УДК 517.938

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка

О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразии в топологический поток

В настоящей работе для многообразий размерности 3 решена проблема Дж. Палиса о нахождении необходимых и достаточных условий включения каскада Морса–Смейла в топологический поток. Множество таких потоков открыто в пространстве всех диффеоморфизмов, в то время как множество произвольных диффеоморфизмов, включающихся в гладкий поток, является нигде не плотным. Кроме того, в работе выделен класс диффеоморфизмов, включающихся в топологический поток, для которых полным топологическим инвариантом является граф, аналогичный схеме Е. А. Андроновой, А. Г. Майера и графу М. Пейкшото.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса–Смейла, каскад Морса–Смейла, включение в поток, динамические системы на многообразиях.

§ 1. Введение и формулировка результатов

Пусть M^n – гладкое связное замкнутое многообразие размерности n. *C^m-потоком* ($m \geqslant 0$) на многообразии M^n называется непрерывно зависящее от $t \in \mathbb{R}$ семейство C^m-диффеоморфизмов $X^t\colon M^n \to M^n$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $X^0(x) = x$ для любой точки $x \in M^n$;

2) $X^t(X^s(x)) = X^{t+s}(x)$ для любых $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in M^n$.

C^0-поток еще называют *топологическим потоком*.

Будем говорить, что *диффеоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ включается в C^m-поток*, если f является сдвигом на единицу времени вдоль траекторий некоторого C^m-потока X^t ($f = X^1$).

Основным объектом рассмотрения являются *диффеоморфизмы Морса–Смейла $f\colon M^n \to M^n$*, которые определяются следующим образом:

– неблуждающее множество Ω_f конечно и состоит из гиперболических периодических точек;
– устойчивые и неустойчивые многообразия периодических точек пересекаются трансверсально.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 11-01-12056-офи-м-2011, № 12-01-00672), гранта правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

Везде далее рассматривается класс $\mathrm{MS}(M^n)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла на ориентируемых многообразиях.

Проблема включения диффеоморфизма в поток является классической. Детальный обзор результатов, полученных в этой области, изложен в [1]. В работе [2] доказано, что множество C^r-диффеоморфизмов ($r \geqslant 1$), включающихся в C^1-поток, является подмножеством первой категории в $\mathrm{Diff}^r(M^n)$. В [3] показано, что любая окрестность $U \in \mathrm{Diff}^r(M^n)$ тождественного диффеоморфизма содержит открытое множество V диффеоморфизмов, не включающихся в топологический поток. Согласно [4] множество C^2-диффеоморфизмов, включающихся в C^1-гладкий поток, нигде не плотно в пространстве диффеоморфизмов Морса–Смейла. В то же время, из работ [3], [5], в которых доказана структурная устойчивость диффеоморфизмов Морса–Смейла, следует, что для любого многообразия M^n существует открытое в $\mathrm{Diff}^1(M^n)$ множество диффеоморфизмов Морса–Смейла, включающихся в топологический поток.

В работе [3] также найдены следующие необходимые условия включения диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ в топологический поток:

1) неблуждающее множество Ω_f совпадает с множеством неподвижных точек Fix_f;
2) ограничение диффеоморфизма f на каждое инвариантное многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ сохраняет его ориентацию;
3) если для различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение $W^s_p \cap W^u_q$ непусто (такое пересечение называется *гетероклиническим*), то оно не содержит компактных компонент связности.

В дальнейшем условия 1)–3) будем называть *условиями Палиса*. В работе [3] также показано, что при $n = 2$ эти условия являются достаточными и поставлена задача обобщения этого результата на случай большей размерности. Как оказалось, в размерности $n = 3$ дополнительным препятствием для включения диффеоморфизма Морса–Смейла в топологический поток является возможность дикого вложения сепаратрис седловых точек (компонент связности инвариантных многообразий этих точек без самих точек). Поясним, что понимается под диким вложением сепаратрис.

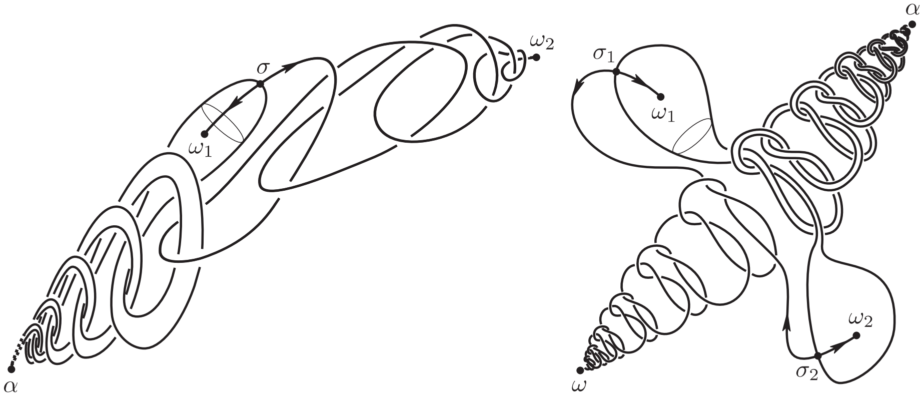
Пусть α – источниковая точка диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$. Будем обозначать через L_α объединение всех одномерных устойчивых сепаратрис седловых точек диффеоморфизма f, принадлежащих W^u_α. Положим $F_\alpha = L_\alpha \cup \alpha$ и назовем F_α *пучком одномерных устойчивых сепаратрис*. Из гиперболичности источника α следует, что W^u_α гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^3$, при этом пучки одномерных сепаратрис гомеоморфны стандартному одномерному пучку в смысле следующего определения.

Определение 1. Множество $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}^3$ будем называть *стандартным одномерным пучком*, если оно состоит из конечного числа прямолинейных лучей с началом в точке $O(0,0,0)$. Подмножество $F \subset \mathbb{R}^3$, снабженное индуцированной топологией и гомеоморфное $\mathbb{F}$, будем называть *одномерным пучком*. При этом пучок F будем называть *ручным*, если существует гомеоморфизм $H\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ такой, что $H(F) = \mathbb{F}$; в противном случае пучок F будем называть *диким*.

Частным случаем одномерного пучка является дуга. Первые примеры диких дуг были построены Е. Артином и Р. Фоксом в 1948 г. Отметим, что ручность каждого из элементов, входящих в пучок $F \subset \mathbb{R}^3$, еще не является гарантией того, что пучок в целом будет ручным. Например, в работе [6] построен пример так называемого *умеренно дикого одномерного пучка*, т.е. такого дикого пучка, что любой содержащийся в нем пучок из меньшего числа дуг является ручным.

Определение 2. Пучок одномерных устойчивых сепаратрис F_α назовем *ручным*, если существует гомеоморфизм $h_\alpha\colon W^u_\alpha \to \mathbb{R}^3$, отображающий F_α на стандартный одномерный пучок. В противном случае будем говорить, что пучок сепаратрис F_α является *диким*. Если ручной (дикий) пучок F_α содержит только одну сепаратрису, то будем называть эту сепаратрису ручной (дикой).

Аналогично определяется *ручной* (*дикий*) *пучок* одномерных неустойчивых сепаратрис F_ω, состоящий из стоковой точки ω и всех одномерных неустойчивых сепаратрис L_ω седловых точек диффеоморфизма f, принадлежащих W^s_ω.



a b

Рис. 1. Диффеоморфизмы с дико вложенными сепаратрисами

В работах [7], [8] построены примеры диффеоморфизмов из класса $\mathrm{MS}(\mathbb{S}^3)$, имеющих дико вложенную одномерную сепаратрису седла, а в работе [9] в том же классе построены диффеоморфизмы, одномерные сепаратрисы которых образуют умеренно дикие пучки. Фазовые портреты этих диффеоморфизмов приведены на рис. 1, a) и 1, b) соответственно. Как будет следовать из леммы 1.1 ниже, такие диффеоморфизмы не включаются ни в какие потоки[1]. Как оказалось, необходимое условие включения диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ в поток заключается даже в более сильном, нежели ручность, требовании, использующем линейное растяжение евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, определяемое формулой $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$.

Определение 3. Пучок одномерных сепаратрис F_α называется *тривиальным*, если существует гомеоморфизм $H_\alpha\colon W^u_\alpha \to \mathbb{R}^3$ такой, что

$$f|_{W^u_\alpha} = H^{-1}_\alpha A H_\alpha|_{W^u_\alpha}$$

и $H_\alpha(F_\alpha)$ – стандартный одномерный пучок.

[1]Заметим, что в силу результатов работы К. Куперберг [10], дикая дуга может быть траекторией некоторого топологического потока на 3-многообразии.

Аналогично определяется *тривиальный пучок* одномерных сепаратрис F_ω.

Лемма 1.1. *Пусть диффеоморфизм f из класса* $\mathrm{MS}(M^3)$ *включается в топологический поток. Тогда все пучки его одномерных сепаратрис являются тривиальными.*

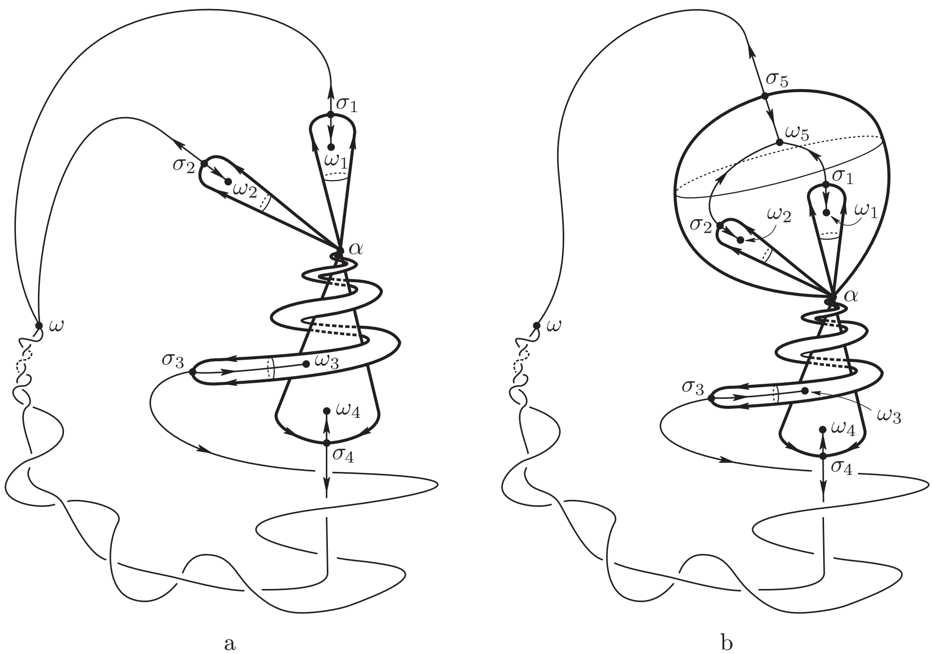


Рис. 2. Фазовые портреты диффеоморфизмов из класса $\mathrm{MS}(\mathbb{S}^3)$, не включающихся ни в какие топологические потоки: a) диффеоморфизм, все пучки одномерных сепаратрис которого являются ручными, но пучок F_ω не является тривиальным; b) диффеоморфизм, все пучки одномерных сепаратрис которого являются тривиальными

В § 4 построен диффеоморфизм из класса $\mathrm{MS}(\mathbb{S}^3)$, все пучки одномерных сепаратрис которого являются ручными, но среди них есть пучок, не являющийся тривиальным (см. рис. 2, a)). Сюрпризом оказался тот факт, что добавление к списку Палиса условия тривиальности всех пучков одномерных сепаратрис седловых точек диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ не приводит к достаточным условиям его включения в топологический поток. Иллюстрирующий этот факт пример также построен в § 4, а на рис. 2, b) изображен его фазовый портрет. В действительности ключом к решению проблемы Палиса о включении диффеоморфизма Морса–Смейла $f\colon M^3 \to M^3$ в поток является схема диффеоморфизма f, введенная в работах [11]–[13] и определяемая следующим образом.

Пусть $q \in \{0,1,2,3\}$ и Ω_q – множество периодических точек p диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ таких, что $\dim W^u_p = q$. Положим $A_f = W^u_{\Omega_0\cup\Omega_1}$, $R_f = W^s_{\Omega_2\cup\Omega_3}$ и $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$. Оказывается, что объемлющее многообразие является объединением трех попарно непересекающихся множеств:

$M^3 = R_f \cup V_f \cup A_f$. При этом множества A_f и R_f являются связными аттрактором и репеллером[2] соответственно, множество V_f также является связным и состоит из блуждающих точек таких, что для α- и ω-предельных множеств любой точки $x \in V_f$ выполняются условия $\alpha(x) \subset R_f$, $\omega(x) \subset A_f$.

Установлено, что пространство орбит $\widehat{V}_f = V_f/f$ действия f на V_f является простым многообразием[3], а естественная проекция $p_f\colon V_f \to \widehat{V}_f$ является накрытием. При этом накрытие p_f индуцирует эпиморфизм $\eta_f\colon \pi_1(\widehat{V}_f) \to \mathbb{Z}$, ставящий в соответствие гомотопическому классу $[c] \in \pi_1(\widehat{V}_f)$ целое число n такое, что поднятие кривой c на V_f соединяет точку x с точкой $f^n(x)$. Обозначим через L^u_f (L^s_f) объединение всех неустойчивых (устойчивых) двумерных сепаратрис седловых точек. Положим

$$\widehat{L}^s_f = p_f(L^s_f \setminus A_f), \qquad \widehat{L}^u_f = p_f(L^u_f \setminus R_f).$$

Определение 4. Набор $S_f = (\widehat{V}_f, \eta_f, \widehat{L}^s_f, \widehat{L}^u_f)$ называется *схемой* диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$.

Определение 5. Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in \mathrm{MS}(M^3)$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\widehat{\varphi}\colon \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$ со следующими свойствами:

1) $\eta_f = \eta_{f'}\widehat{\varphi}_*$;
2) $\widehat{\varphi}(\widehat{L}^s_f) = \widehat{L}^s_{f'}$ и $\widehat{\varphi}(\widehat{L}^u_f) = \widehat{L}^u_{f'}$.

В работах [11]–[13] также доказано следующее

Утверждение 1.1. *Диффеоморфизмы $f, f' \in \mathrm{MS}(M^3)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.*

Положим $g_f = (|\Omega_1 \cup \Omega_2| - |\Omega_0 \cup \Omega_3| + 2)/2$, где $|P|$ означает мощность множества P. Обозначим через $\mathbb{S}_{g_f}$ ориентируемую замкнутую поверхность рода g_f. Положим $\widehat{\mathbb{V}}_{g_f} = \mathbb{S}_{g_f} \times \mathbb{S}^1$. Множество $\widehat{\lambda} = c_{\widehat{\lambda}} \times \mathbb{S}^1$, где $c_{\widehat{\lambda}}$ – простая гладкая замкнутая кривая на поверхности $\mathbb{S}_{g_f}$, назовем *тривиальным тором* на многообразии $\widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$.

Определение 6. Схему S_f диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ назовем *тривиальной*, если существует гомеоморфизм $\widehat{\psi}_f\colon \widehat{V}_f \to \widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$ такой, что каждая компонента связности множеств $\widehat{\psi}_f(\widehat{L}^s_f)$ и $\widehat{\psi}_f(\widehat{L}^u_f)$ является тривиальным тором на многообразии $\widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$.

Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме.

Теорема 1. *Диффеоморфизм $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ включается в топологический поток тогда и только тогда, когда его схема является тривиальной.*

Топологический поток, в который включается диффеоморфизм Морса–Смейла на 3-многообразии, близок по своим свойствам к градиентно-подобному

[2]Компактное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором диффеоморфизма* $f\colon M^n \to M^n$, если существует окрестность U множества A такая, что $f(U) \subset \operatorname{int} U$ и $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(U)$, окрестность U при этом называется захватывающей. Множество $R \subset M^n$ называется *репеллером* для f, если оно является аттрактором для f^{-1}.

[3]Гладкое связное замкнутое ориентируемое 3-многообразие называется *простым*, если оно гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ или неприводимо (любая гладко вложенная 2-сфера ограничивает в нем 3-шар).

потоку (потоку Морса–Смейла без периодических орбит). В 1971 г. М. Пейкшото [14] доказал, что для потоков Морса–Смейла на поверхностях полным топологическим инвариантом является класс изоморфности ориентируемого графа, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с состояниями равновесия и замкнутыми траекториями, а ребра соответствуют некоторым компонентам связности инвариантных многообразий состояний равновесия и замкнутых траекторий, при этом изоморфность графов включает в себя сохранение выделенных специальным образом подграфов (различающих множеств)[4]. Непосредственное обобщение этого инварианта на трехмерный случай не решает проблему топологической классификации в общем случае. Однако в работе [16] показано, что в некотором подмножестве потоков на n-многообразиях ($n > 2$) изоморфность графов является необходимым и достаточным условием их топологической эквивалентности. Мы покажем, что аналогичный результат имеет место для диффеоморфизмов, включающихся в топологические потоки. Именно, рассмотрим класс $G_k(M^n)$ ($n > 2$) сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла таких, что для любого $f \in G_k(M^n)$ выполняются следующие условия:

1) $\Omega_f = \mathrm{Fix}_f$;
2) множество седловых точек состоит в точности из $k > 0$ седловых неподвижных точек[5], причем устойчивое многообразие W^s_σ любой седловой неподвижной точки $\sigma \in \Omega_f$ имеет размерность $n-1$;
3) для любых двух различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение $W^s_p \cap W^u_q$ пусто.

В п. 3.1 (см. теорему 4) показано, что из условий, выделяющих класс $G_k(M^n)$, следует, что неблуждающее множество любого диффеоморфизма $f \in G_k(M^n)$ содержит в точности 1 источник и $k+1$ стоковую точку, а несущее многообразие M^n диффеоморфно n-сфере. *Графом* Γ_f диффеоморфизма $f \in G_k(M^n)$ назовем ориентированный граф, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с неподвижными точками, а ребра – во взаимно однозначном соответствии с сепаратрисами седловых точек диффеоморфизма f. В работах [17], [18] доказано, что при $n > 3$ класс изоморфности графа Γ_f диффеоморфизма $f \in G_k(M^n)$ является полным топологическим инвариантом, а также выделено множество допустимых графов, по каждому из которых построен диффеоморфизм из $G_k(M^n)$, включающийся в топологический поток. При этом множество построенных диффеоморфизмов имеет непустое пересечение с каждым классом топологической сопряженности в $G_k(M^n)$. Отсюда непосредственно получается следующая

Теорема 2. *Пусть $f \in G_k(M^n)$ и $n > 3$. Тогда диффеоморфизм f включается в топологический поток.*

То, что аналогичная теорема не имеет места для $n = 3$, следует из примеров не включающихся в поток диффеоморфизмов из классов $G_4(M^3)$, $G_5(M^3)$, построенных в § 4 (см. также рис. 2). Также из этих примеров становится

[4] В работе [15] была замечена неточность инварианта Пейкшото, связанная с тем, что изоморфизм графов не различает неэквивалентного расслоения на траектории областей, ограниченных двумя периодическими орбитами.

[5] Если $k = 0$, то Ω_f состоит в точности из одного стока и одного источника, все диффеоморфизмы с таким неблуждающим множеством включаются в топологический поток.

понятным, что класс изоморфности графа не есть полный топологический инвариант для диффеоморфизмов множества $G_k(M^3)$. Однако в подмножестве диффеоморфизмов, включающихся в топологический поток, этот факт удается доказать.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть диффеоморфизмы $f, f' \in G_k(M^3)$ включаются в топологические потоки. Тогда диффеоморфизмы f, f' топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их графы Γ_f, $\Gamma_{f'}$ изоморфны.*

Авторы благодарят Ф. Лауденбаха за чрезвычайно полезные и плодотворные обсуждения.

§ 2. Необходимые и достаточные условия включения диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ в топологический поток

Этот параграф посвящен доказательству леммы 1.1 и теоремы 1. Необходимость условий теоремы 1 будет следовать из леммы 2.1, достаточность – из леммы 2.2. В доказательствах мы будем использовать поток $A^t_{g_f}$ на многообразии $\mathbb{V}_{g_f} = \mathbb{S}_{g_f} \times \mathbb{R}$, заданный формулой $A^t_{g_f}(s,r) = (s, r+t)$, а также свойства группы преобразований, действующей разрывно на некотором гладком многообразии.

2.1. Разрывные действия групп преобразований. Пусть $g\colon X \to X$ – диффеоморфизм, заданный на гладком связном многообразии X такой, что группа $\mathscr{G} = \{g^k, k \in \mathbb{Z}\}$ действует на X разрывно[6]. Будем обозначать через X/g пространство орбит этого действия и через $p_g\colon X \to X/g$ естественную проекцию. В силу [19; теорема 3.5.7] естественная проекция $p_g\colon X \to X/g$ является накрывающим отображением, а пространство X/g является гладким многообразием.

Предположим, что многообразие X/g является связным (в противном случае все рассуждения можно провести для каждой компоненты связности), и обозначим через $\eta_g\colon \pi_1(X/g) \to \mathbb{Z}$ гомоморфизм, определенный следующим образом. Пусть $\widehat{c} \in X/g$ – петля в X/g и $[\widehat{c}] \in \pi_1(X/g)$ – ее класс гомотопической эквивалентности. Выберем произвольную точку $\widehat{x} \in \widehat{c}$, обозначим через $p_g^{-1}(\widehat{x})$ полный прообраз точки $\widehat{x}$ и зафиксируем точку $x \in p_g^{-1}(\widehat{x})$. Так как p_g – накрытие, то существует единственный путь $c(t)$ с началом в точке x ($c(0) = x$), накрывающий петлю $\widehat{c}$ (т.е. такой, что $p_g(c) = \widehat{c}$). Поэтому существует элемент $k \in \mathbb{Z}$ такой, что $c(1) = g^k(x)$. Положим $\eta_g([\widehat{c}]) = k$. Из [20; гл. 18] следует, что отображение η_g является гомоморфизмом. Следующее утверждение доказано в работе [12].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Пусть X, X' – связные гладкие многообразия и $g\colon X \to X$, $g'\colon X' \to X'$ – диффеоморфизмы такие, что группы $\mathscr{G} = \{g^k, k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathscr{G}' = \{{g'}^k, k \in \mathbb{Z}\}$ действуют разрывно на X, X' соответственно. Тогда:*

[6]Группа H *действует* на многообразии X, если задано отображение $\zeta\colon H \times X \to X$, обладающее следующими свойствами:

1) $\zeta(e,x) = x$ для всех $x \in X$, где e – нейтральный (единичный) элемент группы H;
2) $\zeta(g, \zeta(h,x)) = \zeta(gh, x)$ для всех $x \in X$ и $g, h \in H$.

Группа H действует *разрывно* на многообразии X, если для каждого компактного подмножества $K \subset X$ множество элементов $h \in H$ таких, что $\zeta(h,K) \cap K \neq \varnothing$, конечно.

1) *если* $\varphi\colon X \to X'$ *– гомеоморфизм (диффеоморфизм), сопрягающий диффеоморфизмы* g *и* g', *то отображение* $\widehat{\varphi}\colon X/g \to X'/g'$, *заданное формулой* $\widehat{\varphi} = p_{g'}\varphi p_g^{-1}$, *является гомеоморфизмом (диффеоморфизмом); кроме того,* $\eta_g = \eta_{g'}\widehat{\varphi}_*$, *где* $\widehat{\varphi}_*\colon \pi_1(X/g) \to \pi_1(X'/g')$ *– гомеоморфизм, индуцированный отображением* $\widehat{\varphi}$;
2) *если* $\widehat{\varphi}\colon X/g \to X'/g'$ *– гомеоморфизм (диффеоморфизм) такой, что* $\eta_g = \eta_{g'}\widehat{\varphi}_*$, $\widehat{x} \in X/g$, $x \in p_g^{-1}(\widehat{x})$, $\widehat{x}' = \widehat{\varphi}(\widehat{x}')$ *и* $x' \in p_{g'}^{-1}(\widehat{x}')$, *то существует единственный гомеоморфизм (диффеоморфизм)* $\varphi\colon X \to X'$, *сопрягающий диффеоморфизмы* g *и* g' *и такой, что* $\varphi(x) = x'$.

2.2. Доказательство леммы 1.1. Докажем, что все пучки одномерных сепаратрис диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$, включающегося в топологический поток, являются тривиально вложенными.

Доказательство. Если диффеоморфизм f включается в некоторый топологический поток X^t ($f = X^1$), то неблуждающее множество Ω_f диффеоморфизма f совпадает с множеством состояний равновесия потока X^t, при этом устойчивое (неустойчивое) многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ совпадает с устойчивым (неустойчивым) многообразием соответствующего состояния равновесия потока X^t. Покажем, что любой пучок F_α одномерных устойчивых сепаратрис диффеоморфизма f тривиален (доказательство тривиальности любого пучка F_ω одномерных неустойчивых сепаратрис проводится аналогично).

Обозначим через X^t_α ограничение потока X^t на множество $V_\alpha = W^u_\alpha \setminus \alpha$. Поскольку диффеоморфизм $f|_{V_\alpha}$ топологически сопряжен с линейным растяжением, то для любых различных точек $p, q \in V_\alpha$ существуют окрестности $U_p, U_q \subset V_\alpha$ и константа $T > 0$ такие, что $X^t_\alpha(U_p) \cap U_q = \varnothing$ для любого $|t| > T$. Это означает согласно определению, данному в работе [21; ч. I, § 1], что поток X^t_α является дисперсивным. Тогда из [21; теорема 3] следует, что поток X^t_α является параллелизуемым, т.е. существуют множество $\Sigma_\alpha \subset V_\alpha$ и гомеоморфизм $\xi_\alpha\colon V_\alpha \to \Sigma_\alpha \times \mathbb{R}$ такие, что $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} X^t_\alpha(\Sigma_\alpha) = V_\alpha$ и $\xi_\alpha(X^t_\alpha(z)) = (z, t)$ для любых $z \in \Sigma_\alpha$, $t \in \mathbb{R}$.

Из [22; теорема III.4, теорема IV.3] следует, что топологическая размерность Σ_α равна двум. Тогда в силу [23; теорема 2] Σ_α является многообразием без края. Таким образом, Σ_α – замкнутая ориентируемая поверхность. Согласно [21; лемма 1] множество Σ_α является деформационным ретрактом многообразия V_α. Поскольку V_α односвязно, то Σ_α – 2-сфера.

Поскольку каждая одномерная сепаратриса l множества L_α является траекторией потока X^t_α, то существует точка $\gamma_l \in \Sigma_\alpha$ такая, что $\xi_\alpha(l) = \gamma_l \times \mathbb{R}$. Пусть $g_\alpha\colon \Sigma_\alpha \to \mathbb{S}^2$ – произвольный сохраняющий ориентацию гомеоморфизм. Положим $c_l = g_\alpha(\gamma_l)$. Определим гомеоморфизм $G_\alpha\colon V_\alpha \to \mathbb{V}_0$ соотношением $G_\alpha(X^t_\alpha(z)) = A^t_0(g_\alpha(z))$. По построению гомеоморфизм G_α сопрягает потоки X^t_α и A^t_0, а следовательно, и их сдвиги на единицу времени. При этом $G_\alpha(l) = c_l \times \mathbb{R}$.

Определим гомеоморфизм $q\colon \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus O$, поставив в соответствие каждой точке $(s, t) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $s = (x_1, x_2, x_3)\colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, точку $q(s, t) = (2^t x_1, 2^t x_2, 2^t x_3)$. Наконец, определим гомеоморфизм $H_\alpha\colon W^u_\alpha \to \mathbb{R}^3$ соотношениями $H_\alpha(\alpha) = O$, $H_\alpha(x) = q(G_\alpha(x))$, где $x \in W^u_\alpha \setminus \alpha$. Непосредственно проверяется, что гомеоморфизм H_α сопрягает диффеоморфизм $f|_{W^u_\alpha}$ с диффеоморфизмом A и отображает пучок одномерных сепаратрис F_α на стандартный одномерный пучок, следовательно, пучок F_α тривиален.

2.3. Критерий включения диффеоморфизма из класса $\mathrm{MS}(M^3)$ в топологический поток.

Лемма 2.1. *Схема S_f диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$, включающегося в топологический поток, является тривиальной.*

Доказательство. Если диффеоморфизм f включается в некоторый топологический поток X^t ($f = X^1$), то неблуждающее множество Ω_f диффеоморфизма f совпадает с множеством состояний равновесия потока X^t, при этом устойчивое (неустойчивое) многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ совпадает с устойчивым (неустойчивым) многообразием соответствующего состояния равновесия потока X^t.

Обозначим через X^t_f ограничение потока X^t на множество V_f. Из построения множества V_f следует, что для любой точки $x \in V_f$ имеют место включения $\lim_{t\to+\infty} X^t_f(x) \in A_f$ и $\lim_{t\to-\infty} X^t_f(x) \in R_f$. Таким образом, для любых точек $p, q \in V_f$ существуют окрестности $U_p, U_q \subset V_f$ и константа $T > 0$ такие, что $X^t_f(U_p) \cap U_q = \varnothing$ для любого $|t| > T$. Как и в доказательстве леммы 1.1, это означает, что поток X^t_f является дисперсивным и, следовательно, существуют ориентируемая замкнутая поверхность $\Sigma_f \subset V_f$ и гомеоморфизм $\xi_f\colon V_f \to \Sigma_f \times \mathbb{R}$ такие, что $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} X^t_f(\Sigma_f) = V_f$ и $\xi_f(X^t_f(z)) = (z,t)$ для любых $z \in \Sigma_f$, $t \in \mathbb{R}$. Обозначим через ρ_f род этой поверхности. Покажем теперь, что $\rho_f = g_f$.

По построению поверхность Σ_f делит многообразие на две части, замыкания которых обозначим через P_{A_f}, P_{R_f}, полагая, что $A_f \subset \operatorname{int} P_{A_f}$, $R_f \subset \operatorname{int} P_{R_f}$. Более того, аттрактор A_f является деформационным ретрактом P_{A_f} и, следовательно, они имеют одинаковый гомотопический тип, а значит и эйлерову характеристику. При этом $\chi(P_{A_f}) = 1-\rho_f$, поскольку P_{A_f} – 3-многообразие с краем Σ_f, и $\chi(A_f) = |\Omega_0|-|\Omega_1|$, поскольку A_f – клеточный комплекс, состоящий из $|\Omega_0|$ нульмерных и $|\Omega_1|$ одномерных клеток. Таким образом, $|\Omega_0|-|\Omega_1| = 1-\rho_f$. Из аналогичных рассуждений для аттрактора получаем, что $|\Omega_3|-|\Omega_1| = 1-\rho_f$. Складывая два последних равенства, получаем, что

$$|\Omega_0| - |\Omega_1| + |\Omega_3| - |\Omega_2| = 2 - 2\rho_f.$$

Откуда $\rho_f = (|\Omega_1 \cup \Omega_2| - |\Omega_0 \cup \Omega_3| + 2)/2$ и, следовательно, $\rho_f = g_f$.

Поскольку каждая двумерная сепаратриса λ диффеоморфизма f является объединением траекторий потока X^t_f, гомеоморфным $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, то существует простая замкнутая кривая $\gamma_\lambda \subset \Sigma_f$ такая, что $\xi_f(\lambda) = \gamma_\lambda \times \mathbb{R}$. Тогда существует гомеоморфизм $h_f\colon \Sigma_f \to \mathbb{S}_{g_f}$ такой, что $c_\lambda = h_f(\gamma_\lambda)$ – простая гладкая замкнутая кривая для любой двумерной сепаратрисы λ. Определим гомеоморфизм $\psi_f\colon V_f \to \mathbb{V}_{g_f}$ соотношением $\psi_f(X^t_f(z)) = A^t_{g_f}(h_f(z))$. По построению гомеоморфизм ψ_f сопрягает потоки X^t_f и $A^t_{g_f}$, а следовательно, и их сдвиги на единицу времени. При этом $\psi_f(\lambda) = c_\lambda \times \mathbb{R}$. По построению $\widehat{\mathbb{V}}_{g_f} = \mathbb{V}_{g_f}/A^1_{g_f}$. Тогда в силу утверждения 2.1 гомеоморфизм $\widehat{\psi}_f = p_{g_f}\psi_f p_f^{-1}\colon \widehat{V}_f \to \widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$ удовлетворяет условию определения 6. Таким образом, схема S_f является тривиальной.

Лемма 2.2. *Если схема диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ является тривиальной, то диффеоморфизм f включается в топологический поток.*

Доказательство. Доказательство леммы состоит в построении топологического потока $\widetilde{X}^t$ на многообразии M^3, сдвиг на единицу времени которого топологически сопряжен с диффеоморфизмом f посредством некоторого гомеоморфизма $h\colon M^3 \to M^3$. Откуда будет следовать, что диффеоморфизм f включается в топологический поток $X^t = h\widetilde{X}^t h^{-1}$.

Построение топологического потока $\widetilde{X}^t$. Идея построения потока аналогична идее, предложенной в работе [11] (см. также [12] для деталей), поэтому некоторые утверждения этих работ используются без доказательства. Разобьем построение на шаги.

Шаг 1. Из определения тривиальной схемы и утверждения 2.1 следует, что существует гомеоморфизм $\psi_f\colon V_f \to \mathbb{V}_{g_f}$ такой, что:

1) $f|_{V_f} = \psi_f^{-1} A^1_{g_f} \psi_f$, где $A^1_{g_f}$ – сдвиг на единицу времени потока $A^t_{g_f}$;
2) для любой двумерной сепаратрисы λ диффеоморфизма f существует простая гладкая замкнутая кривая c_λ на поверхности $\mathbb{S}_{g_f}$ такая, что $\psi_f(\lambda) = c_\lambda \times \mathbb{R}$.

Напомним, что L^s_f, L^u_f – объединение всех устойчивых, неустойчивых соответственно двумерных сепаратрис диффеоморфизма f. Положим $\mathbb{L}^s = H_f(L^s_f)$ и $\mathbb{L}^u = H_f(L^u_f)$. Для множества цилиндров $\mathbb{L}^\delta = \lambda^\delta_1 \cup \cdots \cup \lambda^\delta_{l^\delta}$, $\delta \in \{s, u\}$ обозначим через $N(\mathbb{L}^\delta) = N(\lambda^\delta_1) \cup \cdots \cup N(\lambda^\delta_{l^\delta})$ множество их попарно непересекающихся гладких трубчатых окрестностей таких, что $N(\lambda^\delta_i) = K^\delta_i \times \mathbb{R}$, где $K^\delta_i \subset \mathbb{S}_{g_f}$ – гладкое двумерное кольцо для каждого $i = 1, \dots, l^\delta$.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим подмножество

$$N = \{(x_1, x_2, x3) : (x_1^2 + x_2^2)x_3^2 < 1\}$$

и зададим на нем поток B^t формулой $B^t(x_1, x_2, x_3) = (2^{-t}x_1, 2^{-t}x_2, 2^t x_3)$. Положим $\widehat{N}^s = (N \setminus Ox_3)/B^1$. По построению многообразие $\widehat{N}^s$ диффеоморфно $K \times \mathbb{R}$, где K стандартное двумерное кольцо. Тогда существует диффеоморфизм $\mu^s_i\colon N(\lambda^s_i) \to (N \setminus Ox_3)$, сопрягающий потоки $A^t_{g_f}|_{N(\lambda^s_i)}$ и $B^t|_{N\setminus Ox_3}$. Обозначим через $\mu^s\colon N(\mathbb{L}^s) \to (N \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{l^s}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\mu^s_1, \dots, \mu^s_{l^s}$. Положим $Q^s = \mathbb{V}_{g_f} \cup_{\mu^s} (N \times \mathbb{Z}_{l^s})$. Тогда топологическое пространство Q^s является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\overline{Q}^s = \mathbb{V}_{g_f} \cup (N \times \mathbb{Z}_{l^s})$ и обозначим через $p_s\colon \overline{Q}^s \to Q^s$ естественную проекцию. Положим $p_{s,1} = p_s|_{\mathbb{V}_{g_f}}$, $p_{s,2} = p_s|_{N\times\mathbb{Z}_{l^s}}$. Тогда поток $\widetilde{Y}^t_s$ на многообразии Q^s определяется формулой

$$\widetilde{Y}^t_s(x) = \begin{cases} p_{s,1}(A^t_{g_f}(p^{-1}_{s,1}(x))), & x \in p_{s,1}(\mathbb{V}_{g_f}), \\ p_{s,2}(B^t(p^{-1}_{s,2}(x))), & x \in p_{s,2}(N \times \{i\}), \quad i \in \mathbb{Z}_{l^s}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока $\widetilde{Y}^t_s$ состоит из l^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса равным единице.

Шаг 2. Снова обозначим через $\mathbb{L}^u$, $N(\mathbb{L}^u)$ образы этих множеств относительно проекции p_s. Положим $\widehat{N}^u = (N \setminus Ox_3)/(B^1)^{-1}$. Тогда существует диффеоморфизм $\mu^u_i\colon N(\lambda^u_i) \to (N \setminus Ox_3)$, сопрягающий потоки $X^t_s|_{N(\lambda^u_i)}$ и $B^{-t}|_{N\setminus Ox_3}$

для любого $i = 1,\dots,l^u$. Обозначим через $\mu^u\colon N(\mathbb{L}^u) \to (N \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{l^u}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\mu_1^u,\dots,\mu_{l^u}^u$. Положим $Q^u = Q^s \cup_{\mu^u} (N \times \mathbb{Z}_{l^u})$. Тогда топологическое пространство Q^u является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\overline{Q}^u = Q^s \cup (N \times \mathbb{Z}_{l^u})$ и обозначим через $p_u\colon \overline{Q}^u \to Q^u$ естественную проекцию. Положим $p_{u,1} = p_u|_{Q^s}$, $p_{u,2} = p_u|_{N\times\mathbb{Z}_{l^u}}$. Тогда поток $\widetilde{Y}_u^t$ на многообразии Q^u определяется формулой

$$\widetilde{Y}_u^t(x) = \begin{cases} p_{u,1}(\widetilde{Y}_s^t(p_{u,1}^{-1}(x))), & x \in p_{u,1}(Q^s), \\ p_{u,2}(B^{-t}(p_{u,2}^{-1}(x))), & x \in p_{u,2}(N \times \{i\}), \quad i \in \mathbb{Z}_{l^u}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока $\widetilde{Y}_u^t$ состоит из l^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса равным единице и l^u седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса равным двум.

Шаг 3. Положим $R^s = Q^u \setminus W^s_{\Omega_{\widetilde{Y}_u^t}}$ и обозначим через $\rho_1^s,\dots,\rho_{n^s}^s$ компоненты связности множества R^s. Определим на многообразии $\mathbb{R}^3$ топологический поток D^t формулой $D^t(x_1,x_2,x_3) = (2^{-t}x_1, 2^{-t}x_2, 2^{-t}x_3)$. Тогда каждая компонента ρ_i^s диффеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ и поток $\widetilde{Y}_u^t|_{\rho_i^s}$ гладко сопряжен с потоком $D^t|_{\mathbb{R}^3\setminus O}$ посредством некоторого диффеоморфизма ν_i^s. Обозначим через $\nu^s\colon R^s \to (\mathbb{R}^3 \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{n^s}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\mu_1^s,\dots,\mu_{n^s}^s$. Положим $M^s = Q^u \cup_{\nu^s} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s})$. Тогда топологическое пространство M^s является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\overline{M}^s = Q^u \cup (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s})$ и обозначим через $q_s\colon \overline{M}^s \to M^s$ естественную проекцию. Положим $q_{s,1} = q_s|_{Q^u}$, $q_{s,2} = q_s|_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_{n^s}}$. Тогда поток $\widetilde{X}_s^t$ на многообразии M^s определяется формулой

$$\widetilde{X}_s^t(x) = \begin{cases} q_{s,1}(\widetilde{Y}_u^t(q_{s,1}^{-1}(x))), & x \in q_{s,1}(Q^u), \\ q_{s,2}(B^{-t}(q_{s,2}^{-1}(x))), & x \in q_{s,2}(\mathbb{R}^3 \times \{i\}), \quad i \in \mathbb{Z}_{n^s}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока $\widetilde{X}_s^t$ состоит из l^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса равным единице, l^u седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса равным двум и n^s стоковых неподвижных гиперболических точек.

Шаг 4. Положим $R^u = M^s \setminus W^u_{\Omega_{\widetilde{X}_s^t}}$ и обозначим через $\rho_1^u,\dots,\rho_{n^u}^u$ компоненты связности множества R^u. Тогда каждая компонента ρ_i^u диффеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ и поток $\widetilde{X}_s^t|_{\rho_i^u}$ гладко сопряжен с потоком $D^{-t}|_{\mathbb{R}^3\setminus O}$ посредством некоторого диффеоморфизма ν_i^u. Обозначим через $\nu^u\colon R^u \to (\mathbb{R}^3 \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{n^u}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\mu_1^u,\dots,\mu_{n^u}^u$. Положим $M^u = M^s \cup_{\nu^u} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u})$. Тогда топологическое пространство M^u является гладким связным замкнутым ориентируемым 3-многообразием.

Положим $\overline{M}^u = M^s \cup (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u})$ и обозначим через $q_u\colon \overline{M}^u \to M^u$ естественную проекцию. Положим $q_{u,1} = q_u|_{M^s}$, $q_{u,2} = q_u|_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_{n^u}}$. Тогда поток $\widetilde{X}_u^t$ на многообразии M^u определяется формулой

$$\widetilde{X}_u^t(x) = \begin{cases} q_{u,1}(\widetilde{X}_s^t(q_{u,1}^{-1}(x))), & x \in q_{u,1}(M^s), \\ q_{u,2}(B^{-t}(q_{u,2}^{-1}(x))), & x \in q_{u,2}(\mathbb{R}^3 \times \{i\}), \quad i \in \mathbb{Z}_{n^u}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока $\widetilde{X}_u^t$ состоит из l^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса равным единице, l^u седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса равным двум, n^s стоковых неподвижных гиперболических точек и n^u источниковых неподвижных гиперболических точек.

Шаг 5. Положим $\widetilde{f} = \widetilde{X}_u^1$. По построению диффеоморфизм $\widetilde{f}$ является диффеоморфизмом Морса–Смейла на многообразии M^u и его ограничение $\widetilde{f}|_{V_{\widetilde{f}}}$ топологически сопряжено с диффеоморфизмом $f|_{V_f}$ посредством гомеоморфизма, переводящего двумерные сепаратрисы диффеоморфизма $\widetilde{f}$ в двумерные сепаратрисы диффеоморфизма f с сохранением устойчивости. Согласно утверждениям 2.1 и 1.1 диффеоморфизмы $\widetilde{f}$ и f топологически сопряжены. Следовательно, $M^u = M^3$ и $\widetilde{X}^t = \widetilde{X}_u^t$ – искомый поток.

§ 3. Включающиеся в поток диффеоморфизмы, для которых граф – полный инвариант

В этом параграфе рассмотрен класс $G_k(M^3)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла таких, что для любого $f \in G_k(M^3)$ выполняются следующие условия:

1) $\Omega_f = \mathrm{Fix}_f$;
2) множество седловых точек состоит в точности из $k > 0$ седловых неподвижных точек[7], причем устойчивое многообразие W_σ^s любой седловой неподвижной точки $\sigma \in \Omega_f$ имеет размерность 2;
3) для любых двух различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение $W_p^s \cap W_q^u$ пусто.

3.1. Структура несущего многообразия и динамика диффеоморфизмов из класса $G_k(M^3)$. В этом пункте мы приводим ряд свойств диффеоморфизмов из класса $G_k(M^3)$, играющих важную роль в доказательстве теоремы 3. Для $n > 3$ аналогичные результаты следуют из [17].

Нижеприведенное утверждение следует из [24].

Утверждение 3.1. *Для любой точки $\sigma \in \Omega_1$ диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$ замыкание* $\mathrm{cl}\, l$ $(\mathrm{cl}\, \Sigma)$ *неустойчивой (устойчивой) сепаратрисы l (Σ) является компактной дугой (2-сферой), состоящей из объединения сепаратрисы l (Σ), точки σ и единственной точки $\omega \in \Omega_0$ $(\alpha \in \Omega_3)$.*

Поскольку множество Ω_2 является пустым для любого диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$ и все компоненты разложения объемлющего многообразия $M^3 = A_f \cup V_f \cup R_f$ являются связными, то репеллер R_f состоит из одной источниковой точки α и $V_f = W_\alpha^u \setminus \alpha$. Более детальную информацию дает следующая

Теорема 4. *Неблуждающее множество любого диффеоморфизма f из класса $G_k(M^3)$ содержит в точности 1 источник и $k+1$ стоковую точку, а несущее многообразие M^3 диффеоморфно 3-сфере.*

[7]Если $k = 0$, то Ω_f состоит в точности из одного стока и одного источника, все диффеоморфизмы с таким неблуждающим множеством вкладываются в топологический поток.

Доказательство. Для каждой седловой точки σ диффеоморфизма f сфера $\Sigma = \mathrm{cl}\, W^s_\sigma$ является топологическим репеллером, следовательно, существуют окрестность $U(\Sigma) \in M^3$ и целое положительное число $r(\Sigma)$ такое, что $U(\Sigma) \subset \mathrm{int}\, f^{r(\Sigma)}(U(\Sigma))$. Не уменьшая общности, можно считать, что $r(\Sigma) = 1$ для любого σ (в противном случае перейдем к некоторой степени диффеоморфизма f, при этом многообразие M^3 останется прежним).

Из [25; предложение 0.1] следует, что для каждой седловой точки σ диффеоморфизма f существует замкнутая окрестность $V(\Sigma) \subset U(\Sigma)$ сферы Σ, ограниченная гладко вложенными сферами S^2_1, S^2_2 и гомеоморфная прямому произведению $\mathbb{S}^2 \times [-1, 1]$. Обозначим через l_1 и l_2 неустойчивые сепаратрисы точки σ, через ω_1 и ω_2 – стоковые точки, принадлежащие замыканиям l_1 и l_2 соответственно (возможно, $\omega_1 = \omega_2$). Из локальной сопряженности диффеоморфизма f с линейным отображением следует, что дуги $\mathrm{cl}\, l_1 \cap V(\Sigma)$ и $\mathrm{cl}\, l_2 \cap V(\Sigma)$ лежат в разных компонентах связности множества $V(\Sigma) \setminus \Sigma$.

Удалим из многообразия M^3 внутренность окрестности $V(\Sigma)$. Многообразие $M^3 \setminus \mathrm{int}\, V(\Sigma)$ является гладким компактным многообразием с краем, состоящим из сфер S^2_1, S^2_2. Обозначим через M^3_1 компактное многообразие без края, полученное из многообразия $M^3 \setminus \mathrm{int}\, V(\Sigma)$ приклеиванием вдоль его края двух замкнутых шаров B^3_1 и B^3_2. Зададим диффеоморфизм $\widetilde{f}_1 \colon M^3_1 \to M^3_1$ таким образом, что:

1) $\widetilde{f}_1|_{M^3_1 \setminus (B^3_1 \cup B^3_2)} = \widetilde{f}|_{M^3_1 \setminus (B^3_1 \cup B^3_2)}$;
2) $\widetilde{f}_1|_{B^3_1 \cup B^3_2}$ имеет только две неподвижные точки $\alpha_1 \in B^3_1$, $\alpha_2 \in B^3_2$, каждая из которых является отталкивающей.

Неблуждающее множество $\Omega_{\widetilde{f}_1}$ диффеоморфизма $\widetilde{f}_1$ содержит в точности две отталкивающие точки и $k-1$ седловую точку, при этом общее количество неподвижных точек диффеоморфизма $\widetilde{f}_1$ совпадает с числом неподвижных точек диффеоморфизма f. Так как неблуждающее множество $\Omega_{\widetilde{f}_1}$ содержит два источника, то многообразие M^3_1 состоит из двух компонент связности N^3_1 и N^3_2. Так как $\mathrm{cl}\, l_i \setminus U_\Sigma \subset N^3_i$, то $\omega_i \subset N^3_i$, $i = 1, 2$.

Проделаем описанную процедуру еще $k-1$ раз. В результате получим компактное многообразие без края M^3_k и диффеоморфизм $\widetilde{f}_k \colon M^3_k \to M^3_k$ со следующими свойствами. Многообразие M^3_k состоит из $k+1$ компоненты связности $N^3_1, \dots, N^3_{k+1}$, каждая из которых содержит 1 источник и 1 сток диффеоморфизма $\widetilde{f}_k$. Следовательно, каждое многообразие N^3_i гомеоморфно 3-сфере, а многообразие M^3 является связной суммой $k+1$ экземпляра 3-сфер[8]. Поэтому M^3 гомеоморфно 3-сфере.

Неблуждающее множество диффеоморфизма $\widetilde{f}_k$ содержит только притягивающие и отталкивающие неподвижные точки, и их общее количество равно числу неподвижных точек диффеоморфизма f. Следовательно, неблуждающее множество диффеоморфизма f содержит $2k+2$ точки: 1 источник, k седловых точек и $k+1$ сток.

Для любого диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$ аттрактор A_f состоит из замыканий неустойчивых одномерных сепаратрис и в силу утверждения 3.1 является

[8]Связной суммой $M^3_1 \sharp M^3_2$ двух ориентируемых связных 3-многообразий M^3_1, M^3_2 называется многообразие $M^3_1 \sharp M^3_2$, полученное удалением из M^3_1, M^3_2 шаров $B^3_1 \subset M^1_3$, $B^3_2 \subset M^3_2$ и склеиванием оставшихся многообразий с краем при помощи гомеоморфизма $\phi \colon \partial B^3_1 \to \partial B^3_2$, обращающего естественную ориентацию ∂B^3_1.

связным одномерным клеточным комплексом. Следующая лемма уточняет его топологическую структуру.

Лемма 3.1. *Аттрактор A_f не содержит подмножеств, гомеоморфных окружности.*

Доказательство. Предположим противное: пусть множество $s \subset A_f$ гомеоморфно окружности. Обозначим через σ седловую неподвижную точку, принадлежащую s. Сфера $\operatorname{cl} W^s_\sigma$ делит многообразие M^3 на две компоненты связности. Тогда существует точка $x \neq \sigma$, принадлежащая пересечению $s \cap \operatorname{cl} W^s_\sigma$. Точка x не может быть стоковой или седловой точкой, так как замыкание $\operatorname{cl} W^s_\sigma$ является объединением устойчивого многообразия W^s_σ и источниковой точки α. Следовательно, точка x принадлежит неустойчивому многообразию некоторой седловой точки $\widetilde{\sigma}$ (возможно, совпадающей с σ). Получили противоречие, так как в силу условий, определяющих класс $G_k(M^3)$, $W^s_\sigma \cap W^u_\sigma = \sigma$ и $W^s_\sigma \cap W^u_{\widetilde{\sigma}} = \varnothing$ для любых точек $\sigma \neq \widetilde{\sigma}$.

Обозначим через ξ_f изоморфизм между неблуждающим множеством Ω_f диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$ и множеством вершин графа Γ_f. Напомним, что *маршрутом*, соединяющим вершины b_0, b_s графа Γ_f, называется последовательность ребер $(b_0, b_1), (b_1, b_2), \dots, (b_{s-1}, b_s)$. Маршрут называется *простым*, если все его ребра попарно различны. Будем обозначать через $\Gamma_f \setminus a$ граф, полученный из графа Γ_f удалением вершины a и всех инцидентных ей ребер.

Следующее утверждение является элементарным следствием теоремы 4 и леммы 3.1.

Следствие 3.1. *Для любой седловой точки σ диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$ многообразие $\operatorname{cl} W^s_\sigma$ делит 3-сферу M^3 на две компоненты связности B^3_1, B^3_2 такие, что любые неподвижные точки $p, q \in (\Omega_f \setminus (\sigma \cup \alpha))$ принадлежат одной и той же компоненте связности B^3_1 (B^3_2) тогда и только тогда, когда вершины $\xi_f(p)$, $\xi_f(q)$ графа Γ_f можно соединить простым маршрутом из ребер, принадлежащих графу $(\Gamma_f \setminus \xi_f(\alpha)) \setminus \xi_f(\sigma)$.*

3.2. Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов из класса $G_k(M^3)$. Этот пункт посвящен доказательству теоремы 3, утверждающей, что класс изоморфности графа диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$, включающегося в топологический поток, является полным топологическим инвариантом. Необходимость условий теоремы следует непосредственно из определения топологической сопряженности и определения графа диффеоморфизма, достаточность – из леммы 3.2.

Лемма 3.2. *Пусть диффеоморфизмы $f, f' \in G_k(M^3)$ включаются в топологические потоки и их графы Γ_f, $\Gamma_{f'}$ изоморфны. Тогда диффеоморфизмы f, f' топологически сопряжены.*

Доказательство. В силу утверждений 2.1 и 1.1 для доказательства леммы достаточно показать, что ограничения $f|_{V_f}$, $f'|_{V_{f'}}$ топологически сопряжены посредством гомеоморфизма φ, переводящего двумерные сепаратрисы диффеоморфизма f в двумерные сепаратрисы диффеоморфизма f'.

Представим множество L^s_f в виде объединения двумерных сепаратрис седловых точек $L^s_f = \lambda_1 \cup \dots \cup \lambda_k$. Из теоремы 4 следует, что для диффеоморфизма $f \in G_k(M^3)$ имеет место равенство $g_f = 0$. Так как диффеоморфизм f

включается в топологический поток, то в силу теоремы 1 его схема S_f является тривиальной. Тогда согласно утверждению 2.1 существует гомеоморфизм $\psi_f\colon V_f \to \mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$ такой, что для любого $i=1,\dots,k$ существует простая гладкая замкнутая кривая c_i на сфере $\mathbb{S}^2$ такая, что $\psi_f(\lambda_i)=c_i\times\mathbb{R}$ и $f|_{V_f}=\psi_f^{-1}A_0^1\psi_f$. Аналогичные обозначения со штрихом введем для диффеоморфизма f'.

Обозначим через π_f, $(\pi_{f'})$ взаимно однозначное соответствие между неподвижными точками, сепаратрисами диффеоморфизма f (f') и вершинами, ребрами его графа Γ_f $(\Gamma_{f'})$ и через ζ изоморфизм графов Γ_f, $\Gamma_{f'}$. Не уменьшая общности, предположим, что нумерация сепаратрис множества $L^s_{f'}$ выбрана таким образом, что $\lambda'_i=\pi^{-1}_{f'}(\zeta(\pi_f(\lambda_i)))$, $i=1,\dots,k$. Покажем, что существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\phi\colon \mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$ такой, что $\phi(c_i)=c'_i$ для любого $i=1,\dots,k$. Тогда искомый гомеоморфизм $\varphi\colon V_f\to V_{f'}$ определяется формулой $\varphi=\psi^{-1}_{f'}\Phi\psi_f$, где $\Phi\colon \mathbb{S}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$ – гомеоморфизм такой, что $\Phi(s,t)=(\phi(s),t)$. Докажем требуемое утверждение индукцией по числу $l\leqslant k$.

Для $l=1$ утверждение является следствием теоремы Шенфлиса (см., например, [26; введение, раздел A, утверждение 4]). Предположим, что для любого $1\leqslant l<k$ существует гомеоморфизм $\phi_l\colon \mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$ такой, что $\phi_l(c_i)=c'_i$ для $i=1,\dots,l$, и докажем, что существует гомеоморфизм $\phi_{l+1}\colon \mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$ такой, что $\varphi_{l+1}(c_i)=c'_i$ для $i=1,\dots,l+1$.

В силу следствия 3.1 дуга c_{l+1} (c'_{l+1}) делит сферу $\mathbb{S}^2$ на два диска D_1, D_2 $(D'_1,\ D'_2)$ такие, что дуги c_i, c_j $(c'_i,\ c'_j)$ принадлежат одному и тому же диску, если соответствующие им вершины графа $\Gamma(f)$ $(\Gamma(f'))$ можно соединить маршрутом, составленным из ребер графа $\Gamma(f)\setminus(\xi_f(\alpha)\cup\xi_f(\sigma_{l+1}))$ $(\Gamma(f')\setminus(\xi_{f'}(\alpha')\cup \xi_{f'}(\sigma'_{l+1})))$. Так как графы $\Gamma(f)$, $\Gamma(f')$ изоморфны, то (с точностью до обозначения дисков D'_1, D'_2) выполняется следующее условие: если для некоторого $i=1,\dots,l$ $\ c_i\subset D_1$ $(c_i\subset D_2)$, то $c'_i\subset D'_1$ $(c'_i\subset D'_2)$.

Так как ϕ_l – гомеоморфизм, то существуют диски $\widetilde D_1\subset D'_1$, $\widetilde D_2\subset D'_2$ такие, что

$$(\widetilde D_1\cup\widetilde D_2)\cap(c'_{l+1}\cup\varphi(c_{l+1}))=\varnothing$$

и если $c'_i\in D'_1$ $(c'_i\in D'_2)$, то $c'_i\in\widetilde D_1$ $(c'_i\in\widetilde D_2)$, $i=1,\dots,l$. Обозначим через $U\subset\mathbb{S}^2$ множество, ограниченное дугами $\partial\widetilde D_1$, $\partial\widetilde D_2$. Из двумерной теоремы о кольце следует, что множество U гомеоморфно кольцу $\mathbb{S}^1\times[0,1]$ и существует гомеоморфизм $g_U\colon \mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$, тождественный вне U и такой, что $g_U(\phi_l(c_{l+1}))=c'_{l+1}$ (см. для справки, например, [26; введение, раздел A, утверждения 10 и 11]). Тогда $\phi_{l+1}=g_U\phi_l$ является искомым гомеоморфизмом.

§ 4. Построение диффеоморфизмов из класса $G_k(M^3)$ с различными типами вложения пучков сепаратрис

Цель этого параграфа – доказательство предложений 1 и 2.

Предложение 1. *Существует диффеоморфизм $f\in G_4(S^3)$, все пучки одномерных сепаратрис которого являются ручными, но среди них есть нетривиальный пучок.*

Предложение 2. *Существует не включающийся в поток диффеоморфизм $f\in G_5(S^3)$, все пучки одномерных сепаратрис которого являются тривиальными.*

Построение анонсированных диффеоморфизмов существенно опирается на некоторые алгебраические инварианты замкнутых кривых на торе.

4.1. Вспомогательные сведения из гомологической теории кривых на торе. Пусть $\widehat{Q}$ – многообразие, гомеоморфное $\mathbb{T}^2\times[-1,1]$, $Q=\mathbb{R}^2\times[-1,1]$ – универсальное накрытие и $p\colon Q\to\widehat{Q}$ – естественная проекция. Каждой петле $\widehat{l}\colon[0,1]\to\widehat{Q}$ поставим в соответствие пару целых чисел $\langle a_l,b_l\rangle$ таких, что если $\widetilde{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $x_3\in[-1,1]$, – фиксированная точка такая, что $p(\widetilde{x})=\widehat{l}(0)$, и $\widetilde{l}$ – поднятие петли l с началом в точке $\widetilde{x}$, то $\widetilde{l}(1)=(x_1+a_l,x_2+b_l,x_3)$. Из [20; гл. 19, 29] следует, что пара $\langle a_l,b_l\rangle$ не зависит от выбора точки $\widetilde{x}$ и определяет гомологический класс петли l.

Пусть $\widehat{Q}$, $\widehat{Q}'$ – многообразия, гомеоморфные $\mathbb{T}^2\times[-1,1]$. Любой гомеоморфизм $h\colon\widehat{Q}\to\widehat{Q}'$ индуцирует изоморфизм $h_*\colon H_1(\widehat{Q})\to H_1(\widehat{Q}')$, заданный целочисленной унимодулярной матрицей

$$H_*=\begin{pmatrix}h_{11}&h_{12}\\h_{21}&h_{22}\end{pmatrix}.$$

Напомним, что многообразие V называется *заполненным тором*, если существует гомеоморфизм $\psi\colon V\to\mathbb{B}^2\times\mathbb{S}^1$. Будем называть *средней линией* заполненного тора V замкнутую кривую $\widehat{l}=\psi^{-1}(\{O\}\times\mathbb{S}^1)$.

Пусть $V_1,V_2\in\widehat{Q}$, $(V_1',V_2'\in\widehat{Q}')$ – непересекающиеся заполненные торы и $\widehat{l}_i$ $(\widehat{l}_i')$ – средняя линия тора V_i (V_i'), $i=1,2$. Кривая $\widehat{l}_i$ $(\widehat{l}_i')$, оснащенная некоторой ориентацией, представляет петлю в $\widehat{Q}$, которой поставим в соответствие ее гомологический класс $\langle a_i,b_i\rangle$ $(\langle a_i',b_i'\rangle)$. Отметим, что при смене ориентации кривой $\widehat{l}_i$ пара $\langle a_i,b_i\rangle$ переходит в пару $-\langle a_i,b_i\rangle=\langle -a_i,-b_i\rangle$.

Утверждение 4.1. *Если существует гомеоморфизм $h\colon\widehat{Q}\to\widehat{Q}'$ такой, что $h(V_i)=V_i'$, $i=1,2$, то*

$$\begin{pmatrix}h_{11}&h_{12}\\h_{21}&h_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_i\\b_i\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}a_i'\\b_i'\end{pmatrix},\qquad i=1,2.$$

Доказательство. Справедливость утверждения следует из того, что при соответствующем выборе ориентации петли $h(\widehat{l}_i)$, $\widehat{l}_i'$ гомологичны в V_i' и, следовательно, в $\widehat{Q}'$.

Следствие 4.1. *Если существует гомеоморфизм $h\colon\widehat{Q}\to\widehat{Q}'$ такой, что $h(V_i)=V_i'$, $i=1,2$, и кривые $\widehat{l}_1$, $\widehat{l}_2$ гомологичны в $\widehat{Q}$, то кривые $\widehat{l}_1'$, $\widehat{l}_2'$ гомологичны в $\widehat{Q}'$.*

4.2. Доказательство предложения 1. Доказательство предложения 1 ведется по шагам и представляет из себя реализацию пучка дуг в $\mathbb{R}^3$ пучком одномерных сепаратрис диффеоморфизма с помощью конструкции Черри.

Шаг 1. Определение модельного пучка дуг. Пусть $\rho\in(0,+\infty)$, $\varphi\in[0,2\pi)$, $\theta\in[0,\pi]$ – сферические координаты в $\mathbb{R}^3$. Положим

$$\gamma_i^0=\left\{(\rho,\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\rho\in(0,+\infty),\ \varphi=0,\ \theta=\frac{\pi(i-1)}{3}\right\},\qquad i=1,\dots,4,$$

$$\gamma_i=\gamma_i^0,\qquad i=1,2,4,$$

$$\gamma_3=\left\{(\rho,\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\rho\in(0,+\infty),\ \varphi=2\pi(\log_2\rho\mod 1),\ \theta=\frac{2\pi}{3}\right\}.$$

Ориентируем дуги γ_i^0, γ_i в направлении возрастания ρ, $i=1,\dots,4$. На рис. 3 изображены фундаментальные области пучков $F_O^0=(\bigcup_{i=1}^4\gamma_i^0)\cup\{O\}$ и $F_O=(\bigcup_{i=1}^4\gamma_i)\cup\{O\}$.

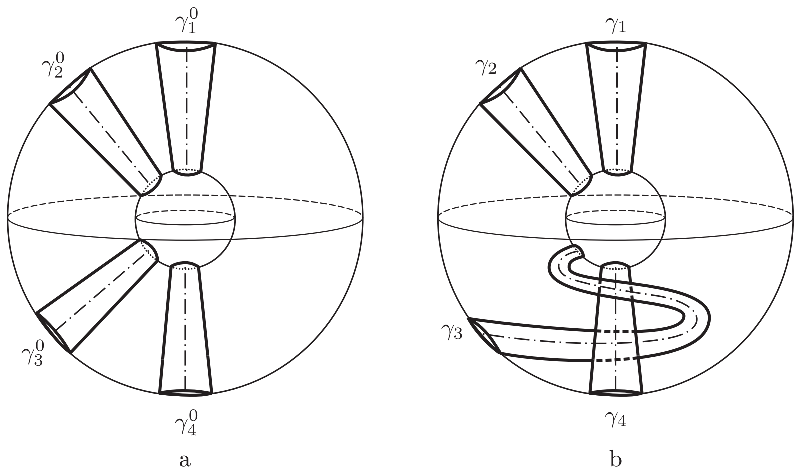


Рис. 3. Фундаментальные области пучков F_O^0 и F_O

Выберем окрестности Γ_i^0, Γ_i дуг γ_i^0, γ_i соответственно следующим образом. Положим

$$\Gamma_1^0=\biggl\{(\rho,\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^3\biggm|\rho\in(0,+\infty),\ \varphi\in[0,2\pi),\ |\theta|\leqslant\frac{\pi}{12}\biggr\},\qquad \Gamma_i^0=r_i(\Gamma_1^0),$$

где $r_i\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ – вращение на угол $\pi(i-1)/3$ с осью вращения

$$\biggl\{(\rho,\varphi,\theta)\biggm|\rho\in[0,+\infty),\ \varphi\in\biggl\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\biggr\},\ \theta=\frac{\pi}{2}\biggr\},\qquad i=2,3,4.$$

Определим $\Gamma_1,\dots,\Gamma_4$ следующим образом: $\Gamma_i=\Gamma_i^0$ для $i=1,2,4$, а $\Gamma_3=\chi(\Gamma_3^0)$, где $\chi\colon\Gamma_3^0\to\mathbb{R}^3$ – топологическое вложение, определенное формулой $\chi(\rho,\varphi,\theta)=(\rho,\varphi+2\pi(\log_2\rho \mod 1),\theta)$.

Шаг 2. *Построение диффеоморфизма* $\overline{f}\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. По построению множество Γ_i, $i=1,\dots,4$, является A^{-1}-инвариантной окрестностью кривой γ_i, гомеоморфной $\mathbb{R}\times\mathbb{D}^2$, и Γ_i/A^{-1} – заполненный тор. Представим $\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^2$ как пространство орбит действия группы $G=\{g^n,n\in\mathbb{Z}\}$ на многообразии $\Gamma=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_2^2+x_3^2\leqslant1\}$, где $g\colon\Gamma\to\Gamma$ – диффеоморфизм, заданный формулой $g(x_1,(x_2,x_3))=(x_1-1,(x_2,x_3))$. Согласно утверждению 2.1 существует диффеоморфизм $\zeta_i\colon\Gamma_i\to\Gamma$, сопрягающий диффеоморфизмы $A^{-1}|_{\Gamma_i}$, g и переводящий кривую γ_i в прямую Ox_1.

Положим

$$B_1=\{(x_1,x_2,x_3)\in C:|x_1|\leqslant1\},$$

$$B_2=\biggl\{(x_1,x_2,x_3)\in C:x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant\frac{1}{16}\biggr\},$$

$$B_3=\biggl\{(x_1,x_2,x_3)\in C:|x_1|\leqslant\frac{1}{2},\ x_2^2+x_3^2\leqslant\frac{1}{4}\biggr\}.$$

Модифицируем диффеоморфизм g следующим образом.

Пусть $\psi_1\colon C \to \mathbb{R}$ – гладкая функция такая, что:

(a) $\psi_1(x_1, x_2, x_3) = -1$ для любой точки $(x_1, x_2, x_3) \in (C \setminus \operatorname{int} B_1)$;

(b) $\psi_1(x_1, x_2, x_3) < 0$ для любой точки $(x_1, x_2, x_3) \in (B_1 \setminus B_2)$;

(c) $\psi_1(x_1, x_2, x_3) > 0$ для любой точки $(x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{int} B_2$;

(d) $\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(\pm\frac{1}{4}, 0, 0) \neq 0$.

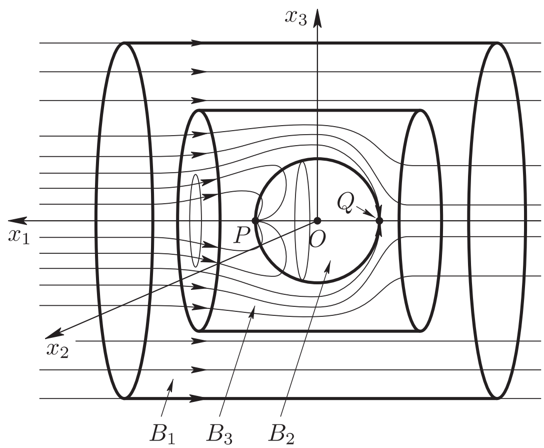


Рис. 4. Траектории потока ϕ^t

Пусть $\psi_2\colon C \to \mathbb{R}$ – гладкая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(a) $\psi_2(x_1, x_2, x_3) = 0$ для любой точки $(x_1, x_2, x_3) \in (C \setminus \operatorname{int} B_1)$;

(b) $\psi_2(x_1, x_2, x_3) < 0$ для любой точки $(x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{int} B_1$;

(c) $\psi_2(x_1, x_2, x_3) = -1$ для любой точки $(x_1, x_2, x_3) \in B_3$.

Определим на C поток ϕ^t следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \quad \psi_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 = \quad x_2\psi_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 = \quad x_3\psi_3(x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

Поток ϕ^t имеет в точности две неподвижные точки: сток $P(1/4, 0, 0)$ и седло $Q(-1/4, 0, 0)$ (см. рис. 4). Обе точки являются гиперболическими. Неустойчивые сепаратрисы точки Q совпадают с интервалом $(-1/4, 1/4) \times \{(0, 0)\}$, принадлежащим бассейну стока P, и с полупрямой $(-\infty, -1/4) \times \{(0, 0)\}$.

Пусть ϕ – сдвиг на единицу времени потока ϕ^t. По построению ϕ совпадает с диффеоморфизмом g вне B_1. Определим диффеоморфизм $\overline{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ так, что $\overline{f}$ совпадает с A^{-1} вне Γ_i и для каждого $i = 1, \dots, 4$ совпадает с $\zeta_i^{-1}\phi\zeta_i$ на Γ_i. Тогда диффеоморфизм $\overline{f}$ имеет в Γ_i в точности две неподвижные точки: сток $w_i = \zeta_i^{-1}(P)$ и седло $s_i = \zeta_i^{-1}(Q)$. Обе точки являются гиперболическими и неустойчивые сепаратрисы точки s_i лежат на кривой γ_i. Таким образом, неблуждающее множество $\Omega_{\overline{f}}$ состоит в точности из девяти гиперболических неподвижных точек: стока w, находящегося в начале координат, четырех седловых точек $s_1, \dots, s_4$ и четырех стоковых точек $w_1, \dots, w_4$.

Шаг 3. *Построение диффеоморфизма* $f \in G_4(M^3)$. Отождествим пространство $\mathbb{R}^3$ с гиперплоскостью $x_4 = 0$ в пространстве $\mathbb{R}^4$. Напомним, что стереографическая проекция $\vartheta_+ \colon \mathbb{S}^3 \setminus (0,0,0,1) \to \mathbb{R}^3$ определяется формулой

$$\vartheta_+(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(\frac{x_1}{1-x_4}, \frac{x_2}{1-x_4}, \frac{x_3}{1-x_4}\right).$$

Определим диффеоморфизм $f \colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ соотношениями

$$f(x) = \begin{cases} (0,0,0,1), & \text{если } x = (0,0,0,1), \\ \vartheta_+^{-1}(\overline{f}(\vartheta_+(x))), & \text{если } x \neq (0,0,0,1). \end{cases}$$

По построению ограничение диффеоморфизма f на множество $\mathbb{S}^3 \setminus (0,0,0,1)$ топологически сопряжено с диффеоморфизмом $\overline{f}$, а точка $(0,0,0,1)$ является для диффеоморфизма f гиперболическим источником. Обозначим этот источник α и для $i = 1,\dots,4$ положим $\omega = \vartheta_+^{-1}(w)$, $\omega_i = \vartheta_+^{-1}(w_i)$ и $\sigma_i = \vartheta_+^{-1}(s_i)$. Фазовый портрет диффеоморфизма f приведен на рис. 2, a).

Шаг 4. Покажем, что для построенного диффеоморфизма f пучки $F_{\omega_1},\dots,$ F_{ω_4} одномерных неустойчивых сепаратрис являются тривиальными, а пучок F_ω является ручным, но не является тривиальным.

Так как диффеоморфизм $f|_{\mathbb{S}^3\setminus\alpha}$ топологически сопряжен с диффеоморфизмом $\overline{f}$, то достаточно доказать аналогичное утверждение для пучков $F_{w_1},\dots,$ F_{w_4} и F_w.

Для $i = 1,\dots,4$ пучок F_{w_i} состоит из одномерной сепаратрисы l_i^+ седловой точки s_i. При этом диффеоморфизм $\overline{f}$ в окрестности стока w_i гладко сопряжен с диффеоморфизмом ϕ посредством диффеоморфизма ζ_i, который переводит дугу l_i^+ в интервал на оси Ox_1. Это означает, что сепаратриса l_i^+ является ручной, а следовательно, и тривиальной.

Для доказательства ручности пучка сепаратрис F_w заметим, что диффеоморфизмы $\overline{f}$ и A^{-1} имеют общую фундаментальную область в бассейне точки $w = O$ и совпадают на ней. Тогда из утверждения 2.1 следует существование гомеоморфизма $b \colon W^s_\omega \to \mathbb{R}^3$, сопрягающего диффеоморфизмы $\overline{f}|_{W^s_w}$ и A^{-1} и переводящего пучок F_w в пучок F_O. Поэтому достаточно доказать ручность и нетривиальность последнего. Для этого положим

$$\Lambda = \left\{(\rho,\varphi,\theta) : \left|\theta - \frac{2\pi}{3}\right| < \frac{\pi}{6}\right\}.$$

Тогда $(\gamma_3^0 \cup \gamma_3) \subset \Lambda$ и $\gamma_i \cap \Lambda = \varnothing$ для всех $i = 1,2,4$. Пусть $\tau \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – гладкая функция такая, что $\tau(\theta) = 1$ при $|\theta - 2\pi/3| \leqslant \pi/12$, $\tau(\theta) = 0$ при $|\theta - 2\pi/3| \geqslant \pi/6$ и τ монотонно возрастает (убывает) при $-\pi/6 < \theta - 2\pi/3 < -\pi/12$ $(\pi/12 <$ $\theta - 2\pi/3 < \pi/6)$. Определим гомеоморфизм $\Psi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ следующим образом:

$$\Psi(\rho,\varphi,\theta) = \begin{cases} (\rho,\varphi,\theta), & \text{если } (\rho,\varphi,\theta) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \Lambda) \cup \{O\}, \\ (\rho, \varphi - 2\pi\tau(\theta)(\log_2 \rho \mod 1), \theta), & \text{если } (\rho,\varphi,\theta) \in \Lambda. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $\Psi(\gamma_i) = \gamma_i^0$ для каждого $i = 1,\dots,4$. Поскольку пучок F_O^0 является стандартным, то F_O – ручной пучок.

Покажем, что пучок F_O не является тривиальным.

Предположим противное. Тогда существует гомеоморфизм $H\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, коммутирующий с диффеоморфизмом A^{-1} и такой, что $H(F_O^0) = F_O$. Обозначим через $j_1, \dots, j_4 \in \{1, \dots, 4\}$ индексы такие, что $H(\gamma_{j_i}^0) = \gamma_i$. Не уменьшая общности, будем считать, что $H(\Gamma_{j_i}^0) = \Gamma_i$.

Положим $\widehat{W} = (\mathbb{R}^3 \setminus O)/A$ и обозначим через $p_{\widehat{W}}\colon \mathbb{R}^3 \setminus O \to \widehat{W}$ естественную проекцию. Положим $\widehat{\gamma}_i^0 = p_{\widehat{W}}(\gamma_i^0)$, $\widehat{\gamma}_i = p_{\widehat{W}}(\gamma_i)$, $\widehat{\Gamma}_i^0 = p_{\widehat{W}}(\Gamma_i^0)$, $\widehat{\Gamma}_i = p_{\widehat{W}}(\Gamma_i)$. Тогда в силу результатов п. 2.1 пространство $\widehat{W}$ является гладким 3-многообразием, проекция $p_{\widehat{W}}$ является накрытием и отображение $\widehat{H} = p_{\widehat{W}} H p_{\widehat{W}}^{-1}\colon \widehat{W} \to \widehat{W}$ является гомеоморфизмом таким, что $\widehat{H}(\widehat{\Gamma}_{j_i}^0) = \widehat{\Gamma}_i$, $\widehat{H}(\widehat{\Gamma}_{j_i}^0) = \widehat{\Gamma}_i$. Более того, $\widehat{W}$ получается из трехмерного кольца на рис. 3 отождествлением граничных сфер в силу диффеоморфизма A^{-1}. Следовательно, $\widehat{W}$ гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, $\widehat{\gamma}_i^0$ ($\widehat{\gamma}_i$) гомеоморфно окружности и $\widehat{\Gamma}_i^0$ ($\widehat{\Gamma}_i$) является ее трубчатой окрестностью, гомеоморфной заполненному тору.

Положим

$$\widehat{Q} = \widehat{W} \setminus (\operatorname{int} \widehat{\Gamma}_1 \cup \operatorname{int} \widehat{\Gamma}_4), \qquad \widehat{Q}^0 = \widehat{W} \setminus (\operatorname{int} \widehat{\Gamma}_{j_1}^0 \cup \operatorname{int} \widehat{\Gamma}_{j_4}^0).$$

В силу выбора полноториев $\widehat{\Gamma}_1$, $\widehat{\Gamma}_4$ многообразие $\widehat{Q}$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{T}^2 \times [-1, 1]$. Тогда и $\widehat{Q}^0$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{T}^2 \times [-1, 1]$, при этом $\widehat{H}(\widehat{Q}^0) = \widehat{Q}$. Так как все полнотории $\widehat{\Gamma}_1^0, \dots, \widehat{\Gamma}_4^0$ вложены в $\widehat{W}_A$ стандартным образом, то существует заполненный тор $V \in \widehat{Q}^0$ такой, что $\widehat{\Gamma}_{j_2}^0 \cup \widehat{\Gamma}_{j_3}^0 \subset \operatorname{int} V$, причем $e_*\colon \pi_1(V) \to \pi_1(\widehat{W})$ – изоморфизм, где $e\colon V \to \widehat{W}$ – отображение включения. Отсюда следует, что петли $\widehat{\gamma}_{j_2}^0$, $\widehat{\gamma}_{j_3}^0$ гомологичны в $\widehat{Q}^0$. Вычислим гомологические классы петель $\widehat{\gamma}_2$, $\widehat{\gamma}_3$. Для этого определим гомеоморфизм $\zeta\colon \mathbb{R}^2 \times [-1, 1] \to p_{\widehat{W}}^{-1}(\widehat{Q})$ и накрытие $p\colon \mathbb{R}^2 \times [-1, 1] \to \widehat{Q}$ формулами

$$\zeta(x_1, x_2, x_3) = (\rho, \varphi, \theta),$$
$$\rho = 2^{x_1}, \qquad \varphi = 2\pi(x_2 \mod 1), \qquad \theta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{5x_3}{6} + 1\right), \qquad p = p_{\widehat{W}}\zeta.$$

Петля $\widehat{\gamma}_2$ накрывается путем в $\mathbb{R}^2 \times [-1, 1]$ с началом в точке $(0, 0, -2/5)$ и концом в точке $(1, 0, -2/5)$, поэтому $[\widehat{\gamma}_2] = \langle 1, 0\rangle$; петля $\widehat{\gamma}_3$ накрывается путем в $\mathbb{T}^2 \times [-1, 1]$ с началом в точке $(0, 0, 2/5)$ и концом в точке $(1, 1, 2/5)$, поэтому $[\widehat{\gamma}_3] = \langle 1, 1\rangle$. В силу следствия 4.1 получаем противоречие.

4.3. Доказательство предложения 2. Идея доказательства аналогична идее доказательства предложения 1, поэтому мы приводим только основные его штрихи, опуская детали.

Шаг 1. *Построение диффеоморфизма* $f \in G_5(M^3)$. Начнем с модельного пучка $\widetilde{F}_O = \gamma_1 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup O$. Затем заменим гомеоморфизм $A^{-1}|_{\Gamma_i}$, $i = 3, 4$, гомеоморфизмом $\zeta_i^{-1}\phi\zeta_i$, а гомеоморфизм $A^{-1}|_{\Gamma_1}$ гомеоморфизмом $\zeta_i^{-1}\widetilde{\phi}\zeta_i$, где $\widetilde{\phi}$ – сдвиг на единицу времени потока $\widetilde{\phi}^t$ на Γ, фазовый портрет которого изображен на рис. 5. После этого мы получим диффеоморфизм $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Далее, определим диффеоморфизм $f\colon S^3 \to S^3$ соотношениями

$$f(x) = \begin{cases} (0, 0, 0, 1), & \text{если } x = (0, 0, 0, 1), \\ \vartheta_+^{-1}(\widetilde{f}(\vartheta_+(x))), & \text{если } x \neq (0, 0, 0, 1). \end{cases}$$

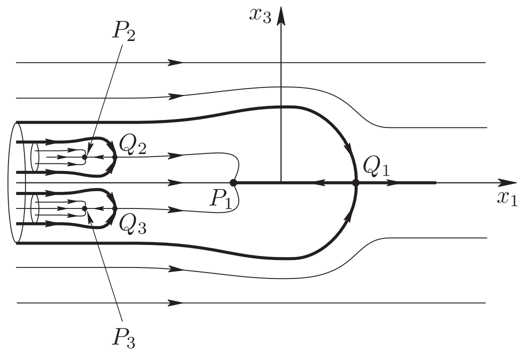


Рис. 5. Поток $\widetilde{\phi}^t$

Неблуждающее множество Ω_f состоит в точности из 12 гиперболических неподвижных точек: источника $\alpha=(0,0,0,1)$, пяти седловых точек $\sigma_1,\dots,\sigma_5$ и шести стоковых точек $\omega_1,\dots,\omega_5,\omega$, причем $\omega=(0,0,0,-1)$ (см. рис. 2, b)).

Шаг 2. *Доказательство тривиальности одномерных пучков сепаратрис диффеоморфизма f.* Для $i=1,\dots,4$ пучок F_{ω_i} состоит из одной сепаратрисы седловой точки σ_i, пучок F_{ω_5} (F_ω) состоит из трех неустойчивых сепаратрис седловых точек σ_1, σ_2, σ_5 $(\sigma_3,\ \sigma_4,\ \sigma_5)$. Для $i=1,\dots,4$ тривиальность пучка F_{ω_i} доказывается так же, как и тривиальность одноименного пучка в шаге 4 доказательства предложения 1.

Пучок F_{ω_5} состоит из трех одномерных сепаратрис седловых точек σ_1, σ_2, σ_5. По определению диффеоморфизм $f|_{W^s_{\omega_5}}$ топологически сопряжен со сдвигом $\widetilde{\phi}^1$ на единицу времени вдоль траекторий потока $\widetilde{\phi}^t|_{W^s_{P_1}}$, следовательно, в силу леммы 1.1 является тривиальным.

Пучок F_ω состоит из трех одномерных сепаратрис седловых точек σ_3, σ_4, σ_5. Как и в шаге 4 доказательства предложения 1 показывается, что тривиальность пучка F_ω равносильна тривиальности пучка $\widetilde{F}_O$. Докажем, что пучок $\widetilde{F}_O$ тривиален, построив гомеоморфизм $\widehat{H}\colon \widehat{W}\to\widehat{W}$ такой, что $\widehat{H}(\widehat{\gamma}_i^0)=\widehat{\gamma}_i$ для $i=1,2,4$.

Положим

$$\widehat{Q}=\widehat{W}\setminus(\operatorname{int}\widehat{\Gamma}_1\cup\operatorname{int}\widehat{\Gamma}_4).$$

Тогда $\widehat{Q}$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{T}^2\times[-1,1]$. При этом $\widehat{\gamma}_3^0\subset\widehat{Q}$, $\widehat{\gamma}_3\subset\widehat{Q}$ и гомологические классы петель $\widehat{\gamma}_3^0$, $\widehat{\gamma}_3$ имеют вид $\langle 1,0\rangle$, $\langle 1,1\rangle$, соответственно. Пусть $\widehat{H}\colon\widehat{Q}\to\widehat{Q}$ гомеоморфизм такой, что $\widehat{H}(\widehat{\gamma}_3^0)=\widehat{\gamma}_3$. Тогда $\widehat{H}$ переводит меридиан тора $\widehat{\Gamma}_i$, $i=1,4$, в меридиан того же тора и, следовательно, продолжается до искомого гомеоморфизма $\widehat{H}$.

Шаг 3. *Доказательство нетривиальности схемы S_f.* По построению схема построенного диффеоморфизма f получается из трехмерного кольца на рис. 6, b) отождествлением граничных сфер в силу диффеоморфизма A^{-1}, при этом она содержит пять торов $\widehat{L}_1,\dots,\widehat{L}_5$. На рис. 6, a) изображена тривиальная схема с пятью торами $\widehat{L}_1^0,\dots,\widehat{L}_5^0$. При этом $\widehat{L}_i^0=\widehat{L}_i=\partial\widehat{\Gamma}_i$ для $i=1,2,4$, $\widehat{L}_3^0=\partial\widehat{\Gamma}_3^0$ и $\widehat{L}_3=\partial\widehat{\Gamma}_3$.

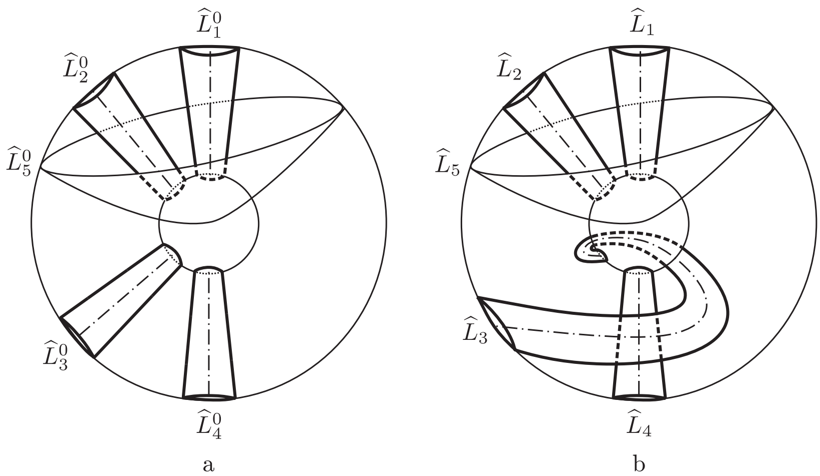


Рис. 6. Схема диффеоморфизма f и тривиальная схема

Предположив, что схема S_f является тривиальной, мы приходим к существованию гомеоморфизма $\widehat{H}\colon \widehat{W} \to \widehat{W}$ такого, что $\widehat{H}(\widehat{L}_1^0 \cup \dots \cup \widehat{L}_5^0) = \widehat{L}_1 \cup \dots \cup \widehat{L}_5$. Тор $\widehat{L}_5^0$ ($\widehat{L}_5$) делит многообразие $\widehat{W}$ на два полнотория, каждый из которых содержит пару непересекающихся полноториев из множества $\widehat{\Gamma}_1^0, \dots, \widehat{\Gamma}_4^0$ ($\widehat{\Gamma}_1, \dots, \widehat{\Gamma}_4$). Поэтому $\widehat{H}(\widehat{L}_5^0) = T_5$. Возможны два случая:

1) $\widehat{H}(\widehat{\Gamma}_1^0 \cup \widehat{\Gamma}_2^0) = \widehat{\Gamma}_1 \cup \widehat{\Gamma}_2$;

2) $\widehat{H}(\widehat{\Gamma}_1^0 \cup \widehat{\Gamma}_2^0) = \widehat{\Gamma}_3 \cup \widehat{\Gamma}_4$.

Рассмотрим случай 1) (в случае 2) рассуждения аналогичны). Обозначим через $j_1, \dots, j_4$ индексы такие, что $\widehat{H}(\widehat{\Gamma}_{j_i}^0) = \widehat{\Gamma}_i$, $i = 1, \dots, 4$. Положим

$$\widehat{Q}_1^0 = \widehat{\Gamma}_5^0 \setminus \operatorname{int} \widehat{\Gamma}_1^0, \qquad \widehat{Q}_2^0 = \widehat{W} \setminus \operatorname{int}(\widehat{\Gamma}_5^0 \cup \widehat{\Gamma}_4^0), \qquad \widehat{Q}_1 = \widehat{H}(\widehat{Q}_1^0), \qquad \widehat{Q}_2 = \widehat{H}(\widehat{Q}_2^0).$$

Многообразия $\widehat{Q}_m^0$, $\widehat{Q}_m$ гомеоморфны многообразию $\mathbb{T}^2 \times [-1,1]$, $m = 1,2$. Аналогично вычислениям гомологических классов дуг на шаге 4 доказательства предложения 1 можно показать, что $[\widehat{\gamma}_2^0] = [\widehat{\gamma}_2] = [\widehat{\gamma}_3^0] = \langle 1,0\rangle$, $[\widehat{\gamma}_3] = \langle 1,1\rangle$. Отсюда и из утверждения 4.1 следует, что ограничение гомеоморфизма $\widehat{H}$ на $\widehat{Q}_1^0$ индуцирует гомоморфизм $h_*^1\colon H_1(\widehat{Q}_1^0) \to H_1(\widehat{Q}_1)$, определяемый единичной матрицей. Так как T_5 – деформационный ретракт многообразий $\widehat{Q}_1^0$ и $\widehat{Q}_2^0$, то гомоморфизм $h_*^2\colon H_1(\widehat{Q}_2^0) \to H_1(\widehat{Q}_2)$, индуцированный ограничением гомеоморфизма $\widehat{H}$ на множество $\widehat{Q}_2^0$, также задается единичной матрицей. Применяя утверждение 4.1 к полноториям $\widehat{\Gamma}_{i_3}^0 \in \widehat{Q}_2^0$, $\widehat{\Gamma}_3 \in \widehat{Q}_2$, получаем противоречие.

Список литературы

[1] W. R. Utz, “The embedding of homeomorphisms in continuous flows”, *Topology Proc.*, **6**:1 (1982), 159–177.

[2] J. Palis, “Vector fields generate few diffeomorphisms”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80** (1977), 503–505.

[3] J. Palis, “On Morse–Smale dynamical systems”, *Topology*, **8**:4 (1969), 385–404.

[4] М. И. Брин, “О включении диффеоморфизма в поток”, *Изв. вузов. Матем.*, 1972, № 8, 19–25.

[5] Дж. Палис, С. Смейл, “Теоремы структурной устойчивости”, *Математика. Сб. пер.*, **13**:2 (1969), 145–155; пер. с англ.: J. Palis, S. Smale, “Structural stability theorems”, *Global analysis* (Berkeley, CA, 1968), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, 223–231.

[6] H. Debrunner, R. Fox, “A mildly wild imbedding of an n-frame”, *Duke Math. J.*, **27**:3 (1960), 425–429.

[7] D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.

[8] C. Bonatti, V. Grines, “Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3”, *J. Dynam. Control Systems*, **6**:4 (2000), 579–602.

[9] O. Pochinka, “Diffeomorphisms with mildly wild frame of separatrices”, *Univ. Iagel. Acta Math.*, 2009, № 47, 149–154.

[10] K. Kuperberg, “2-wild trajectories”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2005, suppl. vol., 518–523.

[11] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Topology*, **43**:2 (2004), 369–391.

[12] Х. Бонатти, В. З. Гринес, О. В. Починка, “Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Тр. МИАН, **250**, Наука, М., 2005, 5–53; англ. пер.: C. Bonatti, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, “Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic orbits on 3-manifolds”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **250** (2005), 1–46.

[13] О. Починка, “Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях”, *Докл. РАН*, **440**:6 (2011), 747–750; англ. пер.: O. V. Pochinka, “Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic orbits on 3-manifolds”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **84**:2 (2011), 722–725.

[14] M. M. Peixoto, “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems* (Salvador, Brasil, 1971), Academic Press, New York, 1973, 389–419.

[15] А. А. Ошемков, В. В. Шарко, “О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93–140; англ. пер.: A. A. Oshemkov, V. V. Sharko, “Classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds”, *Sb. Math.*, **189**:8 (1998), 1205–1250.

[16] С. Ю. Пилюгин, “Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса–Смейла без периодических траекторий на сферах”, *Дифференц. уравнения*, **14**:2 (1978), 245–254; англ. пер.: S. Ju. Piljugin, “Phase diagrams determining Morse–Smale systems without periodic trajectories on spheres”, *Differential Equations*, **14**:2 (1978), 170–177.

[17] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, “Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей трех”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Тр. МИАН, **261**, МАИК, М., 2008, 61–86; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, V. S. Medvedev, “Peixoto graph of Morse–Smale diffeomorphisms on manifolds of dimension greater than three”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **261** (2008), 59–83.

[18] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, “О классификации диффеоморфизмов Морса–Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Тр. МИАН, **270**, МАИК, М., 2010, 62–85; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, V. S. Medvedev, “Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with one-dimensional set of unstable separatrices”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **270**:1 (2010), 57–79.

[19] У. Терстон, *Трехмерная геометрия и топология*, МЦНМО, М., 2001; пер. с англ.: W. P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology*, Princeton Math. Ser., **35**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1997.

[20] Ч. Косневски, *Начальный курс алгебраической топологии*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: C. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1980.

[21] J. Dugundji, H. A. Antosiewicz, "Parallelizable flows and Lyapunov's second method", *Ann. of Math.* (2), **73** (1961), 543–555.

[22] В. Гуревич, Г. Волмэн, *Теория размерности*, ИЛ, М., 1948; пер. с англ.: W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton Math. Ser., **4**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1941.

[23] G. S. Young, "On the factors and fiberings of manifolds", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 215–223.

[24] С. Смейл, "Дифференцируемые динамические системы", *УМН*, **25**:1 (1970), 113–185; пер. с англ.: S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

[25] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, "Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves", *Topology Appl.*, **117**:3 (2002), 335–344.

[26] D. Rolfsen, *Knots and links*, Amer. Math. Soc. Chelsea Publ., Providence, RI, 2003.

Поступила в редакцию
15.12.2011 и 02.05.2012

В. З. Гринес (V. Z. Grines)
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: vgrines@yandex.ru

Е. Я. Гуревич (E. Ya. Gurevich)
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: elena_gurevich@list.ru

В. С. Медведев (V. S. Medvedev)
Нижегородский научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
E-mail: medvedev@uic.nnov.ru

О. В. Починка (O. V. Pochinka)
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru