

# Пространства модулей $\mathcal{M}_{2,1}$ и $\mathcal{M}_{3,1}^1$

Кочетков Ю.Ю.

**Аннотация.** Рассматривается клеточная структура пространств  $\mathcal{M}_{2,1}$  и  $\mathcal{M}_{3,1}$  — пространств модулей комплексных кривых рода 2 и 3 с одной отмеченной точкой. Для пространства  $\mathcal{M}_{2,1}$  описаны 9 клеток старшей размерности 8 и изучен вопрос об их примыканиях. Для пространства  $\mathcal{M}_{3,1}$  составлен каталог 1726 клеток старшей размерности 14 (вместе с их ориентациями) и составлен каталог примыканий.

## Введение

Через  $\mathcal{M}_{g,1}$  мы обозначаем пространство модулей комплексных кривых рода  $g$  с одной отмеченной точкой. Пусть  $\Gamma$  — граф, вложенный в топологическую компактную поверхность  $S_g$  рода  $g$  так, что его дополнение гомеоморфно двумерному диску. Конструкция Дженкинса-Штребеля позволяет по вложенному в  $S_g$  графу  $\Gamma$  и набору длин его ребер однозначно задать комплексную структуру на  $S_g$  (см. [2]). В дальнейшем мы будем считать, что сумма длин ребер вложенного графа равна 1. Известно (см., например, [1, Глава 4]), что пространство  $\mathcal{M}_{g,1}$  имеет следующее комбинаторное описание. Рассмотрим множество  $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_s\}$  попарно неизоморфных тривалентных графов (т.е. графов, каждая вершина которых имеет валентность 3), вложенных в  $S_g$ , дополнение до которых гомеоморфно двумерному диску. Здесь изоморфизм понимается как изоморфизм вложенных графов, т.е. изоморфизм должен сохранять циклический порядок ребер при обходе каждой вершины против часовой стрелки. Каждый такой граф имеет  $4g - 2$  вершин и  $6g - 3$  ребер.

Определим симплицальный комплекс  $\mathcal{M}_{g,1}^{\text{comb}}$ . Его симплексы  $\Delta_1, \dots, \Delta_s$  старшей размерности  $6g - 4$  находятся во взаимно однозначном соответствии с графами  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$ . Симплекс  $\Delta_i$  изометричен множеству

$$x_1 + \dots + x_{6g-3} = 1, \quad x_1, \dots, x_{6g-3} > 0$$

в пространстве  $\mathbb{R}^{6g-3}$ . Числа  $x_1, \dots, x_{6g-3}$  — это длины ребер графа  $\Gamma_i$ . Отметим, что ребра графа  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , не являются петлями. Действительно, пусть ребро  $e$  — петля с единственной вершиной  $v$ . Так как граф тривалентен, то  $v$  из выходят три дуги: две — это ребро  $e$ , а третья задает направление нормали от ребра  $e$ . Сместив петлю  $e$  в сторону, противоположную этому направлению, мы получим нестягиваемый цикл в дополнении к нашему графу. Противоречие. Поэтому, стягивание  $j$ -го ребра какого-либо графа  $\Gamma_i$  дает вложенный граф  $\Gamma$  с  $6g - 4$  ребрами и  $4g - 3$  вершинами, дополнение до которого — диск. Если длины ребер  $x_1, \dots, x_{6g-3}$  графа  $\Gamma_i$  заданы, то зададим длины ребер  $y_1, \dots, y_{6g-4}$  графа  $\Gamma$  как  $y_k = x_k/x$ , если  $k < j$ , и  $y_k = x_{k+1}/x$ , если  $k \geq j$  (здесь  $x = x_1 + \dots + x_{j-1} + x_{j+1} + \dots + x_{6g-3}$ ). Следовательно,  $\Gamma$  задает комплексную структуру на  $S_g$ . Мы сопоставим такому графу  $\Gamma$   $6g - 5$ -мерный симплекс  $\Delta$ , изометричный стандартному симплексу

$$y_1 + \dots + y_{6g-4} = 1, \quad y_k > 0$$

в пространстве  $\mathbb{R}^{6g-4}$ . Будем считать, что симплекс  $\Delta$  является  $j$ -й гранью симплекса  $\Delta_i$  в комплексе  $\mathcal{M}_{g,1}^{\text{comb}}$ .

Стягивание ребра графа  $\Gamma_{i_1}$  и ребра графа  $\Gamma_{i_2}$  могут порождать изоморфные графы  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ . Мы будем считать, что в этом случае симплексы  $\Delta_{i_1}$  и  $\Delta_{i_2}$  примыкают друг к другу в комплексе  $\mathcal{M}_{g,1}^{\text{comb}}$ : у них имеется общая  $(6g - 5)$ -мерная грань  $\Delta' = \Delta''$ . Каждый симплекс  $\Delta_i$  определяет  $(6g - 4)$ -мерную клетку в пространстве модулей  $\mathcal{M}_{g,1}$ , а примыкание симплексов определяет примыкание клеток.

Граф  $\Gamma_i$  может иметь нетривиальную группу автоморфизмов. Аналогично, нетривиальную группу автоморфизмов может иметь и граф, полученный из  $\Gamma_i$  стягиванием ребра. Эти группы автоморфизмов задают группы автоморфизмов соответствующих симплексов комплекса  $\mathcal{M}_{g,1}^{\text{comb}}$ . Факторизуя симплексы этого комплекса по действию групп автоморфизмов, мы получаем топологическое пространство, гомеоморфное объединению клеток размерности  $(6g - 4)$  и  $(6g - 5)$  пространства модулей  $\mathcal{M}_{g,1}$  [2].

Наша задача — описать клеточную структуру пространства  $\mathcal{M}_{2,1}$  в размерности 7 и 8 и клеточную структуру пространства  $\mathcal{M}_{3,1}$  в размерности 14 и 13. Отметим, что компактификация Делиния-Мамфорда здесь не изучается.

<sup>1</sup>Работа была поддержана Российским Фондом Фундаментальных исследований, грант № 04-01-00647

1. ПРОСТРАНСТВО  $\mathcal{M}_{2,1}$ 

Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

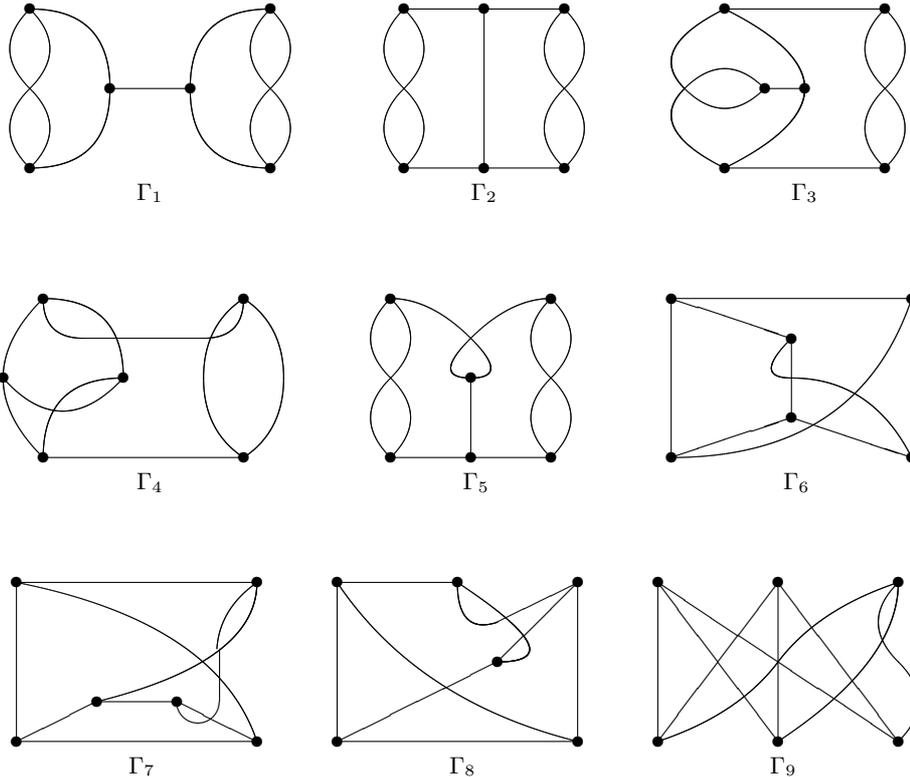
**Теорема 1.** *В пространстве  $\mathcal{M}_{2,1}$  имеется 9 клеток старшей размерности 8. Их ориентации и структура их примыканий описаны в Разделах 1.2 и 1.3, в Таблице 1 и на Рисунке 1.*

Компьютерные вычисления были использованы как для перечисления клеток, так и для описания их примыканий.

**1.1. Клетки старшей размерности.** Топологическая поверхность  $S_2$  с тривалентным графом на ней, дополнение до которого односвязно, реализуется при некоторых склейках 18-ти угольника. Здесь условие односвязности дополнения до графа выполняется автоматически, а условия тривалентности и рода дают 9 попарно неизоморфных склеек, обозначаемых  $\gamma_1, \dots, \gamma_9$  (две склейки мы считаем изоморфными, если поворот 18-ти угольника переводит одну склейку в другую). Ниже перечислены гауссовы слова, отвечающие склейкам  $\gamma_i$  (18-ти угольник обходится по часовой стрелке).

$$\begin{aligned} \gamma_1 : & a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_2^{-1} a_3^{-1} a_4^{-1} a_5 a_6 a_7 a_8 a_6^{-1} a_9 a_7^{-1} a_8^{-1} a_9^{-1} a_5^{-1}; \\ \gamma_2 : & a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_2^{-1} a_3^{-1} a_5^{-1} a_6 a_7 a_8 a_6^{-1} a_4^{-1} a_9 a_7^{-1} a_8^{-1} a_9^{-1}; \\ \gamma_3 : & a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_6 a_2^{-1} a_3^{-1} a_6^{-1} a_7 a_8 a_4^{-1} a_9 a_7^{-1} a_5^{-1} a_8^{-1} a_9^{-1}; \\ \gamma_4 : & a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_6 a_7 a_2^{-1} a_3^{-1} a_7^{-1} a_8 a_4^{-1} a_9 a_5^{-1} a_8^{-1} a_6^{-1} a_9^{-1}; \\ \gamma_5 : & a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_6 a_4^{-1} a_7 a_8 a_2^{-1} a_3^{-1} a_8^{-1} a_9 a_5^{-1} a_6^{-1} a_9^{-1} a_7^{-1}; \\ \gamma_6 : & a_1 a_2 a_3 a_4 a_1^{-1} a_5 a_6 a_2^{-1} a_4^{-1} a_7 a_8 a_5^{-1} a_9 a_7^{-1} a_3^{-1} a_6^{-1} a_8^{-1} a_9^{-1}; \\ \gamma_7 : & a_1 a_2 a_3 a_4 a_1^{-1} a_5 a_6 a_7 a_2^{-1} a_4^{-1} a_8 a_5^{-1} a_9 a_6^{-1} a_8^{-1} a_3^{-1} a_7^{-1} a_9^{-1}; \\ \gamma_8 : & a_1 a_2 a_3 a_4 a_1^{-1} a_5 a_6 a_7 a_3^{-1} a_8 a_5^{-1} a_9 a_6^{-1} a_8^{-1} a_2^{-1} a_4^{-1} a_7^{-1} a_9^{-1}; \\ \gamma_9 : & a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_1^{-1} a_6 a_7 a_2^{-1} a_5^{-1} a_8 a_6^{-1} a_9 a_3^{-1} a_7^{-1} a_8^{-1} a_4^{-1} a_9^{-1}. \end{aligned}$$

Склейки  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_5, \gamma_6$  и  $\gamma_8$   $\mathbb{Z}_2$ -симметричны — поворот 18-ти угольника на  $180^\circ$  переводит склейку в себя. Склейка  $\gamma_9$   $\mathbb{Z}_3$ -симметрична — поворот 18-ти угольника на  $120^\circ$  переводит склейку в себя. Перечисленные склейки  $\gamma_1, \dots, \gamma_9$  порождают 9-ти реберные тривалентные графы  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_9$  на  $S_2$  с фиксированной нумерацией ребер. Нужно иметь в виду, что графы вложены в поверхность  $S_2$ , так что их нельзя нарисовать на плоскости без самопересечений. Ниже изображены графы, отвечающие склейкам. Вершины графа изображены черными кружками. При вложении графа в  $S_2$  должен быть сохранен циклический порядок обхода ребер вокруг каждой вершины.



**1.2. Примыкание клеток старшей размерности.** Стягивание ребра одного из графов  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_9$  дает вложенный в  $S_2$  граф с восемью ребрами, пятью вершинами (валентности 3, 3, 3, 3 и 4) и с односвязным дополнением. Такие вложенные графы могут быть реализованы при некоторых склейках 16-угольников. Всего имеется 29 попарно неизоморфных таких склеек (такая склейка получается при удалении двух одноименных ребер одной из склеек  $\gamma_1, \dots, \gamma_9$ ). Склейка, полученная из склейки  $\gamma_i$  при удалении  $j$ -го ребра будет обозначаться  $\gamma_i[j]$ . В таблице ниже склейки  $\gamma_i[j]$  и  $\gamma_k[l]$  попадают в одну клетку таблицы, только если они изоморфны.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\gamma_1[1]$	$\gamma_1[2]$	$\gamma_1[5]$	$\gamma_2[1]$	$\gamma_2[2]$	$\gamma_2[5]$	$\gamma_3[1]$	$\gamma_3[2]$	$\gamma_3[6]$	$\gamma_3[7]$	$\gamma_3[8]$	$\gamma_3[9]$	$\gamma_4[1]$	$\gamma_4[2]$	$\gamma_4[7]$
$\gamma_1[4]$	$\gamma_1[3]$	$\gamma_2[4]$	$\gamma_2[6]$	$\gamma_2[3]$	$\gamma_2[9]$	$\gamma_8[3]$	$\gamma_3[3]$	$\gamma_6[3]$	$\gamma_4[6]$	$\gamma_4[5]$	$\gamma_4[4]$	$\gamma_7[9]$	$\gamma_4[3]$	$\gamma_7[3]$
$\gamma_1[6]$	$\gamma_1[7]$		$\gamma_3[5]$	$\gamma_2[7]$	$\gamma_3[4]$	$\gamma_8[9]$		$\gamma_6[5]$						
$\gamma_1[9]$	$\gamma_1[8]$			$\gamma_2[8]$										

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$\gamma_4[8]$	$\gamma_4[9]$	$\gamma_5[2]$	$\gamma_5[5]$	$\gamma_5[7]$	$\gamma_6[1]$	$\gamma_6[2]$	$\gamma_6[4]$	$\gamma_6[6]$	$\gamma_7[1]$	$\gamma_7[2]$	$\gamma_7[4]$	$\gamma_7[7]$	$\gamma_8[1]$
$\gamma_5[1]$	$\gamma_5[4]$	$\gamma_5[3]$	$\gamma_5[6]$		$\gamma_6[7]$	$\gamma_6[8]$	$\gamma_6[9]$	$\gamma_8[7]$	$\gamma_7[8]$	$\gamma_8[4]$	$\gamma_8[2]$	$\gamma_9[2]$	$\gamma_8[8]$
$\gamma_5[8]$	$\gamma_5[9]$				$\gamma_9[4]$	$\gamma_7[6]$	$\gamma_7[5]$			$\gamma_8[6]$	$\gamma_8[5]$	$\gamma_9[3]$	$\gamma_9[1]$
					$\gamma_9[5]$							$\gamma_9[7]$	$\gamma_9[6]$
					$\gamma_9[8]$								$\gamma_9[9]$

Таблица 1

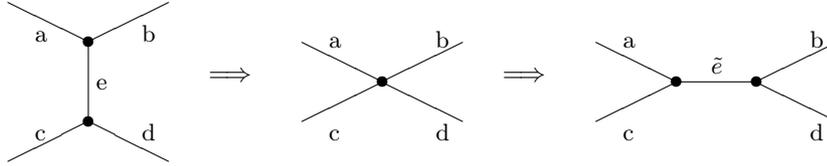
Ниже перечислены гауссовы слова, отвечающие склейкам  $\gamma_i[j]$  (16-ти угольник обходится по часовой стрелке).

$$\begin{aligned}
&\gamma_1[1], \gamma_1[4], \gamma_1[6], \gamma_1[9] : a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} a_4 a_5 a_6 a_7 a_5^{-1} a_8 a_6^{-1} a_7^{-1} a_8^{-1} a_4^{-1}; \\
&\gamma_1[2], \gamma_1[3], \gamma_1[7], \gamma_1[8] : a_1 a_2 a_1^{-1} a_3 a_2^{-1} a_3^{-1} a_4 a_5 a_6 a_7 a_5^{-1} a_8 a_6^{-1} a_7^{-1} a_8^{-1} a_4^{-1}; \\
&\quad \gamma_1[5], \gamma_2[4] : a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_2^{-1} a_3^{-1} a_4^{-1} a_5 a_6 a_7 a_5^{-1} a_8 a_6^{-1} a_7^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_2[1], \gamma_2[6], \gamma_3[5] : a_1 a_2 a_3 a_4 a_1^{-1} a_2^{-1} a_4^{-1} a_5 a_6 a_7 a_5^{-1} a_3^{-1} a_8 a_6^{-1} a_7^{-1} a_8^{-1}; \\
&\gamma_2[2], \gamma_2[3], \gamma_2[7], \gamma_2[8] : a_1 a_2 a_1^{-1} a_3 a_4 a_2^{-1} a_4^{-1} a_5 a_6 a_7 a_5^{-1} a_3^{-1} a_8 a_6^{-1} a_7^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_2[5], \gamma_2[9], \gamma_3[4] : a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_2^{-1} a_3^{-1} a_5 a_6 a_7 a_5^{-1} a_4^{-1} a_8 a_6^{-1} a_7^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_3[1], \gamma_8[3], \gamma_8[9] : a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_1^{-1} a_2^{-1} a_5^{-1} a_6 a_7 a_3^{-1} a_8 a_6^{-1} a_4^{-1} a_7^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_3[2], \gamma_3[3] : a_1 a_2 a_1^{-1} a_3 a_4 a_5 a_2^{-1} a_5^{-1} a_6 a_7 a_3^{-1} a_8 a_6^{-1} a_4^{-1} a_7^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_3[6], \gamma_6[3], \gamma_6[5] : a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_2^{-1} a_3^{-1} a_6 a_7 a_4^{-1} a_8 a_6^{-1} a_5^{-1} a_7^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_3[7], \gamma_4[6] : a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_6 a_2^{-1} a_3^{-1} a_6^{-1} a_7 a_4^{-1} a_8 a_5^{-1} a_7^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_3[8], \gamma_4[5] : a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_6 a_2^{-1} a_3^{-1} a_6^{-1} a_7 a_4^{-1} a_8 a_7^{-1} a_5^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_3[9], \gamma_4[4] : a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_6 a_2^{-1} a_3^{-1} a_6^{-1} a_7 a_8 a_4^{-1} a_7^{-1} a_5^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_4[1], \gamma_7[9] : a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_1^{-1} a_2^{-1} a_6^{-1} a_7 a_3^{-1} a_8 a_4^{-1} a_7^{-1} a_5^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_4[2], \gamma_4[3] : a_1 a_2 a_1^{-1} a_3 a_4 a_5 a_6 a_2^{-1} a_6^{-1} a_7 a_3^{-1} a_8 a_4^{-1} a_7^{-1} a_5^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_4[7], \gamma_7[3] : a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_6 a_2^{-1} a_3^{-1} a_7 a_4^{-1} a_8 a_5^{-1} a_7^{-1} a_6^{-1} a_8^{-1}; \\
&\gamma_4[8], \gamma_5[1], \gamma_5[8] : a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_6 a_7 a_2^{-1} a_3^{-1} a_7^{-1} a_4^{-1} a_8 a_5^{-1} a_6^{-1} a_8^{-1}; \\
&\gamma_4[9], \gamma_5[4], \gamma_5[9] : a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_6 a_7 a_2^{-1} a_3^{-1} a_7^{-1} a_8 a_4^{-1} a_5^{-1} a_8^{-1} a_6^{-1}; \\
&\quad \gamma_5[2], \gamma_5[3] : a_1 a_2 a_1^{-1} a_3 a_4 a_5 a_3^{-1} a_6 a_7 a_2^{-1} a_7^{-1} a_8 a_4^{-1} a_5^{-1} a_8^{-1} a_6^{-1}; \\
&\quad \gamma_5[5], \gamma_5[6] : a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_4^{-1} a_6 a_7 a_2^{-1} a_3^{-1} a_7^{-1} a_8 a_5^{-1} a_8^{-1} a_6^{-1}; \\
&\quad \gamma_5[7] : a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_6 a_4^{-1} a_7 a_2^{-1} a_3^{-1} a_7^{-1} a_8 a_5^{-1} a_6^{-1} a_8^{-1}; \\
&\gamma_6[1], \gamma_6[7], \gamma_9[4], \gamma_9[5], \gamma_9[8] : a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_1^{-1} a_3^{-1} a_6 a_7 a_4^{-1} a_8 a_6^{-1} a_2^{-1} a_5^{-1} a_7^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_6[2], \gamma_6[8], \gamma_7[6] : a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_3^{-1} a_6 a_7 a_4^{-1} a_8 a_6^{-1} a_2^{-1} a_5^{-1} a_7^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_6[4], \gamma_6[9], \gamma_7[5] : a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_2^{-1} a_6 a_7 a_4^{-1} a_8 a_6^{-1} a_3^{-1} a_5^{-1} a_7^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_6[6], \gamma_8[7] : a_1 a_2 a_3 a_4 a_1^{-1} a_5 a_2^{-1} a_4^{-1} a_6 a_7 a_5^{-1} a_8 a_6^{-1} a_3^{-1} a_7^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_7[1], \gamma_7[8] : a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_1^{-1} a_3^{-1} a_7 a_4^{-1} a_8 a_5^{-1} a_7^{-1} a_2^{-1} a_6^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_7[2], \gamma_8[4], \gamma_8[6] : a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_6 a_3 a_7 a_4^{-1} a_8 a_5^{-1} a_7^{-1} a_2^{-1} a_6^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_7[4], \gamma_8[2], \gamma_8[5] : a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_6 a_2^{-1} a_7 a_4^{-1} a_8 a_5^{-1} a_7^{-1} a_3^{-1} a_6^{-1} a_8^{-1}; \\
&\quad \gamma_7[7], \gamma_9[2], \gamma_9[3], \gamma_9[7] : a_1 a_2 a_3 a_4 a_1^{-1} a_5 a_6 a_2^{-1} a_4^{-1} a_7 a_5^{-1} a_8 a_6^{-1} a_7^{-1} a_3^{-1} a_8^{-1}; \\
&\gamma_8[1], \gamma_8[8], \gamma_9[1], \gamma_9[6], \gamma_9[9] : a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_2^{-1} a_7 a_4^{-1} a_8 a_5^{-1} a_7^{-1} a_1^{-1} a_3^{-1} a_6^{-1} a_8^{-1}.
\end{aligned}$$

Разумеется, если склейка  $\gamma_i$  симметрична, и ребра с номерами  $j_1$  и  $j_2$  лежат в одной орбите группы симметрий этой склейки, то склейки  $\gamma_i[j_1]$  и  $\gamma_i[j_2]$  попадают в одну клетку таблицы.

Таблица демонстрирует нам многочисленные случаи склеивания двух граней одной и той же клетки ( $\gamma_1[1]$  и  $\gamma_1[4]$ ,  $\gamma_1[2]$  и  $\gamma_1[3]$ ,  $\gamma_2[2]$  и  $\gamma_2[3]$ , и т.д.), а также загадочный 20-й случай, когда у склейки  $\gamma_5[7]$  нет „партнера“. Все эти вопросы будут обсуждаться ниже.

**1.3. Флипы и ориентация.** Флип — это преобразование тривалентного вложенного графа в другой, может быть изоморфный, тривалентный вложенный граф. При флипе происходит стягивание ребра с образованием вершины валентности 4, а потом создание ребра с образованием двух вершин валентности 3 из вершины валентности 4. Флип работает с двумя соседними вершинами, не затрагивая остальную часть графа:



Два разных тривалентных графа, связанные флипом, задают смежные клетки старшей размерности. Общей границей этих двух клеток является клетка размерности 7, заданная графом, полученным при стягивании ребра флипа. Если флип приводит к тому же графу (так, например, флип ребра 1 в графе  $\Gamma_1$  дает тот же граф, причем ребро, возникшее при флипе, имеет в  $\Gamma_1$  номер 4), то мы будем считать, что происходит отождествление двух семимерных граней восьмимерной клетки.

Мы хотим задать ориентации симплексов  $\Delta_1, \dots, \Delta_9$  так, чтобы выполнялись следующие три свойства.

- (1) Пусть граф  $\Gamma_i$  обладает нетривиальной группой симметрий. Тогда вращения симплекса  $\Delta_i$ , индуцированные преобразованиями симметрии, сохраняют ориентацию симплекса.
- (2) Стягиванию  $j$ -го ребра графа  $\Gamma_i$  отвечает выделение  $j$ -й грани симплекса  $\Delta_i$ . Пусть стягивания  $\gamma_i[j]$  и  $\gamma_k[l]$  образуют флип, тогда индуцированные ориентации  $j$ -й грани симплекса  $\Delta_i$  и  $l$ -й грани симплекса  $\Delta_k$  противоположны.
- (3) Пусть  $j$ -я и  $k$ -я стороны лежат в одной орбите группы симметрий симметричной склейки  $\gamma_i$ , т.е. некоторый поворот 18-ти угольника переводит  $j$ -ю сторону в  $k$ -ю. Тогда индуцированное вращение симплекса переводит ориентированную  $j$ -ю грань в ориентированную  $k$ -ю с сохранением ориентации.

Выполнение этих трех свойств задает ориентацию на клеточном пространстве, полученном из  $\mathcal{M}_{2,1}^{\text{comb}}$  факторизацией по действию групп симметрий симплексов, т.е. задает ориентацию на семи- и восьмимерных клетках пространства модулей  $\mathcal{M}_{2,1}$ .

Ориентацию симплекса можно задать порядком его вершин. Напомним, что ориентация  $j$ -й грани симплекса  $\Delta$  равна  $(-1)^{j-1}(i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_9)$ , где  $(i_1, \dots, i_9)$  — ориентация  $\Delta$ . В нашем случае вершинам симплекса  $\Delta_i$  отвечают стороны склейки  $\gamma_i$ , которые уже пронумерованы. Положим, что ориентация всех симплексов, кроме  $\Delta_7$  задана порядком  $(1, 2, \dots, 9)$ , а ориентация  $\Delta_7$  — порядком  $-(1, 2, \dots, 9)$ .

Первое. Поворотам склеек  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_8$  на  $180^\circ$  отвечают перестановки сторон  $(1, 6)(2, 7)(3, 8)(4, 9)$ ,  $(1, 6)(2, 7)(3, 8)(5, 9)$ ,  $(1, 8)(4, 9)$ ,  $(1, 7)(2, 8)(3, 5)(4, 9)$ ,  $(1, 8)(2, 5)(3, 9)(4, 6)$ . Повороту склейки  $\gamma_9$  на  $120^\circ$  отвечает перестановка  $(1, 6, 9)(2, 7, 3)(4, 5, 8)$ . Все эти перестановки четные.

Доказательство того, что второе свойство выполнено, сводится к изучению каждого флипа по отдельности. Рассмотрим в качестве примера флип  $\gamma_4[1] \leftrightarrow \gamma_7[9]$ . Соответствующие гауссовы слова приведены ниже. Нумерация сторон склейки  $\gamma_4[1]$  изменена: сторона  $a_2$  теперь обозначается как  $a_1$ , сторона  $a_3$  как  $a_2$  и т.д.

$$\begin{aligned} \gamma_4[1] : & a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_1^{-1} a_2^{-1} a_6^{-1} a_7 a_3^{-1} a_8 a_4^{-1} a_7^{-1} a_5^{-1} a_8^{-1}; \\ \gamma_7[9] : & a_1 a_2 a_3 a_4 a_1^{-1} a_5 a_6 a_7 a_2^{-1} a_4^{-1} a_8 a_5^{-1} a_6^{-1} a_8^{-1} a_3^{-1} a_7^{-1}. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно заметить, что поворот отождествляющий склейку  $\gamma_4[1]$  со склейкой  $\gamma_7[9]$  переводит  $a_1$  в  $a_5$ ,  $a_2$  в  $a_6$ ,  $a_3$  в  $a_7$ ,  $a_4$  в  $a_2$ ,  $a_5$  в  $a_4$ ,  $a_6$  в  $a_8$ ,  $a_7$  в  $a_3$  и  $a_8$  в  $a_1$ . Индуцированная ориентация склейки  $\gamma_4[1]$  равна  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ , склейки  $\gamma_7[9]$  —  $-(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ . Поворот задает четную перестановку  $(1, 5, 4, 2, 6, 8)(3, 7)$ . Следовательно, ориентации граней  $\gamma_4[1]$  и  $\gamma_7[9]$  противоположны.

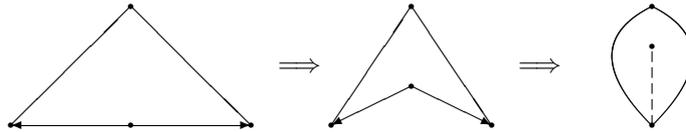
Доказательство третьего свойства сводится к изучению каждого случая по отдельности. Рассмотрим в качестве примера склейки  $\gamma_6[4]$  и  $\gamma_6[9]$ , т.е. 4-ю и 9-ю грани симплекса  $\Delta_6$ .

$$\begin{aligned} \gamma_6[4] : & a_1 a_2 a_3 a_1^{-1} a_4 a_5 a_2^{-1} a_6 a_7 a_4^{-1} a_8 a_6^{-1} a_3^{-1} a_5^{-1} a_7^{-1} a_8^{-1}; \\ \gamma_6[9] : & a_1 a_2 a_3 a_4 a_1^{-1} a_5 a_6 a_2^{-1} a_4^{-1} a_7 a_8 a_5^{-1} a_7^{-1} a_3^{-1} a_6^{-1} a_8^{-1}. \end{aligned}$$

Поворот, отождествляющий склейку  $\gamma_6[4]$  со склейкой  $\gamma_6[9]$  переводит  $a_1$  в  $a_7$ ,  $a_2$  в  $a_8$ ,  $a_3$  в  $a_5$ ,  $a_4$  в  $a_3$ ,  $a_5$  в  $a_6$ ,  $a_6$  в  $a_1$ ,  $a_7$  в  $a_2$  и  $a_8$  в  $a_4$ . Индуцированная ориентация склейки  $\gamma_6[4]$  равна  $-(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ , склейки  $\gamma_6[9]$  —  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ . Поворот задает нечетную перестановку  $(1, 7, 2, 8, 4, 3, 5, 6)$ . Следовательно, ориентации этих двух граней совпадают.

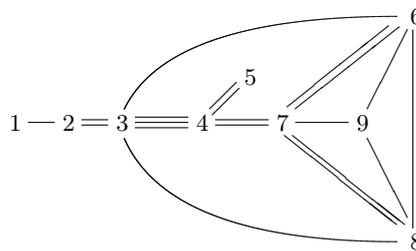
1.4. **Симплексы и факторсимплексы.** Некоторые из наших склеек  $\gamma_i[j]$  являются симметричными. Это склейки с номерами 3, 18, 19, 20 и 24. Склейки с номерами 3, 18, 19 и 24  $\mathbb{Z}_2$ -симметричны — поворот 16-ти угольника на  $180^\circ$  переводит склейку в себя. Важно отметить, что эти склейки получаются при стягивании отождествляемых сторон симметричной склейки 18-ти угольника, причем симметрия переводит эту пару отождествляемых сторон в себя. Склейка с номером 20  $\mathbb{Z}_4$ -симметрична — поворот 16-ти угольника на  $90^\circ$  переводит склейку в себя. Повороты на  $180^\circ$  индуцируют сохраняющие ориентацию вращения соответствующих симплексов, но поворот на  $90^\circ$  индуцирует ортогональное преобразование симплекса *меняющее* его ориентацию.

Факторизуя симплексы  $\Delta_1, \dots, \Delta_9$  по их группам симметрий, мы получаем набор восьмимерных клеток: симплексов и факторизованных симплексов. Граница первой клетки состоит из пяти граней: четыре грани — это семимерные симплексы, попарно отождествляемые, а пятая —  $\mathbb{Z}_2$ -факторизованный семимерный симплекс, отождествляемый с факторизованным семимерным симплексом второй клетки. Граница второй клетки состоит из пяти граней. Об одной из них мы уже сказали, а четыре оставшиеся — это семимерные симплексы, два из которых отождествлены, а другие два склеены с семимерными симплексами из границы третьей клетки. Граница третьей клетки состоит из девяти граней — обычных семимерных симплексов. О двух мы уже сказали, две отождествляются, три склеены с гранями четвертой клетки, одна — с гранью шестой и последняя — с гранью восьмой. Граница четвертой клетки состоит из девяти граней — обычных семимерных симплексов. О трех мы сказали, две отождествляются, две склеены с двумя гранями пятой клетки и две — с двумя гранями седьмой клетки. Граница пятой клетки состоит из семи граней. Две из них — это обычные семимерные симплексы, склеенные с гранями четвертой клетки. Четыре —  $\mathbb{Z}_2$ -факторизованные семимерные симплексы, попарно отождествленные. Последняя —  $\mathbb{Z}_2$ -факторизованный семимерный симплекс, который еще раз факторизован, по преобразованию, не сохраняющему ориентацию. Это можно представить себе так:



Граница шестой клетки состоит из пяти граней. Четыре из них — это обычные семимерные симплексы. Об одном мы уже сказали, когда говорили о третьей клетке. Два склеены с двумя гранями седьмой клетки, одна — с гранью девятой. Пятая грань —  $\mathbb{Z}_2$ -факторизованный семимерный симплекс, склеена с факторизованным симплексом — гранью восьмой клетки. Граница седьмой клетки состоит из девяти граней — обычных семимерных симплексов. О четырех мы уже сказали. Две отождествляются, две склеены с двумя гранями восьмой клетки, а последняя — с гранью девятой клетки. Граница восьмой клетки состоит из пяти граней, четыре из которых — обычные семимерные симплексы, а последняя —  $\mathbb{Z}_2$ -факторизованный семимерный симплекс. О четырех мы уже сказали. Пятая грань склеена с гранью девятой клетки. Граница девятой клетки состоит из трех граней — обычных семимерных симплексов.

Картина склейки клеток представлена на рисунке ниже.



Здесь кратность ребра равна количеству склеиваемых граней двух клеток.

## 2. ПРОСТРАНСТВО $\mathcal{M}_{3,1}$

Стандартная поверхность  $S_3$  с тривалентным графом на ней, дополнение до которого односвязно, реализуется при некоторых склейках 30-ти угольника. Здесь условие односвязности дополнения до графа выполняется автоматически, а условия тривалентности и рода дают 1726 попарно неизоморфных склеек. Следует отметить, что формула Харера-Цагира в нашем случае бесполезна — она перечисляет *все* склейки рода 3, а нам нужны склейки, порождающие тривалентный граф. Каталог склеек с их ориентациями и каталог примыканий соответствующих клеток размещен в сети [3]. Краткое описание этих каталогов размещено в [4].

Создание этих каталогов потребовало обширных компьютерных вычислений. Каталог склеек — это массив с именем „сс“. Элементом сс является строка вида  $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}]$ , где  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, 30$ , — целое положительное число  $1 \leq a_i \leq 15$ , причем каждое целое число из этого промежутка встречается в строке ровно два раза. Процедура преобразования строки в гауссово слово очевидна. Массив с именем „dd“ — это каталог примыканий клеток. Элементом dd является строка из трех чисел  $[i, j, k]$ , здесь  $i$  и  $j$ ,  $i < j$ , — номера клеток (т.е. склеек), а  $k$  равно  $+1$ , если две смежные клетки индуцируют одну и ту же ориентацию на разделяющую их клетку размерности 13, и  $-1$  — в противном случае (здесь ориентация каждой клетки задана порядком ребер соответствующей склейки). Массив с именем „е“ — это каталог ориентаций. Элементом массива является пара  $[i, k]$ , где  $i$  — номер клетки, а  $k$  равно  $+1$  или  $-1$ . Ориентация клетки считается равной ориентации, заданной порядком ребер склейки, если  $k = 1$ , или равной минус ориентации, заданной порядком ребер склейки, если  $k = -1$ . При таком выборе ориентаций две смежные клетки индуцируют противоположные ориентации на разделяющей их клетке размерности 13. Просмотр массивов удобно делать в среде системы MAPLE.

Среди склеек имеется 99  $\mathbb{Z}_2$ -симметричных, 10  $\mathbb{Z}_3$ -симметричных и одна  $\mathbb{Z}_6$ -симметричная. Вот гауссово слово последней склейки:

$$abcde fghia^{-1}jc^{-1}klf^{-1}mh^{-1}nd^{-1}j^{-1}ok^{-1}b^{-1}i^{-1}m^{-1}e^{-1}n^{-1}g^{-1}l^{-1}o^{-1}.$$

Кроме того, имеется две  $\mathbb{Z}_2$ -симметричные склейки, зеркально симметричные друг-другу, у которых стягивание ребра дает  $\mathbb{Z}_4$ -симметричную склейку с нечетной симметрией. У соответствующих графов флип по указанному ребру дает тот же граф с тем же выделенным ребром. Вот гауссово слово одной из таких склеек:

$$abcde fge^{-1}ha^{-1}ijklj^{-1}mb^{-1}h^{-1}d^{-1}nf^{-1}g^{-1}n^{-1}c^{-1}m^{-1}i^{-1}ok^{-1}l^{-1}o^{-1}.$$

Компьютерная проверка показывает, что условия Раздела 1.3 выполнены для ориентаций симплексов  $\Delta_i$ ,  $1 \leq i \leq 1726$ , указанных в массиве „е“.

**Теорема 2.** *Пространство  $M_{3,1}$  в размерности 14 состоит из 1726 клеток, перечисляемых склейками 30-угольника. Клетки, отвечающие склейкам без симметрий, можно рассматривать, как стандартные симплексы, клетки, отвечающие склейкам с  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_3$  или  $\mathbb{Z}_2$ -симметрией, можно рассматривать, как стандартные симплексы, факторизованные по соответствующей группе симметрий. Ребра склеек пронумерованы, что индуцирует нумерацию вершин соответствующих симплексов. Ориентация клетки задается ориентацией соответствующего симплекса. Ориентации симплексов задаются так, чтобы флипы были совместимы с ориентациями симплексов. Такой выбор ориентаций существует. Он позволяет рассматривать пространство  $M_{3,1}$  как ориентируемое многообразие.*

## Литература

- (1) Lando S., Zvonkin A., Graphs on surfaces and their applications. Springer-Verlag, 2004.
- (2) Kontzevich M., Intersection theory on the moduli space of curves and matrix Airy function, Comm. Math. Phys. (1992) v. 147, no. 1, 1–23.
- (3) Архив [http://vd.jino.ru/files/kochetkov\\_m31.rar](http://vd.jino.ru/files/kochetkov_m31.rar).
- (4) Архив <http://vd.jino.ru/main.html>.

e-mail: yuyuk@prov.ru