Автоматика и телемеханика, № 2, 2008

PACS 02.30.Yy

© 2008 г. **М.Г. ЗОТОВ, д-р техн. наук**
(Московский институт электроники и математики)

О СЛОЖНОСТЯХ ПОИСКА И РЕАЛИЗАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Показано, что тривиально получаемое в пространстве операторов решение в пространстве состояний можно получить лишь после довольно внушительных по объему выкладок. Полученное решение является лишь квазиоптимальным и сложно реализуемым. Задачи, приведенные в примерах, в практике проектирования систем управления встречаются довольно часто.

1. Введение

Многочисленные работы, посвященные синтезу линейных систем управления из условия минимума квадратичного функционала качества, образуют два направления. Первое из них, основывающееся на вход-выходных соотношениях, начало свое развитие с 50-х г. и связано с решением уравнений Винера-Хопфа. Второе зародилось в 60-е г. и связано с работами Калмана. Задачи синтеза стали решаться в пространстве состояний.

С появлением двух направлений встала задача сравнительной оценки этих подходов. В адрес методов пространства состояний прозвучала критика [1–5]. Настоящая статья ее дополняет.

2. Постановка задачи

Задан объект управления. Требуется сконструировать систему управления, обеспечивающую близость передаточной функции системы относительно задающего воздействия $\widetilde{H}(s)$ к желаемой $P_1(s)$. Это классическая задача теории управления. Ее решение заключается в минимизации функционала

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{-j\infty}^{j\infty} \left|P_1(s) - \widetilde{H}(s)\right|^2 ds. \tag{1}$$

3. Решение задачи в пространстве состояний

Попытаемся решить поставленную задачу в пространстве состояний.

Классический функционал, используемый при решении задач в пространстве состояний, имеет вид [6–8]:

$$I = \int\limits_0^\infty \left(x^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}x + u^{\mathrm{T}}\mathbf{R}u\right) dt. \tag{2}$$

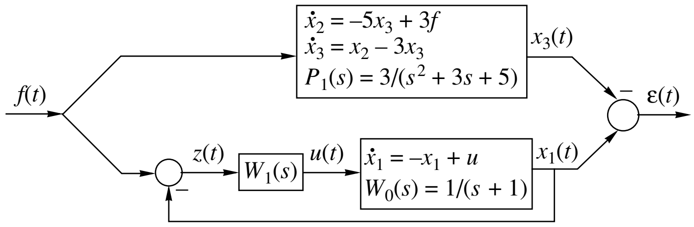

Рисунок.

Из сопоставления функционалов (1) и (2) видно, что в первый из них не входит вторая составляющая функционала (2). Поэтому алгоритм будет заключаться в ее решении при $\mathbf{R} \neq 0$ с последующим приравниванием в полученном решении $\mathbf{R}$ нулю [2].

Известно, что при решении задачи в пространстве состояний порядки дифференциальных уравнений регулятора и объекта управления с расширением совпадают. Действительно для объекта с расширением, описываемого уравнением

$$(3) \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{f},$$

если доступно только измерение вида

$$(4) \qquad \mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{n}$$

(в уравнениях (3), (4) $\mathbf{f}(t)$ и $\mathbf{n}(t)$ – стационарные случайные процессы типа белого шума), то закон управления

$$(5) \qquad \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\widehat{\mathbf{x}}(t), \quad \dot{\widehat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(z(t) - \mathbf{C}\widehat{x}(t))$$

доставляет минимум показателю

$$I = \lim_{T\to\infty} M \frac{1}{T} \int_0^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t) + 2\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}_1\mathbf{u}(t)\right) dt.$$

Функционал (2) является частным случаем этого показателя.

Однако практика конструирования оптимальных регуляторов в пространстве операторов свидетельствует, что такой однозначной связи, если регулятор реализуется в пространстве операторов, не существует. Может оказаться, что для объекта большой размерности оптимальный регулятор будет минимальной размерности, например первого порядка. Имеются и другие значительные трудности конструирования и реализации решения, полученного в пространстве состояний. Сказанное проиллюстрируем примером.

Пример 1. Решение задачи иллюстрирует рисунок.

В пространстве состояний уравнение объекта имеет вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{f}, \qquad \begin{array}{rlllll} \dot{x}_1 = & -x_1 & & & +u, & \\ \dot{x}_2 = & & & -5x_3 & & +3f, \\ \dot{x}_3 = & & x_2 & -3x_3, & & \end{array}$$

f – белый шум единичной интенсивности.

Качество работы системы оценивается критерием

$$I_1 = \lim_{T^*\to\infty} M\frac{1}{T^*}\int\limits_0^{T^*}\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x}+\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{u}\right)dt =$$

$$= \lim_{T^*\to\infty} M\frac{1}{T^{*u}}\int\limits_0^{T^*}\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)+uru\right)dt =$$

$$= \lim_{T^*\to\infty} M\frac{1}{T^*}\int\limits_0^{T^*}(\mathrm{x}_1-x_3)^2\,dt, \quad \text{при } r=0.$$

Наблюдается координата

$$\mathbf{z}=\mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{n}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+n=-x_1+n, \quad n=f.$$

К сожалению, классический алгоритм поиска оптимального управления можно использовать только при $r \neq 0$.

Решение задачи при $r = 0{,}0001$ приведено в приложении А и имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dot{\widehat{x}}_1 = -\widehat{x}_1 + u, \\ &\dot{\widehat{x}}_2 = -5\widehat{x}_3 + (z+\widehat{x}_1), \\ &\dot{\widehat{x}}_3 = \widehat{x}_2 - 3\widehat{x}_3, \\ &u = -(99{,}0050\widehat{x}_1 - 0{,}9703\widehat{x}_2 - 97{,}0356\widehat{x}_3). \end{aligned} \tag{6}$$

Так как оно получено при $r \neq 0$, то является квазиоптимальным. Регулятор описывается системой дифференциальных уравнений третьего порядка. В приложении А показано: при $r = 0$ управление не может быть реализовано, так как коэффициенты усиления в нем бесконечно большие.

4. Решение задачи в пространстве операторов

Проведем решение той же задачи в пространстве операторов.

Пример 2. Объект управления задан передаточной функцией

$$W_0(s)=\frac{Q_0(s)}{P_0(s)}=\frac{1}{s+1}.$$

Требуется сконструировать управляющее устройство со звеном коррекции в прямой цепи, обеспечивающее минимум функционала

$$I_1=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{-j\infty}^{j\infty}\left|P_1(s)-\widetilde{H}(s)\right|^2 S_{ff}(s)ds, \tag{7}$$

здесь $S_{ff}(s) = 1$ – спектральная плотность подаваемого на систему белого шума, $P_1(s) = 3/(s^2 + 3s + 5)$ – желаемая и $\widetilde{H}(s) = M(s)/N(s)$ – действительная передаточные функции системы относительно воздействия $f(t)$. При $r = 0$ $I = I_1$.

В классической теории систем управления это задача отыскания передаточной функции звена коррекции из условия близости действительной передаточной функции системы относительно задающего воздействия $\widetilde{H}(s)$ к желаемой $P_1(s)$.

Приступим к решению. Решение иллюстрирует рисунок. Передаточная функция объекта не имеет правых нулей и полюсов, поэтому ограничений на их компенсацию регулятором в функционал (7) вводить не надо [9, 10]. Ограничение на реализуемость звена коррекции [10, 11] при таких исходных данных также не вводится.

Из минимума функционала (7) следует тривиальное решение $\widetilde{H}(s) = P_1(s)$.

Из него

$$W_1(s) = \frac{1}{W_0(s)} \frac{\widetilde{H}(s)}{(1 - \widetilde{H}(s))} = \frac{3}{s+2}, \quad \dot{u} = -2u + 3z.$$

Звено коррекции обеспечивает нулевое значение функционала. Так как у регулятора степень числителя не превышает степени знаменателя, то согласно [12] система свойством грубости обладает.

5. Приведение решения из пространства состояний к решению из пространства операторов

Из полученного в пространстве состояний решения (П.1–П.3) можно найти передаточную функцию звена коррекции

$$W_1(s,r) = \frac{U(s,r)}{Z(s,r)},$$
$$U(s,r) = 3(s+1)\left(\sqrt{r}(3r(2s+5)+s) - \sqrt{(r+1)}(3r(s+1)-1)\,\mathrm{sign}\,(6r+1)\right),$$
$$Z(s,r) = \sqrt{r+1}\left(27r^2(s^2+3s+5) + 3r(s+2)(s+4) + (s+1)(s+2)\right)\mathrm{sign}\,(6r+1) +$$
$$+ \sqrt{r}\left(27r^2 s(s^2+3s+5) + 3r(s^3+3s^2-s-15) + s(s^2+3s+2)\right),$$
$$\lim_{r\to 0} W_1(s,r) = 3/(s+2).$$

Полученный результат очевиден, так как звено коррекции искалось их одного и того же функционала, только разными способами.

Отметим также, что управление при $r = 0$ имеет конечную мощность. Действительно

$$\overline{u^2} = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_0(s)} \right|^2 S_{ff} ds = 1{,}8.$$

Поэтому введение в функционал ограничения на управление нецелесообразно.

С увеличением порядка дифференциального уравнения, описывающего объект, трудности решения задачи и его реализации в пространстве состояний усугубляются. Рассмотрим пример.

Пример 3. Объект задан передаточной функцией

$$W_0(s) = \frac{Q_0(s)}{P_0(s)} = \frac{s-4}{s^2 - 0{,}5s + 6{,}3125} = \frac{s-4}{(s - 0{,}25 - 2{,}5j)(s - 0{,}25 + 2{,}5j)}.$$

Желаемая передаточная функция имеет вид

$$P_1(s) = \frac{2(16s^3 + 144s^2 + 125s - 253)}{16s^4 + 168s^3 + 541s^2 + 887s + 1548}.$$

Близость передаточной функции системы относительно задающего воздействия $\widetilde{H}(s)$ к желаемой $P_1(s)$ оценивается соотношением (7).

Так как передаточная функция объекта имеет правые нули и полюсы, в функционал (1) необходимо добавить ограничения на компенсацию регулятором правых нулей и полюсов объекта управления [9, 10]. Функционал примет вид:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{-j\infty}^{j\infty} \left|P_1(s) - \widetilde{H}(s)\right|^2 ds - \varsigma_1 \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{-j\infty}^{j\infty} \left(\widetilde{H}(-s)\frac{1}{s+4} + \widetilde{H}(s)\frac{1}{-s+4}\right) ds -$$
$$-\rho_1\left(\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{-j\infty}^{j\infty}\left(\widetilde{H}(-s)\frac{1}{s+0{,}25-2{,}5j} + \widetilde{H}(s)\frac{1}{-s+0{,}25-2{,}5j}\right) ds - 2\right) -$$
$$-\rho_2\left(\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{-j\infty}^{j\infty}\left(\widetilde{H}(-s)\frac{1}{s+0{,}25+2{,}5j} + \widetilde{H}(s)\frac{1}{-s+0{,}25+2{,}5j}\right) ds - 2\right),$$

ς_1, ρ_1, ρ_2 – множители Лагранжа.

Передаточная функция объекта такова, что ограничения на реализуемость регулятора вводить не надо.

Минимум функционала достигается, если $\widetilde{H}(s)$ удовлетворяет уравнению Винера-Хопфа:

$$\widetilde{H}(s) - P_1(s) - \varsigma_1\frac{1}{s+4} - \rho_1\frac{1}{s+0{,}25-2{,}5j} - \rho_2\frac{1}{s+0{,}25+2{,}5j} = \Gamma(s), \tag{8}$$

$\Gamma(s)$ – неизвестная функция с полюсами из правой полуплоскости.

Решение уравнения Винера-Хопфа приведено в Приложении Б и имеет вид:

$$\widetilde{H}(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{80(s-4)}{16s^3 + 104s^2 + 125s + 387}, \tag{9}$$

$$W_1(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s)}\frac{M(s)}{N(s) - M(s)} = \frac{5}{s+7}. \tag{10}$$

Так как у регулятора степень числителя не превышает степени знаменателя, то согласно [12] система свойством грубости будет обладать.

Приведем решение этой задачи в пространстве состояний.

Пример 4. Используя передаточные функции $W_0(s)$ и $P_1(s)$, запишем в форме Коши уравнение объекта с расширением. Для него согласно соотношению (5) уравнение регулятора будет иметь вид:

$$u = -\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \\ \widehat{x}_3 \\ \widehat{x}_4 \\ \widehat{x}_5 \\ \widehat{x}_6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\widehat{x}}_1 \\ \dot{\widehat{x}}_2 \\ \dot{\widehat{x}}_3 \\ \dot{\widehat{x}}_4 \\ \dot{\widehat{x}}_5 \\ \dot{\widehat{x}}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6.3125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{387}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\dfrac{887}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\dfrac{541}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{21}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \\ \widehat{x}_3 \\ \widehat{x}_4 \\ \widehat{x}_5 \\ \widehat{x}_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \end{pmatrix} (z - (-\widehat{x}_2)).$$

Для поиска параметров этого регулятора необходимо решить параметрическое уравнение Риккати, что сводится к решению системы из 21-го нелинейного уравнения. Это решение в отличие от примера 1 найти не удалось, в силу чего пришлось задаться численным значением параметра r. При $r = 0{,}0001$ с использованием процедур *lqr* и *lge* [8] параметры, входящие в математическую модель регулятора, были найдены:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= (-39{,}9357 \quad -55{,}3787 \quad 0{,}4654 \quad 1{,}8552 \quad 6{,}4914 \quad -67{,}9453), \\ \mathbf{L} &= (0 \quad -1 \quad -39{,}5839 \quad -14{,}9457 \quad 4{,}8612 \quad 0{,}6710). \end{aligned}$$

Квазиоптимальный регулятор описывается системой дифференциальных уравнений шестого порядка. Оптимальный регулятор, найденный в пространстве операторов, описывается дифференциальным уравнением первого порядка.

Как и следовало ожидать, полученное в пространстве состояний решение при малых значениях r должно быть близко к точному решению. Переведенное из пространства состояний в пространство операторов решение имеет вид:

$$\begin{aligned} W_1(s) = {} & \frac{4{,}8062(s + 0{,}2499 - 2{,}4999j)(s + 0{,}2499 + 2{,}4999j)}{(s + 0{,}2498 - 2{,}4999j)(s + 0{,}2498 + 2{,}4999j)} \times \\ & \times \frac{(s + 3{,}9988 - 0{,}0088j)(s + 3{,}9988 + 0{,}008891j)(s + 104{,}0674)}{(s + 4{,}0007 - 0{,}0066j)(s + 4{,}0007 + 0{,}0066j)(s + 7{,}0072)(s + 99{,}8556)}. \end{aligned}$$

Если в нем сократить близкие корни числителя и знаменателя, то полученная таким образом передаточная функция регулятора будет близка к точному решению. АФХ регуляторов практически не различимы.

6. Заключение

Существуют задачи, в которых введение ограничения на управление лишено практического смысла, так как оно ограничено и без его введения или не предусмотрено в постановке задачи. Решение таких задач в пространстве состояний нецелесообразно, так как:

• не удается найти точного решения, т.е. решения при $\mathbf{R} = 0$. В то же время получение точного решения в пространстве операторов трудностей не вызывает;

• получение параметрического решения уравнения Риккати сильно возрастает с ростом размерности пространства состояний;

• полученное решение, когда $\mathbf{R} = 0$, в пространстве состояний реализовать не удается;

• если коэффициенты в матрице $\mathbf{R}$ назначить достаточно малыми, то регулятор получается неоправданно сложным, а решение квазиоптимальным;

• хотя решение в пространстве состояний можно получить и при $\mathbf{R} = 0$, но через его предварительное представление в пространстве операторов.

Из сказанного следует вывод: алгоритм получения решения для рассмотренных задач в пространстве операторов значительно проще. Решение получается оптимальным, а в пространстве состояний лишь квазиоптимальным и неоправданно сложным.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Здесь приведено решение примера 1. Уравнение Риккати с учетом исходных данных имеет вид:

$$\mathbf{PA} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} r^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} = 0.$$

Решая его, найдем

$$p_{11} = \sqrt{r}\sqrt{(r+1)}\,\mathrm{sign}\,(6r+1) - r,$$

$$p_{12} = \frac{r\left(3\sqrt{r}\sqrt{(r+1)}\,\mathrm{sign}\,(6r+1) - 6r - 1\right)}{27r^2 + 3r + 1},$$

$$p_{13} = \frac{\sqrt{r}\sqrt{(r+1)}\left(3\sqrt{r}\sqrt{(r+1)} - |6r+1|\right)}{27r^2 + 3r + 1},$$

$$p_{22} = \frac{r\left(90r^{3/2}\sqrt{(r+1)}\,\mathrm{sign}\,(6r+1) + 243r^3 - 99r^2 - 15r + 2\right)}{10(27r^2 + 3r + 1)^2},$$

$$p_{23} = \frac{r\left(6\sqrt{r}\sqrt{(r+1)}\,|6r+1| - 45r^2 - 21r - 1\right)}{2(27r^2 + 3r + 1)},$$

$$p_{33} = \frac{\sqrt{r}\left(\sqrt{r}(243r^3 - 36r^2 - 36r - 7) - 2\sqrt{(r+1)}(6r+1)\,|6r+1|\right)}{2(27r^2 + 3r + 1)^2}.$$

Отметим, что решение параметрического уравнения Риккати при большой размерности пространства состояний нетривиально.

Коэффициенты усиления k_i в соотношении

$$u = -\left(k_1\widehat{x}_1 + k_2\widehat{x}_2 + k_3\widehat{x}_3\right) \qquad (\text{П}.1)$$

определяются выражениями:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R^{-1}B^TP} = r^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{12} & p_{22} & p_{23}\\ p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{11}\\ p_{12}\\ p_{13}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \tag{П.2}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{(r+1)}\,\mathrm{sign}(6r+1)}{\sqrt{r}} - 1 \\ \dfrac{3\sqrt{r}\sqrt{(r+1)}\,\mathrm{sign}\,(6r+1) - 6r - 1}{27r^2+3r+1} \\ \dfrac{\sqrt{(r+1)}\left(3\sqrt{r}\sqrt{(r+1)} - |6r+1|\right)}{\sqrt{r}(27r^2+3r+1)} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\lim_{r\to 0}\mathbf{K} = \begin{pmatrix}\infty & -1 & -\infty\end{pmatrix}.$$

Из полученных соотношений следует, что при $r = 0$ регулятор не может быть реализован, так как коэффициенты усиления бесконечно большие. Предполагая, что параметр r может быть взят ненулевым, но достаточно близким к нулю, например $r = 0{,}0001$, получим

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix}99{,}0050 & -0{,}9703 & -97{,}0356\end{pmatrix}.$$

Согласно рисунку доступно измерение: $z = f - x_1$. По нему необходимо найти оценки координат пространства состояний. Они определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{x}}_1 &= -\widehat{x}_1 + u + l_1(z - (-\widehat{x}_1)),\\ \dot{\widehat{x}}_2 &= -5\widehat{x}_3 + l_2(z - (-\widehat{x}_1)),\\ \dot{\widehat{x}}_3 &= \widehat{x}_2 - 3\widehat{x}_3 + l_3(z - (-\widehat{x}_1)). \end{aligned} \tag{П.3}$$

Компоненты вектора $\mathbf{L}$ можно найти с использованием стандартной процедуры *lqe* [8]:

$$l_1 = 0, \quad l_2 = 1, \quad l_3 = 0.$$

Подставив их в систему (П.3), получим искомое решение (6).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Решая уравнение Винера-Хопфа (8), найдем $\widetilde{H}(s) = M(s)/N(s)$. В нем

$$\begin{aligned} M(s) &= 256(\varsigma_1+\rho_1+\rho_2+2)s^5 + 64(28\varsigma_1+43\rho_1+43\rho_2+76)s^4 +\\ &+ 16(278\varsigma_1+583\rho_1+583\rho_2+596)s^3 + 4(4424\varsigma_1+4089\rho_1+4089\rho_2+5748)s^2 +\\ &+(15721\varsigma_1+2(14158\rho_1+14158\rho_2+10601))s + 39087\varsigma_1 +\\ &+2(3096\rho_1+3096\rho_2-25553) + 40j(s+4)(\rho_1-\rho_2)(16s^3+104s^2+125s+387),\\ N(s) &= (s+4)(16s^2+8s+101)(16s^3+104s^2+125s+387). \end{aligned}$$

Множители Лагранжа ищутся из условий:

$$M(s)|_{s=4} = 0, \quad (N(s)-M(s))|_{s=0,25-2,5j} = 0,$$
$$(N(s)-M(s))|_{s=0,25+2,5j} = 0.$$

Решая систему трех линейных уравнений, найдем $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 0$, $\varsigma_1 = -2$.

Из выражения для $\widetilde{H}(s)$ после подстановки найденных значений множителей Лагранжа следует (9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Horowitz I.M., Shaked U.* Superiority of transfer function over state variable methods // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. № 2. P. 84–97.
2. *Youla D.C., Jabr H.F., Bongiorno J.J.* Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers – Part 11: The multivariable case // IEEE Trans. Automat. Control. 1976. № 3. P. 319–338.
3. *Алиев Ф.А., Ларин В.Б., Науменко К.И., Сунцев В.Н.* Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления. Киев: Наук. думка, 1978.
4. *Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б.* *H*-оптимизация и метод пространства состояний в задаче синтеза оптимальных регуляторов. Баку: Элм, 1991.
5. Optimization of Linear Control Systems. Analytical Methods and Computational Algorithms / *Aliev F.A., Larin V.B.* Stability and Control: Theory, Methods and Applications. V. 8. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1998.
6. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
7. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
8. *Медведев В.С., Потемкин В.Г.* Control system toolbox. М.: Диалог МИФИ, 1999.
9. *Катковник В.Я., Полуэктов Р.А.* Многомерные дискретные системы управления. М.: Наука, 1966.
10. *Зотов М.Г.* Многокритериальное конструирование систем автоматического управления. М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2004.
11. *Кухтенко В.И.* К расчету корректирующих цепей систем автоматического управления по критерию минимума среднеквадратичной ошибки // АиТ. 1959. № 9. С. 1180–1187.
12. *Надеждин П.В.* О практической неустойчивости (негрубости) систем, получаемых по методу статьи [1] // АиТ. 1973. № 5. С. 196–198.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 10.10.2006