\mathbb{A}^2/\Gamma_k)$. Тогда X с действием группы $G \times \mathbb{C}^\times$ удовлетворяет условиям разд.* 2.2.

Доказательство. Мы в целом повторяем доказательство предложения 3.1: используя представление $\varrho\colon H \to \mathrm{SL}(r)$, мы сводим утверждение к случаю $H = \mathrm{SL}(r)$. В этом случае трансверсальный срез $\mathcal{U}^\lambda_{H,\mu}(\mathbb{A}^2/\Gamma_k)$ есть не что иное, как циклическое колчанное многообразие $M_0(\underline{V},\underline{W})$ [2, часть 7] (для циклического колчана с k вершинами). Мы имеем $M_0(\underline{V},\underline{W}) = M'/\!/\,\mathrm{GL}(\underline{V})$, где $\mathrm{GL}(\underline{V}) = \prod_{l\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}\mathrm{GL}(V_l)$, и $M' \subset M := \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}(W_l,V_l) \oplus \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}(V_l,W_l) \oplus \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}\mathrm{End}(V_l,V_{l+1}) \oplus \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}\mathrm{End}(V_l,V_{l-1})$ задается уравнениями $A_{l-1}B_l - B_{l+1}A_l + p_lq_l = 0$, $l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Группа $\mathbb{C}^\times$ действует растяжением, и $\mathbb{C}^\times$-вес пуассоновой структуры равен $w = 2$. Несложно проверить при помощи классической теории инвариантов, что все $\mathrm{GL}(\underline{V})$-инвариантные функции на M' порождены следующими функциями: (a) матричными элементами матриц $q_n C p_m$, где C — слово в алфавите $(A_l, B_l)_{l\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ (допустимы не все слова, а только *компонируемые*); (b) следами матриц $C \in \mathrm{End}(V_0)$, где C — компонируемое слово из алфавита $(A_l, B_l)_{l\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$, начинающееся и заканчивающееся в нулевой вершине. Среди них функции веса 2 — это матричные элементы матриц $q_l p_l$ и $\mathrm{Tr}(B_1A_0)$ для $k > 2$ (заметим, что $\mathrm{Tr}(A_{-1}B_0) = \mathrm{Tr}(B_1A_0) - \mathrm{Tr}(q_0p_0)$), а также $\mathrm{Tr}(A_1A_0)$, $\mathrm{Tr}(B_1B_0)$ для $k = 2$. Очевидно, что эти функции приходят из отображения моментов $M_0(\underline{V}, \underline{W}) \to \bigl(\bigoplus_{l\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \mathfrak{gl}(W_l) \cap \mathfrak{sl}(\bigoplus_{l\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} W_l)\bigr)^* \oplus \mathfrak{t}^*$ в случае $k > 2$ и $M_0(\underline{V}, \underline{W}) \to \bigl(\bigoplus_{l\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \mathfrak{gl}(W_l) \cap \mathfrak{sl}(\bigoplus_{l\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} W_l)\bigr)^* \oplus \mathfrak{sl}(2)^*$ в случае $k = 2$. Предложение доказано. □

Следствие 3.4. *Для замкнутого вложения $\mathfrak{U}^{\lambda}_{H,\mu}(\mathbb{A}^2/\Gamma_k) \hookrightarrow Y$ в гладкое многообразие Y кратность конормального расслоения $T^*_S Y$ к симплектическому листу $S \subset \mathfrak{U}^{\lambda}_{H,\mu}(\mathbb{A}^2/\Gamma_k)$ в характеристическом цикле $\mathrm{CC}(\mathrm{IC}(\mathfrak{U}^{\lambda}_{H,\mu}(\mathbb{A}^2/\Gamma_k)))$ равняется полной размерности слоя пучка $\mathrm{IC}(\mathfrak{U}^{\lambda}_{H,\mu}(\mathbb{A}^2/\Gamma_k))$ на страте S.*

Доказательство. Доказательство такое же, как в следствии 3.2. □

Замечание 3.5. Размерность слоя пучка $\mathrm{IC}(\mathfrak{U}^{\lambda}_{H,\mu}(\mathbb{A}^2/\Gamma_k))$ на страте S вычисляется при помощи принципа факторизации и [2, гипотеза 4.14].

§4. Гипотеза

4.1. Камеры. В условиях разд. 2.2 мы полагаем $\mathfrak{a} := \mathrm{Lie}\,\mathsf{A}$ и $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} := X_*(\mathsf{A})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R} \subset \mathfrak{a}$. Мы называем ковес $a \in X_*(\mathsf{A})$ *регулярным*, если $X^{a(\mathbb{C}^\times)} = x$. Мы предполагаем, что нерегулярные ковеса образуют конечное объединение подгрупп коранга 1 в $X_*(\mathsf{A})$. Мы говорим, что элемент $a \in \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ регулярный, если он лежит вне соответствующих гиперплоскостей. Компоненты связности пространства $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{reg}}$ называются *камерами*.

Пусть задан регулярный ковес $a \in X_*(\mathsf{A})$. Определим притягивающееся множество $\mathfrak{T}_a \subset X$ как множество всех $z \in X$, таких, что $\lim_{c\to 0} a(c)\cdot z = x$. Если менять a внутри камеры $\mathfrak{C}$, то $\mathfrak{T}_a$ меняться не будет; поэтому мы обозначаем его через $\mathfrak{T}_{\mathfrak{C}}$. Замкнутое вложение $\mathfrak{T}_{\mathfrak{C}} \hookrightarrow X$ обозначается через $\iota_{\mathfrak{C}}$, а замкнутое вложение $x \hookrightarrow \mathfrak{T}_{\mathfrak{C}}$ — через $j_{\mathfrak{C}}$. Композиция $j^!_{\mathfrak{C}}\iota^*_{\mathfrak{C}}$ есть гиперболическое ограничение. Во всех примерах §3 $j^!_{\mathfrak{C}}\iota^*_{\mathfrak{C}}\,\mathrm{IC}(X)$ является векторным пространством когомологической градуировки 0.

4.2. Микролокализация. В соответствии с разд. 2.4 мы имеем извращенный пучок $\boldsymbol{\mu}(\mathrm{IC}(X))$ на $T^*_x = \mathfrak{q}$. Согласно [4, предложение 4.4.7], $\boldsymbol{\mu}(\mathrm{IC}(X))$ корректно определен, т. е. не зависит от выбора вложения $U \hookrightarrow Y$. Напомним, что мы имеем гомоморфизм $\eta\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{q} = T^*_x X$. На основании [5] и примеров из §3 мы выдвигаем следующую гипотезу.

Гипотеза 4.1. (a) *$\eta^*\boldsymbol{\mu}(\mathrm{IC}(X))$ постоянен в любой камере $\mathfrak{C}$.*

(b) *Существует канонический изоморфизм $\eta^*\boldsymbol{\mu}(\mathrm{IC}(X))_{\mathfrak{C}} \xrightarrow{\sim} j^!_{\mathfrak{C}}\iota^*_{\mathfrak{C}}\,\mathrm{IC}(X)$.*

Литература

[1] A. Braverman, M. Finkelberg, D. Gaitsgory, *Uhlenbeck spaces via affine Lie algebras*, in: The Unity of Mathematics, Progress in Math., vol. 244, Birkhäuser, Boston, MA, 2006, 17–135; *Erratum*: `http://arxiv.org/abs/math/0301176v4`.

[2] A. Braverman, M. Finkelberg, *Pursuing the double affine Grassmannian.* I. *Transversal slices via instantons on A_k-singularities*, Duke Math. J., **152**:2 (2010), 175–206.

[3] S. Evens, I. Mirković, *Characteristic cycles for the loop Grassmannian and nilpotent orbits*, Duke Math. J., **97**:1 (1999), 109–126.

[4] М. Касивара, П. Шапира, *Пучки на многообразиях*, Мир, М., 1997.

[5] D. Maulik, A. Okounkov, *Quantum Groups and Quantum Cohomology*, `http://arxiv.org/abs/1211.1287`.

[6] N. Proudfoot, B. Webster, *Intersection cohomology of hyperthoric varieties*, J. Algebraic Geom., **16**:1 (2007), 39–63.

[7] R. Steinberg, *Conjugacy Classes in Algebraic Groups*, Lect. Notes Math., vol. 366, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1974.

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Лаборатория
алгебраической геометрии
e-mail: dmkubrak@gmail.com

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», факультет математики
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
e-mail: fnklberg@gmail.com

Поступила в редакцию
9 марта 2013 г.