

Министерство науки и высшего образования РФ  
Казанский (Приволжский) федеральный университет  
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского  
Региональный научно-образовательный математический центр ПФО

---

**Международная конференция по алгебре, анализу  
и геометрии 2021**

**Сборник трудов**

*(Казань, 22 – 28 августа 2021 г. )*

---



Казанский (Приволжский) федеральный университет

2021

Институт математики и механики им.  
Н.И. Лобачевского Казанского (Приволж-  
ского) федерального университета  
Региональный научно-образовательный  
математический центр Приволжского  
федерального округа  
ул. Кремлевская, 35, Казань  
Республика Татарстан, Российская Феде-  
рация, 420008

Lobachevski Institute of Mathematics  
and Mechanics of Kazan (Volga region)  
Federal University  
Regional Scientific and Educational  
Mathematical Center of the Volga  
Federal District

35, Kremlevskaya str., Kazan, Republic of  
Tatarstan, Russian Federation, 420008

Издание осуществлено в рамках реализации программы развития Научно-образовательного  
математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2021-  
1393

УДК 510:512:514:517  
ББК 22.1  
Т78

Печатается по рекомендации Редакционно-издательского совета института математики и  
механики им. Н.И. Лобачевского КФУ

Редакционная коллегия: А.Н. Абызов, М.М. Арсланов, С.Р. Насыров, А.А. Попов, И.Ш. Калимуллин,  
И.Р. Каюмов, Р.Г. Насибуллин, Е.А. Турилова, В.В. Шурыгин

**Т78 Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.60 // Материалы  
Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии 2021 – Казань: Изд-во  
Академии наук РТ, 2021. – Т.60. – 422 с.**

**ISBN 978-5-9690-0871-7**

Сборник содержит материалы Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии 2021,  
организованной на базе Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского  
(Приволжского) федерального университета. Конференция проведена в Казани с 22 по 28 августа  
2021 года.

Материалы предназначены для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов, маги-  
странтов и студентов старших курсов, специализирующихся в различных областях математики и  
ее приложений.

**УДК 510:512:514:517  
ББК 22.1**

**ISBN 978-5-9690-0871-7**

- © Региональный научно-образовательный математический центр при КФУ, 2021
- © Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, 2021
- © Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2021

|                                                                                                                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>М.Н. Болдырева, А.А. Магазев.</i> Классификация электромагнитных полей на пространстве де Ситтера и проблема интегрируемости уравнения Клейна-Гордона . . . . . | 370 |
| <i>И.В. Бубякин.</i> К дифференциальной геометрии $\rho$ -мерных комплексов $S^{\rho}(1, 1)$ $m$ -мерных плоскостей проективного пространства $P^n$ . . . . .      | 372 |
| <i>А.И. Булыгин.</i> Геометрия подобно однородных $\mathbb{R}$ -деревьев . . . . .                                                                                 | 374 |
| <i>А.В. Вялова.</i> Фундаментально-групповые связности, индуцированные на многообразии гиперцентрированных плоскостей . . . . .                                    | 375 |
| <i>С.В. Галаев.</i> Геометрия почти квази-сасакиевых многообразий, оснащенных канонической кососимметрической связностью . . . . .                                 | 377 |
| <i>А.А. Глебова.</i> Конечномерные динамики одного класса нелинейного дифференциального уравнения второго порядка . . . . .                                        | 378 |
| <i>Ю.Н. Захарян.</i> Принцип поиска нулей в калибровочных пространствах . . . . .                                                                                  | 380 |
| <i>С.К. Зубкова, В.В. Шурыгин.</i> Псевдогруппы голономии как препятствия к эквивалентности многообразий над алгебрами Вейля . . . . .                             | 382 |
| <i>М.Б. Карманова.</i> Формулы коплощади для отображений групп Карно с сублоренцевой структурой . . . . .                                                          | 384 |
| <i>В.А. Кибкало.</i> Топология интегрируемых волчков в псевдо-евклидовом пространстве и их аналогов . . . . .                                                      | 385 |
| <i>А.А. Кириллов, Е.П. Савелова, П.О. Владыкина.</i> Точная модель фрактальной вселенной . . . . .                                                                 | 387 |
| <i>М.Д. Ковалёв.</i> О структурных графах и структурных формулах теории механизмов . . . . .                                                                       | 389 |
| <i>Ф.М. Малышев.</i> О теоремах Брунна и Брунна–Минковского . . . . .                                                                                              | 391 |
| <i>Й. Микеш, Н.И. Гусева, П. Пешка, Л. Рыпарова.</i> Поворотные отображения «в целом» и проекции сферы . . . . .                                                   | 393 |
| <i>А.С. Мищенко.</i> Геометрическое описание кохомологий Хохшильда . . . . .                                                                                       | 395 |
| <i>С.С. Николаенко.</i> Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с разделяющимися переменными . . . . .                                     | 398 |
| <i>Э.О. Ражабов, Х.Ф. Шарипов.</i> Геометрия орбит конформных векторных полей в Евклидовом пространстве . . . . .                                                  | 400 |
| <i>В.И. Субботин.</i> О существовании RR-многогранников второго типа . . . . .                                                                                     | 402 |
| <i>А.Я. Султанов.</i> Об алгебрах Ли инфинитезимальных аффинных преобразований синектических линейных связностей А.П. Широкова . . . . .                           | 403 |
| <i>Г.А. Султанова.</i> О некоторых свойствах подалгебр алгебр Ли аффинных векторных полей касательных расслоений со связностью полного лифта . . . . .             | 405 |
| <i>А.М. Тропин.</i> Минимальные деревья в гиперпространствах . . . . .                                                                                             | 407 |
| <i>Т.Н. Фоменко.</i> Поиск нулей многозначных функционалов в $f$ -квазиметрическом пространстве . . . . .                                                          | 408 |
| <i>М.А. Чешкова.</i> Поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны . . . . .                                                                             | 411 |
| <i>А.С. Шарипов, Ф.Ф. Топволдиев.</i> Существование и единственность многогранников с заданными значениями условной кривизны в вершинах . . . . .                  | 415 |
| <i>Ю.И. Шевченко, Е.В. Скрыдлова.</i> Последовательности главных расслоений над гладкими многообразиями . . . . .                                                  | 417 |
| <i>Е.И. Яковлев.</i> Накрытия расслоений Серра и их инварианты . . . . .                                                                                           | 418 |

порядка.

Показано, что над голономным гладким многообразием возникает последовательность расслоений кореперов высших порядков, типовыми слоями которых являются группы Вагнера, действующие в касательных пространствах соответствующих порядков, отнесенных к реперам с симметричными базисными векторами. Этот результат обобщается на полуголономные и неголономные гладкие многообразия [4].

## Литература

1. Лаптев Г. Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий*. // Тр. Моск. матем. о-ва. – Т. 2. – 1953. – С. 275–382.
2. Slebodzinski A. *Formes Exterieures et Leurs Applications*. – Vol. II. – Warszawa, 1963. – 271 p.
3. Акивис М. А. *Многомерная дифференциальная геометрия*. – Калинин, 1977. – 84 с.
4. Шевченко Ю. И. *Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий* – Калининград, 1998. – 83 с.

## THE SEQUENCES OF PRINCIPAL BUNDLES OVER THE SMOOTH MANIFOLDS

Iu.I. Shevchenko, E.V. Skrydlova

*Above a holonomic smooth manifold arises a sequence of higher-order coframes, whose typical fibers are Wagners differential groups. This result is generalized to semi-holonomic and nonholonomic smooth manifolds.*

Keywords: higher-order bundle, differential group, non-holonomicity.

УДК 515.145.2

## НАКРЫТИЯ РАССЛОЕНИЙ СЕРРА И ИХ ИНВАРИАНТЫ

Е.И. Яковлев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [eyakovlev@hse.ru](mailto:eyakovlev@hse.ru); Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Факультет информатики, математики и компьютерных наук

*Исследуются накрытия расслоений Серра. Построен инвариант, являющийся подпоследовательностью гомотопической последовательности базового расслоения. Получены критерии существования морфизмов и изоморфизмов для заданных накрытий.*

**Ключевые слова:** расслоение Серра, накрытие, гомотопическая группа.

Во многих задачах оказываются полезными накрытия топологических пространств или многообразий, сохраняющие дополнительные структуры. Например, в римановой геометрии применяются накрытия, являющиеся локальными изометриями, в динамике – накрытия, представляющие собой морфизмы потоков или каскадов, в теории слоений – накрытия слоеных многообразий такие, что слои накрываемого многообразия накрывают слои базы. При изучении связей между бездивергентными векторными полями и гамильтоновыми системами, а также при исследовании геометрии расслоенных римановых многообразий понадобились накрытия, являющиеся морфизмами расслоений.

В [1] изучены накрытия в категории главных расслоений  $\mathcal{B}$ . Любое такое накрытие представляет собой тройку, состоящую из накрытий баз, тотальных пространств и структурных групп, являющуюся при этом морфизмом главных расслоений. Объекты категории  $\mathcal{B}$  образуют очень важный, но достаточно узкий класс расслоений. Для приложений его явно не достаточно. Поэтому вполне естественно возникает задача об обобщении полученных результатов на более широкие категории расслоений. Обсуждению этой проблемы и посвящена данная работа.

Положим  $I = [0, 1]$  и отождествим куб  $I^{n-1}$  с гранью  $I^{n-1} \times 0$  куба  $I^n$ .

Расслоение в самом общем смысле есть тройка  $\xi = (E, p, B)$ , где  $E$  и  $B$  – топологические пространства, а  $p : E \rightarrow B$  – непрерывное отображение. Тройка  $\xi$  называется расслоением Серра, если для любого  $n \in \mathbb{N}$  и произвольных непрерывных отображений  $f : I^n \rightarrow B$  и  $F_0 : I^{n-1} \rightarrow E$ , удовлетворяющих условию  $p \circ F_0 = f|_{I^{n-1}}$ , найдется непрерывное отображение  $F : I^n \rightarrow E$  такое, что  $p \circ F = f$  и  $F|_{I^{n-1}} = F_0$ . При этом говорят, что  $F$  – гомотопия, продолжающая отображение  $F_0$  и накрывающая отображение  $f$ .

Морфизм  $\kappa : \hat{\xi} \rightarrow \xi$  расслоений Серра  $\hat{\xi} = (\hat{E}, \hat{p}, \hat{B})$  и  $\xi = (E, p, B)$  представляет собой пару  $\kappa = (\varepsilon, \beta)$  непрерывных отображений  $\varepsilon : \hat{E} \rightarrow E$  и  $\beta : \hat{B} \rightarrow B$ , для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \hat{E} & \xrightarrow{\varepsilon} & E \\ \hat{p} \downarrow & & \downarrow p \\ \hat{B} & \xrightarrow{\beta} & B. \end{array} \quad (1)$$

В данной работе изучаются расслоения Серра, у которых базы и слои линейно связны. Заметим, что из этих условий следует линейная связность и тотальных пространств. Кроме того, указанное условие достаточно потребовать для одного слоя. Тогда оно будет выполняться для всех слоев. Категорию таких расслоений Серра и их морфизмов обозначим символом  $\mathcal{SB}$ .

**Определение 1.** Накрытием расслоения  $\xi = (E, p, B) \in \mathcal{SB}$  мы будем называть тройку  $q = (\hat{\xi}, \kappa, \xi)$ , где  $\hat{\xi} = (\hat{E}, \hat{p}, \hat{B})$  – расслоение, являющееся объектом категории  $\mathcal{SB}$ , а  $\kappa = (\varepsilon, \beta) : \hat{\xi} \rightarrow \xi$  – морфизм, состоящий из накрывающих отображений  $\varepsilon : \hat{E} \rightarrow E$  и  $\beta : \hat{B} \rightarrow B$ . При этом  $q$  будет считаться регулярным, если регулярны накрытия  $(\hat{E}, \varepsilon, E)$  и  $(\hat{B}, \beta, B)$  топологических пространств  $E$  и  $B$ .

**Определение 2.** Пусть  $q_1 = (\hat{\xi}_1, \kappa_1, \xi)$  и  $q_2 = (\hat{\xi}_2, \kappa_2, \xi)$  – накрытия расслоения  $\xi \in \mathcal{SB}$ , а  $\hat{\kappa} : \hat{\xi}_1 \rightarrow \hat{\xi}_2$  – морфизм категории  $\mathcal{SB}$ , для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \hat{\xi}_1 & \xrightarrow{\hat{\kappa}} & \hat{\xi}_2 \\ \kappa_1 \downarrow & & \downarrow \kappa_2 \\ \xi & \xrightarrow{id} & \xi. \end{array} \quad (2)$$

Тогда соответствие  $\hat{\kappa} : q_1 \rightarrow q_2$  будет называться морфизмом накрытий.

Накрытия заданного расслоения  $\xi \in \mathcal{SB}$  и их морфизмы образуют категорию, которую мы будем обозначать символом  $\mathcal{C}(\xi)$ .

Пусть  $\xi = (E, p, B)$ ,  $\hat{\xi}_k = (\hat{E}_k, \hat{p}_k, \hat{B}_k)$ ,  $\kappa_k = (\varepsilon_k, \beta_k)$ ,  $k = 1, 2$ , и  $\hat{\kappa} = (\hat{\varepsilon}, \hat{\beta})$ . Коммутативность диаграммы (2) означает выполнение равенств  $\varepsilon_2 \circ \hat{\varepsilon} = \varepsilon_1$  и  $\beta_2 \circ \hat{\beta} = \beta_1$ . В такой ситуации  $\hat{\varepsilon} : \hat{E}_1 \rightarrow \hat{E}_2$  и  $\hat{\beta} : \hat{B}_1 \rightarrow \hat{B}_2$  – морфизмы накрытий топологических пространств. Но тогда  $(\hat{E}_1, \hat{\varepsilon}, \hat{E}_2)$  и  $(\hat{B}_1, \hat{\beta}, \hat{B}_2)$  – накрытия. Следовательно, любой морфизм  $\hat{\kappa}$  объектов категории  $\mathcal{C}(\xi)$  является накрытием. Также легко проверяется, что морфизм  $\hat{\kappa} = (\hat{\varepsilon}, \hat{\beta})$  будет изоморфизмом или, иначе говоря, эквивалентностью в категории  $\mathcal{C}(\xi)$ , если  $\hat{\varepsilon} : \hat{E}_1 \rightarrow \hat{E}_2$  и  $\hat{\beta} : \hat{B}_1 \rightarrow \hat{B}_2$  – биекции.

Для расслоения  $\xi = (E, p, B)$  из категории  $\mathcal{SB}$  зафиксируем точку  $a \in B$ , слой  $F = p^{-1}(a)$  и точку  $u \in F$ . Будем считать, что  $\iota : F \rightarrow E$  – включение слоя в тотальное пространство. Из связности слоя  $F$  следует, что конец гомотопической последовательности расслоения  $\xi$  имеет вид:

$$\cdots \longrightarrow \pi_2(B, a) \xrightarrow{\partial_*} \pi_1(F, u) \xrightarrow{\iota_*} \pi_1(E, u) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, a) \longrightarrow 0. \quad (3)$$

**Теорема 1.** Пусть  $\xi = (E, p, B)$  и  $\hat{\xi} = (\hat{E}, \hat{p}, \hat{B})$  – расслоения Серра из категории  $\mathcal{SB}$ ,  $\varepsilon : \hat{E} \rightarrow E$ ,  $\beta : \hat{B} \rightarrow B$  – непрерывные отображения,  $\kappa = (\varepsilon, \beta)$  и  $q = (\hat{\xi}, \kappa, \xi)$  – накрытие расслоения  $\xi$ . Выберем точки  $\hat{u} \in \varepsilon^{-1}(u)$  и  $\hat{a} = \hat{p}(\hat{u})$ . При этом для слоя  $\hat{F} = \hat{p}^{-1}(\hat{a})$  определено сужение  $\phi : \hat{F} \rightarrow F$  отображения  $\varepsilon : \hat{E} \rightarrow E$ . Рассмотрим гомоморфизмы  $\phi_* : \pi_1(\hat{F}, \hat{u}) \rightarrow \pi_1(F, u)$ ,  $\varepsilon_* : \pi_1(\hat{E}, \hat{u}) \rightarrow \pi_1(E, u)$  и  $\beta_* : \pi_1(\hat{B}, \hat{a}) \rightarrow \pi_1(B, a)$ , индуцированные отображениями  $\phi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\beta$  соответственно, и их образы  $\Lambda_F = \text{im } \phi_*$ ,  $\Lambda_E = \text{im } \varepsilon_*$  и  $\Lambda_B = \text{im } \beta_*$ . Тогда определена и точна последовательность

$$0 \longrightarrow \text{im } \partial_* \xrightarrow{\iota_0} \Lambda_F \xrightarrow{\iota_*^\Lambda} \Lambda_E \xrightarrow{p_*^\Lambda} \Lambda_B \longrightarrow 0, \quad (4)$$

где  $\iota_0$  – включение,  $\partial_*$ ,  $\iota_*$  и  $p_*$  – гомоморфизмы из последовательности (3),  $\iota_*^\Lambda = \iota_*|_{\Lambda_F}$  и  $p_*^\Lambda = p_*|_{\Lambda_E}$ .

**Теорема 2.** Пусть  $k = 1, 2$ ,  $\xi = (E, p, B)$  и  $\hat{\xi}_k = (\hat{E}_k, \hat{p}_k, \hat{B}_k)$  – расслоения Серра из категории  $\mathcal{SB}$ ,  $\kappa_k = (\varepsilon_k, \beta_k)$  и  $q_k = (\hat{\xi}_k, \kappa_k, \xi)$  – регулярные накрытия расслоения  $\xi$ , которым соответствуют точные последовательности

$$0 \longrightarrow \text{im } \partial_* \xrightarrow{\iota_0} \Lambda_F^k \xrightarrow{\iota_*^\Lambda} \Lambda_E^k \xrightarrow{p_*^\Lambda} \Lambda_B^k \longrightarrow 0. \quad (5)$$

Справедливы следующие утверждения:

- морфизм  $\hat{\kappa} : q_1 \rightarrow q_2$  существует в том и только в том случае, если  $\Lambda_F^1 \subset \Lambda_F^2$ ,  $\Lambda_E^1 \subset \Lambda_E^2$ ,  $\Lambda_B^1 \subset \Lambda_B^2$ ;
- накрытия  $q_1 = (\hat{\xi}_1, \kappa_1, \xi)$  и  $q_2 = (\hat{\xi}_2, \kappa_2, \xi)$  изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие им последовательности (5) совпадают.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (грант 21-11-00010).

## Литература

1. Гончар Т.А., Яковлев Е.И. *Накрытия в категории главных расслоений*, Изв. вузов. Матем. №4, 25–47 (2021).

## COVERINGS OF SERRE BUNDLES AND THEIR INVARIANTS

E.I. Yakovlev

*Coverings of Serre bundles are investigated. An invariant is constructed that is a subsequence of the homotopy sequence of the base bundle. Criteria for the existence of morphisms and isomorphisms for given coverings are obtained.*

Keywords: Serre bundle, covering, homotopy group

# **ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО.**

**Т.60**

## **МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО АЛГЕБРЕ, АНАЛИЗУ И ГЕОМЕТРИИ 2021**

**Материалы конференции  
(Казань, 22 – 28 августа 2021 г.)**

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления - *А.А. Агафонов*  
Техническая редакция, набор и верстка: *А.А. Агафонов, Д.Н. Даутова,*  
*М.В. Зубков, Д.С. Лисенков, А.А. Попов, В.И. Сухарев*

Подписано в печать 10.08.2021  
Бумага офсетная. Печать ризографическая.  
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 26,375.  
Тираж 250 экз. Заказ 246/11

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в ИП Селиванова А.Г.

420111, г. Казань, ул. Галактионова, 14  
Тел.: 8 (843) 238-24-49