Классификация потоков Черри на замкнутых гиперболических поверхностях *

Е. В. Жужома Т. В. Медведев

В своем мемуаре [11] Пуанкаре высказал гипотезу о существовании на двумерном торе аналитического нетранзитивного потока без периодических траекторий и без точек покоя. Данжуа [8] показал, что эта гипотеза не верна (даже для потоков гладкости C^2). Однако в 1938 году Черри [7] показал, что если опустить требование об отсутствии точек покоя, то (ослабленная) гипотеза Пуанкаре будет верна. Черри построил на торе нетранзитивный поток аналитического класса гладкости без периодических траекторий с двумя грубыми точками покоя: седлом и узлом. Односвязную компоненту дополнения к квазиминимальному множеству Черри назвал черной ячейкой. Остальные компоненты этого дополнения – серыми ячейками.

Обобщение конструкции Черри позволило ввести класс потоков на торе, так называемых потоков Черри (см. [4], [6], [9], [10]), которые рассматривались как с точки зрения классификации, так и с точки зрения существования серых ячеек. Нетрудно построить топологические потоки Черри с серыми ячейками. Что касается гладких потоков, то вопрос о существовании серых ячеек в полной общности до настоящего времени не решен. В работах [3], [5] были введены и изучались с обоих точек зрения потоки Черри на двумерной сфере.

Целью настоящей заметки является классификация с точки зрения орбитальной топологической эквивалентности топологических потоков Черри на замкнутой ориентируемой гиперболической поверхности M^2.

Поток f^t на M^2 называется *потоком типа Черри*, если

*Авторы благодарят РФФИ (грант 02-01-00098) за финансовую поддержку

- f^t имеет на M^2 ровно одно квазиминимальное множество $Q(f^t)$, содержащее конечное число точек покоя O_i, $i = 1, \ldots, k$, которые являются седлами с четырьмя сепаратрисами.

- $Q(f^t)$ является неприводимым квазиминимальным множеством, то есть любая компонента множества $M^2 - Q(f^t)$ односвязна.

- Для каждого седла $O_i \in Q(f^t)$ среди его сепаратрис s_j^i $(j = 1, \ldots, 4)$ при циклическом обходе вокруг O_i сепаратриса s_3^i, которую назовем *черной сепаратрисой*, не лежит в $Q(f^t)$ и не имеет $Q(f^t)$ своим предельным множеством, а сепаратрисы s_1^i, s_2^i, s_4^i имеют $Q(f^t)$ своим α- или ω- предельным множеством.

Непосредственно из определения следует, что для каждого седла $O_i \in Q(f^t)$ сепаратриса s_1^i и, по крайней мере, одна из сепаратрис s_2^i, s_4^i нетривиально рекуррентна либо при $t \to -\infty$, либо при $t \to +\infty$.

Компоненты множества $M^2 - \left(Q(f^t) \cup_{i=1}^k (s_2^i \cup s_4^i)\right)$, содержащие черные сепаратрисы, называются *черными ячейками*, а остальные компоненты этого множества называются *серыми ячейками*. Черные и серые ячейки суть открытые инвариантные области. *Индексом* инвариантной области называется сумма индексов минимально возможного числа точек покоя потока, который можно задать на области так, чтобы он совпадал с исходным потоком f^t на достижимой изнутри границе данной области. Поток типа Черри называется *потоком Черри*, если

- Внутри каждой черной ячейки лежит ровно одна точка покоя, являющаяся узлом, а достижимая изнутри граница каждой черной ячейки состоит ровно из одного из седел O_i и двух траекторий s_2^i, s_4^i.

- Внутри каждой серой ячейки отрицательного индекса лежит ровно одна точка покоя, являющаяся седлом, а достижимая изнутри граница такой серой ячейки не содержит точек покоя.

- Внутри каждой серой ячейки нулевого индекса нет точек покоя.

Пусть Δ – плоскость Лобачевского в виде модели Пуанкаре, то есть Δ – единичный круг на комплексной z-плоскости, наделенный метрикой постоянной отрицательной кривизны. Окружность $S_\infty = \partial\Delta = (|z| = 1)$

называется *абсолютом.* В силу теоремы об униформизации, существует группа Γ изометрий плоскости Δ такая, что $\Delta/\Gamma \cong M^2$. Обозначим через $\pi : \Delta \to \Delta/\Gamma \cong M^2$ естественную проекцию, которая является универсальным накрывающим отображением.

Пусть $l^+ = \{m(t) \in M^2 : t \geq 0\}$ – полубесконечная непрерывная кривая без самопересечений на M^2, и $\overline{l}^+ = \{\overline{m}(t) \in \Delta : t \geq 0\}$ – ее поднятие на Δ. Предположим, что $\overline{l}^+$ стремится в евклидовой метрике на замкнутом диске $\Delta \cup S_\infty$ при $t \to +\infty$ ровно к одной точке σ абсолюта S_∞. Будем говорить в этом случае, что *кривая* $\overline{l}^+$ *имеет асимптотическое направление*, определяемое точкой σ (допуская некоторую вольность, будем говорить также, что l^+ имеет асимптотическое направление), а точка σ *достигается* кривой $\overline{l}^+$.

Пусть $l = \{m(t) \in M^2 : -\infty < t + \infty\}$ – простая бесконечная непрерывная кривая на поверхности M^2. Точка $m(0)$ делит l на две полубесконечные кривые: *положительную* $l^+ = \{m(t) \in M^2 : t \geq 0\}$, и *отрицательную* $l^- = \{m(t) \in M^2 : t \leq 0\}$. Пусть $\overline{l} = \{\overline{m}(t) : -\infty < t + \infty\}$ – поднятие кривой l на $\overline{M}$. Тогда каждая из полукривых $\overline{l}^+ = \{\overline{m}(t) : t \geq 0\}$, $\overline{l}^- = \{\overline{m}(t) : t \leq 0\}$ является поднятием l^+ и l^- соответственно. Предположим, что каждая кривая $\overline{l}^+$ и $\overline{l}^-$ имеет асимптотическое направление $\omega(\overline{l}) \in S_\infty$ и $\alpha(\overline{l}) \in S_\infty$ соответственно, и предположим, что $\alpha(\overline{l}) \neq \omega(\overline{l})$. Тогда существует геодезическая $\overline{g}(\overline{l})$ с теми же идеальными концевыми точками $\alpha(\overline{l})$, $\omega(\overline{l})$, и ориентированная от $\alpha(\overline{l})$ к $\omega(\overline{l})$. Геодезическая $\overline{g}(\overline{l})$ называется *соасимптотической* для кривой $\overline{l}$. Ясно, что геодезическая $\pi(\overline{g}(\overline{l})) \overset{\mathrm{def}}{=} g(l)$ на M^2 не зависит от выбора накрывающей $\overline{l}$, и называется *геодезической, соасимптотической* для кривой l.

Напомним, что геодезическая ламинация есть семейство попарно непересекающихся геодезических, каждая из которых не имеет трансверсальных самопересечений, и объединение всех геодезических образует замкнутое множество. Ламинация называется *нетривиальной*, если она состоит из незамкнутых геодезических. Ламинация *минимальна*, если она не содержит собственных подламинаций. Нетривиальная минимальная ламинация на M называется *неприводимой*, если любая замкнутая геодезическая на M пересекается с G.

Пусть f^t – поток типа Черри на M^2. Обозначим через $G(f^t)$ совокупность соасимптотических геодезических для всех траекторий и об-

общенных траекторий потока f^t, для которых соасимптотические геодезические существуют. Из [1], [2] вытекает, что множество $G(f^t)$ непусто и, более того, $G(f^t)$ является геодезической ламинацией. Эта ламинация $G(f^t)$ называется *геодезическим каркасом потока* f^t. Отметим, что все геодезические из $G(f^t)$ ориентированы согласовано с траекториями и обобщенными траекториями потока. Имеет место

Теорема 1 *Геодезический каркас $G(f^t)$ потока типа Черри f^t на замкнутой ориентируемой гиперболической поверхности M^2 является ориентируемой минимальной неприводимой геодезической ламинацией, состоящей из незамкнутых нетривиально рекуррентных геодезических.*

Поток Черри f^t определяет раскраску геодезического каркаса $G(f^t)$ следующим образом. Серый цвет приписывается геодезической из $G(f^t)$, соасимптотичной нетривиально рекуррентной траектории или обобщенной траектории, которая входит в достижимую изнутри границу некоторой серой ячейки. Пусть геодезическая $g \in G(f^t)$ соасимптотична обобщенной траектории L, содержащей траекторию l, которая входит в достижимую изнутри границу некоторой черной ячейки, скажем w. С помощью поднятия геодезической g определяется геометрический центр g (напомним, что поднятие геодезической g есть дуга евклидовой окружности, перпендикулярной абсолюту), который разбивает g на два геодезических луча. Припишем черный цвет тому лучу, который имеет одинаковое асимптотическое направление с траекторией l. Отметим, что оба геодезических луча геодезической g могут быть покрашены в черный цвет. Однако, в силу определения потока Черри, в этом случае геодезическая g должна быть также покрашена и в серый цвет.

Рассмотрим серую геодезическую g из $G(f^t)$, один из лучей которой имеет черный цвет. Это соответствует тому, что f^t имеет серую ячейку нулевого индекса, к которой слева или справа (относительно движения вдоль траекторий в положительном направлении) примыкает черная ячейка. В соответствии со стороной примыкания припишем черному лучу символ l или r. Если к данной серой ячейке примыкают с двух сторон черные ячейки, которые соответствуют одному черному лучу, то этому черному лучу приписываются два символа (l, r). Отметим, что если черный луч не лежит на серой геодезической, то ему не приписывается символ.

Лемма 1 *Пусть $G(f^t)$ – геодезический каркас потока Черри f^t на замкнутой ориентируемой гиперболической поверхности M^2. Тогда*

1. *Все граничные геодезические ламинации $G(f^t)$ серые. В $G(f^t)$ имеется не более чем счетное семейство внутренних серых геодезических.*

2. *Любой черный геодезический луч лежит на внутренней геодезической. Имеется только конечное (ненулевое) число черных лучей.*

3. *Если на серой геодезической из $G(f^t)$ лежит ровно один черный луч, то этому черному лучу приписывается один или два символа. Если оба луча серой геодезической черные, то каждому лучу приписывается только один символ, и эти символы разные.*

Раскраска геодезического каркаса с приписанными по указанному правилу символами называется *схемой геодезического каркаса.* Пусть G – произвольная ориентируемая минимальная неприводимая геодезическая ламинация, состоящая из незамкнутых нетривиально рекуррентных геодезических. Произведем раскраску геодезических ламинации G, и припишем символы l, r так, чтобы они удовлетворяли лемме 1 (если черный луч не лежит на серой геодезической, то ему не приписывается символ). Полученную раскраску с символами назовем *допустимой схемой геодезической ламинации G.* Таким образом, схема геодезического каркаса потока Черри допустима.

Напомним, что потоки f_1^t, f_2^t называются орбитально топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм $M^2 \to M^2$, переводящий траектории одного потока в траектории другого потока с сохранением направления по времени. Если гомеоморфизм $M^2 \to M^2$ гомотопен тождественному, то будем говорить, что f_1^t, f_2^t орбитально топологически эквивалентны с помощью гомотопически тривиального гомеоморфизма. Имеет место следующий классификационный результат.

Теорема 2 *Пусть f_1^t, f_2^t – потоки Черри на замкнутой ориентируемой гиперболической поверхности M^2. Тогда f_1^t, f_2^t орбитально топологически эквивалентны с помощью гомотопически тривиального гомеоморфизма $M^2 \to M^2$ тогда и только тогда, когда $G(f_1^t) = G(f_2^t)$, и схемы геодезических каркасов $G(f_1^t)$, $G(f_2^t)$ совпадают. Для произвольной ориентируемой минимальной неприводимой геодезической ламинации G, состоящей из незамкнутых нетривиально рекуррентных геодезических, которая* *наделена допустимой схемой, существует поток Черри f^t такой, что $G(f^t) = G$, и схема геодезического каркаса $G(f^t)$ совпадает с допустимой схемой ламинации G.*

Список литературы

[1] **Аносов Д.В., Жужома Е.В.** Асимптотическое поведение накрывающих кривых на универсальных накрытиях поверхностей. *Труды МИАН*, **238**(2002), 5-54.

[2] **Арансон С.Х., Гринес В.З.** О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных динамических систем). *Мат. сборник*, 1973, **90**, 3, 372-402.

[3] **Арансон С.Х., Жужома Е.В., Медведев Т.В.** Потоки Черри на двумерной сфере. *Успехи Мат. Наук*, **1994**, **49**, 5, 167-168.

[4] **Арансон С.Х., Жужома Е.В., Медведев Т.В.** Классификация преобразований Черри на окружности и потоков Черри на торе. *Известия ВУЗов, Математика*, **1996**, 4, 3-33.

[5] **S. Aranson, T. Medvedev, E. Zhuzhoma.** Cherry foliations and Cherry flows on the sphere. *Selecta Math. Sovietica*, **1994**, **13**, 4, 283-303.

[6] **C. Boyd.** On the structure of the family of Cherry fields on the torus. *Ergod. Theory and Dyn. Sys.* **5**(1985), 27-46.

[7] **T. Cherry.** Analytic quasi-periodic discontinuous type on a torus. *Proc. Lond. Math. Soc.* **44**(1938), 2, 175-215.

[8] **A. Denjoy.** Sur les courbes définies par les équations différentielles a la surface du tore. *J. Math Pure et Appl.* **11**(1932), 333-375.

[9] **M. Martens, S. van Strien, W. de Melo, P. Mendes.** On Cherry flows. *Ergod. Theory and Dyn. Syst.* **10**(1990), 3, 531-554.

[10] **P. Mendes.** A metric property of Cherry vector fields on the torus. *J. Diff. Eq.* **89**(1991), 305-316.

[11] **H. Poincare.** Sur les courbes définies par les equations differentielles. *J. Math. Pures Appl.* **2**(1886), 151-217. Имеется перевод: **А. Пуанкаре.** *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.* Серия “Классики естествознания”. М-Л., ОГИЗ, **1947**.

Нижегородский государственный технический университет.
E-mail: zhuzhoma@fmail.ru

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского.
E-mail: medvedev@unn.ac.ru