Математические заметки

том 67 выпуск 3 март 2000

УДК 517

О БАЗИСАХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

В. Н. Деменко

В статье строится система гладких двумерных сплайнов, а также описывается класс мер, при которых эта система будет базисом в весовом пространстве Соболева на квадрате.

Библиография: 9 названий.

В статье изучаются сплайн-базисы в весовых пространствах Соболева на квадрате. В 1932 году Банах поставил вопрос о существовании гладкого базиса в пространстве гладких функций на квадрате. Оказалось (Чисельский [1], Шонефельд [2]), что базисом может служить система гладких двумерных сплайнов. В 1972 году Чисельский и Домста [3] построили ортонормированную систему тензорных произведений сплайнов, являющуюся базисом в пространстве $C^r(I^d)$ и пространстве Соболева $W_p^r(I^d)$ ($r \geqslant 0$, $d \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, $I=[0,1]$). Целью данной работы является построение системы гладких двумерных сплайнов, а также описание класса мер μ, при которых эта система будет базисом в весовом пространстве Соболева на квадрате.

Мы будем рассматривать заданные на квадрате меры μ с непрерывными весами $\rho(\boldsymbol{t})$, имеющими, быть может, только конечное число нулей $\{\boldsymbol{t}^{(j)}\}$ ($j=1,\dots,k$), такими, что для некоторых констант $\delta>0$, $c>0$, $C>0$ и набора $\{\alpha_j\}$ ($\alpha_j>0$)

$$c|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}^{(j)}|^{\alpha_j} \leqslant \rho(\boldsymbol{t}) \leqslant C|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}^{(j)}|^{\alpha_j}, \qquad \boldsymbol{t}\in O_\delta(\boldsymbol{t}), \tag{1}$$

где $O_\delta(\boldsymbol{t})$ означает δ-окрестность точки $\boldsymbol{t}$.

В работе мы будем иметь дело со следующими функциональными пространствами:

а) пространством $C^r(I^2)$ r раз непрерывно дифференцируемых функций на квадрате I^2 с нормой

$$\|f\|_{C^r(I^2)} = \max_{|\boldsymbol{a}|\leqslant r}\Bigl(\max_{\boldsymbol{t}\in I^2}|D^{\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{t})|\Bigr), \qquad \boldsymbol{a}\in\mathbb{Z}_+^2, \quad |\boldsymbol{a}|=a_1+a_2, \quad D^{\boldsymbol{a}}=\frac{\partial^{|\boldsymbol{a}|}}{\partial t_1^{a_1}\,\partial t_2^{a_2}};$$

б) пространством $L_2(I^2,\rho)$ со скалярным произведением

$$(f,g)=\int_{I^2} f(\boldsymbol{t})g(\boldsymbol{t})\rho(\boldsymbol{t})\,d\boldsymbol{t};$$

в) весовым пространством Соболева $W_p^r(I^2,\rho)=\{f\in L_p(I^2,\rho) : \|f\|_{W_p^r(I^2,\rho)}<\infty\}$, где

$$\|f\|_{W_p^r(I^2,\rho)} = \sum_{|\boldsymbol{a}|\leqslant r}\biggl(\int_{I^2}|D^{\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{t})|^p\rho(\boldsymbol{t})\,d\boldsymbol{t}\biggr)^{1/p}. \tag{2}$$

Пространство Соболева определяется в терминах обобщенных производных. Если вес $\rho(\boldsymbol{t})$ удовлетворяет условию (1), то пространство $W_p^r(I^2,\rho)$ является пополнением $C^r(I^2)$ по отношению к норме (2).

Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 2. *Пусть вес $\rho(\boldsymbol{t})$ удовлетворяет условию (1). Тогда для любого $r\geqslant 1$ существует система сплайн-функций $\{f_n^{(r,\rho)}(\boldsymbol{t}),\ n\in\mathbb{N}\}$, являющаяся базисом в $W_p^r(I^2,\rho)$.*

Система из теоремы 2 ортогональна в пространстве $L_2(I^2,\rho)$. Одномерный B-сплайн с множеством узлов $\theta=\{t_{-1},\dots,t_{r+1}\}$, $a\leqslant t_{-1}\leqslant\dots\leqslant t_{r+1}\leqslant b$, определяется равенством

$$M(t)=M(t\,|\,\theta)=(r+2)[t_{-1},\dots,t_{r+1}](\,\cdot\,-t)_+^{r+1},$$

где $[t_{-1},\dots,t_{r+1}]f$ – разделенная разность функции f, а $(\,\cdot\,)_+^r$ – усеченная степень: $x_+^r=x^r$ при $x\geqslant 0$ и $x_+^r=0$ при $x\leqslant 0$. В случае различных узлов имеет место равенство

$$M(t\,|\,\theta)=\sum_{i=-1}^{r+1}\frac{(r+2)(t_i-t)_+^{r+1}}{\prod_{\substack{j=-1\\ j\neq i}}^{r+1}(t_i-t_j)}=\sum_{i=-1}^{r+1}\frac{(r+2)(t-t_i)_+^{r+1}}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{r}(t_i-t_j)}.$$

Введем семейство двоичных разбиений Θ_n $(n\in\mathbb{N})$ оси $\mathbb{R}$:

$$\Theta_n=\{\theta_{n,j},\ j\in\mathbb{Z};\ \theta_{n,0}=0,\ \theta_{n,n}=1,\ \theta_{n,j}<\theta_{n,j+1}\}.$$

Если $n=1$, то положим $\theta_{n,j}=j$ $(j\in\mathbb{Z})$, а если $n=2^\lambda+\nu$, где $\lambda\geqslant 0$, $1\leqslant\nu\leqslant 2^\lambda$, то

$$\theta_{n,j}=\begin{cases}\dfrac{j}{2^{\lambda+1}}, & j=\dots,-1,0,1,\dots,2\nu;\\[2mm] \dfrac{j-\nu}{2^\lambda}, & j=2\nu+1,2\nu+2,\dots.\end{cases}$$

Возьмем меру μ с весом, удовлетворяющим (1), и построим по ней и разбиениям Θ_n еще два семейства разбиений

$$T_{n,i}=\{\tau_{n,i}^{(j)},\ j\in\mathbb{Z}\},\qquad i=1,2,\quad n\geqslant n_0=\frac{16(r+2)^2}{\delta^2},$$

$$\tau_{n,i}^{(j)}=\begin{cases}t_i^{(l)}, & \text{если существует } l \text{ такое, что } \dfrac12(\theta_{n,j-1}+\theta_{n,j})<t_i^{(l)}\leqslant\dfrac12(\theta_{n,j+1}+\theta_{n,j}),\\ \theta_{n,j} & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Обозначим через $I_{n,i}^{(j)}$ интервал $(\tau_{n,i}^{(j-1)},\tau_{n,i}^{(j)})$. Положим

$$\sigma_n=\begin{cases}2\nu, & \text{если } \nu<2^\lambda,\\ 0, & \text{если } \nu=2^\lambda.\end{cases}$$

Определим по $T_{n,i}$ последовательность B-сплайнов

$$M_{n,j,i}^{(r)}(t)=M(t\,|\,\tau_{n,i}^{(j-1)},\dots,\tau_{n,i}^{(j+r+1)}).$$

Они являются сплайнами $(r+1)$-й степени по отношению к разбиению $T_{n,i}$ и имеют, в частности, следующие свойства (см., например, [4]):

1) $M^{(r)}_{n,j,i} \geqslant 0$, $\operatorname{supp} M^{(r)}_{n,j,i} = \langle \tau^{(r)}_{n,i}, \tau^{(j+r+1)}_{n,i} \rangle$;
2) $\sum_j M^{(r)}_{n,j,i}(t) \equiv 1$, $t \in [0,1]$;
3) если $p \geqslant 1$, то для нормы $M^{(r)}_{n,j,i}$ в $L_p(\mathbb{R})$ справедлива оценка
$$r^{-1/q}\|M^{(r)}_{n,j,i}\|_1 \leqslant \|M^{(r)}_{n,j,i}\|_p \leqslant \|M^{(r)}_{n,j,i}\|_1^{1/p};$$
4) для $\Delta \subset (0,1)$ система нетривиальных ограничений $M^{(r)}_{n,j,i}|_\Delta$ является базисом в пространстве сплайнов на Δ.

Многомерные B-сплайны были определены де Бором в [5]. Детальное описание их свойств, а также свойств многомерных бокс-сплайнов можно найти в [6]. Нам будет удобно пользоваться двумерными сплайнами, определяемыми как произведения одномерных B-сплайнов.

Каждое целое $n \geqslant (r+2)^2$ может быть представлено единственным образом в виде $n = (l+r+1)(l+r+1+\varepsilon) + m$, где $l \geqslant 1$, $\varepsilon = 0, 1$, $0 \leqslant m \leqslant l+r+\varepsilon$.

Введем подпространства $\Lambda^{(r)}_n$ $(n \geqslant n_0)$ пространства $C^r(I^2)$:

$$\Lambda^{(r)}_n = \begin{cases} \operatorname{span}[M^{(r)}_{l+\varepsilon,i,1}(x_1)M^{(r)}_{l,j,2}(x_2),\ -r \leqslant i \leqslant l+\varepsilon,\ -r \leqslant j \leqslant l], & \text{если } m = 0, \\ \operatorname{span}[M^{(r)}_{l,i,1}(x_1)M^{(r)}_{l,j,2}(x_2),\ -r \leqslant i, j \leqslant l; & \\ \quad M^{(r)}_{l+1,\sigma_{l+1},1}(x_1)M^{(r)}_{l,j,2}(x_2),\ -r \leqslant j \leqslant m-r-1], & \text{если } m > 0, \varepsilon = 0, \\ \operatorname{span}[M^{(r)}_{l+1,i,1}(x_1)M^{(r)}_{l,j,2}(x_2),\ -r \leqslant i \leqslant l+1,\ -r \leqslant j \leqslant l; & \\ \quad M^{(r)}_{l+1,i,1}(x_1)M^{(r)}_{l+1,\sigma_{l+1},2}(x_2),\ -r \leqslant i \leqslant m-r-1], & \text{если } m > 0, \varepsilon = 1. \end{cases}$$

Обозначим через $\varphi^{(r)}_{n,j}$ занумерованную произвольным образом систему произведений B-сплайнов, участвующих в определении $\Lambda^{(r)}_n$. Носитель каждой функции f из $\Lambda^{(r)}_n$ состоит из $(r+2)^2$ прямоугольников, на каждом из которых f бесконечно дифференцируема. Множество всех этих прямоугольников обозначим через Π_n.

Возьмем область $\Delta \subseteq I^2$ и целое $n \geqslant n_0$, определим семейства множеств $\Omega^{(r)}_n(\Delta)$, $U^{(r)}_n(\Delta)$ и операторов $\Phi^{(r)}_{n,\Delta}$:

$$\Omega^{(r)}_n(\Delta) = \{j : \operatorname{supp}\varphi^{(r)}_{n,j} \cap \Delta \neq \varnothing\}, \qquad U^{(r)}_n(\Delta) = \bigcup_{j \in \Omega^{(r)}_n(\Delta)} \operatorname{supp}\varphi^{(r)}_{n,j},$$
$$\Phi^{(r)}_{n,\Delta} \colon \Lambda^{(r)}_n \to \Lambda^{(r)}_n, \qquad \Phi^{(r)}_{n,\Delta}\biggl(\sum_{j=1}^n c_j\varphi^{(r)}_{n,j}\biggr) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin \Omega^{(r)}_n(\Delta)}}^n c_j\varphi^{(r)}_{n,j}.$$

Проведем вертикальные прямые через точки $(\tau^{(i(r+2))}_{l+\varepsilon,1}, 0)$ и горизонтальные через точки $(0, \tau^{(j(r+2))}_{l,2})$. Эти прямые разобьют все прямоугольники из Π_{n-m} на блоки, состоящие из $(r+2)^2$ прямоугольников, если блок не является правым или верхним граничным и, быть может, меньшего числа, если блок граничный. Обозначим эти блоки через $\pi_{i,j}^{(n)}$, где (i,j) – обычная нумерация: i слева направо, j снизу вверх. Пусть ω_n обозначает множество индексов всех блоков $\pi_{i,j}^{(n)}$ из I^2, $\Delta_{i,j}^{(n)}$ – прямоугольник из Π_{n-m}, являющийся левым нижним в $\pi_{i,j}^{(n)}$, а $t_{i,j}^{(n)}$ – левая нижняя вершина $\Delta_{i,j}^{(n)}$. Нетрудно заметить, что носитель произвольной функции $\varphi_{n,m}^{(r)}$ имеет непустое пересечение с одним и только одним из $\Delta_{i,j}^{(n)}$. Определим последовательность операторов

$$P_{i,j}^{(n)}:\Lambda_n^{(r)}\to\Lambda_n^{(r)},\quad n\geqslant n_0;\qquad P_{i,j}^{(n)}\biggl(\sum_{m=1}^{n}c_m\varphi_{n,m}^{(r)}\biggr)=\sum_{m\in\Omega_n^{(r)}(\Delta_{i,j}^{(n)})}c_m\varphi_{n,m}^{(r)}.$$

Заметим, что для $f\in\Lambda_n^{(r)}$

$$\sum_{(i,j)\in\omega_n}(P_{i,j}^{(n)}f)(\boldsymbol{t})=f(\boldsymbol{t}),\qquad \boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^2.$$

Обозначим для $p\geqslant 1$ и $\alpha\in\{\alpha_1,\dots,\alpha_k,0\}$ (набор α определен в (1)) через $X_{p,\alpha}$ линейное пространство $\Lambda_n^{(r)}$ с нормой $\|f\|_{X_{p,\alpha}}=\|f\|_{L_p(I^2,|\boldsymbol{t}|^\alpha)}$, а через $Y_{p,\alpha}$ то же пространство с нормой $\|f\|_{Y_{p,\alpha}}=\|f\|_{W_p^r(\mathbb{R}^2,|\boldsymbol{t}|^\alpha)}$. Положим

$$A=\max_{\alpha\in\{\alpha_1,\dots,\alpha_k,0\}}\|P_{0,0}^{(n_0)}\|_{X_{p,\alpha}\to Y_{p,\alpha}}.$$

Ниже через A мы будем обозначать константы, зависящие только от r и p, вообще говоря, разные.

Из последнего неравенства с учетом соображений подобия и оценки (1) получаем, что для любых $f\in\Lambda_n^{(r)}$ $(n\geqslant n_0)$ и $(i,j)\in\omega_n$

$$\|P_{i,j}^{(n)}f\|_{W_p^r(\mathbb{R}^2,\rho)}\leqslant An^{r/2}\|f\|_{L_p(\Delta_{i,j}^{(n)},\rho)}. \tag{3}$$

Нам понадобится следующая простая модификация результата де Бора [7, с. 272–273] для двумерных сплайнов.

Лемма 1. *Для любого целого $r\geqslant 1$ найдется константа $D_r>1$, не зависящая от n и p $(p\geqslant 1)$, такая, что для любого $\Delta\in\Pi_n$*

$$D_r^{-1}\biggl(\sum_{j\in\Omega_n^{(r)}(\Delta)}|c_j|^p\biggr)^{1/p}\leqslant\biggl\|\sum_j c_j\gamma_{n,j}^{(r)}\varphi_{n,j}^{(r)}\biggr\|_{L_p(\Delta)}\leqslant\biggl(\sum_{j\in\Omega_n^{(r)}(\Delta)}|c_j|^p\biggr)^{1/p},$$

где $\gamma_{n,j}^{(r)}=\|\varphi_{n,j}^{(r)}\|_{L_p(I^2)}^{-1/p}$.

Теперь докажем следующую простую лемму.

Лемма 2. *Пусть $S\in\Lambda_n^{(r)}$ и пусть прямоугольник $\Delta\subseteq I^2$. Тогда для любого $\delta\in\Pi_n^{(r)}$ такого, что $\delta\in U_n^{(r)}(\Delta)\setminus\Delta$,*

$$\|\Phi_{n,\Delta}^{(r)}S\|_{C(\delta)}\leqslant D_r\|S\|_{C(\delta)}. \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta \in \Pi_n^{(r)}$ и $\delta \in U_n^{(r)}(\Delta) \setminus \Delta$. Тогда по лемме 1

$$\|S\|_{C(\delta)} = \biggl\|\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_{n,j}^{(r)}\biggr\|_{C(\delta)} \geqslant D_r^{-1} \max_{j\in\Omega_n^{(r)}(\delta)} |c_j|,$$

$$\|\Phi_{n,\Delta}^{(r)}(S)\|_{C(\delta)} = \biggl\| \sum_{\substack{j=1\\ j\notin\Omega_n^{(r)}(\Delta)}}^{n} c_j \varphi_{n,j}^{(r)}\biggr\|_{C(\delta)} \leqslant \max_{j\in\Omega_n^{(r)}(\delta)\setminus\Omega_n^{(r)}(\Delta)} |c_j|.$$

Комбинация последних двух неравенств дает (4).

ЛЕММА 3. *Для любого целого $r \geqslant 1$ существует последовательность линейных операторов $Q_n^{(r)}$ таких, что для $X = W_p^r(I^2,\rho)$ или $C^r(I^2)$ и $Y = L_p(I^2,\rho)$ или, соответственно, $C(I^2)$*

$$\|Q_n^{(r)}\|_{X\to X} \leqslant A, \tag{5}$$

$$\|Q_n^{(r)} - E\|_{X\to Y} \leqslant An^{-r/2}, \tag{6}$$

где E – тождественный оператор, A – константа, зависящая только от r и p.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $n \geqslant n_0$. Возьмем произвольный прямоугольник $\Delta_{i,j}^{(n)}$ $((i,j) \in \omega_n)$. Обозначим через $T(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})$ многочлен Тейлора функции $f(\boldsymbol{t})$ в точке $\boldsymbol{x}$:

$$T(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{k}|\leqslant r-1} \frac{1}{k_1!\,k_2!} D^{\boldsymbol{k}} f(\boldsymbol{x})(t_1-x_1)^{k_1}(t_2-x_2)^{k_2}.$$

Введем оператор Q_Δ:

$$(Q_\Delta f)(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{\mu(\Delta)} \iint_\Delta T(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.$$

Имеем

$$f(\boldsymbol{t}) - (Q_\Delta f)(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{\mu(\Delta)} \iint_\Delta \bigl(f(\boldsymbol{t}) - T(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})\bigr)\rho(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.$$

Точки $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{t}$ можно соединить, например, такими путями:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}): \quad (x_1,x_2) - (t_1,x_2) - (t_1,t_2),\\
&\Gamma_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}): \quad (x_1,x_2) - (x_1,t_2) - (t_1,t_2),\\
&\Gamma_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}): \quad (x_1,x_2) - (t_2,x_2) - (t_2,t_2) - (t_1,t_2),\\
&\Gamma_4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}): \quad (x_1,x_2) - (x_1,t_1) - (t_1,t_1) - (t_1,t_2).
\end{aligned}$$

Обозначим через ϑ_r множество $\{1,2\}^r$. Пусть для $l \in \vartheta_r$ l' и l'' обозначают соответственно числа единиц и двоек в наборе l. Положим $\boldsymbol{a}_l = (l',l'')$. Интегрируя производные функции f по пути Γ_i, получим для разности $f(\boldsymbol{t}) - T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ формулу

$$f(\boldsymbol{t}) - T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \sum_{l\in\vartheta_r} \int_{\Gamma_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})} \int_{\Gamma_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^{(1)})} \cdots \int_{\Gamma_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^{(r-1)})} D^{\boldsymbol{a}_l} f(\boldsymbol{u}^{(r)})\,du_{l_r}^{(r)} \cdots du_{l_1}^{(1)}.$$

Возьмем произвольные прямоугольник $\Delta = \Delta_{i,j}^{(n)}$ $((i,j) \in \omega_n)$, точку $\boldsymbol{t} \in I^2$, число $\xi \in \mathbb{R}$ и определим для $k = 1, 2, 3, 4$ множества

$$\delta_{1,k}(\Delta, \boldsymbol{t}, \xi) = \{\boldsymbol{x} \in \Delta : \forall \boldsymbol{s} \in \Gamma_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) \quad \xi\rho(\boldsymbol{s}) \geqslant \rho(\boldsymbol{x})\},$$
$$\delta_{2,k}(\Delta, \boldsymbol{t}, \xi) = \{\boldsymbol{x} \in \Delta : \forall \boldsymbol{s} \in \Gamma_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) \quad \xi\rho(\boldsymbol{s}) \geqslant \rho(\boldsymbol{t})\}.$$

Пусть $\Delta' = d_1' \times d_2' = \Delta_{i',j'}^{(n)}$, а $\Delta'' = d_1'' \times d_2'' = \Delta_{i'',j''}^{(n)}$ или $\Delta'' = \pi_{i'',j''}^{(n)}$, где $(i',j'), (i'',j'') \in \omega_n$ и $0 \leqslant i'' - i' \leqslant 1$, $0 \leqslant j'' - j' \leqslant 1$.

Для упрощения дальнейшей записи перенесем начало координат в точку $\boldsymbol{t}_{i',j'}$, если $\rho(\boldsymbol{t}) \neq 0$ на

$$\pi = \bigcup_{\substack{0 \leqslant i-i' \leqslant 1 \\ 0 \leqslant j-j' \leqslant 1}} \pi_{i,j}^{(n)},$$

или в точку $\boldsymbol{t} \in \pi$, в которой $\rho(\boldsymbol{t}) = 0$. Обозначим через $\Delta^* = d_1^* \times d_2^*$ наименьший из квадратов, содержащий $\Delta' \cup \Delta''$ с левым нижним концом в нуле, если $\rho(\boldsymbol{t}_{i',j'}) = 0$, или с центром в нуле в противном случае. Исходя из свойств веса ρ (формулы (1) и непрерывности) нетрудно обнаружить, что для любых точек $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x} \in \Delta$ таких, что $|\boldsymbol{t}| < |\boldsymbol{x}|$, и любого прямоугольника $\widetilde{\Delta} \supset \Delta$ будет справедливо $\rho(\boldsymbol{t}) < M\rho(\boldsymbol{x})$, $\rho(\boldsymbol{t}) < M\rho_\Delta$,

$$\mu\widetilde{\Delta} < M\mu\Delta \cdot \frac{|\widetilde{\Delta}|^\alpha}{|\Delta|^\alpha}, \tag{7}$$

где

$$M = \max\biggl\{\frac{C}{c}, \sup_{I^2} \rho(\boldsymbol{t}) \Big/ \inf_{I^2 \setminus \bigcup_i O_\delta(\boldsymbol{t}^{(i)})} \rho(\boldsymbol{t})\biggr\}, \qquad \alpha = \max\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_k\},$$

$|\Delta|$ – площадь прямоугольника Δ, а $\rho_\Delta = \mu\Delta/|\Delta|$ – среднее значение веса ρ на прямоугольнике Δ.

Оценим для $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$ интегралы

$$I_{i,j} = \frac{1}{\mu\Delta'} \biggl\| \iint_{\delta_{i,j}(\Delta')} \bigl(f(\boldsymbol{t}) - T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})\bigr)\rho(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \biggr\|_{L_p(\Delta'',\rho)}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
I_{1,j} &\leqslant \frac{\xi}{\mu\Delta'} \sum_{l \in \vartheta_r} \biggl\| \iint_{\delta_{1,j}} \int_{\Gamma_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})} \cdots \int_{\Gamma_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^{(r-1)})} |D^{\boldsymbol{a}_l} f(\boldsymbol{u}^{(r)})| \\
&\qquad \times \rho(\boldsymbol{u}^{(r)})\,du_{l_r}^{(r)} \cdots du_{l_1}^{(1)}\,d\boldsymbol{x} \biggr\|_{L_p(\Delta'',\rho)} \\
&\leqslant \frac{\xi 3^r |\Delta|^{r/2}}{\mu\Delta'} \sum_{l \in \vartheta_r} \biggl\| \iint_{\Delta^*} |D^{\boldsymbol{a}_l} f(\boldsymbol{u})| \rho^{1/p}(\boldsymbol{u}) \rho^{1/q}(\boldsymbol{u})\,d\boldsymbol{u} \biggr\|_{L_p(\Delta'',\rho)} \\
&\leqslant \frac{A|\Delta^*|^{r/2}}{\mu\Delta'} (\mu\Delta'')^{1/p} (\mu\Delta^*)^{1/q} \sum_{l \in \vartheta_r} \biggl(\iint_{\Delta^*} |D^{\boldsymbol{a}_l} f(\boldsymbol{u})|^p \rho(\boldsymbol{u})\,d\boldsymbol{u} \biggr)^{1/p} \\
&\leqslant A|\Delta^*|^{r/2} \|f\|_{W_p^r(\Delta^*,\rho)}.
\end{aligned}$$

Аналогично оцениваем $I_{2,j}$:

$$
\begin{aligned}
I_{2,j} &\leqslant \frac{\xi^{1/p}}{\mu\Delta'} \sum_{l\in\vartheta_r} \biggl(\iint_{\Delta''} \biggl|\iint_{\delta_{2,j}} \int_{\Gamma_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})} \cdots \int_{\Gamma_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^{(r-1)})} |D^{\boldsymbol{\alpha}_l} f(\boldsymbol{u}^{(r)})| \\
&\qquad \times \rho^{1/p}(\boldsymbol{u}^{(r)})\, du_{l_r}^{(r)} \cdots du_{l_1}^{(1)}\, \rho(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\biggr|^p d\boldsymbol{t}\biggr)^{1/p} \\
&\leqslant \frac{A}{|\Delta'|} \sum_{l\in\vartheta_r} |\Delta^*|^{(r+1)/2+1/(2p)} \biggl(\biggl(\int_{d_1^*}\biggl(\int_{d_2^*} |D^{\boldsymbol{\alpha}_l} f(t_1,u)|\rho^{1/p}(t_1,u)\,du\biggr)^p dt_1\biggr)^{1/p} \\
&\qquad + \biggl(\int_{d_2^*}\biggl(\int_{d_1^*} |D^{\boldsymbol{\alpha}_l} f(u,t_2)|\rho^{1/p}(u,t_2)\,du\biggr)^p dt_2\biggr)^{1/p} \\
&\qquad + |\Delta^*|^{-1/(2q)} \iint_{\Delta^*} |D^{\boldsymbol{\alpha}_l} f(\boldsymbol{u})|\rho^{1/p}(\boldsymbol{u})\,d\boldsymbol{u}\biggr) \\
&\leqslant A|\Delta^*|^{r/2}\|f\|_{W_p^r(\Delta^*,\rho)}.
\end{aligned}
$$

Учитывая свойства веса ρ, замечаем, что для любой точки $\boldsymbol{t}$ из Δ^* будет справедливо вложение

$$
\Delta' \subset \bigcap_{\substack{i=1,2\\ j=1,2,3,4}} \delta_{i,j}(\Delta',\boldsymbol{t},M).
$$

Таким образом, получаем

$$
\begin{aligned}
\|f - Q_{\Delta'}f\|_{L_p(\Delta'',\rho)} &\leqslant \frac{1}{\mu\Delta'} \sum_{\substack{i=1,2\\ j=1,2,3,4}} \biggl\|\iint_{\delta_{i,j}} \bigl(f(\boldsymbol{t}) - T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\bigr)\rho(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\biggr\|_{L_p(\Delta'',\rho)} \\
&\leqslant A\|f\|_{W_p^r(\Delta^*,\rho)}\cdot n^{-r/2},
\end{aligned}
$$

т.е.

$$
\|f - Q_{\Delta'}f\|_{L_p(\Delta'',\rho)} \leqslant \|f\|_{W_p^r(\Delta^*,\rho)}\cdot n^{-r/2}, \tag{8}
$$

где A – константа, зависящая только от ρ и r.

Положим

$$
Q_n^{(r)} = \sum_{(i,j)\in\omega_n} P_{i,j}^{(n)} Q_{\Delta_{i,j}^{(n)}}.
$$

Теперь выберем произвольную пару индексов (i_0,j_0) и оценим, используя (3), норму $\|Q_n^{(r)}f\|_{W_p^r(\pi_{i_0,j_0},\rho)}$ (для упрощения записи опустим ниже индексы n и ρ):

$$
\begin{aligned}
\|Q^{(r)}f\|_{W_p^r(\pi_{i_0,j_0})} &\leqslant \sum_{\substack{0\leqslant i-i_0\leqslant 1\\ 0\leqslant j-j_0\leqslant 1}} \|P_{i,j}(Q_{\Delta_{i,j}}^{(r)} - Q_{\Delta_{i_0,j_0}}^{(r)})f\|_{W_p^r(\pi_{i_0,j_0})} \\
&\qquad + \|Q_{\Delta_{i_0,j_0}}^{(r)} f\|_{W_p^r(\pi_{i_0,j_0})} \\
&\leqslant An^{r/2} \sum_{\substack{0\leqslant i-i_0\leqslant 1\\ 0\leqslant j-j_0\leqslant 1}} \|(Q_{\Delta_{i,j}}^{(r)} - Q_{\Delta_{i_0,j_0}}^{(r)})f\|_{L_p(\Delta_{i,j})} \\
&\qquad + \|Q_{\Delta_{i_0,j_0}}^{(r)} f\|_{W_p^r(\pi_{i_0,j_0})}.
\end{aligned}
$$

Каждое из слагаемых правой части последнего неравенства оценим отдельно:

$$\|(Q^{(r)}_{\Delta_{i,j}} - Q^{(r)}_{\Delta_{i_0,j_0}})f\|_{L_p(\Delta_{i,j})} \leqslant \|Q^{(r)}_{\Delta_{i,j}}f - f\|_{L_p(\Delta_{i,j})} + \|Q^{(r)}_{\Delta_{i_0,j_0}}f - f\|_{L_p(\Delta_{i,j})}.$$

Воспользуемся (6) при $\Delta' = \Delta'' = \Delta^{(n)}_{i,j}$:

$$\|Q^{(r)}_{\Delta_{i,j}}f - f\|_{L_p(\Delta_{i,j})} \leqslant An^{-r/2}\|f\|_{W^r_p(\Delta_{i,j})}. \tag{9}$$

Если же $\Delta' = \Delta_{i_0,j_0}$, а $\Delta'' = \Delta_{i,j}$, то можем записать

$$\|Q^{(r)}_{\Delta_{i_0,j_0}}f - f\|_{L_p(\Delta_{i,j})} \leqslant An^{-r/2}\|f\|_{W^r_p(\Delta^*_{i_0,j_0})}, \tag{10}$$

где

$$\Delta^*_{i_0,j_0} \subseteq \bigcup_{\substack{|i-i_0|\leqslant 1\\ |j-j_0|\leqslant 1}} \pi_{i,j}. \tag{11}$$

Рассмотрим $\|Q^{(r)}_{\Delta_{i,j}}f\|_{W^r_p(\pi_{i,j})}$. Так как индексы i и j сейчас меняться не будут, то для упрощения записи опустим их в следующей ниже выкладке. Имеем

$$\begin{aligned}\|Q^{(r)}_{\Delta}f\|_{W^r_p(\pi)} &\leqslant \sum_{|\boldsymbol{a}|\leqslant r}\left(\int_\pi\left|D^{\boldsymbol{a}}\left(\frac{1}{\mu\Delta}\int_\Delta T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\rho(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\right)\right|^p\rho(\boldsymbol{t})\,d\boldsymbol{t}\right)^{1/p}\\ &\leqslant (r!)^2r^2(\mu\pi)^{1/p}(\mu\Delta)^{-1/p}\sum_{|\boldsymbol{k}|\leqslant r-1}\left(\int_\Delta|D^{\boldsymbol{k}}f(\boldsymbol{x})|^p\rho(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\right)^{1/p},\end{aligned}$$

т.е.

$$\|Q^{(r)}_{\Delta}f\|_{W^r_p(\pi)} \leqslant A\|f\|_{W^r_p(\Delta)}. \tag{12}$$

Объединяя (9)–(12), получим

$$\|Q^{(r)}_n f\|_{W^r_p(\pi_{i_0,j_0})} \leqslant A\sum_{\substack{0\leqslant i-i_0\leqslant 1\\ 0\leqslant j-j_0\leqslant 1}}\|f\|_{W^r_p(\Delta^*_{i,j})} + A\|f\|_{W^r_p(\Delta_{i_0,j_0})},$$

или

$$\|Q^{(r)}_n f\|_{W^r_p(\pi_{i_0,j_0})} \leqslant A\|f\|_{W^r_p(\Delta^*_{i_0,j_0})}, \tag{13}$$

где A зависит только от ρ и r, а $\Delta^*_{i_0,j_0}$ удовлетворяет (11). Воспользуемся (13) для доказательства (5) в случае $X = W^r_p(I^2,\rho)$. Пусть $f \in W^r_p(I^2,\rho)$. Тогда (опустим опять в выкладках индекс ρ)

$$\|Q^{(r)}_n f\|_{W^r_p(I^2)} \leqslant A\left(\sum_{(i,j)\in\omega_n}\sum_{\substack{|k-i|\leqslant 1\\ |l-j|\leqslant 1}}\|f\|^p_{W^r_p(\pi_{k,l})}\right)^{1/p} \leqslant A\,9^{1/p}\|f\|_{W^r_p(I^2)}.$$

Теперь докажем (6) для $X = W_p^r(I^2,\rho)$ и $Y = L_p(I^2,\rho)$. С учетом (3) и (8) имеем

$$\begin{aligned}\|Q_n^{(r)}f-f\|_{L_p(I^2)} &= \biggl(\sum_{(i,j)\in\omega_n}\biggl\|\sum_{\substack{|k-i|\leqslant1\\|l-j|\leqslant1}}P_{k,l}(Q_{\Delta_{k,l}}-Q_{\Delta_{i,j}})f+Q_{\Delta_{i,j}}f-f\biggr\|^p_{L_p(\pi_{i,j})}\biggr)^{1/p}\\ &\leqslant\biggl(\sum_{(i,j)\in\omega_n}\biggl(A\sum_{\substack{|k-i|\leqslant1\\|l-j|\leqslant1}}\|Q_{\Delta_{k,l}}f-f\|_{L_p(\Delta_{i,j})}+\|Q_{\Delta_{i,j}}f-f\|_{L_p(\pi_{i,j})}\biggr)^p\biggr)^{1/p}\\ &\leqslant An^{-r/2}\|f\|_{W_p^r(I^2)}.\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\rho\to\infty$ в оценках $\|Q_n^{(r)}f\|_{W_p^r}$ и $\|Q_n^{(r)}f-f\|_{L_p}$ для $f\in C^r(I^2)$, убеждаемся в справедливости (5), (6) и для случая $X=C^r$, $Y=C$.

Лемма 4. *Пусть мера μ с весом ρ удовлетворяет условию (1), константа $r\geqslant0$, прямоугольник $\delta\in\Pi_n$ $(n\geqslant n_0)$, а функция $S\in\Lambda_n^r$. Тогда для некоторой константы β, зависящей только от r и μ, и для любого $p\geqslant1$*

$$\|S\|_{L_p(\delta,\rho)}\geqslant\frac12\|S\|_{C(\delta)}(\beta\mu\delta)^{1/p}. \tag{14}$$

Доказательство. Для любого полинома $p(t)$ степени $r+1$ на интервале $\tau\subset\mathbb{R}$

$$\|p'\|_{C(\tau)}\leqslant\frac{2(r+1)^2\|p\|_{C(\tau)}}{|\tau|} \tag{15}$$

(неравенство Маркова, см. [8, с. 323]). Из (15) видим, что существует прямоугольник $\delta'\in\Pi_n$ такой, что $\delta'\subset\delta$, $|\delta'|>|\delta|/(16(r+1)^4)$ и $\|S(\boldsymbol{t})\|\geqslant\frac12\|S\|_{C(\delta)}$ для $\boldsymbol{t}\in\delta'$. Тогда с учетом (7)

$$\|S\|_{L_p(\delta,\rho)}>\frac12\|S\|_{C(\delta)}(\mu\delta')^{1/p}>\frac12\|S\|_{C(\delta)}(\beta\mu\delta)^{1/p}.$$

Лемма 4 доказана.

Обозначим через $\mathbf{B}_n^{(r,\rho)}$ n-мерное подпространство $L_p(I^2,\rho)$ с базисом $\varphi_{n,j}^{(r)}$ $(j=1,\dots,n)$, а через $P_n^{(r,\rho)}$ ортогональный проектор пространства $L_p(I^2,\rho)$ на подпространство $\mathbf{B}_n^{(r,\rho)}$.

Теорема 1. *Пусть мера μ с весом ρ удовлетворяет условию (1). Тогда для любой функции $f\in C(I^2)$ и любых целых $n\geqslant1$, $r\geqslant0$ $\|P_n^{(r,\rho)}f\|_C<M_1\|f\|_C$, где M_1 – константа, зависящая только от $\alpha=\max_{1\leqslant j\leqslant k}\{\alpha_j\}$ и r.*

Доказательство. Выберем M_1 так, чтобы для всех $l\in\mathbb{Z}_+$

$$\sqrt{M}(2(r+1)(l+1)+1)^\alpha<\gamma^2(1+\gamma^2)^{1/2}M_1,\qquad M_1\beta^{1/2}>4, \tag{16}$$

где

$$\gamma=\min\biggl\{\frac18\beta^{1/2}D_r^{-1},\frac12\biggr\},\qquad\beta=M(16(r+1)^4)^{-\alpha}.$$

Для простоты записи функцию $(P_n^{(r,\rho)}f)(\boldsymbol{t})$ обозначим через $S_n(\boldsymbol{t})$. Предположим, что для некоторого номера n в некоторой точке $\boldsymbol{t}_0$ ($\boldsymbol{t}_0 \in \Delta \subset \Pi_n^r$) будет выполнено

$$|S_n(\boldsymbol{t}_0)| > M_1 \|f\|_{C(I^2)}. \tag{17}$$

Введем последовательность областей $\Delta_0 = \Delta$, $\Delta_{k+1} = U_n^{(r)}(\Delta_k) \cap I^2$. Покажем, что

$$\|S_n - f\|_{L_2(\Delta_k,\rho)} > H_k = (1+\gamma^2)^{k/2} H_0, \tag{18}$$

где $k \in \mathbb{Z}_+$, $H_0 = \gamma M_1 \|f\|_{C(I^2)} (\mu\Delta_0)^{1/2}$. В самом деле, для $k=0$, учитывая (14) и (16), получаем

$$\begin{aligned} \|S_n - f\|_{L_2(\Delta_0,\rho)} &\geqslant \|S_n\|_{L_2(\Delta_0,\rho)} - \|f\|_{L_2(\Delta_0,\rho)} \\ &> \frac{1}{2} M_1 \|f\|_{C(I^2)} (\beta\mu\Delta_0)^{1/2} - \|f\|_{C(I^2)} (\mu\Delta_0)^{1/2} \\ &> \frac{1}{4} M \|f\|_{C(I^2)} (\mu\Delta_0\beta)^{1/2}. \end{aligned}$$

Предположим, что (18) доказано для $k = l$. Возьмем функцию $\widetilde{S}_n = \Phi_{n,\Delta_l}^{(r)} S_n$. Имеем

$$\widetilde{S}(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \boldsymbol{t} \in \Delta_l, \\ S_n(\boldsymbol{t}), & \text{если } \boldsymbol{t} \notin \Delta_{l+1}. \end{cases} \tag{19}$$

Так как S_n – проекция f на $\mathbf{B}_n^{(r,\rho)}$, учитывая (19), получаем

$$\|\widetilde{S}_n - f\|_{L_2(\Delta_{l+1},\rho)} > \|S_n - f\|_{L_2(\Delta_{l+1},\rho)},$$

т.е.

$$\|\widetilde{S}_n\|_{L_2(\Delta_{l+1}\setminus\Delta_l,\rho)} + \|f\|_{L_2(\Delta_{l+1},\rho)} > \|S_n - f\|_{L_2(\Delta_l,\rho)}.$$

Поскольку $|\Delta_{l+1}| < (2(r+1)(l+1)+1)^2 |\Delta_0|$ и справедливо (7), имеет место

$$\|f\|_{L_2(\Delta_{l+1},\rho)} \leqslant \|f\|_{C(I^2)} M^{1/2} (2(r+1)(l+1)+1)^{\alpha} (\mu\Delta_0)^{1/2},$$

откуда с учетом (16) и (18) получаем

$$\|f\|_{L_2(\Delta_{l+1},\rho)} < \gamma(1+\gamma^2)^{1/2} H_0 < \gamma \|S_n - f\|_{L_2(\Delta_l,\rho)}. \tag{20}$$

Следовательно,

$$\|\widetilde{S}_n\|_{L_2(\Delta_{l+1}\setminus\Delta_l,\rho)} > \|S_n - f\|_{L_2(\Delta_l,\rho)} - \|f\|_{L_2(\Delta_{l+1},\rho)} > (1-\gamma)\|S_n - f\|_{L_2(\Delta_l,\rho)}.$$

Обозначим через $\{\delta_i\}$ ($i \in \sigma_l$) множество прямоугольников из $\Pi_m^{(r)}$ таких, что $\Delta_{l+1}\setminus\Delta_l = \bigcup_{i\in\sigma_l} \delta_i$ и $|\delta_i \cap \delta_j| = 0$ при $i \neq j$. Используя леммы 2 и 4, получаем

$$\begin{aligned} \|\widetilde{S}_n\|_{L_2(\Delta_{l+1}\setminus\Delta_l,\rho)} &< \biggl(\sum_{i\in\sigma_l} \|\widetilde{S}_n\|^2_{C(\delta_i)} \mu\delta_i\biggr)^{1/2} < D_r \biggl(\sum_{i\in\sigma_l} \|S_n\|^2_{C(\delta_i)} \mu\delta_i\biggr)^{1/2} \\ &< 2D_r \beta^{-1/2} \|S_n\|_{L_2(\Delta_{l+1}\setminus\Delta_l,\rho)}. \end{aligned}$$

Из двух последних оценок заключаем, что

$$\|S_n\|_{L_2(\Delta_{l+1}\setminus\Delta_l,\rho)} > 2\gamma\|S_n - f\|_{L_2(\Delta_l,\rho)}.$$

Комбинация последнего неравенства с оценкой (20) дает

$$\|S_n - f\|_{L_2(\Delta_{l+1}\setminus\Delta_l,\rho)} > \|S_n\|_{L_2(\Delta_{l+1}\setminus\Delta_l,\rho)} - \|f\|_{L_2(\Delta_{l+1},\rho)} > \gamma\|S_n - f\|_{L_2(\Delta_l,\rho)},$$

откуда

$$\|S_n - f\|_{L_2(\Delta_{l+1},\rho)} > \|S_n - f\|_{L_2(\Delta_l,\rho)}(1+\gamma^2)^{1/2} > H_{l+1}.$$

Начиная с некоторого номера l_0 будем иметь $\Delta_l = I^2$ $(l \geqslant l_0)$, но в этом случае (18) противоречит тому факту, что S_n – проекция f на $\mathbf{B}_n^{(r,\rho)}$. Следовательно, неравенство (17) не может иметь места.

Теорема 1 доказана.

Теорема 1 означает, что система $\{f_n^{(r,\rho)}\}$ будет базисом в пространстве $C(I^2)$. Из этого факта вытекает (см. [9, с. 100]), что она будет базисом и во всех пространствах $L_p(I^2,\rho)$ $(\rho \geqslant 1)$.

Теорема 2. *Пусть вес $\rho(\boldsymbol{t})$ удовлетворяет условию* (1). *Тогда для любого $r \geqslant 1$ существует система сплайн-функций $\{f_n^{(r,\rho)}(\boldsymbol{t}),\ n \in \mathbb{N}\}$, являющаяся базисом в $W_p^r(I^2,\rho)$.*

Доказательство. Искомую систему сплайнов определим следующим образом: $f_n^{(r,\rho)}$ образуют ортонормированную систему в $L_2(I^2,\rho)$ и $f_1^{(r,\rho)} \equiv 1$,

$$f_n^{(r,\rho)} \in \begin{cases} \mathbf{B}_{(r+2)^2}^{(r,\rho)} & \text{для } n \leqslant n_0, \\ \mathbf{B}_n^{(r,\rho)} & \text{для } n > n_0. \end{cases}$$

Пусть даны функция $f \in W_p^r(I^2,\rho)$ и $n_1 \geqslant n_0$. Возьмем оператор $Q_{n_1}^{(r)}$, определенный в лемме 3, и положим

$$q(\boldsymbol{t}) = (Q_{n_1}^{(r)} f)(\boldsymbol{t}). \tag{21}$$

Рассмотрим сплайн $\varphi(x,y) \in \Lambda_n^{(r)}$. Так как для фиксированного $x_1^* \in I$ (соответственно $x_2^* \in I$) функция $\varphi(x_1^*, x_2)$ (соответственно $\varphi(x_1, x_2^*)$) является одномерным сплайном степени $r+1$ на I с интервалами бесконечной гладкости не меньшими $1/(2\sqrt{n})$, то, учитывая неравенство Маркова и (14), видим, что

$$\|D^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\|_{L_p(I^2,\rho)} = \biggl(\sum_{\Delta\in\Pi_n} \|D^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\|_{L_p(\Delta,\rho)}^p\biggr)^{1/p} \leqslant \biggl(\sum_{\Delta} \|D^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\|_{C(\Delta)}^p \mu\Delta\biggr)^{1/p}$$
$$< An^{r/2}\biggl(\sum_{\Delta} \|\varphi\|_{C(\Delta)}^p \mu\Delta\biggr)^{1/p} \leqslant An^{r/2}\|\varphi\|_{L_p(I^2,\rho)},$$

т.е.

$$\|\varphi\|_{W_p^r(I^2,\rho)} \leqslant An^{r/2}\|\varphi\|_{L_p(I^2,\rho)}. \tag{22}$$

Следовательно, для $\|P_n^{(r,\rho)}f\|_{W_p^r}$ при $n>n_1$ с учетом (5), (6), (21) и (22) получаем

$$\begin{aligned}\|P_n^{(r,\rho)}f\|_{W_p^r(I^2,\rho)} &\leqslant \|P_n^{(r,\rho)}(f-q)\|_{W_p^r(I^2,\rho)}+\|q\|_{W_p^r(I^2,\rho)}\\ &< An^{r/2}\|P_n^{(r,\rho)}(f-q)\|_{L_p(I^2,\rho)}+\|q\|_{W_p^r(I^2,\rho)}\\ &< An^{r/2}M_1\|f-q\|_{L_p(I^2,\rho)}+A\|f\|_{W_p^r(I^2,\rho)}\\ &< A\|f\|_{W_p^r(I^2,\rho)}.\end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ciesielski Z. A construction of basis in $C^{(1)}(I^2)$ // Studia Math. 1969. V. 33. № 2. P. 243–247.
[2] Schonefeld S. Schauder bases in spaces of differentiable functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1969. V. 75. P. 589–590.
[3] Ciesielski Z., Domsta J. Construction of orthonormal basis in $C^m(I^d)$ and $W_p^m(I^d)$ // Studia Math. 1972. V. 41. № 2. P. 211–224.
[4] Carry H. B., Schoenberg I. J. On Polya frequence function. IV // J. Anal. Math. 1966. V. 17. P. 71–107.
[5] de Boor C. Splines as linear combinations of B-splines // Approximation Theory. V. II. New York: Acad. Press, 1976. P. 1–47.
[6] Акопян А. А., Саакян А. А. Многомерные сплайны и полиномиальная интерполяция // УМН. 1993. Т. 48. № 5. С. 3–76.
[7] de Boor C. The quasi interpolant as a tool in elementary spline theory // Approximation Theory. New York: Acad. Press, 1973. P. 269–276.
[8] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
[9] Olevskiĭ A. M. Fourier Series with respect to General Orthogonal Systems. Berlin: Springer, 1975.

Московский государственный институт электроники и математики

Поступило
04.02.1998
Исправленный вариант
15.04.1999