ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель–июнь 2020. Т. 27, № 2. С. 90–116

УДК 519.174.3 DOI 10.33048/daio.2020.27.639

КЁНИГОВЫ ГРАФЫ ОТНОСИТЕЛЬНО 5-ПУТИ И ЕГО ОСТОВНЫХ НАДГРАФОВ

Д. Б. Мокеев[1,2,a], *Д. С. Малышев*[2,b]

[1] Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского, пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород, Россия

[2] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия

E-mail: [a]`mokeevdb@gmail.com`, [b]`dsmalyshev@rambler.ru`

Аннотация. Описывается наследственный класс графов, обладающих свойством равенства максимального числа вершинно не пересекающихся 5-путей (путей из 5 вершин) и минимальной мощности множества вершин, имеющего непустое пересечение с множеством вершин каждого 5-пути. Дано описание данного класса в терминах «запрещённых подграфов», а также альтернативное описание класса, в основе которого лежит построение графов из псевдографов с использованием различных операций. Ил. 2, библиогр. 18.

Ключевые слова: упаковка подграфов, вершинное покрытие подграфов, пятивершинный путь, кёнигов граф.

Введение

Пусть $\mathcal{X}$ — множество графов. Произвольное множество попарно вершинно не пересекающихся порождённых подграфов графа G, изоморфных графам из $\mathcal{X}$ (в дальнейшем $\mathcal{X}$-подграфов), называется *$\mathcal{X}$-упаковкой* G. Произвольное множество вершин графа G, имеющее непустое пересечение с множеством вершин каждого порождённого $\mathcal{X}$-подграфа графа G, называется *вершинным покрытием* G *относительно* $\mathcal{X}$ (в дальнейшем сокращённо *$\mathcal{X}$-покрытие*).

Граф называется *кёниговым относительно* $\mathcal{X}$, если в любом его порождённом подграфе наибольшая мощность $\mathcal{X}$-упаковки равна наименьшей мощности $\mathcal{X}$-покрытия [1]. Класс всех кёниговых графов относительно множества $\mathcal{X}$ обозначается через $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18–31–20001-мол-а-вед).

Для любого $\mathcal{X}$ класс $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ является *наследственным*, т. е. он замкнут относительно удаления вершин. Известно, что любой наследственный класс может быть охарактеризован множеством минимальных запрещённых порождённых подграфов, т. е. минимальных по включению вершин графов, не принадлежащих данному классу [2].

Отметим, что в литературе под $\mathcal{X}$-покрытием часто понимают также множество вершин графа G, покрывающее все (не только порождённые) подграфы графа G, изоморфные графам из $\mathcal{X}$ (см., например, [3, 4]). Однако множество вершин любого $\mathcal{X}$-подграфа G (не обязательно порождённого) порождает граф, являющийся остовным надграфом графа из $\mathcal{X}$.

Обозначим через $\langle \mathcal{X} \rangle$ множество всех остовных надграфов всех графов из $\mathcal{X}$, т. е. множество графов, содержащее все графы из $\mathcal{X}$ и графы, полученные из них добавлением рёбер. Тогда любое «не порождённое» $\mathcal{X}$-покрытие графа G совпадает с его $\langle \mathcal{X} \rangle$-покрытием. $\langle \mathcal{X} \rangle$-упаковка, в свою очередь, соответствует множеству любых (а не только порождённых) $\mathcal{X}$-подграфов, попарно не содержащих общих вершин.

В дальнейшем будем использовать обозначение $\langle H \rangle$ (вместо $\langle \{H\} \rangle$) для множества всех остовных надграфов графа H.

Немало работ посвящено задачам об $\mathcal{X}$-упаковке и $\mathcal{X}$-покрытии (как для «порождённого», так и для «не порождённого» случая), где $\mathcal{X}$ состоит из P_k (простого пути на k вершинах) и их алгоритмическим аспектам. В частности, известно, что задача о $\langle P_k \rangle$-покрытии NP-трудна в общем случае при $k \geqslant 2$ [5, 6], а задача о $\langle P_k \rangle$-упаковке полиномиально разрешима при $k = 2$ [7], NP-полна при $k \geqslant 3$ [8,9] и APX-полна при $k \geqslant 4$ [10].

Тем не менее, известно, что задачи о P_k- и $\langle P_k \rangle$-упаковке, P_k- и $\langle P_k \rangle$-покрытии решаются за линейное время в классе лесов при любом k [5,9]. Кроме того, известно описание нескольких более сложных классов графов, на которых данные задачи при различных k решаются за полиномиальное время [11–13], в том числе классов кёниговых графов и их подклассов [14–16].

Настоящая работа посвящена описанию класса кёниговых графов относительно множества $\langle P_5 \rangle$ и продолжает серию исследований, ранее проведённых для классов графов $\mathcal{K}(\langle P_3 \rangle)$ [15] и $\mathcal{K}(\langle P_4 \rangle)$ [14]. Для обоих классов было получено полное описание в терминах запрещённых подграфов (описаны все минимальные запрещённые подграфы), а также «конструктивное» описание — описана процедура, позволяющая построить любой граф заданного класса.

В настоящей работе класс $\mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$ также полностью описан обоими указанными способами: в разд. 2 описаны все запрещённые графы для данного класса, а в разд. 3 и 4 описан класс ST_5-графов, полученных из псевдографов применением операций подразбиения рёбер, замены вершин пустыми графами и добавления так называемых «висячих подграфов», и доказано, что он совпадает с классом $\mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$.

1. Определения и обозначения

В статье используются обозначения K_n, P_n и C_n для полных графов, простых путей и простых циклов на n вершинах соответственно. Будем обозначать через S_n дерево на $n+1$ вершинах, n из которых являются листьями, а через $S_{n,m}$ — дерево на $n+m+2$ вершинах, две из которых центральные, а остальные — листья, причём n листьев смежны с одной центральной вершиной, а m — с другой. Через S_n+e обозначим граф, полученный из S_n добавлением одного ребра, через K_n-e — граф, полученный из K_n удалением одного ребра, а через n-fan — граф, полученный из P_{n+1} добавлением вершины, смежной с каждой его вершиной.

Наибольшее число элементов в $\langle P_5\rangle$-упаковке графа G обозначим через $\mu_{\langle P_5\rangle}(G)$, а наименьшее число вершин в его $\langle P_5\rangle$-покрытии — через $\beta_{\langle P_5\rangle}(G)$.

Подграф, изоморфный одному из графов множества $\langle P_5\rangle$, назовём *квинтетом.* Обозначим через $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ квинтет, состоящий из вершин v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.

Обозначим через $V(G)$ множество вершин графа G. Множество вершин, смежных с вершиной v, будем называть *окрестностью* вершины v и обозначать через $N(v)$.

Пусть G — граф, $A \subseteq V(G)$. Обозначим через $G[A]$ подграф, порождённый множеством A. Обозначим через $G \setminus A$ граф, полученный из G удалением всех вершин множества A. Используется обозначение $\mathrm{Free}(\mathcal{X})$ для класса графов, не содержащих порождённых подграфов из множества $\mathcal{X}$.

5-*Классом* в цикле C_{5n} назовём его максимальное по включению множество вершин, расстояние между которыми попарно кратно 5. Нетрудно видеть, что число 5-классов в любом таком цикле равно 5. Очевидно, что поскольку каждый квинтет состоит из 5 вершин, для любого графа G справедливо неравенство $5\mu_{\langle P_5\rangle}(G) \leqslant |V(G)|$.

Рассмотрим минимальный по включению вершин граф F, не принадлежащий классу $\mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$, в котором $|V(F)| \leqslant 5\mu_{\langle P_5\rangle}(F)+4$, т. е. значение $\mu_{\langle P_5\rangle}(F)$ максимально для данного числа вершин. Очевидно, что в любом его остовном надграфе F' любое множество вершин, порождающее какой-нибудь $\langle P_5\rangle$-подграф графа F, порождает $\langle P_5\rangle$-подграф графа F', поэтому $\beta_{\langle P_5\rangle}(F) \leqslant \beta_{\langle P_5\rangle}(F')$ и $\mu_{\langle P_5\rangle}(F) \leqslant \mu_{\langle P_5\rangle}(F')$. Однако значение $\mu_{\langle P_5\rangle}(F)$ максимально для данного числа вершин. Значит, справедливы следующие соотношения:

$$\mu_{\langle P_5\rangle}(F') = \mu_{\langle P_5\rangle}(F) < \beta_{\langle P_5\rangle}(F) \leqslant \beta_{\langle P_5\rangle}(F'),$$

т. е. $F' \notin \mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$.

Пусть F является подграфом какого-нибудь графа G. Тогда G содержит порождённый подграф, изоморфный F или одному из его остовных надграфов F', т. е. не является кёниговым относительно $\langle P_5\rangle$.

Если граф F, в котором $|V(F)| \leqslant 5\mu_{\langle P_5\rangle}(F) + 4$, является минимальным по включению вершин и рёбер графом, не принадлежащим $\mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$, будем называть его *минимальным запрещённым подграфом* данного класса. В дальнейшем будет показано, что класс $\mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$ полностью определяется именно такими запрещёнными графами, а значит, является *монотонным*, т. е. замкнутым относительно удаления вершин и рёбер.

Отметим, что в любом графе G выполняется неравенство $\mu_{\langle P_5\rangle}(G) \leqslant \beta_{\langle P_5\rangle}(G)$, поэтому для доказательства равенства этих величин в графе достаточно предъявить $\langle P_5\rangle$-упаковку и $\langle P_5\rangle$-покрытие графа G одинаковой мощности.

2. Запрещенные подграфы

Непосредственной проверкой легко установить, что графы $E_1, E_2, \ldots, E_{13}$, изображённые на рис. 1 и 2, не принадлежат классу $\mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$. Для каждого из них $\mu_{\langle P_5\rangle}(G) = 1$, $\beta_{\langle P_5\rangle}(G) = 2$, причём каждый из них состоит из не более чем 9 вершин. При этом каждый собственный подграф каждого из них кёнигов относительно $\langle P_5\rangle$. Таким образом, справедлива

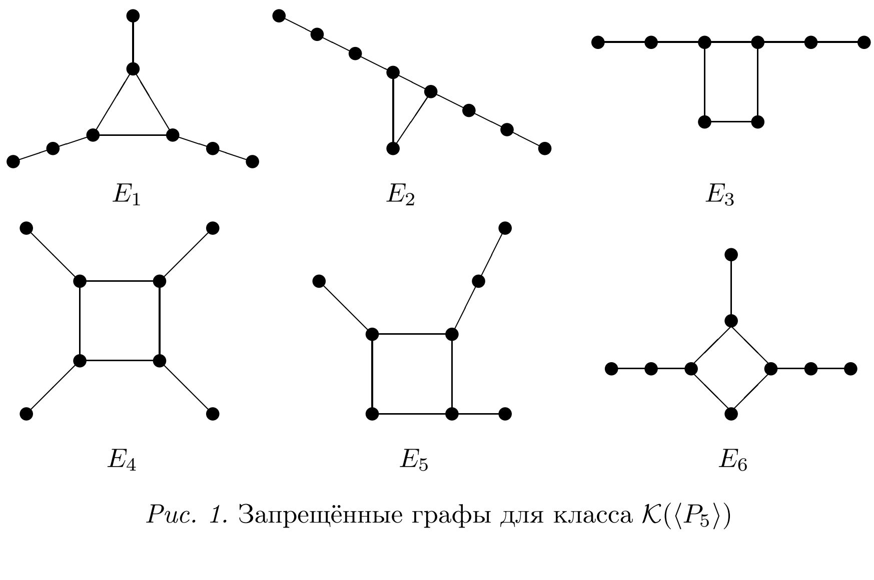

Рис. 1. Запрещённые графы для класса $\mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$

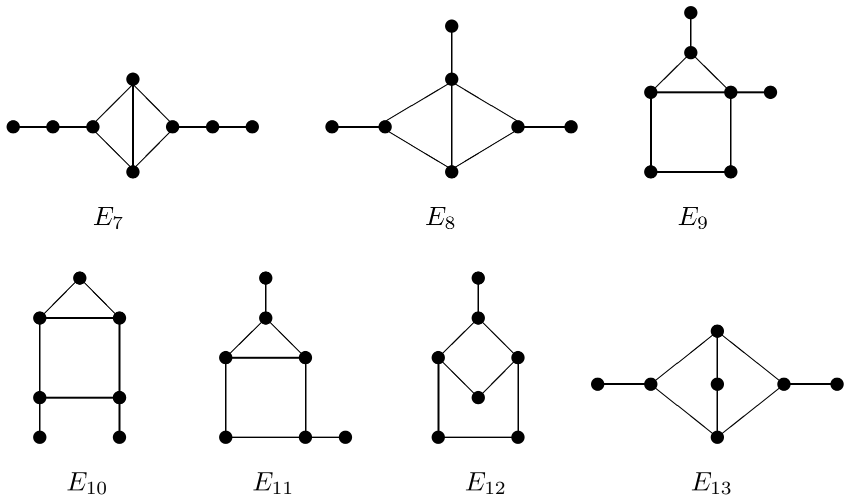

Рис. 2. Запрещённые графы для класса $\mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$

Лемма 1. *Графы $E_1, E_2, \ldots, E_{13}$ являются минимальными запрещёнными подграфами для $\mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$.*

В [17] доказано, что при любом $q \geqslant 4$ (а значит, и при $q = 5$) любой лес является кёниговым графом относительно P_q (это следует из теоремы 1 в [17]). Поскольку лес не содержит других подграфов, изоморфных графам из $\langle P_5 \rangle$, кроме P_5, справедлива

Лемма 2. *Любой лес является кёниговым графом относительно $\langle P_5 \rangle$.*

Рассмотрим теперь бесконечные серии минимальных запрещённых подграфов для класса $\mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$. Очевидно, что для любых $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $k \geqslant 2$ справедливо $\mu_{\langle P_5 \rangle}(C_{5k+i}) = \beta_{\langle P_5 \rangle}(C_{5k-i}) = k$, а также $\mu_{\langle P_5 \rangle}(C_{5+i}) = \beta_{\langle P_5 \rangle}(C_5) = 1$, поэтому и ввиду леммы 2 справедлива

Лемма 3. *Цикл C_n принадлежит классу $\mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$, если $n \leqslant 4$ или n кратно 5, и является минимальным запрещённым подграфом для $\mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$, если $n > 5$ и n не кратно 5.*

Рассмотрим семейство связных графов, полученных из простого цикла добавлением множества подграфов, изоморфных K_1 и K_2, так, что ровно одна вершина каждого добавленного подграфа смежна ровно с одной вершиной цикла. Будем называть такие графы *ежами*. Вершины степени больше двух в ежах будем называть *узлами*. Отметим, что число узлов не больше числа добавленных подграфов.

Обозначим через $A_1(n, k)$ ежа, полученного из C_n добавлением одного подграфа K_1 и одного подграфа K_2, а через $A_2(n, k)$ — ежа, полученного из C_n добавлением двух подграфов K_2. В обоих случаях k — расстояние между узлами графа или равно 0, если граф имеет один узел.

Обозначим через $A_3(k_1, k_2, k_3)$ ежа, полученного из $C_{k_1+k_2+k_3}$ добавлением трёх подграфов K_1. Здесь k_1, k_2, k_3 — длины путей, на которые делят цикл узлы графа (если граф имеет менее 3 узлов, то один или два параметра считаем равными 0).

Сформулируем и докажем условия, когда графы $A_1(n, k)$, $A_2(n, k)$ и $A_3(k_1, k_2, k_3)$ являются минимальными запрещёнными подграфами для класса $\mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$.

Лемма 4. *Графы $A_1(5t, 5k + 1)$ и $A_1(5t, 5k + 4)$ являются минимальными запрещёнными подграфами для класса $\mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$ при любых $t \geqslant 1$ и $0 \leqslant k < \frac{t}{2}$.*

Доказательство. Обозначим $n = 5t$. Пусть граф G изоморфен одному из графов $A_1(n, 5k+1)$, $A_1(n, 5k+4)$. Нетрудно видеть, что $|V(G)| = 5t + 3$ и $\mu_{\langle P_5\rangle}(G) = t$. Следовательно, выполняется неравенство

$$|V(G)| \leqslant 5\mu_{\langle P_5\rangle}(G) + 4. \tag{1}$$

Предположим, что $\beta_{\langle P_5\rangle}(G) = t$. Любое $\langle P_5\rangle$-покрытие графа G включает в себя $\langle P_5\rangle$-покрытие цикла C_n в этом графе, но любое наименьшее $\langle P_5\rangle$-покрытие этого цикла является его 5-классом и содержит t вершин.

Докажем, что никакой 5-класс цикла C_n не является $\langle P_5\rangle$-покрытием графа G.

Пусть C — 5-класс цикла C_n. Возможны 2 случая.

• Один из узлов графа G смежен с вершиной из C. Тогда расстояние от него до другой ближайшей вершины из C равно 4, т. е. узел, смежная с ним вершина, не принадлежащая циклу, и ещё три вершины цикла порождают квинтет, не покрытый множеством C.

• Ни один узел не смежен с вершиной из C. Так как расстояние между узлами равно $5k + 1$ или $5k + 4$, ни один узел не содержится в C. Рассмотрим узел графа G, смежный с нецикловой вершиной степени 2. Очевидно, что расстояние от данного узла до одной из вершин множества C равно 3. Тогда узел, две вершины, не принадлежащие циклу, и ещё две вершины цикла порождают квинтет, не покрытый множеством C.

Итак, никакое наименьшее $\langle P_5\rangle$-покрытие цикла графа G не является $\langle P_5\rangle$-покрытием G. Следовательно, $\beta_{\langle P_5\rangle}(G) > t$ и $G \notin \mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$.

Рассмотрим подграф X графа G, полученный удалением вершины степени 1, не смежной с узлом, или ребра, инцидентного ей. Его компонента связности, не являющаяся изолированной вершиной, будет ежом, полученным из цикла C_n добавлением двух подграфов K_1. Очевидно, что $\mu_{\langle P_5\rangle}(X) = t$. В свою очередь, 5-класс цикла, не содержащий вершин, смежных с узлами, является $\langle P_5\rangle$-покрытием графа X, т. е. $\beta_{\langle P_5\rangle}(X) = t$.

Рассмотрим подграф X графа G, полученный удалением вершины добавленного подграфа, смежной с узлом, или ребра, соединяющего её с соответствующим узлом. Его компонента связности, имеющая более двух вершин, является ежом, полученным из цикла C_n добавлением одного подграфа K_1 или K_2. Нетрудно видеть, что $\mu_{\langle P_5\rangle}(X) = \beta_{\langle P_5\rangle}(X) = t$.

Другие подграфы графа G будут лесами или изоморфны циклу C_{5t}. По леммам 2 и 3 все они кёниговы относительно $\langle P_5\rangle$.

Итак, G является минимальным по включению вершин и рёбер графом, для которого $\mu_{\langle P_5\rangle}(G) < \beta_{\langle P_5\rangle}(G)$. Отсюда и ввиду неравенства (1) следует, что G является минимальным запрещённым подграфом для класса $\mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Графы $A_2(5t, 5k+2)$ и $A_2(5t, 5k+3)$ являются минимальными запрещёнными подграфами для класса $\mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$ при любых $t \geqslant 1$ и $0 \leqslant k < \frac{t}{2}$.*

Доказательство. Обозначим $n = 5t$. Пусть граф G изоморфен одному из графов $A_2(n, 5k+2)$, $A_2(n, 5k+3)$. Нетрудно видеть, что $|V(G)| = 5t + 4$ и $\mu_{\langle P_5\rangle}(G) = t$. Следовательно, выполняется неравенство

$$|V(G)| \leqslant 5\mu_{\langle P_5\rangle}(G) + 4. \tag{2}$$

Как и в доказательстве леммы 4, для проверки неравенства $\beta_{\langle P_5\rangle}(G) > \mu_{\langle P_5\rangle}(G)$ достаточно убедиться, что никакой 5-класс цикла C_n не является $\langle P_5\rangle$-покрытием графа G.

Пусть C — 5-класс цикла C_n. Поскольку $k \equiv 2 \pmod 5$ или $k \equiv 3 \pmod 5$, узлы графа G принадлежат различным 5-классам его цикла. Рассмотрим узел, не принадлежащий C. Поскольку расстояния между ближайшими вершинами любого 5-класса равно 5, существует путь от данного узла до какой-нибудь вершины множества C длины 3 или 4. Тогда узел, две вершины, не принадлежащие циклу, и две вершины этого пути порождают квинтет, не покрытый множеством C.

Итак, никакое наименьшее $\langle P_5\rangle$-покрытие цикла графа G не является $\langle P_5\rangle$-покрытием G. Следовательно, $\beta_{\langle P_5\rangle}(G) > t$ и $G \notin \mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$.

Рассмотрим собственный подграф X графа G, содержащий цикл. Он содержит компоненту связности X' с циклом и, быть может, компоненты связности из 1 или 2 вершин. Нетрудно видеть, что $\mu_{\langle P_5\rangle}(X) = t$. Если X' содержит 2 узла, то один из них смежен с висячей вершиной. Обозначим через v другой узел, или единственный узел X', или произвольную вершину цикла, если X' не содержит узлов. Нетрудно видеть, что 5-класс цикла, содержащий v, является $\langle P_5\rangle$-покрытием графа X, т. е. $\beta_{\langle P_5\rangle}(X) = t$.

Все другие собственные подграфы графа G являются лесами. Следовательно, по лемме 2 любой собственный подграф графа G кёнигов относительно $\langle P_5\rangle$.

Итак, G является минимальным по включению вершин и рёбер графом, для которого $\mu_{\langle P_5\rangle}(G) < \beta_{\langle P_5\rangle}(G)$. Отсюда в силу неравенства (1) следует, что G является минимальным запрещённым подграфом для класса $\mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для любых $k_1, k_2, k_3 \geqslant 0$ графы $A_3(5k_1+1, 5k_2+1, 5k_3+3)$ и $A_3(5k_1+4, 5k_2+4, 5k_3+2)$ являются минимальными запрещёнными подграфами для класса $\mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$.*

Доказательство. Пусть G изоморфен одному из графов $A_3(5k_1+1, 5k_2+1, 5k_3+3)$, $A_3(5k_1+4, 5k_2+4, 5k_3+2)$. Обозначим $t = k_1+k_2+k_3+1$ в первом случае и $t = k_1+k_2+k_3+2$ — во втором. Нетрудно видеть, что $|V(G)| = 5t+3$ и $\mu_{\langle P_5\rangle}(G) = t$. Следовательно, выполняется неравенство

$$|V(G)| \leqslant 5\mu_{\langle P_5\rangle}(G) + 4. \tag{3}$$

Как и в доказательстве леммы 4, для проверки неравенства $\beta_{\langle P_5\rangle}(G) > \mu_{\langle P_5\rangle}(G)$ достаточно убедиться, что никакой 5-класс цикла C_n не является $\langle P_5\rangle$-покрытием графа G.

Пусть C — 5-класс цикла C_{5t}. Поскольку два пути между узлами имеют длины $5k_1+1$, $5k_2+1$ либо длины $5k_1+4$, $5k_2+4$, граф G содержит три узла и они принадлежат трём последовательным 5-классам его цикла. Тогда существует вершина множества C, смежная с узлом графа. Следовательно, существует путь длины 4 от данного узла до какой-нибудь вершины множества C. Тогда узел, вершина, не принадлежащая циклу и смежная с ним, и три вершины этого пути порождают квинтет, не покрытый множеством C.

Итак, никакое наименьшее $\langle P_5\rangle$-покрытие цикла графа G не является $\langle P_5\rangle$-покрытием G. Значит, $\beta_{\langle P_5\rangle}(G) > t$ и $G \notin \mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$.

Все собственные подграфы графа G являются также собственными подграфами графов $A_1(5t, 5k_1+1)$, $A_1(5t, 5k_2+1)$, $A_2(5t, 5k_3+3)$, $A_1(5t, 5k_1+4)$, $A_1(5t, 5k_2+4)$, $A_2(5t, 5k_3+2)$ или лесами, а значит, из доказательства лемм 4, 5 и по лемме 2 любой собственный подграф графа G кёнигов относительно $\langle P_5\rangle$.

Итак, G является минимальным по включению вершин и рёбер графом, не принадлежащим $\mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$. Отсюда ввиду неравенства (3) следует, что G является минимальным запрещённым подграфом для класса $\mathcal{K}(\langle P_5\rangle)$. Лемма 6 доказана.

Выберем в цикле C_n вершины x и y (не обязательно различные). Добавим к C_n две вершины, одна из которых смежна с x, а другая — с обеими соседними вершинами y. Полученный граф обозначим через $B(n, k)$, где k — расстояние между x и y. Вершины степени больше двух в графах такого типа будем называть *узлами*. Отметим, что число узлов всегда равно 3, если $k \neq 1$, и расстояние между двумя узлами всегда равно 2. Такие узлы назовём *связанными*, а третий узел — *обособленным*.

Лемма 7. *Для любых $t \geqslant 1$ и $1 \leqslant k \leqslant \frac{t}{2}$ граф $B(5t, 5k)$ является минимальным запрещённым подграфом для класса $\mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$.*

Доказательство. Пусть граф G изоморфен $B(5t, 5k)$. Нетрудно видеть, что $|V(G)| = 5t + 2$ и $\mu_{\langle P_5 \rangle}(G) = t$. Следовательно, выполняется неравенство

$$|V(G)| \leqslant 5\mu_{\langle P_5 \rangle}(G) + 4. \tag{4}$$

Как и в доказательстве леммы 4, для проверки неравенства $\beta_{\langle P_5 \rangle}(G) > \mu_{\langle P_5 \rangle}(G)$ достаточно убедиться, что никакой 5-класс цикла C_n не является $\langle P_5 \rangle$-покрытием графа G.

Пусть C — 5-класс цикла C_{5t}. Нетрудно видеть, что 5-класс цикла, содержащий обособленный узел, содержит также общую соседнюю вершину связанных узлов. Таким образом, все узлы G принадлежат трём последовательным 5-классам его цикла. Тогда существует вершина множества C, смежная с узлом графа. Следовательно, существует путь длины 4 от данного узла до какой-нибудь вершины множества C. Тогда узел, добавленная вершина, смежная с ним, и три вершины этого пути порождают квинтет, не покрытый множеством C.

Итак, никакое наименьшее $\langle P_5 \rangle$-покрытие цикла графа G не является $\langle P_5 \rangle$-покрытием G. Следовательно, $\beta_{\langle P_5 \rangle}(G) > t$ и $G \notin \mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$.

Рассмотрим собственный подграф X графа G, содержащий цикл C_4. Он содержит компоненту связности X' с циклом и, быть может, компоненты связности, являющиеся деревьями. Из леммы 2 следует, что $X \in \mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$ тогда и только тогда, когда $X' \in \mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$.

Если компонента X' содержит также цикл C_{5t}, то нетрудно видеть, что $\mu_{\langle P_5 \rangle}(X) = t$, а 5-класс большого цикла, содержащий один из узлов, является $\langle P_5 \rangle$-покрытием графа X, т. е. $\beta_{\langle P_5 \rangle}(X) = t$.

Предположим, что X' не содержит цикла C_{5t}, тогда он может быть получен из графа P_n добавлением вершины y, смежной с двумя вершинами пути на расстоянии 2, где $n \leqslant 5t$, и, возможно, добавлением висячей вершины к вершине пути, находящейся на расстоянии $5k$ от y. Докажем, что $X' \in \mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$.

Доказательство проведём индукцией по $|V(X')|$. Если $|V(X')| \leqslant 5$, то очевидно, что $\mu_{\langle P_5 \rangle}(X') = \beta_{\langle P_5 \rangle}(X')$ и обе величины равны 0 либо 1.

Далее пусть $|V(X')| \geqslant 6$ и для любого собственного подграфа H графа X' выполняется $\mu_{\langle P_5 \rangle}(H) = \beta_{\langle P_5 \rangle}(H)$. Если $n = 9$ и добавленная вершина центральная в графе X', то $\mu_{\langle P_5 \rangle}(X') = 2$ и две центральные вершины графа образуют $\langle P_5 \rangle$-покрытие графа X', т. е. $\beta_{\langle P_5 \rangle}(X') = 2$. В остальных случаях существует квинтет $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ такой, что степень v_1 равна 1 в исходном пути, а вершина y не смежна с v_4 либо смежна с v_4 и v_2.

Если y смежна с v_1, v_3, то обозначим $Q = (y, v_1, v_2, v_3, v_4)$, $z = v_4$. Если y смежна с v_2, v_4, то $Q = (v_1, v_2, v_3, v_4, y)$, $z = v_4$. Если существует висячая вершина u, смежная с v_4, то $Q = (v_1, v_2, v_3, v_4, u)$, $z = v_4$. Иначе обозначим $Q = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, $z = v_5$.

Рассмотрим граф H, полученный из графа X' удалением вершин квинтета Q. Пусть M — наибольшая $\langle P_5 \rangle$-упаковка, а C — наименьшее $\langle P_5 \rangle$-покрытие графа H. По предположению индукции $|M| = |C|$. Добавив к M квинтет Q, получим $\langle P_5 \rangle$-упаковку мощности $|M| + 1$. Добавив к C вершину z, получим $\langle P_5 \rangle$-покрытие той же мощности графа X'. Следовательно, $\mu_{\langle P_5 \rangle}(X') = \beta_{\langle P_5 \rangle}(X')$ и $X' \in \mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$.

Все остальные собственные подграфы графа G являются также собственными подграфами графа $A_3(5k-1, 5(t-k)-1, 2)$ или лесами, а значит, из доказательства леммы 6 и по лемме 2 любой подграф графа G кёнигов относительно $\langle P_5 \rangle$.

Итак, G является минимальным по включению вершин и рёбер графом, не принадлежащим $\mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$. Стало быть, из неравенства (4) следует, что G является минимальным запрещённым подграфом для класса $\mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$. Лемма 7 доказана.

3. ST_5-графы

Опишем процедуру ST_5-расширения и класс ST_5-графов, а также докажем, что ST_5-расширение псевдографов всегда даёт кёниговы графы относительно $\langle P_5 \rangle$.

Определение 1. Назовём связный подграф H графа G *висячим*, если существует вершина $c \in V(G \setminus H)$, смежная хотя бы с одной из вершин H, такая, что H является компонентой связности графа $G \setminus \{c\}$. Вершину c будем называть *контактной вершиной* висячего подграфа H.

Определение 2 [18]**.** Операция *замены графом H вершины x* состоит в следующем:

(1) эта вершина удаляется из графа;

(2) к графу добавляется несколько новых вершин, соединённых между собой так, что они порождают подграф, изоморфный H;

(3) каждая новая вершина соединяется ребром со всеми вершинами множества $N(x)$ в исходном графе.

Рассмотрим класс графов $\mathrm{Free}(\langle P_5 \rangle)$. Каждая компонента связности такого графа не содержит квинтетов, т. е. является графом с числом вершин, не превышающим 4, или изоморфна одному из графов S_k, S_k+e или $S_{k,m}$, где k,m — произвольные натуральные числа. Заметим, что $K_2 = S_1$, $P_3 = S_2$, $K_3 = S_2 + e$, $P_4 = S_{1,1}$ с точностью до изоморфизма. Будем называть F_5-графом любой граф из множества $\{K_1, C_4, K_4 - e, K_4, S_k, S_k + e, S_{k,m}, k, m \in \mathbb{N}\}$. Таким образом, каждая компонента связности графа класса $\mathrm{Free}(\langle P_5 \rangle)$ изоморфна одному из F_5-графов.

Определение 3. Пусть H — псевдограф (граф, в котором допустимы петли и кратные рёбра). Процедура *ST_5-расширения* H состоит в следующем.

(1) Каждое цикловое ребро (ребро, принадлежащее какому-нибудь циклу, в том числе кратные рёбра и петли) псевдографа H подразбить четырьмя вершинами. Все вершины, кроме добавленных при подразбиении, будем называть *старыми*. Вершины, добавленные при подразбиении, будем называть *ближними*, если они смежны со старыми вершинами, и *дальними* в противном случае.

(2) Заменить некоторые ближние вершины и некоторые вершины степени 2, не являющиеся цикловыми, пустыми графами произвольных размеров. Никакие две заменяемые вершины не должны быть смежны между собой.

(3) Добавить к графу несколько вершин, соединив каждую из них ребром с какой-нибудь дальней вершиной.

(4) Добавить к графу несколько висячих F_5-подграфов так, что контактная вершина каждого из них является старой и не заменена пустым графом на шаге 2.

(5) Добавить к графу несколько подграфов, изоморфных S_m, где m — произвольные натуральные числа, и соединить центральную вершину (или, возможно, обе вершины графа в случае $m = 1$) каждого из них ровно с одной центральной вершиной какого-нибудь висячего подграфа, изоморфного S_k или K_1, добавленного на предыдущем шаге. При этом если $k = 1$, то вершина подграфа S_1, с которой соединяются центральные вершины подграфов S_m, должна быть одной и той же.

Будем называть полученный граф *ST_5-расширением* псевдографа H. Назовём *ST_5-графом* граф, который является ST_5-расширением произвольного псевдографа.

Лемма 8. *Любой подграф любого ST_5-графа также является ST_5-графом.*

Доказательство. Пусть ST_5-граф G получен ST_5-расширением псевдографа H. Любой подграф графа G может быть получен из него удалением некоторых рёбер и удалением некоторых изолированных вершин полученного графа.

Очевидно, что удаление изолированных вершин из ST_5-графа также порождает ST_5-граф. Таким образом, достаточно показать, что граф, полученный удалением ребра из ST_5-графа, также является ST_5-графом.

Пусть G' — подграф графа G, полученный из него удалением одного ребра e.

Если e — перешеек в графе G, то e либо является нециклевым ребром псевдографа H, либо принадлежит висячему подграфу, добавленному на шаге 3, 4 или 5, либо соединяет вершину такого висячего подграфа с его контактной вершиной. В первом случае G' может быть получен ST_5-расширением псевдографа, полученного из H удалением ребра e. Иначе G' состоит из подграфа, являющегося ST_5-расширением H, и графа, который либо является F_5-графом и может быть получен ST_5-расширением K_1, либо получен из графа, изоморфного S_k, добавлением к нему висячих F_5-подграфов, а значит, также является ST_5-графом. Иначе говоря, G' может быть получен ST_5-расширением псевдографа $H \cup K_1$ или $H \cup S_k$ соответственно.

Если e не является перешейком в G, то возможны следующие случаи.

(1) Ребро e принадлежит висячему подграфу T, добавленному на шаге 4 или 5, или соединяет вершину T с его контактной вершиной. Тогда подграф, полученный из T удалением ребра e, также является висячим F_5-подграфом в графе G' или двумя висячими F_5-подграфами, если e — перешеек в T. Следовательно, G' может быть получен ST_5-расширением псевдографа H.

(2) Ребро e принадлежит циклу из 4 вершин, не входящему в висячий F_5-подграф. Тогда его удаление превращает одну из вершин, полученную при замене вершины независимым множеством (шаг 2), в висячую вершину. Такая вершина смежна со старой вершиной или дальней вершиной, т. е. может быть добавлена на шаге 4 или 3. Таким образом, G' может быть получен ST_5-расширением псевдографа H.

(3) Ребро e не принадлежит циклу из 3 или 4 вершин. Тогда по крайней мере одна из вершин, инцидентных ему, добавлена при подразбиении циклового ребра на шаге 1. Обозначим через e_0 это ребро псевдографа H. Удаление e разрушает по крайней мере один из циклов графа G. Обозначим через A множество вершин графов G и G', входящих в графе G в цикл из 5 и более вершин и не входящих ни в один такой цикл в графе G'. Удалим из A вершины, добавленные на шаге 2, полученное множество обозначим через A_0.

Нетрудно видеть, что если в графе G' все вершины множества A_0 объявить старыми, то остаются корректными все операции по добавлению вершин и висячих подграфов на шагах 2, 4 или 5, а операцию добавления висячих вершин на шаге 3 можно теперь совершать на шаге 4.

Обозначим через H' псевдограф, полученный из H удалением ребра e_0 и всех рёбер, перестающих быть цикловыми после удаления e_0, и добавлением к нему множества вершин A_0 и всех рёбер, соединяющих в графе G' вершины A_0 между собой и со старыми вершинами графа G'. Тогда граф G' может быть получен ST_5-расширением псевдографа H'. Лемма 8 доказана.

Теорема 1. *Любой ST_5-граф является кёниговым графом относительно $\langle P_5 \rangle$.*

Доказательство. Пусть G — граф, полученный ST_5-расширением произвольного псевдографа H. Докажем, что $\mu_{\langle P_5 \rangle}(G) = \beta_{\langle P_5 \rangle}(G)$.

Доказательство проведём индукцией по числу рёбер графа G. Если каждая его компонента связности является F_5-графом, то G не содержит квинтетов и $\mu_{\langle P_5 \rangle}(G) = \beta_{\langle P_5 \rangle}(G) = 0$.

Предположим, что G содержит хотя бы один квинтет и для любого подграфа G' графа G с меньшим числом рёбер выполняется $\mu_{\langle P_5 \rangle}(G') = \beta_{\langle P_5 \rangle}(G')$. Можно считать G связным. Поскольку G содержит хотя бы один квинтет, для него выполняется одно из следующих условий.

(1) В G имеется висячий F_5-подграф T с контактной вершиной y такой, что $G[V(T) \cup \{y\}]$ содержит квинтет, или пара висячих F_5-подграфов T_1 и T_2 с общей контактной вершиной y такие, что $G[V(T_1) \cup V(T_2) \cup \{y\}]$ содержит квинтет. Это возможно в следующих случаях:

- T изоморфен C_4, $K_4 - e$ или K_4;
- T изоморфен $S_{k,m}$, где $k, m \in \mathbb{N}$, причём y смежна хотя бы с одним из листов графа T или с обеими его центральными вершинами;
- T изоморфен $S_k + e$, где $k \geqslant 3$, причём y смежна хотя бы с одной вершиной T, не являющейся центральной;
- T изоморфен S_k, где $k \geqslant 3$, причём y смежна хотя бы с двумя листами графа T.
- оба T_1 и T_2 отличны от K_1.
- один из T_1 и T_2 изоморфен K_1, а второй содержит не менее 3 вершин, причём если он изоморфен S_k, то y смежна с одним из его листов.

Отметим, что любой квинтет графа $G[V(T) \cup \{y\}]$ или $G[V(T_1) \cup V(T_2) \cup \{y\}]$ содержит вершину y. Пусть Q — один из таких квинтетов. Рассмотрим граф G', полученный из графа G удалением вершин квинтета Q. Пусть M — наибольшая $\langle P_5 \rangle$-упаковка, а C — наименьшее $\langle P_5 \rangle$-покрытие графа G'. По предположению индукции $|M| = |C|$. Добавив к M квинтет Q, получим $\langle P_5 \rangle$-упаковку мощности $|M| + 1$. Добавив к C вершину y, получим $\langle P_5 \rangle$-покрытие той же мощности графа G.

(2) Граф G не содержит висячих F_5-подграфов из п. (1), но содержит цикл из 5 и более вершин. Обозначим через D множество всех

вершин графа G, принадлежащих таким циклам, а через C_0 — множество всех цикловых вершин графа H (все они являются старыми в графе G и содержатся в D). Каждой вершине из C_0 соответствует хотя бы один квинтет, содержащий данную вершину, две ближние вершины, смежные с ней, и две дальние вершины, находящиеся от неё на расстоянии 2. Обозначим через M_0 множество таких квинтетов. Все квинтеты в M_0 попарно не содержат общих вершин и полностью содержатся в D. Очевидно, что $|C_0| = |M_0|$.

Рассмотрим граф $G' = G \setminus D$. Пусть M — наибольшая $\langle P_5\rangle$-упаковка, а C — наименьшее $\langle P_5\rangle$-покрытие графа G'. По предположению индукции $|M| = |C|$. Множество $M \cup M_0$ является $\langle P_5\rangle$-упаковкой графа G.

Покажем, что $C \cup C_0$ — $\langle P_5\rangle$-покрытие графа G. Рассмотрим две вершины $x, y \in C_0$, смежные в псевдографе H (x и y могут совпадать, если (x, x) — петля в H). Нетрудно видеть, что процедура ST_5-расширения превращает ребро (x, y) псевдографа H в подграф графа G, изоморфный F_5-графу $S_{k+1,m+1}$, где k и m — количество вершин, добавленных на шагах 2 и 3 в данный подграф.

Отметим также, что если вершина $v \in D$ смежна в графе G с вершиной графа G', не добавленной на шаге 3, то $v \in C_0$. Таким образом, $G \setminus C_0$ есть объединение графа G' и множества графов $S_{k,m}$ и содержит то же множество квинтетов, что и G'. Иными словами, C_0 покрывает все квинтеты графа G, не покрытые C, т. е. $C \cup C_0$ — $\langle P_5\rangle$-покрытие графа G.

Поскольку $|C_0| = |M_0|$, имеем $\mu_{\langle P_5\rangle}(G) = \beta_{\langle P_5\rangle}(G)$.

(3) В G нет циклов из 5 и более вершин и никакие висячие F_5-подграфы вместе с контактной вершиной не содержат квинтета. Псевдограф H в этом случае является деревом.

Отметим, что циклы из трёх вершин в графе G могут быть образованы только вершинами висячих F_5-подграфов и их контактными вершинами, а циклы из четырёх вершин помимо этого могут быть образованы вершинами, заменёнными независимыми множествами на шаге 2. Поскольку такие вершины не смежны между собой, граф G содержит висячий F_5-подграф: это либо подграф, добавленный на одном из шагов 4, 5, либо подграф, образованный старыми вершинами и, быть может, вершинами, добавленными на шагах 2, 4, 5.

Не теряя общности, можем считать, что все максимальные по включению вершин висячие F_5-подграфы графа G добавлены на шаге 4. В этом случае либо дерево H состоит из одной вершины (но тогда легко видеть, что $\mu_{\langle P_5\rangle}(G) = \beta_{\langle P_5\rangle}(G) = 0$, иначе имеем случай 1), либо к каждому его листу на шаге 4 добавлен как минимум один висячий F_5-подграф.

Пусть y — один из листов графа H, T — объединение висячих F_5-подграфов графа G с контактной вершиной y, а x — сосед y в дереве H.

Граф $G[V(T) \cup \{y\}]$ является F_5-графом, но не является висячим подграфом в графе G, иначе каждая компонента T не является максимальным по включению висячим F_5-подграфом. Следовательно, вершина x была заменена независимым множеством на шаге 2. Иными словами, в графе G вершина y смежна с попарно не смежными вершинами $x_1, x_2, \dots x_m$, где $m \geqslant 2$, каждая из которых смежна ещё ровно с одной вершиной.

Тогда $G[V(T) \cup \{y, x_1, x_2, \dots x_m\}]$ является висячим подграфом в G, а значит, содержит квинтет, иначе каждая компонента T не является максимальным по включению висячим F_5-подграфом. Такой квинтет обязательно проходит через y и одну из вершин $x_1, x_2, \dots x_m$. Итак, пусть (x_1, y, z_1, z_2, z_3) — квинтет в графе G, причём $\{z_1, z_2, z_3\} \subseteq V(T)$.

Рассмотрим граф $G' = G \setminus \{z_1, z_2, z_3, y\}$. Пусть M — наибольшая $\langle P_5 \rangle$-упаковка, а C — наименьшее $\langle P_5 \rangle$-покрытие графа G'. По предположению индукции $|M| = |C|$. Если один из квинтетов M содержит x_1, заменим в нём вершину x_1 на x_2, т. е. не уменьшая общности считаем, что M не содержит квинтетов с вершиной x_1. Тогда, добавив к M квинтет (x_1, y, z_1, z_2, z_3), получим $\langle P_5 \rangle$-упаковку мощности $|M| + 1$. Добавив к C вершину y, получим $\langle P_5 \rangle$-покрытие той же мощности графа G.

Итак, $\mu_{\langle P_5 \rangle}(G) = \beta_{\langle P_5 \rangle}(G)$. По лемме 8 любой подграф графа G также является ST_5-графом. Следовательно, любой ST_5-граф является кёниговым графом относительно $\langle P_5 \rangle$. Теорема 1 доказана.

4. Полное описание графов класса $\mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$

Покажем, что любой кёнигов граф относительно $\langle P_5 \rangle$ является ST_5-расширением какого-либо псевдографа, а также докажем, что описанные в разд. 2 запрещённые подграфы полностью описывают данный класс графов.

Введём обозначение $\mathcal{F}$ для множества всех запрещённых графов, описанных в леммах 1, 3–7:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = \{E_1, E_2, \dots, E_{13}\} &\cup \{C_n \mid n > 5 \text{ и не кратно } 5\} \\
&\cup \left\{A_1(5t, 5k+1), A_1(5t, 5k+4) \mid t \geqslant 1,\ 0 \leqslant k < \frac{t}{2}\right\} \\
&\cup \left\{A_2(5t, 5k+2), A_2(5t, 5k+3) \mid t \geqslant 1,\ 0 \leqslant k < \frac{t}{2}\right\} \\
&\cup \left\{A_3(5p+1, 5q+1, 5r+3), A_3(5p+4, 5q+4, 5r+2) \mid p, q, r \geqslant 0\right\} \\
&\cup \left\{B(5t, 5k) \mid t \geqslant 1,\ 1 \leqslant k \leqslant \frac{t}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Теорема 2. *Следующие утверждения равносильны для графа* G:
(1) *граф* G — *кёнигов граф относительно* $\langle P_5 \rangle$;
(2) *граф* G *не содержит подграфов из множества* $\mathcal{F}$;
(3) *граф* G *является* ST_5*-расширением некоторого псевдографа.*

Доказательство. Из лемм 1, 3–7 и замечания в конце разд. 1 следует, что (1) влечёт (2). Из теоремы 1 следует, что (3) влечёт (1). Покажем, что из (2) следует (3).

Пусть G — связный граф, не содержащий подграфов из $\mathcal{F}$. Пусть T_1, $T_2, \dots, T_n$ — висячие подграфы графа G, каждый из которых изоморфен S_k, где k — различные натуральные числа, а x — их общая контактная вершина, причём x смежна только с центральными вершинами подграфов $T_1, T_2, \dots, T_n$ и не является контактной вершиной для других висячих F_5-подграфов, кроме, возможно, подграфов K_1. Обозначим через X множество всех таких вершин x в графе G.

Удалим из G максимальный набор вершинно не пересекающихся максимальных висячих F_5-подграфов. Если в полученном графе есть висячие подграфы, изоморфные K_1 или S_k, где $k \in \mathbb{N}$, ровно одна центральная вершина которых принадлежит X, то удалим также их. Обозначим полученный граф через G_0 и покажем, что в нём нет треугольников. Предположим, что G_0 содержит клику размера 4 и вершины x, y, z, u попарно смежны в этом графе. Рассмотрим следующие случаи.

(1) В G существует вершина v, смежная с двумя вершинами из множества $\{x, y, z, u\}$. Не уменьшая общности, предположим, что v смежна с x и y. Поскольку ни один из 4-вершинных подграфов, порождённых вершинами множества $\{x, y, z, u, v\}$, не является висячим подграфом в G, по крайней мере две из этих вершин смежны с другими вершинами этого графа. Обозначим эти вершины через a и b.

Если вершины a и b совпадают и имеют по крайней мере одного соседа среди вершин z, u, v, то G содержит подграф C_6. Иначе, если одна из вершин a и b смежна с z или u, а другая — с v, то G содержит подграф E_{11}. Во всех остальных случаях если одна из вершин a и b смежна с одной из вершин z, u, v, то G содержит подграф E_8.

Таким образом, не существует вершин, смежных с z, u, v. Но тогда существует вершина a, смежная с x и b, которая смежна с y. Поскольку подграф $S_k + e$, содержащий вершины x, v, z, u, a, не является висячим подграфом в графе G (здесь и далее имеется в виду подграф, состоящий из вершин x, v, z, u, a и других соседей x, кроме y, если таковые существуют), вершина a смежна с вершиной $c \in V(G) \setminus \{x, y, z, u, v\}$ (на самом деле, какой-то из соседей x смежен с c, но, не уменьшая общности, считаем, что именно этот сосед обозначен через a).

Если $a = b$, то G содержит подграф E_{12}. Иначе, повторяя рассуждения выше, можно показать, что вершина b смежна с вершиной $d \in V(G) \setminus \{x, y, z, u, v\}$. Если $\{c, d\} \cap \{a, b\} \neq \varnothing$ или $c = d$, то G содержит подграф C_6. Иначе G содержит подграф E_3.

(2) В G не существует вершины, смежной с двумя вершинами из множества $\{x, y, z, u\}$. Поскольку подграфы K_4, C_3, порождённые вершинами множества x, y, z, u, не являются висячими подграфами в графе G, по крайней мере две из этих вершин смежны с другими различными вершинами этого графа. Пусть a смежна с x, а b смежна с y в графе G, причём a и b не совпадают и не смежны с другими вершинами данной клики. Отметим также, что a и b не смежны между собой и не имеют общих соседей, иначе G содержит подграф C_6.

Поскольку подграф $S_k + e$, содержащий вершины a, x, z, u, не является висячим подграфом в графе G, по крайней мере одна из вершин a, z, u смежна с вершиной данного графа, отличной от y. Аналогично по крайней мере одна из вершин b, u, z смежна с вершиной данного графа, отличной от x. С точностью до симметрии возможны следующие случаи.

• Существует вершина c, смежная с a и b. Тогда G содержит подграф C_7.

• Существует вершина c, смежная с z. Тогда G содержит подграф E_8.

• Существует вершина c, смежная с a, и вершина d, смежная с b. Тогда G содержит подграф E_3.

Итак, граф G_0 не содержит подграфа K_4. Предположим, что G_0 содержит подграф 3-fan. Пусть x, y, z, u, v — вершины графа G_0, причём данный граф содержит все рёбра между ними, кроме (z, x) и (y, u), а также, возможно, кроме (x, u).

Поскольку граф, изоморфный $S_{k,m}$, с центральными вершинами y, z и цикл, образованный вершинами x, y, z, u (если G_0 содержит ребро (x, u)), не являются висячими подграфами с контактной вершиной v в графе G, выполняется одно из следующих условий с точностью до симметрии.

• Существует вершина a, отличная от y, u и v, смежная с x. Заметим, что a не смежна с вершинами y, z, u, v, иначе G содержит подграф C_6.

Поскольку подграф, порождённый вершинами y, z, u, v, не является висячим подграфом с контактной вершиной x в графе G, по крайней мере одна из вершин y, z, u, v смежна с другими вершинами этого графа, отличными от x. Но тогда G содержит один из подграфов E_9, E_{11}.

Заметим, что если в графе G есть ребро (x, u), то все вершины x, y, z, u симметричны, поэтому ни одна из них не смежна с другими вершинами, кроме x, y, z, u, v. В этом случае в графе G цикл (x, y, z, u, x) является висячим F_5-подграфом; противоречие. Таким образом, можно считать, что вершины x и u не смежны.

• Не существует вершин, отличных от y, z и v, смежных с x и u. Тогда существует вершина a, смежная с y, и вершина b, смежная с a. Заметим, что a и b не смежны с вершинами z, v и с соседями v, а также x не смежна с u, иначе G содержит подграф C_6 или подграф, аналогичный предыдущему случаю.

Поскольку граф, изоморфный $S_k + e$, с центральной вершиной v не является висячим подграфом с контактной вершиной y в графе G, существует вершина $c \notin \{x, y, z, u, v, a, b\}$, смежная с вершиной z, или пара смежных вершин c, d, отличных от a и b, одна из которых смежна с v. В первом случае G содержит подграф $A_1(5, 1)$, а во втором — $A_2(5, 2)$.

Итак, граф G_0 не содержит подграфа 3-fan. Предположим, что G_0 содержит подграф $K_4 - e$. Пусть x, y, z, u — вершины графа G_0, причём данный граф содержит все рёбра между ними, кроме (z, u), и пары смежных вершин, кроме x, y, не имеют общих соседей.

Предположим, что в G ни одна вершина множества $N(x) \cap N(y)$ не смежна с другими вершинами этого графа, кроме x, y. Тогда в G существует путь x, a_1, a_2, a_3, где a_1, a_2 не совпадают с y, иначе $x \in X$ и x является центральной вершиной висячего подграфа, изоморфного S_k.

Предположим, что $a_3 = y$. Тогда не существует вершины, смежной одновременно с двумя вершинами из x, y, z, u, a_1, a_2, образующими ребро, кроме пары x, y, иначе G содержит подграф C_6.

Поскольку графы, изоморфные $S_{k,m}$, с центральными вершинами x, a_1 и y, a_2 не являются висячими подграфами, для графа G выполняется одно из следующих условий.

(1) Существуют вершины b, c, отличные от x, y, z, u, a_1, a_2, смежные в графе G с a_1 и a_2 соответственно. Тогда G содержит подграф E_4.

(2) Существуют вершины b, c, отличные от x, y, z, u, a_1, a_2, смежные в графе G между собой, причём одна из них смежна с a_1 или с a_2. Тогда G содержит подграф $A_1(5, 1)$.

(3) В G существует путь x, b_1, b_2, где $b_1 \neq a_1$, $b_2 \neq a_2$, а также вершина c, смежная с a_1. Тогда G содержит подграф $A_1(5, 1)$. Аналогично рассматривается симметричный случай — путь y, b_1, b_2 и вершина c, смежная с a_2.

(4) В G существуют пути x, b_1, b_2 и y, c_1, c_2, где $b_1 \neq c_1$, $b_2 \notin \{a_2, y\}$, $c_2 \notin \{a_1, x\}$. Тогда если среди вершин b_1, b_2, c_1, c_2 есть совпадающие, то G содержит подграф C_6, иначе G содержит подграф $A_2(5, 2)$.

Итак, $a_3 \neq y$, т. е. в G не существует пути длины 3, соединяющего x и y. Аналогично в G существует путь y, b_1, b_2, b_3, причём $x \notin \{b_1, b_2, b_3\}$, $a_1 \notin \{b_1, b_2\}$ и $b_1 \notin \{a_1, a_2\}$. Если a_3 совпадает с одной из вершин b_1, b_2, b_3 или $a_2 = b_2$, то G содержит цикл из 6 или 7 вершин. Таким образом, все вершины $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ попарно различны, но тогда G содержит подграф E_2.

Итак, не уменьшая общности, считаем, что в графе G существует вершина v, смежная с u и не смежная с x и y.

Пусть существует вершина $a \notin \{y, z, u, v\}$, смежная с x. Тогда не существует вершин, отличных от x, y, v, смежных с z, иначе G содержит подграф E_8. Кроме того, a не смежна с v, u и z, иначе G содержит подграф C_6 или 3-fan.

Пусть вершина v смежна с z. Тогда, повторяя рассуждения выше, заключаем, что не существует вершин, отличных от x, y, v, смежных с u. Поскольку граф, порождённый вершинами y, u, v, z, не является висячим подграфом с контактной вершиной x в графе G, существует вершина $b \notin \{x, y, z, u, v, a\}$, смежная в графе G с одной из вершин y, v, но тогда G содержит подграф E_{13}.

Итак, v не смежна с z. Поскольку граф, изоморфный $S_{k,m}$, с центральными вершинами x, u не является висячим подграфом с контактной вершиной y в графе G, существует вершина $b \notin \{x, y, z, u, v, a\}$, смежная в графе G с одной из вершин a, v. Возможны следующие случаи.

(1) Вершина b смежна с v. Тогда y не имеет других соседей, кроме x, u, z, a, иначе G содержит подграф E_5 или C_6. Отметим, что если y смежна с a, то аналогично x не имеет других соседей, кроме y, u, z, a.

Поскольку граф, изоморфный $S_k + e$ (или $K_4 - e$, если y смежна с a), с центральной вершиной x не является висячим подграфом с контактной вершиной u в графе G, существует вершина $c \notin \{x, y, z, u\}$, смежная в графе G с a. Если $c = b$, то G содержит подграф C_6, иначе G содержит подграф E_3.

(2) Не существует вершин, кроме u, смежных с v. Тогда b смежна с a. Поскольку граф, изоморфный $S_{k,m}$, с центральными вершинами y, u не является висячим подграфом с контактной вершиной x в графе G, существует путь из 3 вершин с началом в y, т. е. существуют вершины $c \notin \{x, y, z, u, v\}$, смежная в графе G с y, и $d \notin \{x, y, z, u, v, c\}$, смежная в графе G с c. Если $c = a$, то G содержит подграф E_{13}. Если $c = b$ или $d = a$, то G содержит подграф E_{12}. Если $d = b$, то G содержит подграф C_6. Иначе G содержит подграф E_6.

Итак, не существует вершин, кроме y, z и u, смежных с x. Аналогично не существует вершин, кроме x, z и u, смежных с y. Поскольку графы, изоморфные $S_k + e$, с центральными вершинами u и z не являются висячими подграфами в графе G, существуют пути из трёх вершин с началами в u и z. Не уменьшая общности, можно считать, что G содержит вершину a, смежную с v, вершину b, смежную с z, и вершину c, смежную с b, где $\{a, b, c\} \cap \{x, y, z, u\} = \varnothing$.

Допустим, что $b = v$. Тогда поскольку подграф, порождённый вершинами x, y, z, u, не является висячим подграфом в графе G, существует вершина $d \notin \{x, y, z, u, v\}$, смежная с одной из вершин z, u. Если $d = a$, то G содержит подграф C_6. Иначе G содержит подграф E_{10}. Таким образом, $b \neq v$. Тогда если $a = b$, $a = c$ или $c = v$, то G содержит подграф C_6. Иначе G содержит подграф E_7.

Итак, граф G_0 не содержит подграфа $K_4 - e$. Предположим, что G_0 содержит треугольник. Обозначим через x, y, z вершины какого-нибудь треугольника в этом графе.

Поскольку граф, изоморфный S_1 и содержащий две из вершин x, y, z, не является висячим подграфом в графе G, по крайней мере две из этих вершин смежны с другими вершинами этого графа. Пусть u смежна с x, а v смежна с y в графе G. Отметим, что $u \neq v$, иначе G_0 содержит подграф $K_4 - e$.

Предположим, что u и v смежны. Поскольку подграф графа G, состоящий из вершин x, y, u, v, не является висячим, по крайней мере одна из этих вершин смежна с другой вершиной этого графа, отличной от z. Рассмотрим следующие случаи с точностью до симметрии.

(1) В G существует вершина a, смежная с u. Поскольку подграф, изоморфный $S_{k,m}$, с центральными вершинами x, u, не является висячим подграфом с контактной вершиной y в графе G, существует вершина b, смежная с одной из вершин a, z, v, или путь из трёх вершин, не проходящий через y, с началом в x, т. е. b смежна с x и c смежна с b. Отметим, что в любом случае $b \neq a$ и $c \neq a$, иначе G содержит подграф C_6. Возможны следующие случаи.

- Вершина b смежна с z. Тогда G содержит подграф E_{11}.
- Вершина b смежна с v. Тогда G содержит подграф E_{10}.
- Вершина b смежна с x, c смежна с b. Тогда если $c \in \{a, u\}$, то G содержит подграф C_6. Иначе G содержит подграф $A_1(5, 1)$.
- Граф G не содержит вершин, кроме x, y, u, смежных с z и v, но в нём существует вершина $b \notin \{x, y, z, u, v\}$, смежная с a. Поскольку граф, изоморфный $S_k + e$, с центральной вершиной y не является висячим подграфом с контактной вершиной u в графе G, существует вершина, смежная с x, или путь из трёх вершин, не проходящий через u, с началом в y. В первом случае G содержит подграф $A_1(5, 1)$, во втором — один из подграфов E_6, E_{10}, C_6.

(2) В G не существует вершин, смежных с u и v, кроме x, y, но существует вершина a, смежная с x. Поскольку подграф, изоморфный $S_{k,m}$ с центральными вершинами y, v, не является висячим подграфом с контактной вершиной x в графе G, существует вершина $b \notin \{x, y, u, v\}$, смежная с z, или путь из трёх вершин, не проходящий через x,

с началом в y. В первом случае если $b = a$, то G содержит подграф C_6, иначе G содержит подграф E_9. Второй случай рассмотрим подробнее.

Итак, пусть в G не существует вершин, кроме x, y, смежных с z, но существуют вершина $b \notin \{x, z, u, v, a\}$, смежная с y, и вершина $c \notin \{x, y, z, u, v, b\}$, смежная с b. Поскольку подграф, изоморфный $S_{k,m}$, с центральными вершинами x, u не является висячим подграфом в графе G, существует вершина $d \notin \{x, y, z, u, v\}$, смежная с a. Тогда если $d \in \{b, c\}$ или $a = c$, то G содержит подграф C_6, иначе G содержит подграф E_3.

Итак, вершины u и v не смежны, т. е. никакая вершина, смежная с одной из x, y, z, не смежна с соседями двух других вершин.

Пусть в графе G любой путь из 5 вершин, проходящий через x, y, содержит z. Если G содержит квинтет (a, b, x, c, d), то вершины a, d висячие, каждая из вершин b, c смежна только с x и с висячими вершинами, а y смежна только с x и z. Нетрудно видеть, что x является контактной вершиной для нескольких подграфов, изоморфных S_k, причём смежна только с их центрами. Следовательно, $x \in X$. После удаления соответствующих подграфов S_k x является центральной вершиной висячего подграфа, изоморфного S_k, содержащего y, с контактной вершиной z. Если G содержит квинтет (a, b, y, c, d), то приходим к аналогичному выводу относительно y. Иначе z является контактной вершиной висячего F_5-подграфа, содержащего вершины x, y.

Все перечисленные случаи противоречат определению G_0. Таким образом, существует путь из 5 вершин, проходящий через x, y и не содержащий z. Аналогично существует путь из 5 вершин, проходящий через каждую пару вершин треугольника и не проходящий через третью его вершину. С точностью до симметрии возможны два случая.

(1) Существуют вершины u, v, w, смежные с x, y, z соответственно. Тогда, не уменьшая общности, можно считать, что существуют вершина a, смежная с u, и вершина b, смежная с v. Если $a = b$, то граф G содержит подграф C_6, иначе G содержит подграф E_1.

(2) Не существует вершин, кроме x, y, смежных с z. Тогда существуют пути из 4 вершин с началами в x и y. Если вершины этих путей различны, то граф G содержит подграф E_2. Иначе G содержит цикл с числом вершин от 6 до 8.

Итак, в графе G_0 нет треугольников. Рассмотрим какой-нибудь цикл из 4 вершин (x, y, z, u) в графе G_0. Пусть в G существуют вершина a, смежная с x, и вершина b, смежная с y. Вершины a и b не смежны, иначе G содержит подграф C_6. Возможны следующие случаи с точностью до симметрии.

(1) В G существуют вершины c и d, отличные от x, y, z, u и смежные с z и u соответственно. Тогда если $c = a$ и $d = b$, то G содержит

подграф C_6, если $c = a$, но $d \neq b$, то G содержит подграф E_{13}, иначе G содержит подграф E_4.

(2) В G только x и z смежны с u, но существует $c \notin \{y, u, a\}$, смежная с z. Тогда не существует вершины, отличной от y, смежной с b, иначе G содержит подграф E_5. Поскольку графы, изоморфные $S_{k,m}$, с парами центральных вершин x, y и y, z не являются висячими подграфами в графе G, существуют вершины v и w, не совпадающие с x, z и смежные с a и c соответственно. Тогда если $v = w$, то граф G содержит подграф C_6, если $v = c$ или $w = a$, то граф G содержит подграф E_{12}, иначе G содержит подграф E_6.

(3) В G только x и z смежны с u и a смежна с z. Тогда не существует других вершин, кроме x и z, смежных с a, иначе G содержит подграф E_{13}. Поскольку подграф, порождённый вершинами x, a, z, u, не является висячим подграфом с контактной вершиной y в графе G, существует вершина, отличная от y, u, a, смежная с одной из вершин x, z. Не теряя общности, предположим, что существует вершина $c \notin \{y, u, a\}$, смежная с z. Тогда рассмотрение данного случая сводится к предыдущему.

(4) В графе G $N(u) = \{x, z\}$, $N(z) = \{y, u\}$. Поскольку графы, изоморфные $S_{k,m}$, с парами центральных вершин x, u и y, z не являются висячими подграфами в графе G, существуют вершины c и d, смежные с a и b соответственно. Тогда если $c = d$, то граф G содержит подграф C_7, иначе G содержит подграф E_3.

Таким образом, в любом цикле из четырёх вершин графа G_0 две не смежные между собой вершины имеют в графе G степень 2. Причём для каждой такой пары вершин u и v выполняется $N(u) = N(v)$. Назовём такие вершины *подобными*. Из какого-нибудь 4-вершинного цикла графа G_0 удалим одну из двух подобных вершин и будем повторять эту операцию до тех пор, пока такие циклы существуют. Полученный граф обозначим через G_1. Заметим, что если граф G_1 содержит цикл, то в нём не менее 5 вершин.

Пусть G_1 содержит цикл. Пусть Z — какой-нибудь его блок размера больше 2. Каждая вершина Z является цикловой. Так как в G нет подграфов из $\mathcal{F}$, из леммы 3 следует, что длина любого цикла графа Z кратна 5.

Обозначим через U множество вершин блока Z, смежных в графе G с не менее чем тремя попарно не подобными друг другу вершинами степени больше 1. Рассмотрим сначала случай $U \neq \varnothing$. Пусть $|U| \geqslant 2$. Докажем, что любые две вершины из U находятся в Z на расстоянии, кратном 5.

Предположим, что это не так. Рассмотрим в U две вершины x и y, находящиеся в Z на минимальном расстоянии, не кратном 5. Рассмотрим цикл W минимальной длины, содержащий x и y. Нетрудно видеть, что в G существуют пути x, a, b и y, c, d такие, что a, b, c, d попарно различны и не принадлежат W (это следует из отсутствия в Z циклов длины не кратной 5 и из минимальности длины цикла W).

Пусть длина цикла W равна $5t$, а расстояние между x и y в Z равно $5k+r$, где $0 \leqslant k \leqslant \frac{t}{2}$, $1 \leqslant r \leqslant 4$. Если существует кратчайший путь между x и y, полностью лежащий в W, то при $r \in \{1,4\}$ G содержит запрещённый подграф $A_1(5t, 5k+r)$, а при $r \in \{2,3\}$ — запрещённый подграф $A_2(5t, 5k+r)$; противоречие.

Рассмотрим случай, когда любой кратчайший путь между x и y содержит вершины, не входящие в W. Выберем на одном из них такие вершины s, t, входящие в W, что все вершины этого пути между s и t не содержатся в W. Отметим, что $\{s,t\} \subseteq U$. Все расстояния между вершинами x и s, s и t, t и y кратны 5 (так как все эти расстояния меньше, чем расстояние между x и y). Тогда и расстояние между x и y кратно 5; противоречие.

Итак, если $|U| \geqslant 2$, то любые две вершины из U находятся в Z на расстоянии, кратном 5. Обозначим через Y множество вершин Z, находящихся на расстоянии $5k$ от произвольной вершины $x \in U$, где $k \in \mathbb{N}$. Ввиду предыдущего рассуждения $U \subseteq Y$. Также нетрудно видеть, что вершины множества Y делят Z на пути длины 5. Иными словами, если кратчайший путь между двумя вершинами из Y или цикл, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине из Y, не содержит других вершин из Y, то он проходит ровно через 4 вершины, каждая из которых имеет степень 2 в G_1.

Вершины блока Z, не принадлежащие Y, и аналогичные вершины других аналогичных блоков, назовём *проходными* в графе G_1.

Все вершины блока Z, смежные с вершинами из Y, имеют в графе G степень 2, иначе G содержит запрещённый подграф типа $A_1(n,k)$, а остальные проходные вершины блока Z образуют пары, и каждая из них смежна в графе G только с другой вершиной пары, с вершинами степени 2, образующими ровно 1 класс подобия, и с вершинами степени 1, иначе G содержит запрещённый подграф типа $A_2(n,k)$.

Если $U = \varnothing$, то все вершины Z смежны в графе G ровно с 2 классами подобия вершин степени больше 1, т. е. Z является циклом. Тогда вершины по крайней мере двух его 5-классов имеют в G степень 2, причём вершины этих 5-классов попарно не смежны, иначе G содержит запрещённый подграф одного из типов $A_3(k_1,k_2,k_3)$, $B(n,k)$, либо один из подграфов E_6, E_{12}. Обозначим через x какую-нибудь вершину, смежную с вершинами обоих этих 5-классов. Все вершины Z, расстояние до которых от x не кратно 5 (и аналогичные вершины других таких блоков), также будем считать проходными в графе G_1.

Итак, если проходная вершина смежна с непроходной вершиной в графе G_1, то в графе G она имеет степень 2 и могут существовать подобные ей вершины, иначе она смежна с вершинами степени 2, образующими ровно один класс подобия, и ровно с одной аналогичной вершиной, а также может быть смежна с вершинами степени 1.

Построим псевдограф H, заменяя во всех циклах графа G_1 каждый путь из четырёх проходных вершин одним ребром, соединяющим вершины, смежные с его концами (если G_1 не содержит циклов, то $H = G_1$). Граф G_1 получается из H подразбиением каждого циклового ребра четырьмя вершинами (шаг 1), граф G_0 получается из G_1 заменой вершин пустыми графами (шаг 2), а граф G получается из G_0 применением шагов 3–5, т. е. является ST_5-расширением псевдографа H. Теорема 2 доказана.

Класс графов называется *монотонным*, если он замкнут относительно удаления не только вершин, но и рёбер. Известно, что любой монотонный класс может быть охарактеризован множеством минимальных запрещённых подграфов, т. е. минимальных по включению вершин и рёбер графов, не принадлежащих данному классу [2].

Сформулируем следствие из теоремы 2, которое подтверждается также леммой 8.

Следствие 1. *Класс* $\mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$ *монотонный и полностью определяется множеством минимальных запрещённых подграфов* $\mathcal{F}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е., Мокеев Д. Б.** Кёниговы графы относительно 3-пути // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 4. С. 3–14.
2. **Алексеев В. Е.** Наследственные классы и кодирование графов // Пробл. кибернетики. 1982. Т. 39. С. 151–164.
3. **Kardoš F., Katrenič J., Schiermeyer I.** On computing the minimum 3-path vertex cover and dissociation number of graphs // Theor. Comput. Sci. 2011. Vol. 412, No. 50. P. 7009–7017.
4. **Li Y., Tu J.** A 2-approximation algorithm for the vertex cover P_5 problem in cubic graphs // Int. J. Comput. Math. 2014. Vol. 91, No. 10. P. 2103–2108.
5. **Brešar B., Kardoš F., Katrenič J., Semanišin G.** Minimum k-path vertex cover // Discrete Appl. Math. 2011. Vol. 159, No. 12. P. 1189–1195.
6. **Tu J., Zhou W.** A primal-dual approximation algorithm for the vertex cover P_3 problem // Theor. Comput. Sci. 2011. Vol. 412, No. 50. P. 7044–7048.
7. **Edmonds J.** Paths, trees, and flowers // Can. J. Math. 1965. Vol. 17, No. 3–4. P. 449–467.

8. **Kirkpatrick D. G., Hell P.** On the completeness of a generalized matching problem // Proc. 10th Annu. ACM Symp. Theory Comput. (San Diego, CA, USA, May 1–3, 1978). New York: ACM, 1978. P. 240–245.
9. **Masuyama S., Ibaraki T.** Chain packing in graphs // Algorithmica. 1991. Vol. 6, No. 1. P. 826–839.
10. **Devi N. S., Mane A. C., Mishra S.** Computational complexity of minimum P_5 vertex cover problem for regular and $K_{1,4}$-free graphs // Discrete Appl. Math. 2015. Vol. 184. P. 114–121.
11. **Deming R. W.** Independence numbers of graphs – An extension of the König–Egervary theorem // Discrete Math. 1979. Vol. 27, No. 1. P. 23–33.
12. **Kosowski A., Małafiejski M., Żyliński P.** Combinatorial and computational aspects of graph packing and graph decomposition // Graphs Comb. 2008. Vol. 24, No. 5. P. 461–468.
13. **Sterboul F.** A characterization of graphs in which the transversal number equals the matching number // J. Comb. Theory, Ser. B. 1979. Vol. 27, No. 2. P. 228–229.
14. **Малышев Д. С., Мокеев Д. Б.** Кёниговы графы относительно 4-пути и его остовных надграфов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2019. Т. 26, № 1. С. 74–88.
15. **Alekseev V. E., Mokeev D. B.** König graphs for 3-paths and 3-cycles // Discrete Appl. Math. 2016. Vol. 204. P. 1–5.
16. **Мокеев Д. Б.** О кёниговых графах относительно P_4 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2017. Т. 24, № 3. С. 61–79.
17. **Mokeev D. B.** P_q-König extended forests and cycles // Discrete Optimization and Operations Research. Suppl. Proc. 9th Int. Conf. DOOR 2016 (Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016). Aachen: RWTH Aachen Univ., 2016. P. 86–95. (CEUR Workshop Proc.; Vol. 1623). Available at `http://ceur-ws.org/Vol-1623` (accessed May 22, 2020).
18. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.

Мокеев Дмитрий Борисович
Малышев Дмитрий Сергеевич

Статья поступила
13 ноября 2018 г.
После доработки —
31 января 2020 г.
Принята к публикации
19 февраля 2020 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
April–June 2020. Vol. 27, No. 2. P. 90–116

UDC 519.174.3 DOI 10.33048/daio.2020.27.639

ON THE KÖNIG GRAPHS FOR A 5-PATH AND ITS SPANNING SUPERGRAPHS

D. B. Mokeev[1,2,a] and *D. S. Malyshev*[2,b]

[1] Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin Avenue, 603950 N. Novgorod, Russia

[2] National Research University "Higher School of Economics",
25/12 Bolshaya Pechyorskaya Street, 603155 Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: [a] `mokeevdb@gmail.com`, [b] `dsmalyshev@rambler.ru`

Abstract. We describe the hereditary class of graphs whose every subgraph has the property that the maximum number of disjoint 5-paths (paths on 5 vertices) is equal to the minimum size of the sets of vertices having nonempty intersection with the vertex set of each 5-path. We describe this class in terms of the "forbidden subgraphs" and give an alternative description, using some operations on pseudographs. Illustr. 2, bibliogr. 18.

Keywords: subgraph packing, vertex cover, five-vertex path, König graph.

REFERENCES

1. **V. E. Alekseev** and **D. B. Mokeev,** König graphs for 3-path, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **19** (4), 3–14 (2012) [Russian].
2. **V. E. Alekseev,** Hereditary classes and graph encoding, *Probl. Cybern.* **39**, 151–164 (1982) [Russian].
3. **F. Kardoš, J. Katrenič,** and **I. Schiermeyer,** On computing the minimum 3-path vertex cover and dissociation number of graphs, *Theor. Comput. Sci.* **412** (50), 7009–7017 (2011).
4. **Y. Li** and **J. Tu,** A 2-approximation algorithm for the vertex cover P_5 problem in cubic graphs, *Int. J. Comput. Math.* **91** (10), 2103–2108 (2014).
5. **B. Brešar, F. Kardoš, J. Katrenič,** and **G. Semanišin,** Minimum k-path vertex cover, *Discrete Appl. Math.* **159** (12), 1189–1195 (2011).

This research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project 18–31–20001-mol-a-ved).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **14** (2), 367–382 (2020), DOI 10.1134/S1990478920020143.

6. **J. Tu** and **W. Zhou,** A primal-dual approximation algorithm for the vertex cover P_3 problem, *Theor. Comput. Sci.* **412** (50), 7044–7048 (2011).
7. **J. Edmonds,** Paths, trees, and flowers, *Can. J. Math.* **17** (3–4), 449–467 (1965).
8. **D. G. Kirkpatrick** and **P. Hell ,** On the completeness of a generalized matching problem in *Proc. 10th Annu. ACM Symp. Theory Comput., San Diego, CA, USA, May 1–3, 1978* (New York, ACM, 1978), pp. 240–245.
9. **S. Masuyama** and **T. Ibaraki,** Chain packing in graph, *Algorithmica* **6** (1), 826–839 (1991).
10. **N. S. Devi, A. C. Mane,** and **S. Mishra,** Computational complexity of minimum P_5 vertex cover problem for regular and $K_{1,4}$-free graphs, *Discrete Appl. Math.* **184**, 114–121 (2015).
11. **R. W. Deming,** Independence numbers of graphs – An extension of the König–Egervary theorem, *Discrete Math.* **27** (1), 23–33 (1979).
12. **A. Kosowski, M. Małafiejski,** and **P. Żyliński,** Combinatorial and computational aspects of graph packing and graph decomposition, *Graphs Comb.* **24** (5), 461–468 (2008).
13. **F. Sterboul,** A characterization of graphs in which the transversal number equals the matching number, *J. Comb. Theory, Ser. B,* **27** (2), 228–229 (1979).
14. **D. S. Malyshev** and **D. B. Mokeev,** König graphs with respect to 4-paths and its spanning supergraphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **26** (1), 74–88 (2019) [Russian].
15. **V. E. Alekseev** and **D. B. Mokeev,** König graphs for 3-paths and 3-cycles, *Discrete Appl. Math.,* **204**, 1–5 (2016).
16. **D. B. Mokeev,** On the König graphs for P_4, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **24** (3), 61–79 (2017) [Russian].
17. **D. B. Mokeev,** P_q-König extended forests and cycles in *Discrete Optimization and Operations Research* (Suppl. Proc. 9th Int. Conf. DOOR 2016, Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016) (RWTH Aachen Univ., Aachen, 2016), pp. 86–95 (CEUR Workshop Proc., Vol. 1623). Available at `http://ceur-ws.org/Vol-1623` (accessed May 22, 2020).
18. **V. A. Emelichev, O. I. Melnikov, V. I. Sarvanov,** and **R. I. Tyshkevich,** *Lectures on Graph Theory* (Nauka, Moscow, 1990 [Russian]; B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994).

Dmitry B. Mokeev
Dmitry S. Malyshev

Received November 13, 2018
Revised January 31, 2020
Accepted February 19, 2020