О двумерных растягивающихся аттракторах А-потоков

Е. В. Жужома, В. С. Медведев

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса–Смейла, топологическая сопряженность, гиперболические точки.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12730

1. Введение. А-потоки, введенные Смейлом [1] по аналогии с А-диффеоморфизмами, образуют важный класс потоков с гиперболической структурой неблуждающего множества. Этот класс включает в себя структурно устойчивые потоки (в частности, потоки Морса–Смейла и потоки Аносова). Известно, что неблуждающее множество А-потока распадается на непересекающиеся и транзитивные инвариантные множества, которые называются базисными множествами [1]–[3]. Среди базисных множеств, являющихся аттракторами, важный класс составляют растягивающиеся аттракторы, введенные Вильямсом [4].

В настоящей статье доказывается, что на любом замкнутом 3-мерном многообразии существует А-поток с неориентируемым растягивающимся двумерным аттрактором. Показывается также, что на 3-мерной сфере существует А-поток с ориентируемым растягивающимся двумерным аттрактором. В качестве следствия получаем, что на любом замкнутом многообразии размерности $n \geqslant 4$ существует А-поток с растягивающимся двумерным аттрактором (как с ориентируемым, так и с неориентируемым).

Основной результат контрастирует с ситуацией для А-диффеоморфизмов. Именно, из работ [5]–[8] вытекает, что если на замкнутом 3-мерном многообразии M^3 задан А-диффеоморфизм с растягивающимся аттрактором коразмерности один, то $\pi_1(M^3) \neq 0$. Отметим, что на некоторых замкнутых 3-мерных многообразиях существуют потоки Аносова с двумерными растягивающимися аттракторами [9]. Однако, Маргулис [10] доказал, что фундаментальная группа такого несущего 3-многообразия имеет экспоненциальный рост.

2. Основные определения. Пусть f^t – C^1 гладкий поток на замкнутом n-мерном гладком многообразии M^n, $n \geqslant 3$, снабженном некоторой римановой метрикой d. Множество $\Lambda \subset M^n = M$, инвариантное относительно f^t (инвариантность означает, что вместе с любой своей точкой множество Λ содержит всю траекторию, проходящую через эту точку), называется *гиперболическим* (или *имеет гиперболическую структуру*), если ограничение $T_\Lambda M$ касательного расслоения TM многообразия M на Λ можно представить в виде суммы Уитни $E^{ss}_\Lambda \oplus E^t_\Lambda \oplus E^{uu}_\Lambda$ непрерывных и инвариантных относительно df^t при любом t подрасслоений E^{ss}_Λ, E^t_Λ и E^{uu}_Λ таких, что

1) $\dim E^{ss}_\Lambda + \dim E^t_\Lambda + \dim E^{uu}_\Lambda = n$;

2) одномерное расслоение E^t_Λ касается траектории потока, проходящей через x, если x не является точкой покоя (в противном случае $E^t_\Lambda = 0$);

3) существуют константы $C_s > 0$, $C_u > 0$, $0 < \lambda < 1$ такие, что

$$\|df^t(v)\| \leqslant C_s \lambda^t \|v\|, \qquad v \in E^{ss}_\Lambda, \quad t > 0,$$
$$\|df^{-t}(v)\| \leqslant C_u \lambda^t \|v\|, \qquad v \in E^{uu}_\Lambda, \quad t > 0.$$

Работа выполнена при поддержке лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-15-2019-1931), кроме доказательства теоремы 2, выполненного при поддержке РНФ (грант № 17-11-01041).

Непосредственно из определения вытекает, что если $x \in \Lambda$ – точка покоя, то x является гиперболической точкой покоя, изолированной в Λ. Структура потока вблизи такой точки описывается теоремой Гробмана–Хартмана. Пусть теперь x – регулярная точка (т.е. через x проходит одномерная траектория). Согласно [1], [11], подрасслоения

$$E^{uu}_\Lambda \oplus E^1_\Lambda = E^u_\Lambda, \qquad E^{ss}_\Lambda \oplus E^1_\Lambda = E^s_\Lambda, \qquad E^{uu}_\Lambda, \qquad E^{ss}_\Lambda$$

единственно интегрируемы, и мы обозначим через $W^u(x)$, $W^s(x)$, $W^{uu}(x)$, $W^{ss}(x)$ соответствующие слои, проходящие через $x \in \Lambda$. Эти слои называются *неустойчивыми*, *устойчивыми*, *строго неустойчивыми*, *строго устойчивыми многообразиями* соответственно. Семейства слоев инвариантны относительно сдвига на любое время t вдоль траекторий, и образуют локальные ламинации.

Обозначим через $\mathrm{Fix}(f^t)$ множество точек покоя потока f^t. Следуя [1], будем называть f^t *A-потоком*, если его неблуждающее множество $NW(f^t)$ гиперболическое и периодические траектории плотны в $NW(f^t) \setminus \mathrm{Fix}(f^t)$. Известно [3], что $NW(f^t)$ представимо в виде попарно непересекающихся замкнутых и транзитивных множеств, которые называются *базисными*. Следуя [4], базисное множество Ω называется *растягивающимся аттрактором*, если Ω является аттрактором и его топологическая размерность совпадает с размерностью неустойчивого многообразия $W^u(x)$ для всех точек $x \in \Omega$. Если $\dim \Omega = \dim M^n - 1$, то Ω называется растягивающимся аттрактором *коразмерности один*. Из [3], [4] вытекает, что строго устойчивые многообразия $W^{ss}(x)$, $x \in \Omega$, образуют одномерное слоение $\mathscr{W}^{ss}(\Omega)$ на открытом подмножестве $\mathrm{supp}\, \mathscr{W}^{ss} = W^s(\Omega) \subset M^n$, в то время, как неустойчивые многообразия $W^u(x)$, $x \in \Omega$, образуют ламинацию $\mathscr{W}^u(\Omega)$ коразмерности один. Из наличия гиперболической структуры следует, что слоение $\mathscr{W}^{ss}(\Omega)$ и ламинация $\mathscr{W}^u(\Omega)$ трансверсальны. Растягивающийся аттрактор Ω называется *ориентируемым*, если $\mathscr{W}^{ss}(\Omega)$ и $\mathscr{W}^u(\Omega)$ ориентируемы.

3. Доказательства основных результатов. Мы начнем со вспомогательного утверждения, имеющего самостоятельный интерес.

Лемма 1. *На любом замкнутом 3-мерном многообразии M^3 существует поток f^t Морса–Смейла с отталкивающей или притягивающей периодической траекторией.*

Доказательство. Известно, что на любом замкнутом 3-мерном многообразии M^3 существует градиентно-подобный поток Морса–Смейла. Если этот поток не имеет отталкивающей или притягивающей периодической траекторий, то существует притягивающий узел ω. Существует окрестность $U(\omega)$ узла ω, которая гомеоморфна 3-мерному шару с гладкой границей $\partial U(\omega)$ такой, что векторное поле на направлено внутрь $U(\omega)$. Рассмотрим систему, имеющую в цилиндрических координатах (ρ, ϕ, z) пространства $\mathbb{R}^3$ вид

$$\dot\rho = \rho \cdot (1-\rho), \qquad \dot\phi = 1, \qquad \dot z = -z.$$

Не выходя из пространства потоков Морса–Смейла, этот узел можно перевести в узел с инвариантной локальной двумерной плоскостью, на которой поток имеет устойчивый фокус. Потом в инвариантной плоскости осуществить бифуркацию Андронова–Хопфа. В результате получим поток с седло-фокусом и притягивающей периодической траекторией. Обратив время, можно получить поток Морса–Смейла с отталкивающей периодической траекторией.

Лемма 2. *На $S^2 \times S^1$ существует неособый A-поток f^t, содержащий в своем спектральном разложении двумерный растягивающийся неориентируемый аттрактор Λ_a и четыре изолированные отталкивающие периодические траектории. Более того, существует замкнутая окрестность P аттрактора Λ_a, гомеоморфная полноторию $S^1 \times D^2$, такая, что траектории потока f^t трансверсальны границе $\partial P = S^1 \times S^1$, и входят внутрь P при увеличении времени.*

Доказательство. Известно, что существует структурно устойчивый А-диффеоморфизм $f\colon S^2 \to S^2$ с одномерным неориентируемым аттрактором Плыкина Λ_0 и четырьмя изолированными источниками. При этом диффеоморфизм f изотопен тождественному. Тогда динамическая надстройка над f дает требуемый структурно устойчивый А-поток f^t на $S^2 \times S^1$.

Теорема 1. *На любом замкнутом 3-мерном многообразии M^3 существует А-поток f^t, содержащий в своем спектральном разложении двумерный растягивающийся неориентируемый аттрактор, причем остальные базисные множества потока f^t тривиальны.*

Доказательство. Согласно лемме 1 на M^3 существует поток f_0^t Морса–Смейла с отталкивающей периодической траекторией l_0. Теперь можно удалить трубчатую окрестность l_0 и вклеить вместо нее полноторий с двумерным неориентируемым растягивающимся аттрактором, существование которого вытекает из леммы 2. При этом, нужно позаботится только о том, чтобы сепаратриса седла-фокуса не пересекалась с граничной сепаратрисой периодической траектории растягивающегося аттрактора. Ясно, что это можно сделать.

Теорема 2. *На 3-мерной сфере S^3 существует неособый А-поток f^t, содержащий в своем спектральном разложении двумерный растягивающийся ориентируемый аттрактор.*

Доказательство. Рассмотрим на двумерном торе $\mathbb{T}^2$ диффеоморфизм Аносова $A\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, определяемый матрицей Тома

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

и пусть $f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ – ДА-диффеоморфизм, гомотопный диффеоморфизму A. Обозначим через $sus^t(f)$ динамическую надстройку над f. Тогда $sus^t(f)$ имеет растягивающийся двумерный аттрактор Λ и изолированную отталкивающую периодическую траекторию γ, которая соответствует неподвижному источнику диффеоморфизма f. Пусть $U(\gamma)$ – трубчатая окрестность траектории γ с трансверсальной потоку $sus^t(f)$ границей $\partial U(\gamma) = \partial U$. Известно [12], что существует диффеоморфизм $\vartheta\colon \partial U \to \partial U$ такой, что многообразие $(\mathbb{T}^2 \setminus U)\bigcup_\vartheta U$ является 3-мерной сферой S^3. Тогда $sus^t(f)$ индуцирует на S^3 требуемый неособый А-поток f^t.

Следствие. *На любом замкнутом многообразии M^n размерности $n \geqslant 4$ существует А-поток с ориентируемым и неориентируемым растягивающимся двумерным аттрактором.*

Доказательство. Представим n-мерную сферу S^n в виде объединения двух замкнутых n-мерных дисков D_1^n и D_2^n, пересекающихся по $(n-1)$-мерной сфере S^{n-1}. Используя последовательно теоремы 1, 2, для $n = 4, 5, \dots$ можно построить на S^n А-поток, ограничение которого на S^{n-1} имеет двумерный ориентируемый или неориентируемый растягивающий аттрактор, а неблуждающее множество на каждом D_1^n, D_2^n содержало единственное отталкивающее состояние равновесия. На произвольном M^n существует градиентный поток Морса–Смейла с притягивающим состоянием равновесия. Удалим шаровые окрестности этого состояния равновесия и состояния равновесия на D_1^n. Теперь нетрудно построить на связной сумме этих многообразий требуемый А-поток. Ясно, что связная сумма дает исходное многообразие M^n.

Непосредственно из доказательств теорем 1 и 2 вытекает, что на 3-мерной сфере S^3 можно построить неособый А-поток, у которого спектральное разложение состоит из неориентируемого двумерного растягивающего аттрактора и четырех изолированных периодических траекторий, образующих нетривиальное зацепление, или из ориентируемого двумерного растягивающего аттрактора и одной изолированной отталкивающей периодической траектории l_0, которая образует нетривиальный узел в S^3. Это приводит к следующим гипотезам.

Гипотеза. *Пусть на S^3 имеется неособый A-поток, у которого спектральное разложение состоит из неориентируемого двумерного растягивающегося аттрактора и изолированных отталкивающих траекторий. Тогда изолированные периодические траектории образуют нетривиальное зацепление.*

Гипотеза. *Пусть на S^3 имеется неособый A-поток, у которого спектральное разложение состоит из ориентируемого двумерного растягивающегося аттрактора и одной изолированной отталкивающей периодической траектории l_0. Тогда l_0 образует нетривиальный узел в S^3.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] S. Smale, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817. **[2]** M. Hirch, J. Palis, C. Pugh, M. Shub, *Invent. Math.*, **9** (1970), 121–134. **[3]** C. Pugh, M. Shub, *Invent. Math.*, **11** (1970), 150–158. **[4]** R. Williams, *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 169–203. **[5]** Е. В. Жужома, *Изв. вузов. Матем.*, 1982, № 5, 16–21. **[6]** Е. В. Жужома, В. С. Медведев, *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 83–104. **[7]** Р. В. Плыкин, *УМН*, **39**:6 (240) (1984), 75–113. **[8]** V. Medvedev, E. Zhuzhoma, *J. Dyn. Control Syst.*, **11**:3 (2005), 405–411. **[9]** J. Franks, B. Williams, *Global Theory of Dynamical Systems*, Lecture Notes in Math., **819**, Springer-Verlag, Berlin, 1980, 158–174. **[10]** Г. А. Маргулис, "«У»-потоки на трехмерных многообразиях", Приложение, *УМН*, **22**:5 (1967), 169–171. **[11]** M. W. Hirch, C. C. Pugh, M. Shub, *Invariant Manifolds*, Lecture Notes in Math., **583**, Springer-Verlag, Berlin, 1977. **[12]** G. K. Francis, *Amer. Math. Monthly*, **90**:9 (1983), 589–599.

Е. В. Жужома
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", г. Москва
E-mail: zhuzhoma@mail.ru

Поступило
16.12.2019
Принято к публикации
20.12.2019

В. С. Медведев
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", г. Москва
E-mail: medvedev@uic.nnov.ru