Функциональный анализ и его приложения
2019, т. 53, вып. 4, с. 3–13

УДК 514.8

Кулоновская ветвь многопетлевого колчана*

© 2019. Е. А. Гончаров, М. В. Финкельберг

Мы вычисляем кулоновскую ветвь многопетлевой колчанной калибровочной теории для колчана с единственной вершиной, r петлями, одномерным оснащением и $\dim V = 2$. Мы отождествляем ее со срезом Слодового в нильпотентном конусе симплектической алгебры Ли ранга r. Как следствие она обладает симплектическим разрешением с $2r$ неподвижными точками относительно гамильтонова действия тора. Мы также отождествляем ее флэйвор-деформацию с заменой базы полного среза Слодового.

DOI: `https://doi.org/10.4213/faa3685`

§1. Введение

1.1. Мы рассматриваем многопетлевой аналог жорданова колчана с r петлями в единственной вершине (вместо обычной единственной петли). Соответствующее колчанное многообразие (хиггсова ветвь $\mathscr{M}_H(r,2,1)$ соответствующей колчанной калибровочной теории) в простейшем случае, когда оснащение W одномерно, а калибровочная группа равна $GL(2)$, является аффинным коническим пуассоновым многообразием размерности $8r-4$. Оно обладает симплектическим разрешением (фактором стабильных колчанных данных по свободному действию калибровочной группы) $\widetilde{\mathscr{M}}_H(r,2,1) \to \mathscr{M}_H(r,2,1)$. В отличие от хорошо изученного случая колчанных многообразий Накаджимы для колчанов без петель, когда симплектические разрешения являются полумалыми, разрешение $\widetilde{\mathscr{M}}_H(r,2,1) \to \mathscr{M}_H(r,2,1)$ является *малым*: центральный слой изоморфен $\mathbb{P}^{2r-1}$. В частности, у него $2r$ неподвижных точек относительно естественного гамильтонова действия группы $\mathbb{C}^\times$.

Согласно общепринятым ожиданиям, это означает, что соответствующая кулоновская ветвь $\mathscr{M}_C(r,2,1)$ также должна обладать симплектическим разрешением $\widetilde{\mathscr{M}}_C(r,2,1) \to \mathscr{M}_C(r,2,1)$ с $2r$ неподвижными точками относительно естественного действия группы $\mathbb{C}^\times$. В данной статье мы доказываем, что так оно и есть. Точнее, мы отождествляем $\mathscr{M}_C(r,2,1)$ со срезом Слодового $\mathscr{S}(2r-2,1,1)$ в нильпотентном конусе $\mathscr{N}_{\mathfrak{sp}(2r)}$ алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2r)$ к присоединенной орбите нильпотентного элемента e жорданова типа $(2r-2,1,1)$. Поэтому разрешение $\widetilde{\mathscr{M}}_C(r,2,1) \to \mathscr{M}_C(r,2,1)$ отождествляется с разрешением Спрингера $\widetilde{\mathscr{S}}(2r-2,1,1) \to \mathscr{S}(2r-2,1,1)$. Централизатор $Z_{Sp(2r)}(e)$ содержит подгруппу $SL(2)$, и ее картановский тор действует на слое разрешения Спрингера с $2r$ неподвижными точками. Далее, мы рассматриваем флэйвор-деформацию

*Исследование финансировалось в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и государственной поддержки ведущих университетов Российской федерации «5-100».

$\underline{\mathscr{M}}_C(r,2,1)$ кулоновской ветви $\mathscr{M}_C(r,2,1)$ над $\mathfrak{h} = \operatorname{Lie} T_F = \mathbb{C}z_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}z_r$ для максимального тора флэйвор-группы. Мы отождествляем $\underline{\mathscr{M}}_C(r,2,1)$ с разветвленным накрытием $\underline{\mathbb{S}}(2r-2,1,1)$ полного среза Слодового $\mathbb{S}(2r-2,1,1) \cong \mathbb{A}^{r+4}$, полученным отождествлением спектров матриц в $\mathbb{S}(2r-2,1,1)$ с $\{\pm z_1, \ldots, \pm z_r\}$ (так что $\mathfrak{h}$ отождествляется с картановской подалгеброй Ли алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2r)$), см. предложение 3.1. Весьма вероятно, квантованная флэйвор-деформация кулоновской ветви изоморфна центральному расширению скаляров (с $\mathbb{C}[\mathfrak{h}/\mathbb{W}]$ до $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$) конечной $\mathscr{W}$-алгебры $U(\mathfrak{sp}(2r), e)$.

Наше доказательство чисто вычислительное: мы отождествляем в лоб уравнения, задающие $\mathscr{M}(r,2,1)$ и $\mathscr{S}(2r-2,1,1)$, ср. общий классификационный результат [8], лежащий в основе этого отождествления. Заметим, что симплектическое разрешение $\widetilde{\mathscr{M}}_H(r,2,m)$ для оснащения $W = \mathbb{C}^m$ произвольной размерности тоже имеет конечное множество неподвижных точек относительно действия группы $\mathbb{C}^\times$, и эта конечность остается в силе для $\widetilde{\mathscr{M}}_H(r,3,m)$, даже если мы увеличим калибровочную группу до $GL(3)$ (И. В. Лосев, частное сообщение). Поэтому соответствующие кулоновские ветви тоже должны обладать симплектическими разрешениями $\widetilde{\mathscr{M}}_C(r,2,m)$, $\widetilde{\mathscr{M}}_C(r,3,m)$ с конечными множествами неподвижных точек относительно действия группы $\mathbb{C}^\times$. Однако мы не смогли построить такие разрешения, см. некоторые вычисления в разд. 3.3.

1.2. Благодарности. Мы благодарны И. В. Лосеву за постановку задачи и полезные обсуждения. Мы также признательны Трэвису Шедлеру за ссылку на [4]. Е. Г. обязан И. Ю. Чистякову за помощь с прикладными пакетами.

§2. Кулоновская ветвь и срез Слодового

2.1. Обозначения и основной результат. Мы рассматриваем пространство $\mathbf{N}$ представлений колчана с единственной вершиной, r петлями, $V = \mathbb{C}^2$ и оснащением $W = \mathbb{C}^1$. Другими словами, калибровочная группа равна $G = GL(V) = GL(2)$ и $\mathbf{N} = \mathfrak{gl}(V)^{\oplus r} \oplus V$. Мы обозначаем соответствующую кулоновскую ветвь [1] через $\mathscr{M}_C(r,2,1)$. Это аффинное коническое 4-мерное пуассоново многообразие, снабженное гамильтоновым действием группы $SL(2)$, которое будет определено ниже.

Мы также рассматриваем нильпотентный элемент $e \in \mathfrak{sp}(2r)$ жорданова типа $(2r-2,1,1)$. Его присоединенная орбита имеет коразмерность 4 в нильпотентном конусе $\mathscr{N}_{\mathfrak{sp}(2r)}$ (см., например, [5]). Мы обозначаем соответствующий срез Слодового [6] в $\mathscr{N}_{\mathfrak{sp}(2r)}$ через $\mathscr{S}(2r-2,1,1)$. Это аффинное коническое 4-мерное пуассоново многообразие. Поскольку централизатор элемента e в $Sp(2r)$ содержит подгруппу $SL(2)$, срез $\mathscr{S}(2r-2,1,1)$ снабжен гамильтоновым действием группы $SL(2)$.

Теорема 2.1. *Существует $SL(2)$-эквивариантный пуассонов изоморфизм*

$$\Phi\colon \mathscr{M}_C(r,2,1) \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}(2r-2,1,1).$$

Доказательство будет дано в разд. 2.4 после необходимой подготовки.

2.2. Уравнения кулоновской ветви. Мы будем пользоваться обозначениями из [2, дополнение A], особенно [2, A(iii), (A.7)]. Таким образом, на

$\mathscr{M}_C(r,2,1)$ имеются рациональные этальные координаты u_1, u_2, w_1, w_2 и регулярные функции

$$E_1[1] = (w_1 - w_2)^{r-1}(u_1 - (-1)^r u_2),$$
$$E_1[w] = (w_1 - w_2)^{r-1}(w_1 u_1 - (-1)^r w_2 u_2), \quad E_2[1] = u_1 u_2,$$
$$F_1[1] = (w_1 - w_2)^{r-1}(w_1 u_1^{-1} - (-1)^r w_2 u_2^{-1}),$$
$$F_1[w] = (w_1 - w_2)^{r-1}(w_1^2 u_1^{-1} - (-1)^r w_2^2 u_2^{-1}), \quad F_2[1] = w_1 w_2 u_1^{-1} u_2^{-1}.$$

Эти функции, наряду с регулярными функциями $w_1 + w_2$, $w_1 w_2$, порождают кольцо функций на кулоновской ветви, см. [7, предложение 3.1]. На самом деле эти 8 образующих избыточны, так как

$$w_1 w_2 = E_2[1]F_2[1], \quad E_1[w] = (w_1 + w_2)E_1[1] - (-1)^r E_2[1]F_1[1],$$
$$F_1[w] = (w_1 + w_2)F_1[1] - (-1)^r F_2[1]E_1[1].$$

Итак, у нас остается 5 образующих

$$x_1 := E_1[1], \quad x_2 := (-1)^r E_2[1], \quad y_1 := F_1[1], \quad y_2 := (-1)^r F_2[1], \quad w := w_1 + w_2.$$

Следующая лемма восходит к [4, 7.2].

Лемма 2.2. *Имеем*

$$\mathbb{C}[\mathscr{M}_C(r,2,1)] = \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1, y_2, w]/((w^2 - 4x_2 y_2)^r - (x_1^2 y_2 + x_2 y_1^2 + w x_1 y_1)). \tag{2.1}$$

Доказательство. Проверка соотношения (2.1) проводится непосредственно. Остается проверить, что полученный сюръективный гомоморфизм из левой части в правую инъективен. Если бы были дополнительные соотношения, то из этого следовало бы, что $\dim \mathscr{M}_C(r,2,1) \leqslant 3$, а это невозможно.

Это завершает доказательство, но полезно также сравнить ряды Гильберта левой и правой части относительно естественной градуировки, в которой $\deg x_1 = \deg y_1 = 2r - 1$, $\deg x_2 = \deg y_2 = \deg w = 2$. Ряд Гильберта правой части, очевидно, равен

$$H(t) = \frac{1 - t^{4r}}{(1-t^2)^3(1-t^{2r-1})^2}\,.$$

Чтобы вычислить ряд Гильберта левой части, мы воспользуемся монопольной формулой [1, 2(iii)]. Доминантные ковеса группы $GL(2)$ — это пары целых чисел $\lambda = (n_1, n_2)$, $n_1 \geqslant n_2$. В обозначениях из [1, 2(iii)] имеем $P_G(t;\lambda) = (1-t^2)^{-2}$, если $n_1 > n_2$, и $P_G(t;\lambda) = (1-t^2)^{-1}(1-t^4)^{-1}$, если $n := n_1 = n_2$. Мультимножество весов χ представления $\mathbf{N} = \mathfrak{gl}(2)^{\oplus r} \oplus V$ — это

$$\{(1,0)\} \cup \{(0,1)\} \cup r \cdot \{(1,-1),(-1,1)\} \cup 2r \cdot \{(0,0)\},$$

и для $\chi = (k_1, k_2)$, $\lambda = (n_1 \geqslant n_2)$ имеем $\langle \chi, \lambda \rangle = n_1 k_1 + n_2 k_2$. Поэтому ряд Гильберта левой части равен

$$(1-t^2)^{-2} \sum_{n_1 > n_2 \in \mathbb{Z}} t^{(2r-2)(n_1 - n_2) + |n_1| + |n_2|} + (1-t^2)^{-1}(1-t^4)^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^{2|n|}.$$

Вторая сумма распадается в два слагаемых, согласно дихотомии $n \geqslant 0$ либо $n < 0$, равных соответственно $\frac{1}{(1-t^2)^2(1-t^4)}$ либо $\frac{t^2}{(1-t^2)^2(1-t^4)}$. Первая сумма распадается в три слагаемых, согласно трихотомии $n_1 > n_2 \geqslant 0$, $0 \geqslant n_1 > n_2$ либо $n_1 > 0 > n_2$, равных соответственно $\frac{t^{2r-1}}{(1-t^2)^3(1-t^{2r-1})}$, $\frac{t^{2r-1}}{(1-t^2)^3(1-t^{2r-1})}$ либо $\frac{t^{2(2r-1)}}{(1-t^2)^2(1-t^{2r-1})^2}$. Мы получаем

$$\frac{1}{(1-t^2)^2(1-t^4)} + \frac{t^2}{(1-t^2)^2(1-t^4)} \\ + \frac{2t^{2r-1}}{(1-t^2)^3(1-t^{2r-1})} + \frac{t^{2(2r-1)}}{(1-t^2)^2(1-t^{2r-1})^2} \\ = \frac{1-t^{4r}}{(1-t^2)^3(1-t^{2r-1})^2} = H(t). \qquad \square$$

Замечание 2.3. Градуировка, использованная в доказательстве леммы 2.2, задает следующее стягивающее действие группы $\mathbb{C}^\times$ на $\mathscr{M}_C(r,2,1)$:

$$c \cdot (x_1, x_2, y_1, y_2, w) = (c^{2r-1}x_1,\ c^2x_2,\ c^{2r-1}y_1,\ c^2y_2,\ c^2w).$$

Замечание 2.4. Пусть

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -x_2 & w/2 \\ w/2 & -y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (2.1) эквивалентно уравнению

$$\operatorname{tr}((N\Omega)^{2r}) = A^T\Omega N\Omega A. \tag{2.2}$$

с точностью до перенормировки $x_1 \rightsquigarrow 4^r x_1/\sqrt{2}$, $y_1 \rightsquigarrow 4^r y_1/\sqrt{2}$. Это уравнение для среза Слодового $\mathscr{S}(2r-2,1,1) \subset \mathscr{N}_{\mathfrak{sp}(2r)}$ при $r = 2, 3$, см. [3].

Мы определяем действие группы $SL(2)$ на $\mathscr{M}_C(r,2,1)$ следующим образом: для $S \in SL(2)$ мы полагаем

$$S(A) = SA \text{ (так что } A^T \mapsto A^TS^T), \quad S(N) = SNS^T.$$

Очевидно, это действие сохраняет уравнение (2.2).

2.3. Уравнения среза Слодового. Все матрицы ниже имеют размер $2r \times 2r$, и все пустые места в матрицах обозначают нули.

Матрица

$$e = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & 2r-3 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

(непосредственно над главной диагональю стоят числа $(1, 2, \ldots, 2r-4, 2r-3, 0, 0)$) имеет жорданов тип $(2r-2, 1, 1)$. Определяя

$$f = \begin{pmatrix}
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
2r-3 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}, \qquad
h = \begin{pmatrix}
2r-3 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\vdots & & \ddots & -1 & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots\\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 3-2r & 0 & 0\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

(непосредственно под главной диагональю матрицы f стоят числа $(2r-3, 2r-4, \ldots, 2, 1, 0, 0)$, а на главной диагонали матрицы h стоят числа $(2r-3, 2r-5, \ldots, 5-2r, 3-2r, 0, 0)$), мы убеждаемся, что $\{e, f, h\}$ образуют $\mathfrak{sl}_2$-тройку в $\mathfrak{sp}(2r)$, где $\mathfrak{sp}(2r)$ является симплектической алгеброй Ли, состоящей из всех матриц, сохраняющих кососимметричную билинейную форму

$$\Omega = \begin{pmatrix}
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\binom{2r-3}{0}^{-1} & 0 & 0\\
\vdots & & & \iddots & \binom{2r-3}{1}^{-1} & 0 & \vdots & \vdots\\
\vdots & & \iddots & \pm\binom{2r-3}{r-2}^{-1} & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \iddots & \mp\binom{2r-3}{r-1}^{-1} & \iddots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & -\binom{2r-3}{2r-2}^{-1} & \iddots & & & \vdots & \vdots & \vdots\\
\binom{2r-3}{2r-3}^{-1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

(где коэффициенты перед $\binom{2r-3}{r-2}^{-1}$ и $\binom{2r-3}{r-1}^{-1}$ равны $(-1)^{r-1}$ и соответственно $(-1)^r$).

Централизатор $Z_{\mathfrak{sp}(2r)}f$ равен пространству матриц A' в $\mathfrak{sp}(2r)$, таких, что

$$\begin{cases} \Omega A' + A'^T\Omega = 0,\\ fA' - A'f = 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$\mathbb{S}(2r-2, 1, 1) := e + Z_{\mathfrak{sp}(2r)}f = \{A(x_1, y_1, x_2, y_2, w, b_1, \ldots, b_{r-1})\} \cong \mathbb{A}^{r+4},$$

где

$$A=\begin{pmatrix}
0 & \ddots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\binom{2r-3}{1}b_1 & \ddots & & 2 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & \ddots & \binom{2r-4}{1}b_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\binom{2r-3}{3}b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\vdots & & \binom{2r-4}{3}b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots\\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & 2r-3 & 0 & 0\\
\binom{2r-3}{2r-3}b_{r-1} & \cdots & \binom{3}{3}b_2 & 0 & \binom{1}{1}b_1 & & 0 & cy_1 & cx_1\\
-cx_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & w & -2x_2\\
cy_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2y_2 & -w
\end{pmatrix} \tag{2.3}$$

и $c=1/\sqrt{2\cdot(2r-3)!}$. Чтобы получить уравнения на срез Слодового $\mathscr{S}(2r-2,1,1)$, нам надо пересечь $\mathbb{S}(2r-2,1,1)$ с нильпотентным конусом $\mathscr{N}_{\mathfrak{sp}(2r)}$, т. е. наложить условия, что следы всех степеней $A\in\mathbb{S}(2r-2,1,1)$ обнуляются. Вычисляя $\operatorname{tr}A^2,\operatorname{tr}A^4,\dots,\operatorname{tr}A^{2r-2}$, мы получаем рекурсивно $b_i=\alpha_i(w^2-4x_2y_2)^i$, $i=1,\dots,r-1$, для некоторых ненулевых констант α_i. Значит, у нас есть 5 образующих (x_1,y_1,x_2,y_2,w), и чтобы получить единственное соотношение, надо вычислить определитель матрицы A. Как известно, $\det A=\sum_\sigma(-1)^\sigma a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{2r,\sigma(2r)}$ (где $a_{i,j}$ — матричные элементы матрицы A). Заметим, что перестановка σ, не сохраняющая $\{2r-1,2r\}$, дает ненулевой вклад в эту сумму, только если $\sigma(i)=i+1$ при $1\leqslant i\leqslant 2r-3$. Отсюда следует, что

$$\det A=(x_1^2y_2+x_2y_1^2+wx_1y_1)-(w^2-4x_2y_2)\det B, \tag{2.4}$$

где

$$B=\begin{pmatrix}
0 & \ddots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
\binom{2r-3}{1}b_1 & \ddots & & 2 & \ddots & & \vdots\\
0 & \ddots & \binom{2r-4}{1}b_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\binom{2r-3}{3}b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & \binom{2r-4}{3}b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & 2r-3\\
\binom{2r-3}{2r-3}b_{r-1} & \cdots & \binom{3}{3}b_2 & 0 & \binom{1}{1}b_1 & & 0
\end{pmatrix} \tag{2.5}$$

является матрицей, образованной первыми $2r-2$ строками и первыми $2r-2$ столбцами матрицы A.

Чтобы вычислить определитель B, обозначим $w^2-4x_2y_2$ через D и заметим, что B имеет вид

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\beta_{2,1}D & \ddots & 2 & \ddots & & & \vdots \\
0 & \beta_{3,2}D & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\beta_{4,1}D^2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \beta_{5,2}D^2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 2r-3 \\
\beta_{2r-2,1}D^{r-1} & \cdots & \cdots & \beta_{2r-2,2r-5}D^2 & 0 & \beta_{2r-2,2r-3}D & 0
\end{pmatrix}$$

для ненулевых $\beta_{i,j}$, однозначно определенных константами α_i. Теперь легко проверить (например, разлагая по строке раз за разом), что

$$\det B = D^{r-1} = (w^2-4x_2y_2)^{r-1}. \tag{2.6}$$

Итак, мы получили

$$\det A = (x_1^2y_2 + x_2y_1^2 + wx_1y_1) - (w^2-4x_2y_2)^r = 0.$$

Сравнивая эту формулу с (2.1), мы убеждаемся, что построили искомый изоморфизм Φ теоремы 2.1. Остается проверить, что Φ согласован с естественными пуассоновыми структурами.

2.4. Пуассоновы структуры. Симплектическая форма в общей точке ветви $\mathscr{M}_C(r,2,1)$ в рациональных этальных координатах u_1,u_2,w_1,w_2 из разд. 2.2 задается формулой $\frac{du_1}{u_1}\wedge dw_1 + \frac{du_2}{u_2}\wedge dw_2$. В новых переменных $v_1 := w_1u_1^{-1}$, $v_2 := w_2u_2^{-1}$ она записывается формулой $du_1\wedge dv_1 + du_2\wedge dv_2$. Соответствующая скобка Пуассона равна

$$\{f,g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial g}{\partial v_1} - \frac{\partial f}{\partial v_1}\frac{\partial g}{\partial u_1}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial g}{\partial v_2} - \frac{\partial f}{\partial v_2}\frac{\partial g}{\partial u_2}\right).$$

Напомним, что

$$x_2 = (-1)^r u_1u_2, \quad y_2 = (-1)^r v_1v_2, \quad w = u_1v_1 + u_2v_2,$$
$$x_1 = (u_1v_1-u_2v_2)^{r-1}(u_1-(-1)^r u_2), \quad y_1 = (u_1v_1-u_2v_2)^{r-1}(v_1-(-1)^r v_2).$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}
\{x_2,y_2\} = w, \quad \{w,x_2\} = -2x_2, \quad \{w,y_2\} = 2y_2, \quad \{y_2,x_1\} = y_1, \\
\{y_2,y_1\} = 0 = \{x_2,x_1\}, \quad \{x_2,y_1\} = -x_1, \quad \{w,x_1\} = -x_1, \quad \{w,y_1\} = y_1,
\end{gathered} \tag{2.7}$$

а $\{x_1,y_1\}$ однозначно определяется тождеством Якоби.

В частности, $\mathsf{e} = (-1)^r\sqrt{-1}x_2$, $\mathsf{f} = (-1)^r\sqrt{-1}y_2$, $\mathsf{h} = -w$ образуют стандартный $\mathfrak{sl}_2$-базис векторного пространства $\mathbb{C}x_2\oplus\mathbb{C}y_2\oplus\mathbb{C}w$ образующих кольца функций $\mathbb{C}[\mathscr{M}_C(r,2,1)]$ степени 2. Векторное пространство $\mathbb{C}x_1\oplus\mathbb{C}y_1$ образующих кольца функций $\mathbb{C}[\mathscr{M}_C(r,2,1)]$ степени $2r-1$ образует неприводимое

2-мерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. Таким образом, пуассоново действие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ интегрируется до гамильтонова действия $SL(2)$.

Прямолинейная проверка показывает, что формулы (2.7) остаются верными для пуассоновой структуры на срезе Слодового $\mathscr{S}(2r-2,1,1)$, так что изоморфизм Φ согласован с пуассоновыми структурами. И указанное выше гамильтоново действие группы $SL(2)$ — это не что иное, как действие подгруппы $SL(2) \subset Z_{Sp(2r)}(e)$. Теорема 2.1 доказана.

§3. Заключительные замечания

3.1. Флэйвор-симметрия. Теперь мы вводим в рассмотрение флэйвор-симметрию $T_F = (\mathbb{C}^\times)^r$, действующую на $\mathbf{N} = \mathfrak{gl}(V)^{\oplus r} \oplus V$ по формуле

$$(c_1, \dots, c_r) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_r, v) = (c_1\xi_1, \dots, c_r\xi_r, v).$$

Мы обозначаем образующие кольца $H^\bullet_{T_F}(\mathrm{pt})$ через $z_1, \dots, z_r$, так что $H_{T_F}(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_r]$. Обозначим $\operatorname{Spec} H^\bullet_{T_F}(\mathrm{pt}) = \operatorname{Lie} T_F$ через $\mathfrak{h} = \mathbb{C}z_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}z_r$. Мы будем обозначать через $\underline{\mathscr{M}}_C(r,2,1)$ соответствующую флэйвор-деформацию ветви $\mathscr{M}_C(r,2,1)$ над $\mathfrak{h}$.

Мы отождествляем диагональную картановскую подалгебру Ли в $\mathfrak{sp}(2r)$ с $\mathfrak{h}$ следующим образом:

$$(z_1, \dots, z_r) \mapsto \operatorname{diag}(z_1, \dots, z_{r-1}, -z_{r-1}, \dots, -z_1, z_r, -z_r).$$

Группа Вейля $\mathbb{W} \cong \mathfrak{S}_r \wr \{\pm 1\}$ алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2r) \supset \mathfrak{h}$ естественно действует на $\mathfrak{h}$, и $\mathfrak{h}/\!\!/\mathbb{W} \cong \mathfrak{sp}(2r)/\!\!/\operatorname{Ad}_{Sp(2r)}$. Напомним, что полный срез Слодового задается формулой $\mathbb{S}(2r-2,1,1) = e + Z_{\mathfrak{sp}(2r)}f \subset \mathfrak{sp}(2r)$, см. (2.3). Он проецируется на $\mathfrak{sp}(2r)/\!\!/\operatorname{Ad}_{Sp(2r)}$, и мы полагаем $\underline{\mathbb{S}}(2r-2,1,1) := \mathfrak{h} \times_{\mathfrak{h}/\mathbb{W}} \mathbb{S}(2r-2,1,1)$.

Предложение 3.1. *Изоморфизм* $\Phi\colon \mathscr{M}_C(r,2,1) \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}(2r-2,1,1)$ *теоремы* 2.1 *продолжается до изоморфизма деформаций над* $\mathfrak{h}$:

$$\underline{\Phi}\colon \underline{\mathscr{M}}_C(r,2,1) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{S}}(2r-2,1,1).$$

Доказательство. Как и в разд. 2.2, пользуясь обозначениями из [2, (A.7)], имеем следующие регулярные функции на $\underline{\mathscr{M}}_C(r,2,1)$, выражающиеся в терминах рациональных этальных координат u_1, u_2, w_1, w_2:

$$\mathsf{x}_1 = u_1(w_1-w_2)^{-1}\prod_{i=1}^r(w_1-w_2-z_i) + u_2(w_2-w_1)^{-1}\prod_{i=1}^r(w_2-w_1-z_i),$$
$$\mathsf{y}_1 = u_1^{-1}w_1(w_1-w_2)^{-1}\prod_{i=1}^r(w_1-w_2+z_i) + u_2^{-1}w_2(w_2-w_1)^{-1}\prod_{i=1}^r(w_2-w_1+z_i),$$
$$\mathsf{x}_2 = (-1)^r u_1u_2, \quad \mathsf{y}_2 = (-1)^r w_1w_2u_1^{-1}u_2^{-1}, \quad \mathsf{w} = w_1 + w_2.$$

Поскольку $\mathbb{C}[\mathscr{M}_C(r,2,1)] = \mathbb{C}[\underline{\mathscr{M}}_C(r,2,1)]/(z_1, \dots, z_r)$ порождено функциями x_1, x_2, y_1, y_2, w, согласно градуированной лемме Накаямы, мы заключаем, что $\mathbb{C}[\underline{\mathscr{M}}_C(r,2,1)]$ порождено функциями x_1, x_2, y_1, y_2, w, $z_1, \dots, z_r$. Между ними должно быть ровно одно соотношение, и можно убедиться, что

$$\mathbb{C}[\mathscr{M}_C(r,2,1)] = \mathbb{C}[\mathsf{x}_1,\mathsf{x}_2,\mathsf{y}_1,\mathsf{y}_2,\mathsf{w},z_1,\dots,z_r]\Big/\biggl(\mathsf{x}_1^2\mathsf{y}_2+\mathsf{x}_2\mathsf{y}_1^2+\mathsf{w}\mathsf{x}_1\mathsf{y}_1 - \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m+n \text{ четно}}}(-1)^{mn}\sigma_m\sigma_n(\mathsf{w}^2-4\mathsf{x}_2\mathsf{y}_2)^{r-(m+n)/2}\biggr), \quad (3.1)$$

где σ_n — это n-й элементарный симметрический многочлен от $z_1,\dots,z_r$ (в частности, $\sigma_0=1$ и $\sigma_k=0$ для $k>r$). Заметим, что для произвольного k все степени переменных z_i, входящие в $\sum_{m+n=2k}(-1)^{mn}\sigma_m\sigma_n$, обязательно являются четными.

Вспомним матрицу B из (2.5) и формулу (2.4). Мы будем считать, что спектр матрицы A из (2.3) равен $\{\pm z_1,\dots,\pm z_r\}$, т. е. если A полупроста, то она сопряжена с $\operatorname{diag}(z_1,\dots,z_{r-1},-z_{r-1},\dots,-z_1,z_r,-z_r)$. Поэтому формула (2.4) эквивалентна

$$(-1)^r z_1^2\cdots z_r^2 = \mathsf{x}_1^2\mathsf{y}_2+\mathsf{x}_2\mathsf{y}_1^2+\mathsf{w}\mathsf{x}_1\mathsf{y}_1-(\mathsf{w}^2-4\mathsf{x}_2\mathsf{y}_2)\det B. \quad (3.2)$$

Аналогично формуле (2.6) можно проверить, что

$$\det B = \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ 2r>m+n \text{ четно}}}(-1)^{mn}\sigma_m\sigma_n(\mathsf{w}^2-4\mathsf{x}_2\mathsf{y}_2)^{r-1-(m+n)/2}. \quad (3.3)$$

Сравнивая формулы (3.2) и (3.3) с (3.1), выводим искомый результат. □

3.2. Повышение $\dim V$. Теперь заменим $V=\mathbb{C}^2$ на $V'=\mathbb{C}^3$ и рассмотрим соответствующую кулоновскую ветвь $\mathscr{M}_C(r,3,1)$, 6-мерное аффинное коническое пуассоново многообразие. Ввиду теоремы 2.1 и глядя на трансверсальные особенности, хотелось бы надеяться, что $\mathscr{M}_C(r,3,1)$ изоморфна срезу Слодового $\mathscr{S}(2r-4,2,2)\subset\mathscr{N}_{\mathfrak{sp}(2r)}$ при $r\geqslant 3$. К сожалению, эта надежда не оправдывается, как будет показано сравнением рядов Гильберта ветви $\mathscr{M}_C(r,3,1)$ и среза Слодового $\mathscr{S}(2r-4,2,2)$ уже в случае $r=3$.

Ряд Гильберта $\mathscr{M}_C(r,3,1)$ вычисляется по монопольной формуле, как в доказательстве леммы 2.2. Доминантные веса группы $GL(3)$ — это тройки целых чисел $\lambda=(n_1,n_2,n_3)$, $n_1\geqslant n_2\geqslant n_3$. Имеем $P_G(t;\lambda)=(1-t^2)^{-3}$, если $n_1>n_2>n_3$; $P_G(t;\lambda)=(1-t^2)^{-2}(1-t^4)^{-1}$, если $n_1=n_2>n_3$ или $n_1>n_2=n_3$, и $P_G(t;\lambda)=(1-t^2)^{-1}(1-t^4)^{-1}(1-t^6)^{-1}$, если $n:=n_1=n_2=n_3$. Мультимножество весов χ представления $\mathbf{N}=\mathfrak{gl}(3)^{\oplus r}\oplus V'$ — это $\{(1,0,0)\}\cup\{(0,1,0)\}\cup\{(0,0,1)\}\cup r\cdot\{(1,-1,0),(-1,1,0),(1,0,-1),(-1,0,1),(0,1,-1),(0,-1,1)\}\cup 3r\cdot\{(0,0,0)\}$. Для $\chi=(k_1,k_2,k_3)$ и $\lambda=(n_1,n_2,n_3)$, $n_1\geqslant n_2\geqslant n_3$, имеем $\langle\chi,\lambda\rangle=n_1k_1+n_2k_2+n_3k_3$. Поэтому

$$\begin{aligned}H'(t) &= (1-t^2)^{-3}\sum_{n_1>n_2>n_3\in\mathbb{Z}} t^{(4r-4)(n_1-n_3)+|n_1|+|n_2|+|n_3|}\\ &\quad+(1-t^2)^{-2}(1-t^4)^{-1}\biggl(\sum_{n_1>n_3\in\mathbb{Z}} t^{(4r-4)(n_1-n_3)+2|n_1|+|n_3|}\\ &\qquad\qquad+\sum_{n_1>n_3\in\mathbb{Z}} t^{(4r-4)(n_1-n_3)+|n_1|+2|n_3|}\biggr)\\ &\quad+(1-t^2)^{-1}(1-t^4)^{-1}(1-t^6)^{-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} t^{3|n|}.\end{aligned}$$

Сумма $\sum_{n\in\mathbb{Z}} t^{3|n|}$ распадается в два слагаемых, согласно дихотомии $n \geqslant 0$ или $n < 0$, равных соответственно $\frac{1}{1-t^3}$ или $\frac{t^3}{1-t^3}$. Далее, сумма

$$\sum_{n_1>n_3\in\mathbb{Z}} t^{(4r-4)(n_1-n_3)+|n_1|+2|n_3|}$$

распадается в три слагаемых, согласно трихотомии $n_1 > n_3 \geqslant 0$, $0 \geqslant n_1 > n_3$ или $n_1 > 0 > n_3$, равных соответственно $\frac{t^{4r-3}}{(1-t^3)(1-t^{4r-3})}$, $\frac{t^{4r-2}}{(1-t^3)(1-t^{4r-2})}$ или $\frac{t^{4r-3}t^{4r-2}}{(1-t^{4r-3})(1-t^{4r-2})}$. Кроме того, $\sum_{n_1>n_3\in\mathbb{Z}} t^{(4r-4)(n_1-n_3)+2|n_1|+|n_3|}$ распадается в три слагаемых, согласно трихотомии $n_1 > n_3 \geqslant 0$, $0 \geqslant n_1 > n_3$ или $n_1 > 0 > n_3$, равных соответственно $\frac{t^{4r-2}}{(1-t^3)(1-t^{4r-2})}$, $\frac{t^{4r-3}}{(1-t^3)(1-t^{4r-3})}$ или $\frac{t^{4r-3}t^{4r-2}}{(1-t^{4r-3})(1-t^{4r-2})}$. Наконец, $\sum_{n_1>n_2>n_3\in\mathbb{Z}} t^{(4r-4)(n_1-n_3)+|n_1|+|n_2|+|n_3|}$ распадается в 5 слагаемых, согласно альтернативе $n_1 > n_2 > n_3 \geqslant 0$, $0 \geqslant n_1 > n_2 > n_3$, $n_1 > n_2 > 0 > n_3$, $n_1 > 0 > n_2 > n_3$ или $n_1 > (n_2 = 0) > n_3$, равных соответственно $\frac{t^{4r-3}t^{4r-2}}{(1-t^3)(1-t^{4r-3})(1-t^{4r-2})}$, $\frac{t^{4r-3}t^{4r-2}}{(1-t^3)(1-t^{4r-3})(1-t^{4r-2})}$, $\frac{t^{2(4r-3)}t^{4r-2}}{(1-t^{4r-3})^2(1-t^{4r-2})}$, $\frac{t^{2(4r-3)}t^{4r-2}}{(1-t^{4r-3})^2(1-t^{4r-2})}$ или $\frac{t^{2(4r-3)}}{(1-t^{4r-3})^2}$.

Складывая это все, получаем

$$H'(t) = \frac{(1-t^{4r})(1+t^{4r-2}+2t^{4r-1}+t^{4r}+t^{8r-2})}{(1-t^2)(1-t^3)^2(1-t^4)(1-t^{4r-3})^2(1-t^{4r-2})}.$$

Отсюда следует, что $\mathscr{M}_C(r,3,1)$ не является полным пересечением. Это хорошо известно уже для жорданова колчана с $r=1$, когда $\mathscr{M}_C(1,3,1) \simeq \mathrm{Sym}^3(\mathbb{A}^2)$ (см., например, [2, предложение 3.24]).

С другой стороны, ряды Гильберта срезов Слодового $\mathscr{S}(2r-4,2,2)$ были вычислены в [3, таблицы 18,19] для $r=3,4$. Там получены ответы соответственно

$$\frac{(1-t^8)(1-t^{12})}{(1-t^2)^3(1-t^4)^5}, \qquad \frac{(1-t^{12})(1-t^{16})}{(1-t^2)(1-t^4)^5(1-t^6)^2}.$$

Аналогично можно проверить и что кулоновская ветвь $\mathscr{M}_C(r,2,m)$ для $m>1$ не является полным пересечением.

Литература

[1] A. Braverman, M. Finkelberg, H. Nakajima, *Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathscr{N}=4$ gauge theories*, II, Adv. Theor. Math. Phys., **22**:5 (2018), 1071–1147; `https://arxiv.org/abs/1601.03586`.

[2] A. Braverman, M. Finkelberg, H. Nakajima, *Coulomb branches of 3d $\mathscr{N}=4$ quiver gauge theories and slices in the affine Grassmannian (with appendices by Alexander Braverman, Michael Finkelberg, Joel Kamnitzer, Ryosuke Kodera, Hiraku Nakajima, Ben Webster, and Alex Weekes)*, Adv. Theor. Math. Phys., **23**:1 (2019), 75–166; `https://arxiv.org/abs/1604.03625`.

[3] S. Cabrera, A. Hanany, R. Kalveks, *Quiver theories and formulae for Slodowy slices of classical algebras*, Nuclear Phys. B, **939** (2019), 308–357.

[4] A. Hanany, N. Mekareeya, *Tri-vertices and SU(2)'s*, J. High Energy Phys., **2** (2011), 069.

[5] H. Kraft, C. Procesi, *On the geometry of conjugacy classes in classical groups*, Comment. Math. Helv., **57**:4 (1982), 539–602.

[6] P. Slodowy, *Simple Singularities and Simple Algebraic Groups*, Lecture Notes in Math., vol. 815, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1980.

[7] A. Weekes, *Generators for Coulomb branches of quiver gauge theories* `https://arxiv.org/abs/1903.07734`.

[8] R. Yamagishi, *Four-dimensional conical symplectic hypersurfaces*, `https://arxiv.org/abs/1908.00684`.

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва, Россия
Cambridge University, Center for Mathematical Sciences, Cambridge, United Kingdom
e-mail: eagoncharov@edu.hse.ru, eg555@cam.ac.uk

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва, Россия
Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия
Институт проблем передачи информации, им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия
e-mail: fnklberg@gmail.com

Поступила в редакцию
7 апреля 2019 г.
После доработки
7 апреля 2019 г.
Принята к публикации
16 мая 2019 г.