# Математика

DOI 10.15507/2079-6900.22.202003.261-267

*УДК 517.9*

# О классе топологической сопряженности с гомотетией

© **Е. Я. Гуревич**[1], **А. А. Макаров**[2]

**Аннотация.** В работе рассматривается класс $H(\mathbb{R}^n)$ сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ таких, что для любого гомеоморфизма $h \in H(\mathbb{R}^n)$ и для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются условия $\lim\limits_{n\to+\infty} h^n(x) \to O$, $\lim\limits_{n\to-\infty} h^n(x) \to \infty$, где $O$ — начало координат. Доказывается, что для любого $n \geq 1$ произвольный гомеоморфизм $h \in H(\mathbb{R}^n)$ топологически сопряжен с гомотетией $a_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определяемой формулой $a_n(x_1, \dots, a_n) = (\frac{1}{2}x_1, \dots, \frac{1}{2}x_n)$. Для гладкого случая при условии, что все собственные числа линейной части рассматриваемого отображения лежат внутри единичной окружности, данный факт следует из классической теории динамических систем. В негладком случае при $n \notin \{4, 5\}$ этот факт доказан в ряде работ конца XX века, но работы, где доказательство было бы изложено для случая $n \in \{4, 5\}$, авторам неизвестны. Настоящая работа заполняет этот пробел.

**Ключевые слова:** топологическая классификация гомеоморфизмов, топологическая сопряженность со сжатием, фактор-пространство, гомотетия

## 1. Введение и формулировка результатов

Пусть $H(\mathbb{R}^n)$ — класс изотопных тождественному гомеоморфизмов евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ таких, что для любого гомеоморфизма $h \in H$ и для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются условия $\lim\limits_{n\to+\infty} h^n(x) \to O$, $\lim\limits_{n\to-\infty} h^n(x) \to \infty$, где $O$ — начало координат. Определим отображение $a_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ формулой $a_n(x_1, \dots, a_n) = (\frac{1}{2}x_1, \dots, \frac{1}{2}x_n)$. Напомним, что гомеоморфизмы $h, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называются топологически сопряженными, если существует гомеоморфизм $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такой, что $h = \theta^{-1} g \theta$.

Цель настоящей работы состоит в доказательстве следующей теоремы.

**Теорема 1.1** *Для любого $n \geq 1$ гомеоморфизм $h \in H(\mathbb{R}^n)$ топологически сопряжен с гомотетией $a_n$.*

Из условий, накладываемых на класс $H(\mathbb{R}^n)$, следует, что любой гомеоморфизм $h$ из этого класса имеет единственную неподвижную точку, и эта точка совпадает с началом координат $O$.

[1]**Гуревич Елена Яковлевна**, доцент кафедры фундаментальной математики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1815-3120, egurevich@hse.ru

[2]**Макаров Алексей Александрович**, магистрант, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2447-4836, leomakar@mail.ru

Если гомеоморфизм $h \in H(\mathbb{R}^n)$ является гладким и его дифференциал $Dh : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в точке $O$ не имеет собственных чисел, равных по модулю единице, то из теоремы Гробмана-Хартмана следует, что $h$ и $Dh$ топологически сопряжены. Из этого и топологической классификации линейных отображений [4, теорема 5.5] следует, что $h$ топологически сопряжен с $a_n$.

В работе рассматривается негладкий случай. Как будет показано ниже, для случая $n = 1$ доказательство теоремы 1.1 является несложным. Для случая $n = 2$ доказательство теоремы изложено в работе [1], для $n = 3$ — в работе [2], для $n \geq 6$ — в работе [3]. Основной результат настоящей работы состоит в независимом доказательстве теоремы 1.1 для случая $n \geq 3$.

## 2. Вспомогательные определения и факты

Напомним несколько определений и фактов, необходимых для доказательства результата.

Говорят, что группа $G$ *действует* на многообразии $X$, если задано отображение $\zeta : G \times X \to X$, обладающее следующими свойствами:

1) $\zeta(e, x) = x$ для всех $x \in X$, где $e$ — нейтральный (единичный) элемент группы $G$;

2) $\zeta(g, \zeta(h, x)) = \zeta(gh, x)$ для всех $x \in X$ и $g, h \in G$.

Говорят, что группа $G$ действует *свободно* на многообразии $X$, если $\zeta(g, x) \neq x$ для любого $x \in X$ и любого $g \in G$, кроме $g = e$.

Говорят, что группа $G$ действует *разрывно* на многообразии $X$, если для каждого компактного подмножества $K \subset X$ множество элементов $g \in G$ таких, что $\zeta(g, K) \cap K \neq \neq \emptyset$ — конечно.

Группа $A$ называется *циклической*, если существует элемент $a \in A$ такой, что любой элемент группы $A$ представляется в виде $a^n, n \in \mathbb{Z}$. Элемент $a$ называют образующим элементом циклической группы $A = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$. Если все степени элемента $a$ различны, то, говорят что циклическая группа имеет *бесконечный порядок*. В противном случае порядком циклической группы $A$ называется наименьшее положительное число $p$, для которого $a^p = e$. Известно, что все циклические группы одного и того же порядка (в т. ч. и бесконечного) изоморфны. В частности, любая группа бесконечного порядка изоморфна группе $\mathbb{Z}$ с операцией сложения [5, гл. 4, §2]. Будем обозначать через $\phi_A$ изоморфизм групп $A = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$ и $\mathbb{Z}$ такой, что $\phi_A(a) = 1$.

Пусть $X$ — многообразие и $h : X \to X$ — гомеоморфизм. Тогда множество $\mathcal{H} = = \{h^n, n \in \mathbb{Z}\}$ является циклической группой с образующим элементом $h$ относительно операции композиции. Кроме того, отображение $\zeta(h^n, x) = h^n(x)$ определяет действие группы $\mathcal{H}$ на $X$. Введем на многообразии $X$ отношение эквивалентности следующим условием: точки $x, y \in X$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существует число $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $y = h^n(x)$. Будем обозначать через $X_h$ множество классов эквивалентности и через $p_{X_h} : X \to X_h$ естественную проекцию, ставящую в соответствие любой точке $x \in X$ ее класс эквивалентности. Множество $X_h$, оснащенное фактортопологией, называется *пространством орбит действия $\mathcal{H}$ на $X$*.

Обозначим через $p_{X_h *} : \pi_1(X) \to \pi_1(X_f)$ гомоморфизм, индуцированный проекцией $p_{X_h} : X \to X_h$.

Предположим, что группа $\mathcal{H} = \{h^n, n \in \mathbb{Z}\}$ действует свободно и разрывно на $X$. Тогда, согласно [5, теорема 17.1] естественная проекция $p_{X_h} : X \to X/h$ является накрывающим отображением, т. е. сюрьективным отображением, которое обладает следующим свойством: для любой точки $x \in X/h$ существует окрестность $U \in X/h$ такая, что $p^{-1}_{X_h}(U)$ является объединением открытых попарно непересекающихся множеств $V_j$,

$j \in J$, таких, что для любого $j \in J$ ограничение $p_{X_h}|_{V_j} : V_j \to U$ является гомеоморфизмом.

Пусть $X$ — связное[3] многообразие и группа $\mathcal{H} = \{h^n, n \in \mathbb{Z}\}$ действует свободно и разрывно на $X$. Определим отображение $\alpha_{X_h} : \pi_1(X_f) \to \mathbb{Z}$ следующим образом. Обозначим через $p_{X_h}^{-1}(x)$ полный прообраз точки $x \in X_h$. Из определения проекции $p_{X_h}$ следует, что $p_{X_h}^{-1}(x)$ — орбита некоторой точки $\tilde{x} \in p_{X_h}^{-1}(x)$. Пусть $[c] \in \pi_1(X_h, h)$ и $c$ — некоторая петля, принадлежащая классу $[c]$. Тогда существует единственный путь $\tilde{c}(t)$ с началом в точке $\tilde{x}$ ($\tilde{c}(0) = \tilde{x}$), накрывающий петлю $c$ ($p_{X_h}(\tilde{c}) = c$) [5, теорема 17.6]. Поэтому существует элемент $n \in \mathbb{Z}$ такой, что $\tilde{c}(1) = f^n(\tilde{x})$. Положим $\alpha_{X_h}([c]) = \phi_{\mathcal{H}}(h^n)$.

Из [5, теорема 19.1, лемма 19.2] вытекает справедливость следующего предложения.

**Предложение 2.1** *Отображение $\alpha_{X_h} : \pi_1(X_h) \to \mathbb{Z}$ является эпиморфизмом (сюръективным гомоморфизмом) и его ядро совпадает с подгруппой $p_{X_h *}(\pi_1(X))$.*

Следующее предложение, вытекающее из [5, теорема 21.7], является ключевым для доказательства теоремы 1.1.

**Предложение 2.2** *Пусть $X$, $Y$ — связные многообразия и $h : X \to X$, $g : Y \to Y$ — гомеоморфизмы такие, что группы $\mathcal{H} = \{h^n, n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathcal{G} = \{g^n, n \in \mathbb{Z}\}$ действуют свободно и разрывно на $X$, $Y$ соответственно. Пусть $\varphi : X_h \to Y_g$ — гомеоморфизм такой, что $\alpha_{X_h} = \alpha_{Y_g} \circ \varphi_*$. Тогда существует единственный гомеоморфизм $\tilde{\varphi} : X \to Y$, сопрягающий гомеоморфизмы $h$ и $g$.*

## 3. Доказательство основного результата

Ограничения гомеоморфизмов $h, a_n$ на множество $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ порождают группы $\mathcal{H} = \{h^i|_{\mathbb{R}^n \setminus \{O\}}, i \in \mathbb{Z}\}$, $\mathcal{A} = \{a_n^i|_{\mathbb{R}^n \setminus \{O\}}, i \in \mathbb{Z}\}$, действующие на $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ свободно и разрывно.

В силу предложения 2.2 для доказательства теоремы 1.1 достаточно доказать, что пространства $V_h, V_{a_n}$ гомеоморфны. Сначала установим топологический тип пространства $V_{a_n}$.

Для $n \geq 1$ положим $\mathbb{B}_r^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \ x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2\}$, $D_{a_n} = \mathbb{B}_1^n \setminus int\, \mathbb{B}_{1/2}^n$. Обозначим через $\mathbb{S}^{n-1}$ границу единичного шара $\mathbb{B}_1^n$.

Множество $D_{a_n}$ является фундаментальной областью действия группы $\mathcal{A}$: для любой точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ найдется такое $i \in \mathbb{Z}$, что $a_n^i(x) \in D_{a_n}$; среди внутренних точек $D_{a_n}$ нет точек, принадлежащих одной орбите отображения $a_n$, а для каждой точки $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ найдется такая точка $y \in a_n(\mathbb{S}^{n-1})$, что $y = a_n(x)$. Поэтому пространство, полученное из $D_{a_n}$ отождествлением точек $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ и $a_n(x)$ (по всем $x \in \mathbb{S}^{n-1}$), гомеоморфно пространству $V_{a_n}$. Поскольку $a_n$ является сохраняющим ориентацию отображением, то в результате операции склеивания получим пару окружностей $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1$ при $n = 1$, тор $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ при $n = 2$ и прямое произведение $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ в случае $n \geq 3$. Таким образом, доказано следующее предложение.

**Предложение 3.1** *Пространство $V_{a_n}$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, $n \geq 1$.*

[3]Заметим, что любое связное $n$-многообразие является линейно связным [5, с. 117-119]

Покажем, что пространство $V_h$ имеет тот же топологический тип, что и пространство $V_{a_n}$.

В случае $n = 1$ из того факта, что $h$ — сохраняющий ориентацию гомеморофизм, следует, что $h$ является возрастающей функцией. Поэтому $h(\mathbb{B}_1^1) \subset int\,\mathbb{B}_1^1$, следовательно, фундаментальная область $D_h = \mathbb{B}_1^1 \setminus int\,h(\mathbb{B}_1^1)$ действия группы $\mathcal{H}$, как и область $D_{a_1}$, является парой отрезков, а пространство орбит $V_h$ гомеоморфно паре окружностей. Таким образом, для $n = 1$ теорема 1.1 доказана.

В случае $n \in \{2, 3\}$ идея доказательства теоремы состоит в непосредственной модификации шара $\mathbb{B}^n$ для получения шара $B^n$ такого, что $h(B^n) \subset int\,B^n$. В размерности четыре и выше такая модификация затруднительна, поэтому доказательство требует другой техники. Для перехода к этой технике опишем предварительные свойства пространства $V_h$.

**Предложение 3.2** *При $n \geq 3$ пространство орбит $V_h$ является ориентируемым гладким замкнутым многообразием с фундаментальной группой, изоморфной группе $\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Структура гладкого замкнутого многообразия на пространстве $V_h$ непосредственно индуцируется естественной проекцией $p_h : \mathbb{R}^n \to V_h$, которая, как показано в предыдущем разделе, является накрывающим отображением. Так как $h$ является по условию сохраняющим ориентацию, что $V_h$ ориентируемо. Поскольку при $n \geq 3$ многообразие $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ односвязно, то оно является универсальным накрытием для $V_h$ и фундаментальная группа $\pi_1(V_h)$ изоморфна группе $\mathcal{H}$, которая, в свою очередь, изоморфна группе $\mathbb{Z}$.
Доказательство завершено.

В работе [3], где теорема 1.1 доказана для случая $n \geq 6$, далее использовался результат, принадлежащий Броудеру и Левайну: ориентируемое гладкое замкнутое многообразие размерности шесть и выше, фундаментальная группа которого изоморфна группе $\mathbb{Z}$, является пространством локально-тривильного расслоения над окружностью (для $n = 3$ аналогичный результат доказан Сталлингсом). Далее устанавливалось, что слой этого расслоения имеет гомотопический тип сферы $S^{n-1}$ (поскольку накрывающее пространство $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ имеет тот же гомотопический тип). Поскольку существует только два негомеоморфных локально-тривиальных расслоения над окружностью со слоем $S^{n-1}$ (ориентируемое, представляющее собой прямое произведение $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, и неориентируемое), то $V_h$ гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, что доказывает теорему 1.1. Результат, аналогичный теореме Броудера и Левайна до настоящего времени не удалось доказать для многообразий размерности четыре и пять, поэтому проведем доказательство в обход этих результатов.

Пусть $n \geq 3$. Вначале покажем, что существует такое $i_* > 0$, что $h^{i_*}(\mathbb{B}_1^n) \subset int\,\mathbb{B}_1^n$. Из определения класса следует, что для любой точки $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ найдется такое $i_x > 0$, что $h^i(x) \in int\,\mathbb{B}_1^n$ для всех $i > i_x$. Поскольку $h$ — гомеоморфизм, то для любой точки $x$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $h^i(y) \in int\,\mathbb{B}_1^n$ для любой точки $y$ из $\varepsilon$-окрестности $0_\varepsilon(x)$ точки $x$ и для всех $i > i_x$. Объединение $\{0_\varepsilon(x) \cap \mathbb{S}^{n-1}, x \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ образует открытое покрытие сферы $\mathbb{S}^{n-1}$. Выберем из него конечное подпокрытие и обозначим через $x_1, \ldots, x_m$ точки сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, окрестности которых образуют это конечное подпокрытие. Тогда $i_* = max\{x_1, \ldots, x_m\}$ — искомое число.

Обозначим через $V_{h^{i_*}}$ пространство орбит действия группы, порожденной степенями ограничения отображения $h^{i_*}$ на множество $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Множество $D_{h^{i_*}} = \mathbb{B}_1^n \setminus h^{i_*}(int, \mathbb{B}_1^n)$ является фундаментальной областью действия этой группы. Аналогично доказательству предложения 3.1 получим, что $V_{h^{i_*}}$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Обозначим через $p_{h^{i_*}} : \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \to V_{h^{i_*}}$, $p_h : \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \to V_h$ естественные проекции и определим отображение $\tau_{i_*} : V_{h^{i_*}} \to V_{h^{i_*}}$ формулой $\tau_{i_*} = p_{h^{i_*}} h p^{-1}_{h^{i_*}}$, где $p^{-1}_{h^{i_*}}(y)$ означает полный прообраз точки $y$, т. е. множество всех точек $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ таких, что $y = p_{h^{i_*}}(x)$. Отметим, что $\tau^{i_*}_{i_*} = id$ и $V_h = V_{h^{i_*}}/\tau_{i_*}$.

Напомним, что гомеоморфизм $\tau : X \to X$ называется инволюцией, если $\tau^2 = id$.

Далее будем использовать следующий результат работ [7] (для $n = 3$) и [6] (для $n \geq 4$).

**Предложение 3.3** *Пусть $\tau : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, $n \geq 3$ — инволюция без неподвижных точек. Тогда фактор-пространство $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)/_\tau$ гомеоморфно одному из следующих многообразий: либо $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, либо неориентируемому локально-тривиальному расслоению $\mathbb{S}^{n-1}\tilde{\times}\mathbb{S}^1$ над окружностью, либо прямому произведению $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}P^{n-1}$, либо связной сумме $\mathbb{R}P^n \sharp \mathbb{R}P^n$ вещественных проективных пространств.*

Если $i_* = 2$, то из предложения 3.3 следует, что $V_h$ гомеорфно $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$ (что доказывает теорему 1.1). Действительно, в этом случае отображение $\tau_{i_*}$ является инволюцией без неподвижных точек, поэтому многообразие $V_h = V_{h^{i_*}}/\tau_{i_*}$ гомеоморфно одному из четырех многообразий, описанных в предложении 3.3. В силу предложения 3.2 пространство $V_h$ ориентируемо и его фундаментальная группа изоморфна группе $\mathbb{Z}$ , следовательно, $V_h$ не может быть гомеоморфно неориентируемому расслоению над окружностью и многообразиям $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{RP}^{n-1}$, $\mathbb{RP}^n \sharp \mathbb{RP}^n$, фундаментальные группы которых отличны от $\mathbb{Z}$. Таким образом, $V_h$ гомеоморфно $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$.

Если $i_* > 2$, то найдется целое $r$ такое, что $2^r \leq i_* < 2^{r+1}$. Положим $g_r = h^{2^r}$.

Пусть $\xi : V_{h^{i_*}} \to \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ — произвольный гомеоморфизм и $S^{n-1}_0 \subset \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{O\}$ — такая сфера, что $\xi p_{h^{i_*}}(S^{n-1}_0) = \mathbb{S}^{n-1} \times \{z\}$, где $z \in \mathbb{S}^1$ — произвольная точка. Тогда $h^i(S^{n-1}_0) \cap S^{n-1}_0 = \emptyset$ для любого $i \geq i_*$, в частности $g_r(S^{n-1}_0) \cap S^{n-1}_0 = \emptyset$. В силу теоремы кольца множество $K \subset \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{O\}$, ограниченное сферами $S^{n-1}_0, g_r(S^{n-1}_0)$, гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$; следовательно, пространство орбит $V_{g_r}$ гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Тогда в силу аргументов, аналогичных изложенным выше, и предложения 3.3, получим, что пространство орбит $V_{g_{r-1}}$ гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Если $r = 1$, то $g^{r-1} = h$ и доказательство закончено. Если $r > 1$, то продолжим процесс и через $(r - 1)$ шагов получим требуемый факт.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ и гранта Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-15-2019-1931).

## Список литературы

1. Kerekjarto B. Topologische charakterisierung der linearen abbildungen // Acta Scientiarum Mathematicarum. 1934. Vol. 6, No 4-4. Pp. 235–262.

2. Homma T., Kinoshita S. On a topological characterization of the dilatation in $E^3$ // Osaka Math. J. 1954. Vol. 6, No. 1. Pp. 135–143.

3. Husch L. S. A topological characterization of the dilation in $E^n$ // Proceedings of the American Mathematical Society. 1971. Vol. 28, No. 1. Pp. 234–236.

4. Palis J., Melo W. Geometric theory of dynamical systems. An introduction. New York: Springer, 1982. 198 p.

5. Kosniowski Cz. A first course in algebraic topology. New York: Cambridge University Press, 1980. 269 p.

6. Jahren B., Kwasik S. Free involutions on $S^1 \times S^n$ // Math. Ann. 2011. Vol. 351, No. 2. Pp. 281–303.

7. Tao Y. On fixed point free involutions of $S^1 \times S^2$ // Osaka Math. J. 1962. Vol. 14, No. 1. Pp. 145–152.

*Поступила 1.08.2020*

*MSC2020 37C15*

# On a class of topological conjugacy with a homothety

© **E. Gurevich**[1], **A. Makarov**[2]

**Abstract.** We consider a class $H(\mathbb{R}^n)$ of orientation-preserving homeomorphisms of Euclidean space $\mathbb{R}^n$ such that for any homeomorphism $h \in H(\mathbb{R}^n)$ and for any point $x \in \mathbb{R}^n$ a condition $\lim\limits_{n\to+\infty} h^n(x) \to O$ holds, were $O$ is the origin. It is proved that for any $n \geq 1$ an arbitrary homeomorphism $h \in H(\mathbb{R}^n)$ is topologically conjugated with the homothety $a_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, given by $a_n(x_1, \dots, a_n) = (\frac{1}{2}x_1, \dots, \frac{1}{2}x_n)$. For a smooth case under the condition that all eigenvalues of the differential of the mapping $h$ have absolute values smaller than one, this fact follows from the classical theory of dynamical systems. In the topological case for $n \notin \{4, 5\}$ this fact is proven in several works of 20th century, but authors do not know any papers where it would be proven for $n \in \{4, 5\}$. This paper fills this gap.

**Key Words:** topological classification of homeomorphisms, topological conjugacy with dilatation, factor-space, homothety

## References

1. B. Kerekjarto, "Topologische charakterisierung der linearen abbildungen", *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **6**:4-4 (1934), 235–262.

2. T. Homma, S. Kinoshita, "On a topological characterization of the dilatation in $E^3$", *Osaka Math. J.*, **6**:1 (1954), 135–143.

3. L. S. Husch, "A Topological characterization of the dilation in $E^n$", *Proceedings of the American Mathematical Society*, **28**:1 (1971), 234–236.

4. J. Palis, W. Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Springer., New York, 1982, 198. p.

5. Cz. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge University Press, New York, 1980, 269 p.

[1]**Elena Ya. Gurevich**, Associate Professor, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1815-3120, egurevich@hse.ru

[2]**Aleksey A. Makarov**, Undergraduate, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2447-4836, leomakar@mail.ru

6. B. Jahren, S. Kwasik, "Free involutions on $S^1 \times S^n$", *Math. Ann.*, **351**:2 (2011), 281–303.

7. Y. Tao, "On fixed point free involutions of $S^1 \times S^2$", *Osaka Math. J.*, **14**:1 (1962), 145–152.

*Submitted 1.08.2020*