



Общероссийский математический портал

И. М. Борисов, Г. М. Полотовский, О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 176, 3–18

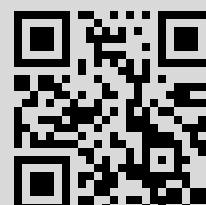
DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-176-3-18>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 109.184.116.26

5 июня 2020 г., 08:49:05





ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 176 (2020). С. 3–18
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-176-3-18

УДК 512.772, 515.165.4

О ТОПОЛОГИИ ПЛОСКИХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ РАСПАДАЮЩИХСЯ КРИВЫХ СТЕПЕНИ 8

© 2020 г. И. М. БОРИСОВ, Г. М. ПОЛОТОВСКИЙ

Аннотация. Рассматривается задача топологической классификации расположений в вещественной проективной плоскости объединения неособых кривых степеней 2 и 6 при некоторых условиях максимальной и общего положения. После перечисления подлежащих исследованию допустимых топологических моделей таких расположений с помощью метода Оревкова, основанного на теории кос и зацеплений, доказано, что большинство из этих моделей не могут быть реализованы кривыми степени 8.

Ключевые слова: M -распадающаяся кривая, топологическая классификация, метод Оревкова.

ON THE TOPOLOGY OF PLANAR REAL DECOMPOSABLE CURVES OF DEGREE 8

© 2020 I. M. BORISOV, G. M. POLOTOVSKY

ABSTRACT. We consider the problem of topological classification of arrangements in the real projective plane of the union of nonsingular curves of degrees 2 and 6 under certain conditions of maximality and general position. We list admissible topological models of such arrangements to be studied by using the Orevkov method based on the theory of braids and links and prove that most of these models cannot be realized by curves of degree 8.

Keywords and phrases: M -decomposable curve, topological classification, Orevkov method.

AMS Subject Classification: 14P25, 14N99

1. Введение, постановка задачи. Задача о систематическом исследовании топологии вещественных алгебраических кривых, распадающихся в произведение двух неособых кривых, впервые была поставлена Д. А. Гудковым в 1969 г. в предисловии к книге [3] для случая распадающихся кривых степени 6 — первого (т.е. низшей степени) нетривиального случая. Эта задача, непосредственно связанная с вопросом о топологии неособых кривых степени 6, включенном Д. Гильбертом в его 16-ю проблему, была решена (при естественных условиях максимальной и общего положения кривых-сомножителей) Г. М. Полотовским в [17, 18]. Впоследствии было предпринято исследование аналогичного вопроса для кривых степени 7. Этот вопрос оказался более трудным; для его решения потребовалось применение новых методов (см. [4–16, 19–24, 26–32]) и, по-видимому, близко к завершению. В настоящей работе мы начинаем аналогичное исследование распадающихся кривых степени 8. Именно, мы будем заниматься топологической классификацией кривых степени 8, распадающихся в произведение неособой кривой степени 2 (коники) и неособой кривой степени 6 (секстики) при некоторых дополнительных условиях.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» и Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 075-15-2019-1931).

Напомним основные определения и некоторые известные сведения из теории плоских алгебраических кривых.

Определение 1. *Плоской вещественной проективной алгебраической кривой C_m степени m называется однородный многочлен $C_m(x_0, x_1, x_2)$ степени m с вещественными коэффициентами от трех переменных x_0, x_1, x_2 , рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя.*

Определение 2. *Множество $\mathbb{R}C_m$ ($\mathbb{C}C_m$) точек $(x_0 : x_1 : x_2)$ ($(z_0 : z_1 : z_2)$) вещественной (комплексной) проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ ($\mathbb{C}P^2$), удовлетворяющих уравнению $C_m(x_0, x_1, x_2) = 0$, называется *множеством вещественных* (соответственно, *комплексных*) *точек кривой C_m .**

Определение 3. *Кривая C_m называется неособой, если первые частные производные многочлена $C_m(x_0, x_1, x_2)$ по переменным x_0, x_1, x_2 не обращаются одновременно в нуль (в $\mathbb{C}P^2$).*

Каждая компонента связности множества $\mathbb{R}C_m$ вещественных точек неособой кривой C_m (кратко — вещественная ветвь кривой) гомеоморфна окружности. Если степень кривой четна, то каждая такая окружность называется *овалом*; каждый овал делит $\mathbb{R}P^2$ на две области: гомеоморфную диску и гомеоморфную листу Мебиуса. Для данного овала область первого типа считается внутренней, а второго — внешней. Если степень кривой C_m нечетна, то среди компонент связности множества $\mathbb{R}C_m$ имеется ровно одна, вложенная в $\mathbb{R}P^2$ односторонним образом; она называется *нечетной ветвью*.

Оценку на возможное число вещественных ветвей неособой кривой дает следующая классическая теорема.

Теорема (теорема Харнака, 1876). *Пусть N — число компонент связности множества вещественных точек плоской вещественной проективной кривой степени m . Тогда*

$$N \leq \frac{1}{2}(m-1)(m-2) + 1,$$

причем эта оценка точна для любого m .

Множество $\mathbb{R}C_m$, рассматриваемое с точностью до изотопии в $\mathbb{R}P^2$, называется *вещественной схемой кривой C_m .*

Назовем набор из s попарно непересекающихся топологических окружностей в $\mathbb{R}P^2$, где $0 \leq s \leq (m-1)(m-2)/2 + 1$, *формальной схемой степени m .*

Вещественную схему неособой кривой (и аналогично формальную схему) можно описать графом, вершинам которого соответствуют овалы кривой¹, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие овалы расположены один внутри другого и не разделены никаким третьим овалом. Легко видеть, что вещественная схема неособой кривой является графом типа «лес», в котором каждому внешнему овалу (т.е. овалу, не лежащему во внутренней области какого-либо другого овала) отвечает свое дерево.

Кривые с максимально возможным по теореме Харнака числом ветвей называются *M -кривыми*. Схемы с таким числом овалов (как схемы M -кривых, так и формальные) будем называть *M -схемами*. Хорошо известно, что вещественная схема неособой коники либо пуста, либо состоит из одной вершины. Из теоремы Харнака следует, что числа вершин M -схем степеней 6 и 8 равны 11 и 22 соответственно.

Задачу топологической классификации неособых плоских вещественных алгебраических кривых, поставленную Д. Гильбертом в первой части его 16-й проблемы, можно сформулировать теперь следующим образом: *для каждого натурального m найти список формальных схем степени m , которые могут быть реализованы как вещественные схемы некоторых кривых степени m .*

В настоящее время полный ответ на эту задачу известен для $m \leq 7$. В первом нетривиальном случае $m = 6$, особо отмеченном Гильбертом, ответ был получен Д. А. Гудковым в [3]. Фрагмент классификации Гудкова, касающийся случая M -кривых, может быть сформулирован следующим образом.

¹Нечетная ветвь не ограничивает область в $\mathbb{R}P^2$, поэтому включать ее в описание не нужно; требуется лишь помнить, что в случае нечетной степени имеется еще ровно одна такая ветвь.

Теорема (теорема Гудкова, 1969). *Неособыми кривыми степени 6 реализуются M -схемы $\frac{1}{1}9$, $\frac{5}{1}5$, $\frac{9}{1}1$ и только эти M -схемы.*

Здесь, следуя Гудкову, для кодировки схем мы применяем следующее соглашение: запись вида $\frac{\alpha}{\beta}\beta$ означает схему, состоящую из $\beta + 1$ овалов вне друг друга, внутри одного из которых лежат еще α овалов вне друг друга¹.

Таким образом, множество вещественных точек каждой M -кривой степени 6 содержит ровно один непустой овал (т.е. овал, во внутренней области которого имеется другой овал); он обозначен единицей «в знаменателе» кода; в дальнейшем будем называть непустой овал кривой степени 6 *главным*, овалы, расположенные внутри главного овала — *внутренними*, а овалы, расположенные вне главного овала — *внешними*.

Говорят, что овал, содержащий в своей внутренней области s овалов, последовательно окружающих друг друга, имеет вес $s + 1$, а схему, состоящую из внешнего (т.е. не лежащего внутри других овалов) овала веса $s + 1$ и всех овалов, лежащих внутри него, будем называть *гнездом веса $s + 1$* . Таким образом, внешний пустой овал считается гнездом веса 1, и можно сказать, что M -кривая степени 6 является объединением одного гнезда веса 2 и гнезд веса 1.

На основании своих результатов Д. А. Гудков сформулировал (в виде гипотезы) следующую теорему, которую доказал для частного случая (сравнения по модулю 4) В. И. Арнольд, а затем в общем случае В. А. Рохлин.

Теорема (сравнение Гудкова, 1969). *Для эйлеровой характеристики $\chi(B_+)$ ориентируемой части B_+ дополнения в $\mathbb{R}P^2$ к множеству вещественных точек M -кривой степени $2k$ выполняется сравнение $\chi(B_+) \equiv k^2 \pmod{8}$.*

Легко видеть, что M -кривая задается неприводимым многочленом. Перейдем к рассмотрению распадающихся кривых.

Определение 4. Кривая C_m называется *M -распадающейся кривой степени m* , если выполнены следующие условия:

- (i) $C_m(x_0, x_1, x_2) = C_k(x_0, x_1, x_2) \cdot C_{m-k}(x_0, x_1, x_2)$, где $k \in \{1, 2, \dots, [m/2]\}$;
- (ii) C_k и C_{m-k} являются M -кривыми;
- (iii) множество $\mathbb{R}C_k \cap \mathbb{R}C_{m-k}$ состоит из $k \cdot (m - k)$ попарно различных точек;
- (iv) все точки множества $\mathbb{R}C_k \cap \mathbb{R}C_{m-k}$ лежат на одной ветви кривой C_k и на одной ветви кривой C_{m-k} ;
- (v) при некотором выборе направлений обхода пересекающихся ветвей точки пересечения (т.е. точки множества $\mathbb{R}C_k \cap \mathbb{R}C_{m-k}$) лежат на них в одном порядке.

Овалы кривых C_{m-k} и C_k , не имеющие точек пересечения, будем называть *свободными овалами*.

Задача топологической классификации распадающихся кривых степени m ставится следующим образом: найти топологическую классификацию троек $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}C_m, \mathbb{R}C_k)$, где

$$C_m(x_0, x_1, x_2) = C_k(x_0, x_1, x_2) \cdot C_{m-k}(x_0, x_1, x_2).$$

В настоящей работе эта задача рассматривается для случая $m = 8$, $k = 2$ при условии, что кривая C_8 является M -распадающейся, т.е. выполняются требования (i)–(v) определения 4.

Обычно для решения задачи классификации алгебраических кривых какого-либо класса сначала перечисляют допустимые (т.е. не запрещенные известными на данный момент ограничениями) топологические модели кривых этого класса. Затем каждую допустимую модель пытаются реализовать алгебраической кривой рассматриваемого класса («построить») или доказать, что сделать это невозможно («запретить»). Далее для сформулированной выше задачи будут изложены перечисление допустимых моделей и запреты, которые удалось найти с помощью метода Оревкова, основанного на применении теории кос и зацеплений.

¹Эта кодировка легко обобщается на леса с более высокими деревьями; см., например, [16].

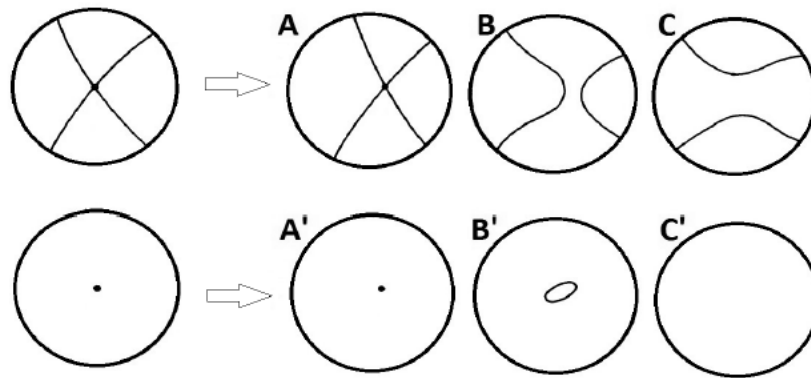


Рис. 1

2. Перечисление допустимых моделей. Начнем с формулировки применяемой ниже классической теоремы о независимости возмущений особых точек *простой* кривой.

Теорема (Теорема Брюзотти, 1921). Пусть кривая C_m не имеет кратных компонент и все ее особые точки простые двойные. Тогда с помощью достаточно малых изменений коэффициентов кривой C_m можно получить вещественную кривую степени t , которая в окрестности каждой особой точки типа «крест» (трансверсальное пересечение ветвей) будет иметь один из заранее выбранных видов A, B, C , и в окрестности каждой уединенной особой точки — один из заранее выбранных видов A', B', C' (см. рис. 1).

Напомним теперь известные сведения о M -схемах кривых степени 8.

1. В силу теоремы Харнака M -кривая степени 8 состоит из 22 овалов.
2. В силу топологических следствий теоремы Безу, примененной к пересечению кривой степени 8 с прямой или с коникой, M -кривая степени 8 может иметь только одну из следующих вещественных схем:
 - (а) объединение гнезд веса 1 и не более трех гнезд веса 2;
 - (б) объединение гнезд веса 1 и одного гнезда веса 3.
3. M -Кривая степени 8 удовлетворяет сравнению Гудкова при $k = 4$; в частности, отсюда следует, что 22 овала M -кривой степени 8 не могут располагаться все вне друг друга.

Перечисленные условия допускают 89 попарно различных формальных M -схем степени 8, из которых к настоящему времени 83 реализованы M -кривыми степени 8, а вопрос о такой реализуемости остальных шести схем остается открытым. Список всех 89 схем можно найти в [27].

Расположение двух простых замкнутых кривых, пересекающихся в 12 точках, лежащих на этих кривых в одинаковом порядке, может принадлежать одному из двух топологически неэквивалентных типов I и II, показанных на рис. 2. На этом рисунке более жирной линией показана коника, тонкой линией — несвободный овал схемы степени 6, а греческими буквами обозначены области, в которых а priori могут лежать свободные овалы схемы степени 6.

Теперь для каждого из случаев I, II нужно перечислить допустимые распределения 10 свободных овалов в обозначенных греческими буквами областях для каждой из M -схем $\frac{1}{1}9, \frac{5}{1}5, \frac{9}{1}1$ степени 6, считая несвободный овал либо внешним, либо главным, либо внутренним. Идея этого перечисления состоит в следующем.

Добавим к расположению типа I или II, показанному на рис. 2, каким-либо определенным образом распределенные по областям 10 свободных овалов схемы степени 6. Затем, имея в виду теорему Брюзотти, устраним все двойные точки на соответствующем расположении так, чтобы образовалась схема с максимально возможным числом овалов (т.е. превратим каждый двуугольник в овал; в случае I из пересекающихся овалов получится схема $\frac{11}{1}$, а в случае II — 12 овалов вне друг друга). В результате получим M -схему степени 8. Если эта схема не входит в упомянутый

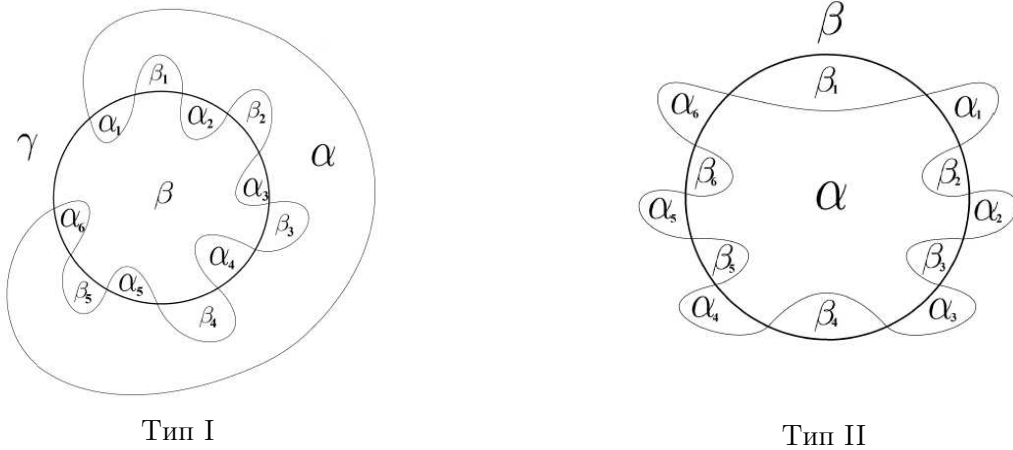


Рис. 2. Типы расположения пересекающихся овалов и обозначения областей

Таблица 1. Тип I, внешний несвободный овал

№ пп	Схема степени 6	β	γ	М-Т	Ф-М
1	$\frac{1}{1}9$	$\frac{1}{1}3$	5	Построение Гильберта	
2	—"—	$\frac{*1}{1}7$	1	✓	×
3	—"—	7	$\frac{1}{1}1$	нет М-пучка	
4	—"—	3	$\frac{1}{1}5$	нет М-пучка	
5	$\frac{5}{1}5$	$\frac{*5}{1}3$	1	✓	✓
6	—"—	3	$\frac{5}{1}1$	нет М-пучка	

выше список из 89 М-схем степени 8, то рассматриваемое расположение свободных овалов нереализуемо. В противном случае вопрос о реализуемости исходной схемы распадающейся кривой подлежит дальнейшему исследованию.

А. Расположение типа I.

А1. Несвободный овал — внешний. Области α и все α_i не содержат овалов, поскольку несвободный овал внешний. Области β_i тоже не могут содержать овалов, иначе получится схема, не удовлетворяющая ограничению 2 на типы М-схем степени 8.

Рассмотрим схему степени 6 вида $\frac{1}{1}9$. Тогда остаются следующие возможности: в одной из областей β, γ свободные овалы образуют схему $\frac{1}{1}t$, а в другой — схему «8 - t овалов вне друг друга», где $0 \leq t \leq 8$. Легко проверить, что сравнение Гудкова выполняется только при $t \in \{3, 7\}$, когда гнездо $\frac{1}{1}$ расположено в области β , и при $t \in \{1, 5\}$, если гнездо $\frac{1}{1}$ расположено в области γ .

Итоги перечисления занесены в строки 1–4 таблицы 1; смысл символа * и последних столбцов в этой и следующих таблицах будет разъяснен ниже в п. 4.

Схемы степени 6 вида $\frac{5}{1}5$ и $\frac{9}{1}1$ рассматриваются совершенно аналогично. Первой из них отвечают строки 5, 6 таблицы 1, а для второй допустимых возможностей нет.

А2. Несвободный овал — главный. В этом случае внутренние овалы схемы степени 6 нужно распределить между областями $\alpha, \alpha_1-\alpha_6$, причем области α_i и $\alpha_{7-i}, i \in \{1, 2, 3\}$, равноправны ввиду симметрии, и, в силу ограничения 2 на типы М-схем степени 8, непустой может быть только одна из областей α_i .

Таблица 2. Тип I, главный несвободный овал

№ пп	Схема степени 6	α	$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3$	$\beta_1 \vee \beta_2 \vee \beta_3$	β	γ	М-Т	Ф-М
1	$\frac{1}{1}9$	1		* 5	3	1	×	—
2	— " —	1		* 4	3	2	×	—
3	— " —	1		* 3	3	3	×	—
4	— " —	1		* 2	3	4	×	—
5	— " —	1		* 1	3	5	×	—
6	— " —	1		* 1	7	1	×	—
7	— " —	1			7	2	нет М-пучка	
8	— " —	1			3	6	нет М-пучка	
9	— " —		* 1		8	1	×	—
10	— " —		* 1		4	5	✓	✓
11	— " —		* 1			9	×	—
12	$\frac{5}{1}5$	5		* 1	3	1	×	—
13	— " —	5			3	2	нет М-пучка	
14	— " —	4	* 1		4	1	×	—
15	— " —	4	* 1			5	×	—
16	— " —	3	* 2		1	4	×	—
17	— " —	2	* 3		2	3	✓	×
18	— " —	1	* 4		3	2	×	—
19	— " —		* 5		4	1	×	—
20	— " —		* 5			5	×	—
21	$\frac{9}{1}1$	8	* 1			1	✓	×
22	— " —	4	* 5			1	×	—
23	— " —	0	* 9			1	×	—

А3. Несвободный овал — внутренний. В этом случае главный овал охватывает всю конфигурацию из двух пересекающихся овалов, показанных на рис. 2 слева (Тип I). Области β_1 – β_5 не могут содержать овалов в силу условия 2: иначе образуется гнездо веса 4.

Для схемы $\frac{1}{1}9$ единственная возможность — 9 свободных овалов вне друг друга лежат в области γ — противоречит ограничению 3 для М-схем степени 8.

Для случаев двух других схем — $\frac{5}{1}5$ и $\frac{9}{1}1$ — обозначим через γ_1 часть области γ , расположенную внутри главного овала (в рассматриваемом случае не показанного на рис. 2), а через γ_2 — часть области γ , расположенную вне главного овала. Так же, как выше, получаем результаты, показанные в таблице 3.

В. Расположение типа II.

В1. Несвободный овал — внешний. Так как в этом случае несвободный овал пустой, то свободные овалы могут лежать только в областях β_i , $1 \leq i \leq 6$, и β . При этом, в силу ограничения 2, если главный овал лежит в одной из них, то остальные из этих областей должны быть пустыми,

Таблица 3. Тип I, внутренний несвободный овал

№ пп	Схема степени 6	β	γ_1	γ_2	М-Т	Ф-М
1	$\frac{5}{1}5$	$\star 2$	2	5	✓	✓
2	$\frac{9}{1}1$	$\star 2$	6	1	×	—
3	$\frac{9}{1}1$	6	2	1	Построение Гильберта	

Таблица 4. Тип II, внешний несвободный овал

№ пп	Схема степени 6	β	β_1	$\beta_j, j = 2 \vee 3 \vee 4$	М-Т	Ф-М
1	$\frac{1}{1}9$	$\frac{1}{1}6$	2	0	нет M -пучка	
2	—	—	1	1	—	
3	—	$\frac{1}{1}2$	6	0	—	
4	—	—	5	1	—	
5	—	—	3	3	—	
6	—	6	$\frac{1}{1}2$		Построение Гильберта	
7	—	2	$\frac{\star 1}{1}6$		✓	✓
8	$\frac{5}{1}5$	$\frac{5}{1}2$	2	0	нет M -пучка	
9	—	—	1	1	—	
10	—	2	$\frac{\star 5}{1}2$		✓	✓

а если главный овал лежит в области β , то непустыми могут быть не более двух из областей β_i . Учитывая, что все области β_i равноправны, а в случае, когда непусты две из областей β_i , имеются три попарно неэквивалентные возможности (в порядке обхода по овалу коники: непустые области либо соседние, либо разделены одной пустой, либо разделены двумя пустыми; получаем список допустимых расположений, приведенных в таблице 4.

В2. Несвободный овал — главный. Здесь, как и в предыдущем случае, области α_i равноправны друг другу, и области β_i равноправны друг другу. В силу ограничения 2 одновременно могут содержать овалы не более трех из этих 12 областей. Если непусты (т.е. содержат свободные овалы) ровно две из них, то, как и в предыдущем случае, с точностью до циклического (вдоль овала коники) порядка областей имеются по три попарно различных случая для номеров i и j этих областей: $(i, j) \in M_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$. Если непусты три области одного сорта (т.е. все три области из набора α_i или все три из β_i), то имеются тоже по три возможности: $(i, j, k) \in M_2 = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 5)\}$. Если непусты две области одного сорта и одна область другого сорта (например, α_i, α_j и β_k), то имеются 9 попарно неэквивалентных возможностей:

$$(i, j, k) \in M_3 = \{(1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 2), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 2), (1, 4, 3)\}.$$

Допустимые возможности для рассматриваемого случая перечислены в таблицах 5 и 6, причем в заголовке таблицы указано только по одному элементу (т.е. набору значений индексов) из каждого из указанных выше множеств M_1, M_2, M_3 , поскольку вычисления в п. 4 и их результаты не зависят от выбора этих элементов.

Таблица 5. Тип II, главный несвободный овал, схемы $\frac{1}{1}9$ и $\frac{5}{1}5$

№ пп	Схема степени 6	α	α_1	α_2	α_3	β	β_1	β_2	β_3	М-Т	Ф-М
1	$\frac{1}{1}9$	1				6	3			Построение Гильберта	
2	—"—	★ 1				6	2	1		✓	×
3	—"—	★ 1				6	1	1	1	✓	×
4	—"—	★ 1				2	7			×	—
5	—"—	★ 1				2	6	1		×	×
6	—"—	★ 1				2	5	2		×	×
7	—"—	★ 1				2	5	1	1	×	—
8	—"—	★ 1				2	4	3		×	×
9	—"—	★ 1				2	3	3	1	×	—
10	—"—		1			7	2			нет М-пучка	
11	—"—		1			7	1	1		нет М-пучка	
12	—"—		1			3	6			нет М-пучка	
13	—"—		1			3	5	1		нет М-пучка	
14	—"—		1			3	3	3		нет М-пучка	
15	$\frac{5}{1}5$	★ 5				2	3			×	×
16	—"—	★ 5				2	2	1		×	×
17	—"—	★ 5				2	1	1	1	×	×
18	—"—	★ 4	1			3	2			×	—
19	—"—	★ 4	1			3	1	1		✓	×
20	—"—	★ 3	2			4	1			✓	✓
21	—"—	★ 3	2				5			✓	×
22	—"—	★ 3	1	1		4	1			✓	×
23	—"—	★ 3	1	1			5			×	×
24	—"—	★ 2	3			5				✓	×
25	—"—	★ 2	3			1	4			✓	×
24	—"—	★ 2	3			1	3	1		✓	×
25	—"—	★ 2	2	1		5				✓	×
26	—"—	★ 2	1	1	1	5				✓	×
27	—"—	★ 1	4			2	3			✓	×
28	—"—	★ 1	3	1		2	3			✓	×
29	—"—		5			3	2			нет М-пучка	
30	—"—		5			3	1	1		нет М-пучка	

Таблица 6. Тип II, главный несвободный овал, схема $\frac{9}{1}1$

№пп	Схема степени 6	α	α_1	α_2	α_3	β	β_1	β_2	β_3	М-Т	Ф-М
31	$\frac{9}{1}1$	* 7	2				1			✓	×
32	—"	* 7	1	1			1			×	—
33	—"	6	3			1				Построение Гильберта	
34	—"	* 6	2	1		1				✓	✓
35	—"	* 6	1	1	1	1				✓	×
36	—"	* 3	6				1			✓	×
37	—"	* 3	5	1			1			✓	×
38	—"	* 3	3	3			1			✓	×
39	—"	* 2	7			1				✓	×
40	—"	* 2	6	1		1				×	—
41	—"	* 2	5	2		1				✓	×
42	—"	* 2	5	1	1	1				✓	×
43	—"	* 2	4	3		1				×	—
44	—"	* 2	3	3	1	1				✓	×

Таблица 7. Тип II, внутренний несвободный овал

№пп	Схема степени 6	β_1	β'	β''	М-Т	Ф-М
1	$\frac{5}{1}5$	* 1	3	5	✓	✓
2	$\frac{9}{1}1$	* 1	7	1	✓	×
3	$\frac{9}{1}1$	5	3	1	Построение Гильберта	

Заметим¹, что в случае набора индексов из множества M_2 , если числа овалов в каждой из трех соответствующих этим индексам непустых областей одинаковы, то соответствующим строкам таблицы (например, строке 3 таблицы 5) отвечают по три попарно неизотопных расположения. Если же совпадают только два из этих трех чисел (как, скажем, в строке 7 таблицы 5), то (с точностью до циклического порядка областей вдоль овала коники) получаются по 5 попарно различных возможностей². Аналогично для случая множества M_3 : если числа овалов в двух непустых областях одного сорта одинаковы, то соответствующим строкам таблицы (например, строкам 11 и 14 таблицы 5) отвечают по девять попарно неизотопных расположений, а если эти числа не совпадают (как, скажем, в строке 13 таблицы 5), то получаются по 15 попарно различных возможностей.

¹Это замечание учитывается в приведенной в конце статьи статистике результатов.

²В обоих случаях M_2 и M_3 ситуация, когда эти три числа все различны, в таблицах не встречается.

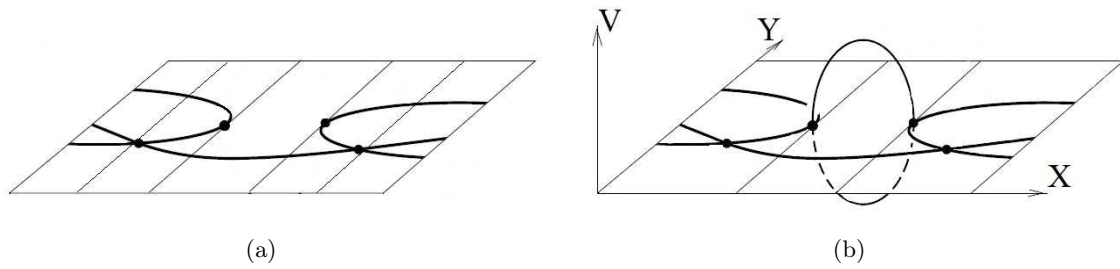


Рис. 3

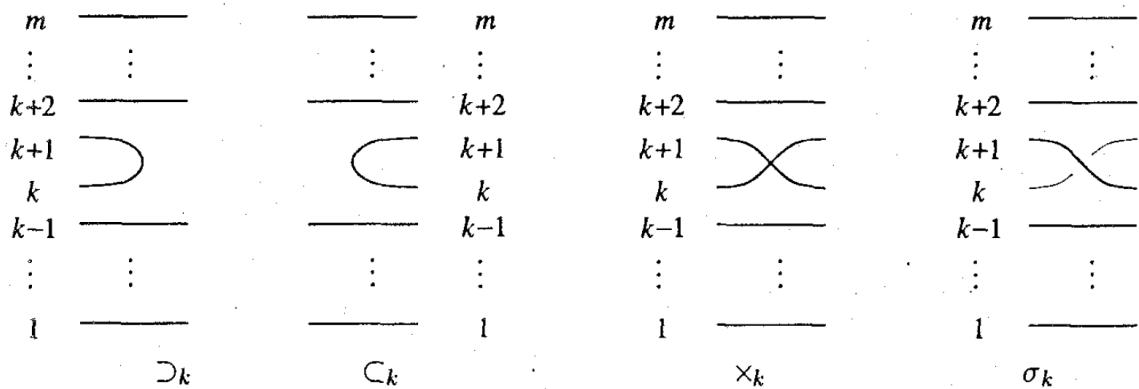


Рис. 4. Символы \times -кода и стандартные образующие группы кос

В3. Несвободный овал — внутренний. Как и в случае внутреннего несвободного овала для конфигурации типа I (случай A3 выше), главный овал охватывает всю конфигурацию из двух пересекающихся овалов, и содержать свободные овалы могут только одна из равноправных областей β_i , $1 \leq i \leq 6$, и части β' (внутри главного овала) и β'' (вне главного овала) области β . Список допустимых возможностей приведен в таблице 7.

3. Метод Оревкова. Применяемый ниже метод Оревкова для запретов изотопических типов алгебраических кривых с помощью теории кос и зацеплений неоднократно излагался в литературе (кроме основополагающей работы [26], см., например, [15, 24, 27]), поэтому здесь дадим лишь его краткое изложение, необходимое для понимания дальнейшего.

Пусть C_m — кривая, все особенности которой — невырожденные двойные точки. Предположим, что существует такая точка $p \in \mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}C_m$, что пучок L_p прямых с центром в этой точке обладает следующими свойствами:

- (а) в L_p найдется прямая l_0 , пересекающая кривую $\mathbb{R}C_m$ в m различных точках (*максимальная прямая*);
- (б) любая прямая $l \in L_p$ пересекает кривую $\mathbb{R}C_m$ не менее, чем в $m - 2$ различных точках;
- (с) каждая прямая пучка имеет не более одной точки двукратного пересечения с $\mathbb{R}C_m$, т.е. каждая из таких *критических прямых* либо касается $\mathbb{R}C_m$, либо пересекает $\mathbb{R}C_m$ в ее двойной точке без касания.

Пучок, удовлетворяющий условиям (а)–(с), будем называть *максимальным*. Заметим, что выполнения условия (с) всегда можно добиться малым шевелением центра пучка.

Выберем аффинные координаты (x, y) так, чтобы прямая l_0 (а следовательно, и точка p) оказалась в бесконечности и пучок L_p превратился в пучок параллельных прямых $\{l_t\}$ (см. рис. 3(а)), где l_t — прямая, заданная уравнением $x = t$.

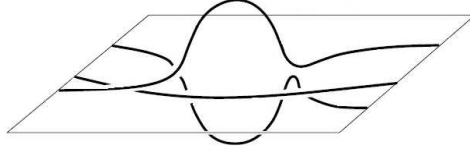


Рис. 5

Пусть $\{l_{t_1}, \dots, l_{t_s}\}$ — набор всех критических прямых, упорядоченных по возрастанию t_i . Схема расположения кривой $\mathbb{R}C_m$ относительно пучка L_p кодируется словом $u_1 \dots u_s$, где буква u_i характеризует расположение кривой $\mathbb{R}C_m$ в окрестности прямой l_{t_i} и принимает одно из значений $\supset_k, \subset_k, \times_k$ ($k \in \{1, \dots, m-1\}$) в соответствии с рис. 4¹; пару расположенных подряд символов \subset_k, \supset_k будем заменять одним символом o_k («свободный овал в $(k-1)$ -й полосе, считая снизу»), а кодирующее слово называть \times -кодом.

Рассмотрим в комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ множество $M = \mathbb{C}C_m \cap \mathbb{C}L_p$, где $\mathbb{C}L_p$ — пучок комплексных прямых $\mathbb{C}l$. Множество M гомеоморфно набору окружностей, некоторые из которых попарно склеены в двойных точках кривой $\mathbb{R}C_m$ и в точках касания прямых пучка L_p с этой кривой (см. рис. 3(b)²).

Устранив все точки склейки некоторым стандартным образом (см. рис. 5; подробности см. в [15, 26]), получим зацепление $K(C_m, p)$. Пусть $b(C_m, p)$ — коса из m нитей, замыкание которой совпадает с $K(C_m, p)$. Для дальнейшего важно, что, в силу предположения о максимальности пучка, коса $b(C_m, p)$ однозначно (с точностью до сопряженности в группе B_m кос из m нитей) определяется взаимным расположением в $\mathbb{R}P^2$ кривой $\mathbb{R}C_m$ и пучка L_p .

Напомним, что группа B_m имеет копредставление через стандартные образующие σ_k :

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ при } |i-j| > 1, \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \text{ при } |i-j| = 1 \right\rangle.$$

Известно (см. [25]), что полученная описанным выше способом коса $b(C_m, p)$ должна быть квазиположительной, т.е. допускать запись в виде

$$\prod_{j=1}^k \omega_j \sigma_{i_j} \omega_j^{-1},$$

где $\omega_j, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, — некоторые слова в алфавите $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{m-1}^{-1}\}$. Следовательно, если для топологической модели гипотетической кривой $\mathbb{R}C_m$ при каждом возможном взаимном расположении пучка L_p и этой модели коса $b(C_m, p)$ не является квазиположительной, то эта модель не может быть реализована алгебраической кривой степени m .

В качестве необходимого условия квазиположительности С. Ю. Оревков в [26] предложил использовать неравенство Мурасуги—Тристрама, а затем в [14, 27] — условие Фокса—Милнора.

Неравенство Мурасуги—Тристрама. Если $b = \prod \sigma_i^{k_i}$ — квазиположительная коса из m нитей, то для ее замыкания выполняется неравенство

$$|\sigma(b)| + m - e(b) - n(b) \leq 0,$$

где $\sigma(b)$ и $n(b)$ — сигнатура и дефект замыкания косы b , $e(b) = \sum k_j$ — алгебраическая степень косы b .

¹Рисунок 4 взят из [15].

²Этот рисунок условный: «мнимая ось» V двумерна.

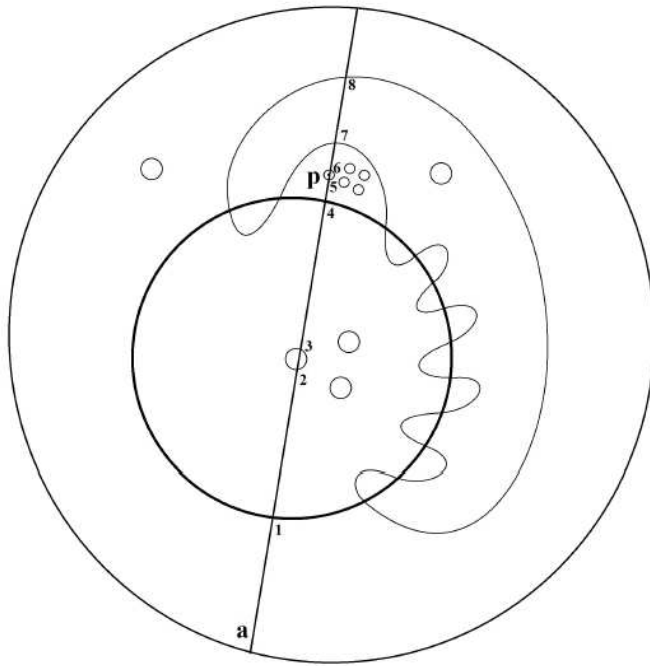


Рис. 6

Условие Фокса—Милнора. Пусть b — квазиположительная коса из t нитей. Если $e(b) = t - 1$, то должен существовать такой многочлен $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$, что многочлен Александера $\Delta_L(t)$ замыкания L косы b представляется в виде

$$\Delta_L(t) \doteq f(t) \cdot f(t^{-1}),$$

где \doteq означает равенство с точностью до умножения на единицы кольца $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$; если $e(b) < t - 1$, то должно выполняться равенство $\Delta_L(t) = 0$ (подробнее см. [19]).

Утверждение 1. Для того, чтобы многочлен Александера удовлетворял условию Фокса—Милнора, его значение при $t = -1$ должно быть квадратом целого числа.

Утверждение 2. Если в разложении многочлена Александера на неприводимые множители содержится симметричный многочлен в нечетной степени, то многочлен Александера не представляется в виде, указанном в условии Фокса—Милнора.

4. Запреты взаимных расположений коники и секстики с помощью метода Оревкова. Проиллюстрируем применение метода Оревкова в нашей задаче примерами и опишем полученные результаты.

Пример 1. Рассмотрим гипотетическое расположение коники и секстики, указанное в строке 1 таблицы 2 (см. рис. 6, на котором p — центр максимального пучка, a — максимальная прямая l_0 , внешняя окружность — граница модели проективной плоскости, т.е. диаметрально противоположные точки этой окружности считаются отождествленными).

Выберем центр p максимального пучка внутри одного из овалов, лежащих в области β_1 , и прямую a , проходящую через точку p и точку внутри одного из овалов, лежащих в области β , в качестве прямой l_0 (см. рис. 6).

Замечание. Как уже отмечалось выше, при наличии максимального пучка коса $b(C_m, p)$ однозначно определяется «вещественной картинкой» (т.е. взаимным расположением кривой $\mathbb{R}C_m$ и пучка L_p в $\mathbb{R}P^2$). Для немаксимального пучка не видно, как переплетаются нити в мнимой области. В случаях, когда найти максимальный пучок прямых не удавалось, рассмотрения не

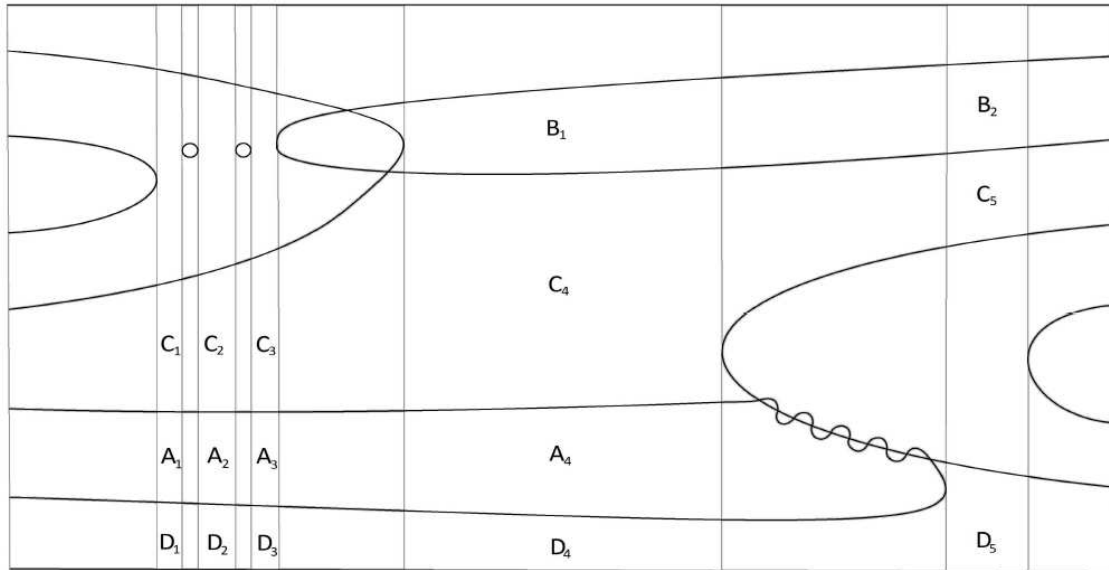


Рис. 7. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup B_1 \cup B_2| = 1$, $|C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5| = 1$, $|D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5| = 4$; в силу теоремы Безу овалы не могут находиться в вертикальных полосах, не содержащих областей, обозначенных буквами

проводились; такие случаи отмечены в таблицах. Хотя в принципе метод Оревкова применим и в этих случаях (см. [26, 27]), рассмотрение имеющихся возможностей здесь довольно сложно и требуется объемных вычислений.

Выбирая теперь аффинную систему координат так, как описано в п. 3, получим «развертку» изображенной на рис. 6 кривой; эта развертка показана на рис. 7, где латинскими буквами с индексами обозначены области, в которых могут располагаться свободные овалы, а в подписи к рисунку запись вида $|U|$ обозначает число овалов в области U и записаны условия на эти числа, соответствующие рассматриваемому примеру; \times -код для рис. 7, не учитывающий ненарисованные свободные овалы, имеет вид

$$\supset_5 o_5 o_5 \subset_5 \times_6 \times_4 \supset_5 \subset_4 \times_3^{10} \supset_2 \subset_3,$$

где \times_3^{10} означает повторенный десять раз подряд символ \times_3 .

Теперь нужно осуществить перебор логически возможных распределений свободных овалов по областям, обозначенным буквами, и вставить в соответствующие места выписанного \times -кода нужные символы o_i . Далее для каждого \times -кода из полученного в результате списка \times -кодов проверяем неравенство Мурасуги—Тристрама для соответствующего зацепления. Если для каждого случая это неравенство не выполняется, то данное расположение не реализуется никакой кривой степени 8. Именно такой результат и дают вычисления для рассматриваемого примера. Тот факт, что расположение запрещается таким способом, отмечен знаком \times в соответствующих строках колонок «М-Т» таблиц п. 2. В таких случаях проверка условия Фокса—Милнора, как правило, не производилась, что отмечено прочерком в соответствующих клетках колонки «Ф-М».

Если применение неравенства Мурасуги—Тристрама не дало запрета (см. пример 2 ниже), т.е. хотя бы для одного распределения овалов это неравенство выполняется, в соответствующих клетках колонки «М-Т» поставлен значок \checkmark . В таких случаях вычислялся полином Александера и проверялось условие Фокса—Милнора; результаты вычислений таким же образом отмечены в столбцах «Ф-М».

Пример 2. Рассмотрим гипотетическое расположение коники и секстики, указанное в строке 2 таблицы 7 (см. рис. 8, где p — центр максимального пучка, a — максимальная прямая l_0 ,

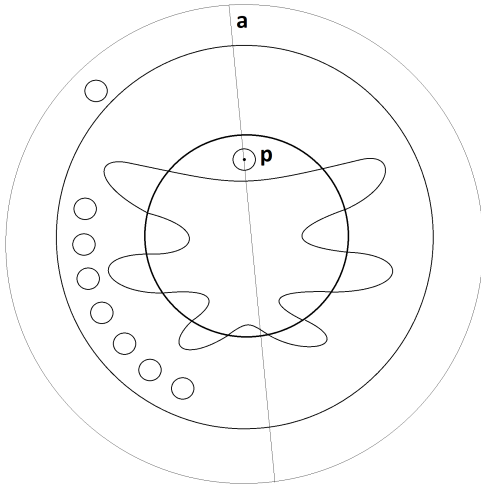
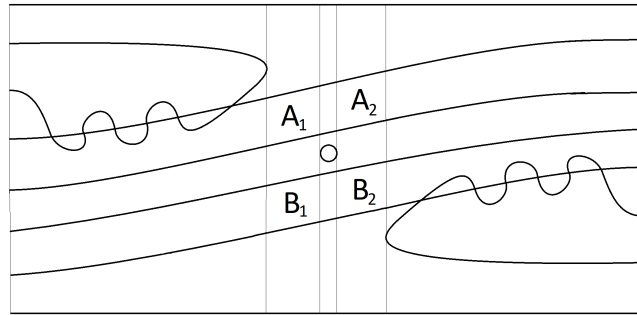


Рис. 8

Рис. 9. $|A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2| = 7$

внешняя окружность — граница модели проективной плоскости). Развертка для рис. 8 показана на рис. 9.

Здесь имеются 120 попарно различных распределений семи овалов в областях A_1 , A_2 , B_1 , B_2 . Вычисления показывают, что для каждого из них соответствующее зацепление удовлетворяет неравенству Мурасуги—Тристрама. Тогда применяем условие Фокса—Милнора, т.е. вычисляем для каждого из этих зацеплений многочлен Александра. В 68 случаях значение многочлена Александра в точке -1 не является квадратом целого числа; следовательно (см. утверждение 1), соответствующие расположения не реализуются кривыми степени 8. В каждом из остальных 52 случаев вычисления показывают, что в разложении многочлена Александра на множители имеется симметричный многочлен в нечетной степени, поэтому условие Фокса—Милнора не выполняется в силу утверждения 2. Таким образом, расположение из строки 2 таблицы 7 запрещено, что указано значком \times в колонке «Ф-М».

Выбор центра пучка и построение послойного расположения для записи исходного \times -кода производятся вручную. Символ \star в таблицах возле числа, указывающего количество овалов в данной области, означает, что центр пучка выбирался внутри этого или одного из этих овалов; при этом в каком именно из овалов, если число больше единицы, и в какой области, если в заголовке таблицы область не указана однозначно, для вычислений значения не имеет.

Все остальные вычисления выполняются с помощью компьютера. Именно, перечисление допустимых расположений свободных овалов для каждого послойного расположения, вычисление по \times -кодам соответствующих кос, вычисление всех инвариантов зацеплений, входящих в неравенство Мурасуги—Тристрама, выполнялись с помощью программы, написанной М. А. Гущиным¹ и неоднократно применявшейся ранее (например, в [8, 24]) при классификации других классов распадающихся кривых.

Вычисление полинома Александра зацепления и проверка его свойств из утверждений 1 и 2 производились с помощью программы, написанной для этой работы первым из авторов.

5. Статистика результатов. Всего имеется 323 попарно неизотопных схем кривых рассматриваемого в работе вида. Шесть из них могут быть реализованы кривыми степени 8 в процессе построения неособых кривых четной степени *методом Гильберта*. Поскольку построения методом Гильберта неоднократно описаны в литературе (см., например, [1, 2, 16]), ограничимся в таблицах указанием «построение Гильберта».

¹В то время — студентом механико-математического факультета Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского.

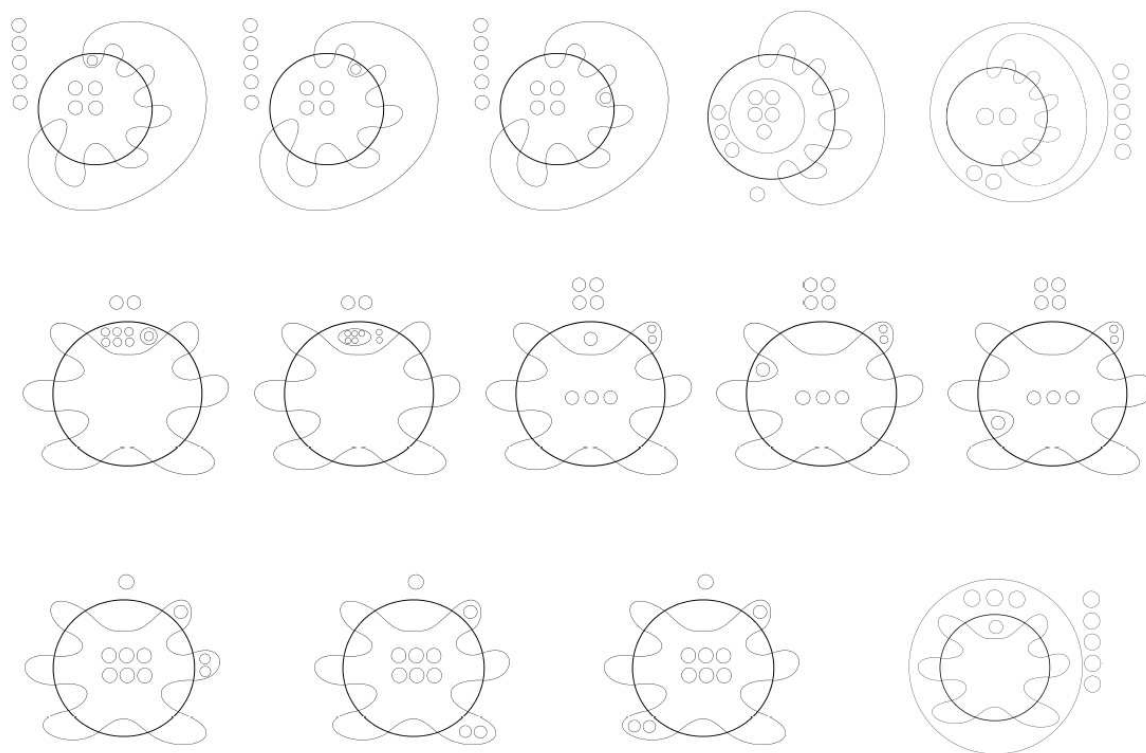


Рис. 10

Среди оставшихся 317 схем максимальный пучок имеется для 245 схем, из которых 231 запрещена в этой работе, а для 14 схем, показанных на рис. 10, вопрос о реализуемости открыт.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виро О. Я. Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией// Алгебра и анализ. — 1989. — 1, № 5. — С. 1–73.
2. Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий// Усп. мат. наук. — 1974. — 29, № 4 (178). — С. 3–79.
3. Гудков Д. А., Уткин Г. А. Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка (к 16-й проблеме Гильберта)// Уч. зап. Горьков. ун-та. — 1969. — 87. — С. 1–214.
4. Гуцин М. А. Построения некоторых расположений коники и M -квинтики с одной точкой на бесконечности// Вестн. ННГУ. Сер. мат. — 2004. — № 1 (2). — С. 43–52.
5. Гуцин М. А. Коника и M -квинтика с одной точкой на бесконечности// Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2005. — 329. — С. 14–27.
6. Гуцин М. А., Коробейников А. Н., Полотовский Г. М. Построение взаимных расположений кубики и квинтики методом кусочного конструирования// Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2000. — 267. — С. 119–132.
7. Коробейников А. Н. Новые построения распадающихся кривых// Вестн. ННГУ. Сер. мат. модел. опт. управл. — 2001. — № 1(23). — С. 17–27.
8. Корчагин А. Б., Полотовский Г. М. О расположениях плоской вещественной квинтики относительно пары прямых// Алгебра и анализ. — 2009. — 21, № 2. — С. 92–112.
9. Корчагин А. Б., Шустин Е. И. Аффинные кривые степени 6 и устранения невырожденной шестикратной особой точки// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — 52, № 6. — С. 1181–1199.
10. Оревкин С. Ю. Новая аффинная M -секстिका// Функц. анализ. прилож. — 1998. — 32. — С. 141–143.
11. Оревкин С. Ю. Новая аффинная M -секстिका, II// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 5(323). — С. 243–244.

12. *Оревкин С. Ю.* Проективные коники и M -квintики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов// Мат. заметки. — 1999. — 65, № 4. — С. 632–635.
13. *Оревкин С. Ю.* Построение расположений M -квartики и M -кубики с максимально пересекающимися овалом и нечетной ветвью// Вестн. ННГУ. Сер. мат. модел. оптим. управл. — 2002. — № 1 (25). — С. 12–48.
14. *Оревкин С. Ю.* Расположения M -квintики относительно коники, максимально пересекающей ее нечетную ветвь// Алгебра и анализ. — 2007. — 19, № 4. — С. 174–242.
15. *Оревкин С. Ю., Полотовский Г. М.* Проективные M -кубики и M -квartики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов// Алгебра и анализ. — 1999. — 11, № 5. — С. 166–184.
16. *Полотовский Г. М.* К задаче топологической классификации расположения овалов неособых алгебраических кривых в проективной плоскости// в кн.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений. — Горький: Изд-во ГГУ, 1975. — С. 101–128.
17. *Полотовский Г. М.* Каталог M -распадающихся кривых 6-го порядка// Докл. АН СССР. — 1977. — 236, № 3. — С. 548–551.
18. *Полотовский Г. М.* Полная классификация M -распадающихся кривых 6-го порядка в вещественной проективной плоскости/ Деп. в ВИНТИ. № 1349-78. — М., 1978.
19. *Полотовский Г. М.* $(M - 2)$ -Кривые 8-го порядка: построения, открытые вопросы/ Деп. в ВИНТИ. № 1185-85. — М., 1985.
20. *Шустин Е. И.* К изотопической классификации аффинных M -кривых степени 6// в кн.: Методы качественной теории и теории бифуркаций. — Горький: Изд-во ГГУ, 1988. — С. 97–105.
21. *Binstein A. A., Polotovskii G. M.* On the mutual arrangement of a conic and a quintic in the real projective plane// in: Methods of Qualitative Theory of Differential Equations and Related Topics. Am. Math. Ser. Transl. Ser. 2, 2000. — 200. — P. 63–72.
22. *Fiedler-Le Touz'e S., Orevkov S. Yu.* Flexible affine M -sextic which is algebraically unrealizable// J. Alg. Geom. — 2002. — 11. — P. 293–310.
23. *Fiedler-Le Touz'e S., Orevkov S. Yu., Shustin E. I.* Corrigendum to the paper “A flexible affine M -sextic which is algebraically unrealizable”/ [arXiv:1801.04905 \[math.AG\]](https://arxiv.org/abs/1801.04905).
24. *Korchagin A. B., Polotovskii G. M.* On arrangements of a plane real quintic curve with respect to a pair of lines// Commun. Contemp. Math. — 2003. — 5, № 1. — P. 1–24.
25. *Lee R.* Algebraic functions and closed braids// Topology. — 1983. — 22. — P. 191–202.
26. *Orevkov S. Yu.* Link theory and oval arrangements of real algebraic curve// Topology. — 1999. — 38. — P. 779–810.
27. *Orevkov S. Yu.* Clasification flexible M -curves of degree 8 up to isotopy// Geom. Funct. Anal. — 2002. — 12, № 4. — P. 723–755.
28. *Orevkov S. Yu., Shustin E. I.* Flexible, algebraically unrealizable curves: rehabilitation of the Hilbert–Rohn–Gudkov approach// J. Reine Angew. Math. — 2002. — 551. — P. 145–172.
29. *Orevkov S. Yu., Shustin E. I.* Pseudoholomorphic algebraically unrealizable curves// Moscow Math. J. — 2003. — 3, № 3. — P. 1053–1083.
30. *Polotovskii G. M.* On the classification of decomposing plane algebraic curves// Lect. Notes Math. — 1992. — 1524. — P. 52–74.
31. *Polotovskii G. M.* On the classification of decomposable 7-th degree curves// Contemp. Math. — 2000. — 253. — P. 219–234.
32. *Polotovskiy G. M.* On the classification of 7th degree real decomposable curves// Adv. Stud. Pure Math. — 2006. — 43. — P. 369–382.

Борисов Иван Михайлович
 Национальный исследовательский университет
 «Высшая школа экономики», Нижний Новгород
 E-mail: i.m.borisov@mail.ru

Полотовский Григорий Михайлович
 Национальный исследовательский университет
 «Высшая школа экономики», Нижний Новгород
 E-mail: polotovskiy@gmail.com