В. В. Подиновский

ИДЕИ И МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ

НАУКА

ИДЕИ И МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ

В. В. Подиновский

Владислав Владимирович Подиновский
Доктор технических наук, профессор, профессор-исследователь Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».
Область научных интересов – теория принятия решений и ее приложения.

«Как решить многокритериальную задачу? Да просто нужно сложить все критерии, а их относительную важность учесть при помощи соответствующих коэффициентов – «весов» критериев: оптимален тот вариант, для которого такая сумма максимальна!»

Если Вас такой подход не устраивает – эта книга для Вас.
Если устраивает – прочитайте ее, и Вы измените свое мнение!

ISBN 978-5-02-040241-6

ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКА 1727

В. В. Подиновский

ИДЕИ И МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ

в многокритериальных задачах принятия решений

МОСКВА НАУКА 2019

УДК 519.8
ББК 22.18

Подиновский В.В.

Идеи и методы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / В.В. Подиновский. – М. : Наука, 2019. – 103 с. – ISBN 978-5-02-040241-6

Монография посвящена новому разделу математической теории принятия решений при многих критериях. Раскрываются основные идеи и дается представление о методах выбора оптимальных вариантов решений, оцениваемых по нескольким критериям с использованием информации об их относительной важности. Изложение опирается на строгие определения понятий «Один критерий важнее другого» и «Один критерий важнее другого во столько-то раз». У читателя предполагается наличие лишь достаточно скромных школьных знаний математики.

Для широкого круга специалистов и всех тех, включая школьников старших классов, кто интересуется возможностями использования математики при разработке и анализе решений. Она может быть использована как учебное пособие для студентов и аспирантов вузов экономического, технического и естественнонаучного направлений, обучающихся по специальностям: бизнес-информатика, менеджмент, системный анализ и управление, прикладная математика и информатика, управление в технических системах, проектирование технических комплексов и многим другим.

ISBN 978-5-02-040241-6

Моей жене Наталии
и дочери Ольге
посвящается *

*Посвящать книги лучше не ближайшим родственникам, как чаще всего делают, а лицам, значение которых в искусстве более или менее установилось: «Светлой памяти Гомера», «А. Пушкину». Можно и современникам: «Учителю – Анатолю Франсу». Франс далеко, русского языка не знает, да и уголовной ответственности автор за такие посвящения не подлежит. Свидетельствуя о хорошем вкусе автора, посвящения эти сразу вводят его в избранное общество и намекают на неограниченные возможности в будущем.

Саша Черный. «Новейший самоучитель рекламы
(Для гг. начинающих и “молодых”)»

«Наслушавшись таких насмешек над религией, брат Юнипер и пришел к убеждению, что пробил час на земле доказать – с цифрами в руках доказать – ту веру, которая так ярко и волнующе жила в нем. Когда повальная болезнь напала на милую его сердцу деревню Пуэрто и унесла множество крестьян, он тайком составил таблицу характеристик пятнадцати жертв и пятнадцати выживших – статистику их ценности sub specie aeternitatis*. Каждая душа оценивалась по десятибалльной шкале в отношении своей доброты, своего религиозного рвения и своего значения для семейной ячейки. Вот отрывок этой дерзновенной таблицы:

	Доброта	Благочестие	Полезность
Альфонсо Г.	4	4	10
Нина	2	5	10
Мануэль Б.	10	10	0
Альфонсо В.	–8	–10	10
Вера Н.	0	10	10

Задача оказалась труднее, чем он предполагал. Почти каждая душа в стесненной пограничной общине оказалась экономически незаменимой, и третий столбец практически ничего не давал. Исследователь был вынужден прибегнуть к отрицательным числам, столкнувшись с характером Альфонсо В., который не был, как Вера Н., просто плохим – он пропагандировал плохое и не только избегал церкви, но и других научал ее избегать. Вера Н. действительно была плохой, но она была примерной прихожанкой и опорой переполненной хижины. Из этих неутешительных данных брат Юнипер вывел показатель для каждого крестьянина. Он подсчитал сумму для жертв, сравнил с суммой для выживших и нашел, что покойные в пять раз больше заслуживали спасения. Все выглядело так, как будто мор был направлен именно против самых ценных людей в деревне Пуэрто. В этот день брат Юнипер бродил по берегу Тихого океана. Он порвал свои выкладки и бросил в волны; он час смотрел на громадные жемчужные облака, вечно висевшие над этим морем, и зрелище красоты родило в нем смирение, которого он не отдал на испытание разуму. Вера расходится с фактами больше, чем принято думать».

Уайдлер Торнтон. «Мост короля Людовика Святого»

*С точки зрения вечности (*лат.*).

Я не пленить хочу моими сочинениями, а быть полезным, сообщая чрезвычайно важную теорию...

Александр Герцен. «Доктор Крупов»

Предисловие

Тот, кто сказал, что хорошо сделанная работа отличается от плохо сделанной тем, что её не надо переделывать, видимо, просто никогда не занимался садоводством.

Марина Лацис. «С зонтиками нельзя!»

Эта книга появилась в результате существенного (в два раза) расширения учебного пособия «Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений», выпущенного издательством Физматлит в 2007 году: добавлен материал, который рассчитан на более подготовленного читателя и содержит описание ряда основных методов анализа многокритериальных задач, разработанных в теории важности критериев (ТВК). Для того чтобы сохранить доступность книги для широкого круга читателей, параграфы, пункты, вопросы и задачи, содержащие этот более сложный материал, помечены звездочкой*. Кроме того, приведен подробный анализ прикладной многокритериальной задачи. В Приложении список публикаций по ТВК доведен до 2019 года. Внесены также довольно многочисленные, но небольшие по объему полезные сведения из ТВК и исправлены замеченные опечатки.

Методы ТВК реализованы в расчетной компьютерной системе поддержки многокритериальных решений DASS. Эта система, а также электронная версия книги имеются в свободном доступе на сайтах http://mcodm.ru/soft/dass/ и criteria-importance-theory.ru. Читатель, скачав DASS, может параллельно с чтением книги решать разбираемые в ней примеры при помощи этой системы, а также анализировать свои многокритериальные задачи. Преподаватели могут использовать её в учебном процессе. На втором из указанных сайтов можно найти много интересных и полезных материалов по теории важности критериев.

Все теоретические положения и методы ТВК, представленные в книге, созданы её автором. Исключения составляют три метода, для которых первоисточники указаны в сносках в §§ 2.4, 2.5* и 4.4: эти методы разработаны в соавторстве.

Автор благодарен А.П. Нелюбину, прочитавшему рукопись книги, за конструктивные замечания, направленные на улучшение изложения материала.

Предисловие к книге «Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений»

Пишут для того, чтобы рассказать, а не для того, чтобы доказать.

Марк Фабий Квинтилиан.
«Обучение оратора»

В настоящее время в связи с растущими потребностями практики и быстро расширяющимися возможностями информационно-вычислительной техники активно развивается междисциплинарное научное направление, направленное на анализ и поддержку принятия решений. Одним из его «секторов», имеющих большое практическое значение, является математическая теория принятия решений при многих критериях.

Теория важности критериев – новый раздел этой теории, созданный и активно развиваемый в России. Однако доступно (не для специалистов) написанных книг и тем более учебной литературы по этой теории до настоящего времени не было. Этот пробел призвано частично восполнить настоящее учебное пособие, цель которого – дать представление о базовых понятиях теории важности критериев и основанных на них методах анализа многокритериальных задач принятия решений.

Для расширения круга потенциальных читателей пособие написано на элементарном уровне, живым языком и не содержит формул (за исключением нескольких совсем простых)[1], но в нем широко использован ряд математических понятий (смысл которых объясняется) и соответствующие обозначения. Поэтому, как и всякий текст с математическим содержанием, оно требует вдумчивого чтения[2].

Автор признателен Ф.Т. Алескерову и П.Ю. Чеботарёву, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд замечаний и предложений по улучшению изложения материала, рецензентам И.Г. Поспелову и А.И. Рофе, рекомендовавшим пособие к изданию.

---

[1] Поэтому, пожалуй, более точным было бы название «О теории важности критериев ...».

[2] Сноски в тексте будут двух видов. Сноски с обычными номерами (как эта и предыдущая) несут дополнительную к основному тексту информацию. Сноски с номерами в кружочках (① или ❶, и т.д.) ориентированы на более подготовленного читателя.

– Какого мнения о сём святая церковь?
– Святая церковь о сём умалчивает.

Александр Куприн. «Поединок»

Глава 1
Многокритериальные задачи принятия решений

Выясняется, что почти во всякой задаче принятия решения приходится рассматривать не один, а несколько критериев оптимальности, и что широко известному методу, основанному на построении взвешенной суммы критериев с использованием коэффициентов их важности, присущи неустранимые дефекты принципиального характера.

§ 1.1. Общая характеристика многокритериальных задач

Ведущий принцип не может формулироваться в виде требования одновременной максимизации двух или более функций. (Одна функция, вообще говоря, не будет иметь максимума там, где его имеет другая.) Это ничем не лучше, чем сказать, например, что фирма должна получить максимальные цены при максимальном обороте или же максимальный доход при минимальных издержках. Если подразумевается некоторый порядок важности этих принципов или некоторое их взвешенное среднее, то это следует оговаривать явным образом.

Джон фон Нейман, Оскар Моргенштерн.
«Теория игр и экономическое поведение»

1. Проблемы, связанные с отысканием наилучших решений для достижения поставленных целей при ограниченных возможностях (ресурсах), вставали перед людьми всегда. Концепция принятия решения в качестве первичного элемента деятельности рассматривает решение как сознательный выбор одного из ряда вариантов (альтернатив, планов, стратегий, ...). Этот выбор производит *лицо, принимающее решение* (общепринятым становится сокращение *ЛПР*), которое стремится к достижению определенных целей[3]. В его роли выступает человек (или группа людей), обладающий правами принятия решения, возможностями его реализации и несущий ответственность за его последствия (например, руководитель организации, совет директоров, ведущий конструктор, военачальник, главный тренер, ..., наконец, гражданин, семья – все зависит от конкретной ситуации принятия решения).

Еще совсем недавно считалось, что выработка решения является искусством, основанным на опыте, знаниях и интуиции. Однако в современных условиях одного этого недостаточно для выработки даже просто не очень плохих решений в сложных, масштабных, ответственных практических задачах. Поэтому стали интенсивно развиваться научные методы анализа решений, появились новые прикладные научные дисциплины – исследование операций, теория принятия решений, системный анализ, – в рамках которых созданы специальные информационно-аналитические технологии, опирающиеся на новые математические методы.

2. Применение математических методов предполагает построение математической модели объекта анализа. При построении модели ситуации принятия решения дается формализованное описание доступных вариантов действий и возможных последствий их реализации. При этом особое внимание уделяется выявлению и описанию предпочтений ЛПР. Его цели чаще всего моделируются стремлением к увеличению или же уменьшению специальных функций, называемых *критериями* (а также показателями эффективности или качества, целевыми функциями). В относительно простых случаях удается обойтись одним критерием. И тогда наилучшим, или оптимальным, вариантом считается тот, который максимизирует или же минимизирует этот критерий. В качестве примера укажем на задачу планирования перевозок, известную под названием «транспортная задача». Состоит она в следующем. Имеются склады, на каждом из которых хранится определенное количество (запас) некоторого однородного материала (песка, угля, зерна и т.п.). Имеются также заказчики, для каждого из которых известен его запрос (потребность, заявка) на определенное количество этого материала. Предполагается, что суммарные запасы на складах равны сумме запросов потребителей. Под планом перевозок понимается указание, сколько материала следует доставить (перевезти) с каждого склада тому или иному потребителю, причем запросы всех потребителей должны быть удовлетворены (при этом запасы всех складов окажутся исчерпанными). Известны

---

[3] В русском языке слово «лицо» среднего рода (оно), что оказалось весьма удобным. В англоязычной литературе, например, ссылаясь на ЛПР (*DM – decision maker*) – неопределенного человека, – сейчас принято указывать он/она или же она/он (*he/she, she/he*).

стоимости перевозки единицы материала с каждого склада каждому потребителю. Требуется составить такой план, чтобы суммарная стоимость перевозок (это и есть критерий) была минимальной.

Однако в более сложных случаях обойтись одним критерием не удается, и тогда задача называется *многокритериальной*. Например, в задаче выбора места для нового предприятия необходимо учитывать экономические, социальные, экологические и иные последствия, каждое из которых может характеризоваться одним или же несколькими критериями. Даже большинство бытовых задач многокритериальны. Так, при выборе нового платья помимо его цены учитываются модность покроя, качество материала, то, как оно «сидит», и пр.

Принципиальная сложность многокритериальных задач состоит в том, что обычно не существует варианта, который был бы наилучшим сразу по всем критериям: если по одному из критериев вариант очень хорош, то по другому, как правило, он будет далеко не лучший. Так, если в транспортной задаче учитывать не только стоимость, но и время перевозок, то более быстрая доставка (скажем, авиатранспортом) будет весьма дорогой, а более дешевая (например, водным транспортом) займет много времени. И поэтому выбор наилучшего варианта связан с необходимостью разрешения центральной в теории принятия решений при многих критериях проблемы замещений (компенсации), т.е. проблемы сопоставления по предпочтительности (с точки зрения ЛПР!) потерь по одним критериям с выигрышами по другим[4]. Она решается по-разному в рамках различных методов многокритериальной оптимизации.

3. Многообразие многокритериальных задач породило огромное число методов их анализа. Одним из основных понятий, используемых в подавляющем большинстве таких методов, является понятие относительной, или сравнительной, *важности* (весомости, значимости) критериев. Однако никаких строгих (формальных) определений этого понятия разработчики методов не давали, ограничиваясь интуитивными представлениями о нем. Вообще проблема строгого определения понятия «важность» является одной из самых «старых» проблем в исследовании операций, которая длительное время не поддавалась усилиям исследователей. В некоторых научных работах даже высказывалось мнение о том, что в принципе невозможно найти математически обоснованное, психологически приемлемое и практически полезное определение этого понятия. И, тем не менее, многолетние исследова-

---

[4] Например, в упомянутой транспортной задаче с двумя критериями вопрос о замещении может быть поставлен, скажем, следующим образом. Пусть для некоторого плана суммарная стоимость перевозок составляет 100 млн руб., а время перевозок – 15 суток. Существует другой план, который позволяет осуществить перевозки за 10 суток. Сколько ЛПР согласен «доплатить» за переход от первого плана ко второму?

ния «проблемы важности» увенчались успехом. Вначале были сформулированы определения понятий «Один критерий важнее другого» и «Критерии равноважны» (т.е. имеют одинаковую важность) и развита теория «качественной важности». А затем на основе этой теории удалось предложить определение понятия «Один критерий важнее другого во столько-то раз» и разработать теорию «количественной важности». Таким образом, можно сказать, что были созданы основы теории важности критериев (ТВК). В настоящее время эта теория продолжает интенсивно «достраиваться». Обзор публикаций по ТВК дан в Приложении.

Далее будут изложены основные понятия и идеи этой теории и на простых примерах проиллюстрирована «работа» ее методов.

§ 1.2. Математическое описание проблемной ситуации

> ...но там же математика! – с неподдельным ужасом воскликнул студент. – Меня она погружает в неизбывную тоску самим фактом своего существования...
>
> *Александр Бушков. «Меж трех времен»*

1. Математическая модель ситуации принятия решения при многих критериях включает следующие три элемента: множество вариантов V, векторный критерий K и отношения предпочтения и безразличия (разумеется, ЛПР), которые будут обозначаться соответственно буквами P и I с нижними или верхними индексами[5]. Разберем содержание модели.

Каждый вариант v из множества всех вариантов V характеризуется значениями критериев K_i, $i = 1, ..., m$, которые называются *частными* и, будучи записаны по порядку, составляют *векторный критерий* $K = (K_1, ..., K_m)$. Под *критерием* K_i понимается функция, определенная на V и принимающая значения из множества X_i, называемого *шкалой*①, а также множеством оценок, градаций по этому критерию. В общем случае шкала может иметь произвольную природу: оценки могут быть числовыми (скажем, годовая прибыль фирмы в млн руб.), словесными (например, «очень высокий уровень обслуживания», «высокий уровень обслуживания», ...), символьными (в частности, для характеристики отелей используют оценки *****, ****, ...) и т.д. Существенно лишь то, что эти оценки упорядочены по предпочтительности. Но для простоты и единообразия изложения далее будем полагать, что шкалы всех критериев – числовые, причем бóльшие

---

[5] Обозначения P и I обязаны первым буквам английских слов *preference* (предпочтение) и *indifference* (безразличие). Об индексах речь пойдет позднее.

① Этот термин имеет здесь обычно вкладываемый в него «технический» смысл (шкалы приборов и т.п.), который отличается от смысла принятого в математической теории измерений определения шкалы.

их значения предпочтительнее меньших[6]. Это допущение, как будет ясно из дальнейшего, не ограничивает общности изложения.

Таким образом, каждый вариант v характеризуется *m оценками* по критериям, т.е. значениями этих критериев $K_1(v)$, ..., $K_m(v)$. Эти числа составляют вектор $(K_1(v), ..., K_m(v))$, который называется *векторной оценкой* варианта. Для векторной оценки варианта v будем использовать двоякое обозначение – либо $K(v)$, либо $x(v)$ – как будет удобнее «по месту»[7], так что можно записать равенства

$$K(v) = (K_1(v), ..., K_m(v)) = x(v) = (x_1(v), ..., x_m(v)).$$

Сравнение вариантов по предпочтительности сводится к сопоставлению их векторных оценок. Множество всех векторных оценок (как *реальных*, т.е. соответствующих вариантам, так и гипотетических) обозначим через X.

2. Для иллюстрации вводимых теоретических понятий и конструкций рассмотрим пример, к которому будем постоянно обращаться и дальше. Пусть требуется выбрать самого лучшего по успеваемости студента из семи претендентов, учитывая их оценки по четырем учебным дисциплинам (курсам, предметам). О целях выбора и о том, кто здесь ЛПР, поговорим позже. Данные об успеваемости студентов приведены в табл. 1.1, причем используемые в российских вузах оценки: *отлично*, *хорошо*, *удовлетворительно*, *неудовлетворительно* записаны в общепринятом сокращенном виде[8].

Здесь в роли вариантов выступают студенты: v^1 – студент 1, и т.д., так что $V = \{v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6, v^7\}$. Критериев всего четыре ($m = 4$): это – успеваемость по соответствующим предметам (K_1 – по предмету A, и т.д.). Исходная шкала у всех критериев общая: {*отл*, *хор*, *уд*, *неуд*}. Заменяя словесные оценки общепринятыми цифрами, получаем числовую шкалу {5, 4, 3, 2}[9]. Этой шкалой и будем пользоваться в дальнейшем[10]. Полученные данные приведены в табл. 1.2.

---

[6] Формально от критерия K_i, который желательно минимизировать, легко перейти к критерию, который желательно максимизировать, например, заменой знака, т.е. вместо K_i взять $-K_i$. Если же критерий принимает лишь положительные значения, его можно также заменить на $1/K_i$.

[7] Вспомните, что и в математическом анализе для функции $y = f(x)$ часто пишут $y(x)$.

[8] Четырехбалльная система оценок – отлично, хорошо, удовлетворительно и неудовлетворительно – в вузах страны введена с 1 сентября 1938 г. Постановлением ЦК ВКП(б) и СНК СССР № 458 от 10.04.1938 г. Замена применявшейся в школе словесной системы оценки успеваемости и поведения учащихся – отлично, хорошо, посредственно, плохо, очень плохо – цифровой пятибалльной системой: 5, 4, 3, 2, 1 произошла 11 января 1944 г. по Постановлению СНК РСФСР от 10.01.1944 г.

[9] По своему происхождению эта шкала является «усеченной» цифровой шкалой школьных оценок {5, 4, 3, 2, 1}, что и объясняет отсутствие в ней числа 1.

[10] Можно дать и совсем иные интерпретации задачи с той же таблицей исходных данных! Например: на конкурс представлено семь проектов некоторой

Таблица 1.1. Оценки успеваемости студентов

Студент (№ по списку)	Предметы			
	А	*Б*	*В*	*Г*
1	*уд*	*отл*	*отл*	*хор*
2	*хор*	*хор*	*хор*	*отл*
3	*отл*	*хор*	*уд*	*уд*
4	*уд*	*отл*	*уд*	*отл*
5	*хор*	*неуд*	*хор*	*отл*
6	*уд*	*отл*	*уд*	*отл*
7	*отл*	*уд*	*хор*	*уд*

Таблица 1.2. Значения критериев

Вариант	Критерии			
	K_1	K_2	K_3	K_4
v^1	3	5	5	4
v^2	4	4	4	5
v^3	5	4	3	3
v^4	3	5	3	5
v^5	4	2	4	5
v^6	3	5	3	5
v^7	5	3	4	3

Оценки каждого студента по четырем предметам, записанные в порядке перечисления этих предметов (согласно порядку нумерации критериев), образуют его векторную оценку. Например, векторная оценка $x(v^1)$ [или, иначе, $K(v^1)$] первого студента v^1 есть (3, 5, 5, 4) [см. первую строку столбца «Критерии» табл. 1.2]. Таким образом, всего имеется шесть разных векторных оценок (у четвертого и шестого студентов векторные оценки совпадают). Эти шесть векторных оценок являются реальными, или достижимыми. Наряду с ними полезно, как выяснится далее, рассматривать и гипотетические векторные оценки – произвольные упорядоченные наборы четырех чисел из принятой шкалы, например, (5, 4, 3, 2), (5, 5, 5, 5) и (2, 2, 2, 2). Число всех векторных оценок (и реальных, и гипотетических) равно 256 ($= 4 \times 4 \times 4 \times 4$). Совокупность всех 256 векторных оценок есть множество X.

новой системы, качество и эффективность работы которой оцениваются при помощи четырех критериев (скажем, надежность работы, воздействие на окружающую среду, и т.д.); требуется выбрать лучший проект.

Сравнение студентов осуществляется только на основе их векторных оценок. Поэтому, например, четвертый и шестой студенты, имеющие совпадающие (равные) векторные оценки, должны считаться одинаковыми по успеваемости. Этот факт записывается следующим образом: $v^4 I_0 v^6$ (или, что равносильно, $v^6 I_0 v^4$); приведенная запись читается так: v^4 и v^6 одинаковы по предпочтительности. Здесь через I_0 обозначено отношение безразличия, определенное на множестве вариантов (студентов) V. Название объясняется тем, что если нужно было бы выбрать лучшего по успеваемости среди этих двух студентов, то можно было бы взять любого из них (безразлично, какого именно). Смысл нижнего индекса 0 будет пояснен далее.

3. По существу дела, очевидно, что если один из студентов имеет по каждому предмету оценку не ниже, чем другой, и при этом хотя бы по одному предмету у него оценка выше, то следует признать, что и успеваемость его в целом лучше. Так, сравнивая векторную оценку (4, 4, 4, 5) второго студента с векторной оценкой (4, 2, 4, 5) пятого студента, сразу видим, что второй студент по успеваемости лучше пятого. Представим в формализованном виде рассмотренные соображения.

Через P^0 будем обозначать отношение предпочтения между векторными оценками[11] и писать yP^0z, если векторная оценка y предпочтительнее в рассмотренном смысле, чем векторная оценка z. Запись yP^0z, читается так: y предпочтительнее (по отношению P^0), чем z. Учитывая сказанное выше, видим, например, что верна запись: (4, 4, 4, 5) P^0 (4, 2, 4, 5), т.е. векторная оценка (4, 4, 4, 5) предпочтительнее, чем (4, 2, 4, 5). Однако две любые другие векторные оценки не обязательно связаны рассматриваемым отношением. Так, для векторных оценок (3, 5, 5, 4) и (4, 4, 4, 5) первого и второго студентов соответственно неверно ни (3, 5, 5, 4) P^0 (4, 4, 4, 5) ни (4, 4, 4, 5) P^0 (3, 5, 5, 4). Такие векторные оценки называют *несравнимыми* по отношению P^0. Отношение P^0 считается определенным на всем множестве векторных оценок X. Например, верно (5, 5, 5, 5) P^0 (2, 2, 2, 2), однако неверно (5, 4, 3, 5) P^0 (4, 4, 4, 4).

Отношение P^0 для векторных оценок порождает аналогичное по смыслу отношение P_0 на множестве вариантов (студентов). (Напомним, что верхним индексом снабжаются отношения на множестве векторных оценок, а нижним – отношения на множестве вариантов). Так, поскольку справедливо (4, 4, 4, 5) P^0 (4, 2, 4, 5), то верно

[11] Обращаем внимание читателя на то, что отношение P^0 определяется для векторных оценок и имеет верхний индекс 0 в отличие от ранее введенного для вариантов отношения I_0, которое снабжено нижним индексом. И далее обозначения вводимых отношений для векторных оценок будут иметь верхние индексы, а обозначения отношений для вариантов – нижние индексы.

и $v^2 P_0 v^5$. Читателю предлагается самостоятельно убедиться в том, что для любой другой пары студентов v', v'' неверно ни $v' P_0 v''$, ни $v'' P_0 v'$.

Понятно, что поскольку верно $v^2 P_0 v^5$, т.е. студент v^5 по успеваемости хуже студента v^2, то v^5 не может претендовать на звание лучшего. Вообще, если для двух вариантов v', v'' справедливо $v' P_0 v''$, то вариант v'', называемый *доминируемым*, не может считаться наилучшим. Вариант v^* такой, для которого не существует (реального) варианта v, лучшего по отношению P_0, т.е. для которого было бы верно $v P_0 v^*$, называется *недоминируемым*, или *оптимальным по Эджворту-Парето*[12]. Множество всех таких вариантов, также называемых множеством *Эджворта-Парето*, будем обозначать V_0. Понятно, что только варианты из этого множества могут претендовать на роль наилучшего, или оптимального варианта[13]. В нашем примере множество V_0 состоит из шести студентов – всех, кроме пятого. Причем среди этих шести студентов лишь два одинаковы по успеваемости (v^4 и v^6), а остальные четверо не сравнимы (по P_0) ни с ними, ни между собой.

4. Итак, предварительный анализ задачи позволил сузить исходное множество выбора – множество всех вариантов V – до множества V_0. Однако обычно, как и в нашей задаче, это множество содержит далеко не один вариант. Как же произвести осознанный выбор[14] одного наилучшего варианта из всех, составляющих множество V_0? Для этого необходимо привлечь дополнительную информацию о предпочтениях, разумеется, ЛПР (напомним, что это сокращение означает «лицо, принимающее решение»)[15].

Кто же может быть лицом, принимающим решение, в нашей задаче со студентами? Это зависит от конкретной ситуации. Например, если речь идет о выборе лучшего студента для работы в некоторой фирме, то в роли ЛПР может выступать представитель этой фирмы. Если же выбирается участник студенческой олимпиады, то ЛПР – это собрание студентов или же деканат...

---

[12] По именам ученых (Edgeworth, 1845–1926; Pareto, 1848–1923), впервые использовавших приведенные понятия в экономико-математических исследованиях.

[13] Оптимальный – от *лат. optimus* (наилучший). Поэтому неграмотно говорить «самый оптимальный», «наиболее оптимальный», «максимально оптимальный» и т.п.

[14] Случайным (но «справедливым») будет, например, выбор с «равными шансами» одного из вариантов, входящих во множество V_0. В нашем примере его можно осуществить при помощи бросания игральной кости, если заранее сопоставить каждому числу возможных выпавших очков 1, 2, 3, 4, 5, 6 одного из шести студентов, входящих в состав этого множества.

[15] Рассмотренные ранее отношения I_0, P^0 и P_0 потому и снабжены индексами 0, что введены без использования такой информации.

Далее в качестве дополнительной информаций о предпочтениях будут выступать сведения об относительной важности критериев, а также об их шкалах. Информация будет обозначаться одной или несколькими буквами, которые будут использоваться также в качестве нижних и верхних индексов у символов отношений предпочтения и безразличия, вводимых на основе такой информации, а также у символов множеств недоминируемых вариантов. Например, для информации Ω будем иметь отношение безразличия I_Ω для вариантов и отношение предпочтения P^Ω для векторных оценок.

§ 1.3. Взвешенная сумма критериев

Очевидность – дело сугубо субъективное. Очевидности всегда можно избежать, противопоставив ей тонкость ума...

Рекс Стаут. «Умолкнувший оратор»

1. «Зачем так усложнять проблему? – может спросить искушенный читатель.– Нужно просто сложить все критерии, а их относительную важность учесть при помощи соответствующих коэффициентов: чем больше такая взвешенная сумма, тем лучше, и оптимален тот вариант, для которого соответствующая сумма максимальна!». Формально указанный подход, который и в самом деле очень широко используется на практике, означает, что все исходные критерии K_i «сворачиваются» в один *обобщенный* (глобальный, интегральный, комплексный, составной, агрегированный, синтетический, ...) *критерий* Φ, причем относительная, или сравнительная, важность критериев учитывается специальными множителями, которые именуются коэффициентами важности. Чем значение такого критерия для варианта больше, тем он предпочтительнее. Поэтому оптимальным считается тот вариант, для которого соответствующее значение критерия Φ окажется наибольшим[16]. Для нашего примера обобщенный критерий будет выглядеть так:

$$\Phi = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3 + \alpha_4 K_4.$$

Здесь коэффициенты важности α_1, α_2, α_3 и α_4 – это положительные числа, в сумме равные единице[17]. Их величина характеризует (относительную, или сравнительную) важность критериев: чем важнее критерий K_i (относительно остальных, или по сравнению с осталь-

[16] Если таких вариантов окажется несколько, то любой из них «с равным правом» может претендовать на роль наилучшего.

[17] Иногда устанавливается другое значение для суммы (например, 100), но тогда Φ теряет смысл среднего взвешенного.

ными), тем больше соответствующий ему коэффициент α_i, что обеспечивает больший «вклад» этого критерия в общую сумму, или, иными словами, большее его влияние на Ф и тем самым на конечный результат (выбор).

2. В нашей задаче со студентами критериев всего четыре. Предположим вначале, что все учебные предметы (а потому и все критерии) считаются одинаково важными[18]. Тогда нужно принять $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = ¼$, и взвешенная сумма Ф приобретает смысл среднего балла:

$$\Phi = \tfrac{1}{4}\,(K_1 + K_2 + K_3 + K_4).$$

Например, для седьмого студента $\Phi(v^7) = \tfrac{1}{4}\,(5 + 3 + 4 + 3) = 3\tfrac{3}{4}$.

Знакомый способ, не правда ли? Простой и понятный. И чем он плох? Разберем, однако, его внимательнее. Прежде всего, отметим, что конструирование среднего балла (как и любого другого обобщенного критерия Ф с коэффициентами важности) предполагает выполнение арифметических операций со значениями отдельных критериев. А это фактически означает, что в нашем примере отметки играют роль количественных оценок успеваемости, подобно тому, например, как число предметов или результаты взвешивания оценивают их количество или вес (массу). Если, к примеру, в одном наборе 5 предметов, а в другом 2, то осмысленным является утверждение о том, что в первом наборе предметов в 2,5 раза больше, чем во втором. Точно так же, если первый предмет весит 5 кг, а второй 2 кг, то можно утверждать, что первый тяжелее второго в 2,5 раза (причем результат не изменится, если от килограммов перейти к любым другим единицам, скажем, тоннам, фунтам или каратам)[19].

Рассмотрим теперь двух студентов, имеющих по некоторому предмету оценки 5 и 2 соответственно. Можно ли осмысленно утверждать, что знания первого в 2,5 раза лучше, чем второго? Пусть далее один студент по двум предметам имеет оценки 2 и 4, а другой – две 3. Средний балл у них (по этим двум предметам) одинаков – 3. Если считать студентов одинаковыми по успеваемости, то следует признать, что улучшение знаний при переходе от 2 к 3 в точности равно улучшению знаний при переходе от 3 и 4. Является ли это утверждение осмысленным? Таким образом, использование среднего балла на самом деле означает принятие допущения о том, что балльная шкала является количественной. Разумеется, это весьма сильное допущение, которое, как показывает вдумчивый анализ, далеко не всегда приемлемо.

---

[18] Точнее, так считает ЛПР.

[19] Со строгим определением понятия допустимого преобразования шкалы можно ознакомиться, например, по прекрасно написанной книге: *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. М.: Физматлит, 1974.

Если же предметы имеют разную значимость, то относительную важность критериев нужно выразить при помощи коэффициентов α_i, т.е. фактически её количественно измерить! Но возможно ли корректно это сделать, если само понятие «важность» формально (строго) не определено?

3. Заметим, наконец, что в нашей задаче все четыре критерия изначально имеют единую шкалу. Но в общем случае критерии могут иметь разные шкалы: один из них может оценивать, например, мощность (в киловаттах), другой – массу (в кг), третий – дизайн (в баллах), и т.п. Поэтому для построения обобщенного критерия Ф все критерии нужно вначале преобразовать – привести к сопоставимому (обычно безразмерному) виду, или, как говорят, *нормализовать*. Очень часто нормализацию проводят путем деления исходного (положительного) критерия K_i на его максимальное значение K_i^*. При этом фактически предполагается, что предпочтения равномерно возрастают (причем от нуля до K_i^*). Это – сильное допущение, и оно может приводить к явно неверным рекомендациям.

Рассмотрим такой пример. Предположим, что Вы хотите купить автомашину, и Вам, выслушав все Ваши пожелания, продавец предложил три машины *А, Б* и *В*. Цена и все интересующие Вас основные их характеристики примерно одинаковы, кроме максимальной скорости (км/ч) и экономичности (км/л)[20]. Значения этих двух характеристик Вы записали в таблицу (см. табл. 1.3).

Таблица 1.3. Значения исходных критериев

Марка автомобиля	Максимальная скорость K_1	Экономичность K_2
А	240	10
Б	140	14
В	120	15

Испытывая затруднения с выбором, Вы вспомнили о существовании метода взвешенной суммы и решили им воспользоваться.

– Для начала Вы рассчитали нормированные значения характеристик-критериев

$$\hat{K}_1 = {}^{K_1}\!/_{K_1^*}, \quad \hat{K}_2 = {}^{K_2}\!/_{K_2^*},$$

[20] Обычно экономичность оценивается расходом бензина в литрах на 100 км пробега. Но такой критерий желательно минимизировать. Поэтому для простоты изложения в примере взят «обратный» критерий, который желательно максимизировать – пробег в км при расходе 1 л бензина.

учтя, что $K_1^* = 240$, $K_2^* = 15$, и полученные значения занесли в новую таблицу (см. табл. 1.4).

– Затем, прикинув, решили, что обе характеристики для Вас примерно одинаково значимы, и поэтому приняли величины коэффициентов важности $\alpha_1 = \alpha_2 = ½$.

– Наконец, рассчитали значения обобщенного критерия Ф – взвешенной суммы

$$\Phi = 0{,}5\,\hat{K}_1 + 0{,}5\,\hat{K}_2$$

для всех машин и результаты записали в ту же таблицу.

– Поскольку самое большое значение обобщенного критерия Ф оказалось для машины *А*, то Вам стало ясно, что именно ее «рекомендует» приобрести использованный метод.

Таблица 1.4. Значения нормализованных и обобщенного критериев

Марка автомобиля	$\hat{K}_1 = K_1 / K_1^*$	$\hat{K}_2 = K_2 / K_2^*$	$\Phi = 0{,}5\,\hat{K}_1 + 0{,}5\,\hat{K}_2$
А	1	0,667	0,83
Б	0,583	0,933	0,76
В	0,5	1	0,75

Однако все-таки что-то во всей этой «истории» Вам не понравилось. Поразмыслив, Вы заметили, что иметь возможность развить скорость более 200 км/ч, конечно, заманчиво. Однако реально со скоростью более 140 км/ч Вам поехать если и придется, то лишь в каких-то исключительных случаях. Но вот за бензин приходится платить постоянно, да и цена на него растет и растет. А максимальная скорость 120 км/ч для Вас все-таки маловата. Приглядевшись, Вы заметили, что значение обобщенного критерия для машины *А* оказалось больше, чем для машины *Б*, именно за счет солидной прибавки в скорости, которая «перевесила» существенное ухудшение экономичности. А эта прибавка в скорости, хотя и велика, но для Вас привлекательности прибавляет немного. Напротив, прибавка в скорости всего на 20 км/ч (при отсчете от 120 км/ч), которая для Вас весьма ощутима, делает машину *Б* (при небольшой разнице в экономичности) предпочтительнее машины *В*. Вам стало понятно, что результаты расчетов Вас не удовлетворили потому, что на самом деле Ваши предпочтения вдоль шкалы скорости растут явно неравномерно, и это не было учтено. Поэтому, взвесив все «за» и «против», Вы решили выбрать машину *Б*.

Таким образом, «простая нормализация», подобная рассмотренной в примере, таит в себе опасность получения неверных рекомендаций. Поэтому встает проблема подбора (и обоснования!) подходящих формул преобразований для осуществления нормализации исходных неоднородных критериев②.

4. И, наконец, еще одно существенное замечание. При использовании обобщенных критериев приходится оперировать их значениями, которые обычно лишены содержательного («физического») смысла. Это затрудняет пояснения и обоснования рекомендаций, полученных в результате анализа задач принятия решений.

Для иллюстрации предположим, что Вы – ЛПР, и при решении сложной и ответственной задачи со многими критериями консультант принес Вам результаты анализа, согласно которым из трех возможных вариантов решения он в качестве оптимального предлагает выбрать первый, так как значение обобщенного показателя для него равно, скажем, 1,36; для двух остальных вариантов его значения меньше – соответственно 1,24 и 1,21. На просьбу пояснить смысл этих чисел аналитик ответил, что они получены в результате расчетов и являются значениями взвешенной (при помощи коэффициентов важности) суммы нормированных значений критериев для этих вариантов. Насколько убедителен будет для Вас представленный довод в пользу первого варианта?

5. Итак, рассмотренный подход, представляющийся на первый взгляд простым и ясным, связан с целым рядом проблем (и здесь разобраны не все из них!)[21], корректно разрешить которые далеко не всегда удается. Более того, зачастую о многих из них и не вспоминают (или даже вовсе не подозревают). Поэтому, мягко говоря,

---

②Существует строгая теория аддитивных функций ценности, которые можно использовать в роли обобщенных критериев (см. книгу: *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1981). Однако разработанные в ней методы построения таких функций требуют от ЛПР больших затрат времени и сил для ответов на весьма трудные для него вопросы. Например, ему предлагается указать такое значение с критерия K_i, при котором возрастание предпочтений при переходе от значения a этого критерия к значению c в точности такое же, как при переходе от c к b (при фиксированных значениях всех остальных критериев). В силу сложности и трудоемкости этих методов, а также ограничительности допущений, обеспечивающих само её существование, функцию ценности нельзя считать универсальным, эффективным и надежным инструментом анализа решений.

[21] Обстоятельный анализ этого подхода проведен в статье: *Подиновский В.В., Потапов М.А.* Метод взвешенной суммы критериев в анализе многокритериальных решений: Pro et contra // Бизнес-информатика. 2013. № 3 (25). С. 41–48.

безоговорочно рекомендовать конструирование обобщенных критериев в качестве пути анализа многокритериальных задач принятия сложных и ответственных решений нельзя[22].

И, тем не менее, взвешенная сумма критериев очень часто используется при анализе прикладных многокритериальных задач. Почему? Известный ученый и замечательный преподаватель профессор Вентцель Елена Сергеевна так ответила на этот вопрос[23]. «Здесь мы встречаемся с очень типичным для подобных ситуаций приемом – “переносом произвола из одной инстанции в другую”. Простой выбор компромиссного решения на основе мысленного сопоставления всех “за” и “против” каждого решения кажется слишком произвольным, недостаточно “научным”. А вот маневрирование с формулой, включающей (пусть столь же произвольно назначенные) коэффициенты, – совсем другое дело. Это уже “наука”! По существу же никакой науки тут нет, и нечего обманывать самих себя».

Выводы

1. *Сложные* практические *задачи* принятия решений, как правило, оказываются *многокритериальными*: последствия принятых решений приходится оценивать при помощи не одного, а *нескольких критериев* (показателей качества или эффективности, целевых функций).

2. Для анализа сложных и ответственных многокритериальных задач принятия решений только *опыта, знаний и интуиции* лица, принимающего решение (ЛПР) и экспертов (специалистов) *недостаточно*. Необходимо не только надлежащее информационное обеспечение, но и привлечение специальных *математических методов*, разрабатываемых в теории принятия решений.

3. Применение методов *теории принятия решений* предполагает в процессе анализа задачи использование *математической модели* проблемной ситуации, включающей *множество вариантов решений* и *набор критериев* для характеристики последствий их реализации.

4. Чтобы выбрать наилучший (оптимальный) вариант решения, задания только лишь набора критериев недостаточно. *Необходима дополнительная информация о предпочтениях* ЛПР, которая должна быть формализованно представлена в модели проблемной ситуации.

5. Многообразие и принципиальная сложность многокритериальных задач принятия решений (по сравнению с однокритери-

---

[22] А.А. Корбут как-то остроумно назвал процесс «свертывания» набора критериев в единый обобщенный критерий с использованием коэффициентов важности λ_i *«облямбдиванием»*.

[23] *Вентцель Е.С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология. Учебное пособие. 2-е изд. М.: Высшая школа, 2001.

альными) предопределило появление большого числа методов их анализа. Подавляющее большинство этих методов предполагает получение в качестве дополнительной информации о предпочтениях сведений об *относительной важности критериев*. Однако *формального определения* самого понятия важности критериев *не давалось*.

6. Наиболее распространенные *методы* анализа многокритериальных задач основаны на *свертывании набора исходных критериев в один обобщенный* (или агрегированный, интегральный, глобальный и т.п.) критерий, имеющий, например, вид взвешенной при помощи коэффициентов важности суммы исходных критериев. Несмотря на кажущуюся простоту и ясность, эти методы обладают целым *рядом серьезных недостатков*, существенно ограничивающих возможности получения при их помощи *обоснованных рекомендаций* по выбору оптимальных вариантов сложных и ответственных решений.

7. В связи с этим весьма актуальной оказалась проблема разработки *математической теории,* основанной на *строгих (формальных) определениях* понятия *относительной важности* критериев, которая включала бы методы корректного анализа многокритериальных задач с использованием информации о важности. Такая теория была создана, и основные идеи этой теории излагаются в последующих главах.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите практические примеры многокритериальных задач принятия решений (бытовых, учебных, производственных, ...).

2. Сформулируйте причины (источники) появления нескольких критериев в задачах принятия решений. Постарайтесь конкретизировать ответ и проиллюстрировать его примерами.

3. Каков смысл доминирования (по Эджворту-Парето) одного варианта над другим? Что такое недоминируемый вариант? Почему на роль наилучших могут претендовать только недоминируемые варианты?

4. В чем состоит метод решения многокритериальных задач при помощи обобщенного критерия? В чем заключаются достоинства и каковы недостатки такого подхода?

5. Проанализируйте задачу о выборе автомашины из § 1.3 при помощи метода взвешенной суммы с использованием другого, также широко применяемого способа нормализации критериев, согласно которому каждый исходный критерий K_i заменяется дробью $(K_i - K_{i*})/(K_i^* - K_{i*})$, где K_i^* – его наибольшее значение на множестве вариантов, а K_{i*} – наименьшее значение.

Это единственное подходящее слово, хотя оно до того истаскано и затрепано, что истинный смысл его давно уже стерся.

Эрнест Хемингуэй. «По ком звонит колокол»

Глава 2
Качественная важность критериев

Вводятся строгие определения понятий равенства и превосходства в важности одних критериев над другими и показывается, как использовать сведения такого рода для сравнения вариантов решений по предпочтительности.

§ 2.1. Однородные критерии

– Что же у тебя получилось в результате сложения лампочек и апельсинов?
– Лампельсины!

По радиоспектаклю Владимира Левшина «Приключения Нулика»

1. Сравнение критериев по важности, т.е. выяснение, является ли один из них более важным, чем другой, или же они одинаковы по важности, предполагает, что критерии являются *однородными*, т.е. имеют сопоставимый вид. Это означает, что у критериев должна быть единая (общая) шкала. Более того, должно выполняться следующее *условие* (требование) *однородности*: каждая градация шкалы должна отражать одинаковый уровень предпочтений для каждого из критериев[24].

---

[24] Если же сравнивать по важности неоднородные критерии, то придется указывать, какие конкретно изменения имеются в виду для каждого из сравниваемых критериев. Например, указать, что важнее (предпочтительнее) увеличить значение первого критерия на *a* единиц (его шкалы), чем увеличить значение второго критерия на *b* единиц (его шкалы). Такую важность можно назвать *параметрической* (связанной со значениями параметров *a* и *b*). Так, руководитель фирмы при рассмотрении планов ее развития может решить, что увеличение доли завоеванного сегмента рынка на 1% важнее, чем увеличение прибыли на 2 млн руб. Теория важности неоднородных критериев также разработана, но мы ее рассматривать здесь не будем. Заинтересованный читатель может найти соответствующую литературу в Приложении.

Это условие выполняется, например, в том случае, когда градации являются вербальными (словесными), причем имеют смысл, одинаковый для всех критериев, например, «превосходно», «отлично», ..., «отвратительно». Так, в частности, обстоит дело в нашем примере со студентами: одна и та же оценка по любому предмету содержательно одинакова. Обычно градации нумеруются в порядке возрастания предпочтительности; если всего градаций q, то номер 1 получает наименее предпочтительная градация, а номер q – самая предпочтительная (в примере со студентами нумерацию привычнее было начинать числом 2). Нужно подчеркнуть, что номера градаций, которые часто называют баллами, отражают лишь упорядоченность их по предпочтительности. Поэтому с числами-номерами градаций нельзя производить арифметические операции для получения каких-либо иных оценок предпочтений, например, для выражения степени превосходства одной градации над другой или же сравнения приращений предпочтений при переходе от одних градаций к другим. Например, уже говорилось о том, что бессмысленно говорить, будто при отличной оценке успеваемость (знания, умения и навыки) в 2,5 раза выше, чем при неудовлетворительной. По этой причине такая шкала называется *качественной* (точнее, *порядковой*).

Указанное выше условие будет выполнено и в том случае, если варианты будут оцениваться по всем критериям в единой балльной шкале, причем «цена балла» для всех критериев одинакова (как, например, в школьных оценках).

2. Однако на практике чаще встречаются задачи, в которых критерии изначально *неоднородны*, например, выражают вес, стоимость, площадь и т.д. Прежде чем такие критерии сравнивать по важности, их нужно привести к единой шкале, причем всего лишь порядковой. В этом состоит весьма существенное отличие от нормализации, которой должны подвергаться все критерии перед построением обобщенного критерия: после нормализации критерии должны описывать предпочтения количественно![25]

Для приведения некоторого количественного критерия к порядковой шкале с q градациями можно «разрезать» исходную шкалу этого критерия на q частей так, чтобы любое значение этого кри-

[25] Другое отличие состоит в том, что для построения обобщенного критерия «нормализация» (приведение к единой шкале) может осуществляется и без соблюдения требования однородности. Однако тогда коэффициенты, при помощи которых осуществляется «взвешивание» значений исходных критериев, вынуждены играть двоякую роль: они должны отражать не только относительную важность, но и соизмерять шкалы нормализованных критериев. В этом случае такие коэффициенты называются (относительными) весами, а также весовыми, или шкалирующими множителями. Правда, часто в литературе и для этого случая используется название «коэффициенты важности», что было отражено и в гл. 1.

терия из части номер i имело интерпретацию по предпочтительности, соответствующую градации i общей шкалы. Например, если в задаче выбора помещения под офис для небольшой фирмы один из критериев выражает общую его площадь, а число градаций q вводимой единой шкалы равно пяти, причем 1 – это «очень плохо», а 5 – «очень хорошо», то можно, скажем, указать, что площадь офиса менее 15 кв. м – «очень плохо», площадь от 15 кв. м до 20 кв. м – «плохо», ..., а площадь более 40 кв.м – «очень хорошо». Пример приведения неоднородных критериев к однородным в многокритериальной задаче, которая анализируется затем методами теории важности критериев, приведен в § 5.4.

3. Итак, далее предполагается (хотя специально и не оговаривается), что все критерии однородны – имеют единую порядковую шкалу.

§ 2.2. Базовые определения качественной важности

> Тут дело было вовсе не в симметрии или асимметрии, а кое в чем более глубоком, более внутреннем.
>
> *Варлам Шаламов. «Сука Тамара»*

1. Оценки относительной важности критериев могут быть качественными и количественными. *Качественными* (нечисловыми) оценками важности являются суждения (утверждения, сообщения) вида «Один критерий важнее другого» и «Оба критерия равноважны (т.е. имеют одинаковую важность)»[26]. *Количественными* оценками важности являются суждения вида «Один критерий важнее другого во столько-то раз»[27].

Качественные оценки менее информативны, чем количественные, но зато они проще для человека и потому более надежны (меньше возможности появления в них ошибок). Чтобы «почувствовать разницу» в сложности получения качественных и количественных оценок, проведите мысленно следующий эксперимент (впрочем, его легко реализовать и на практике). Представьте, что Вы в каждой руке держите по предмету (скажем, камню) и сравниваете их по весу. На какой из двух вопросов ответить труднее и в каком случае легче допустить ошибку:

---

[26] К качественным относятся также суждения об относительной важности групп критериев и о сравнительных степенях превосходства в важности (типа «Превосходство в важности первого критерия над вторым больше, чем третьего над четвертым»).

[27] Это – точные, или точечные оценки. Возможны также и интервальные оценки типа «Один критерий важнее другого более чем в a раз, но менее чем в b раз». Они, конечно, проще для человека, и потому более надежны.

– Какой из предметов тяжелее?

– Во сколько раз один из предметов тяжелее другого?

Под *качественной важностью* критериев будем понимать качественные оценки их относительной важности, под *количественной* – количественные оценки. Далее в этой главе будем рассматривать качественную важность, отложив рассмотрение количественной важности до следующей главы.

Суждение «Критерий K_i важнее критерия K_j» будем обозначать «словом» $i \succ j$, а суждение «Критерий K_i и K_j равноважны» – «словом» $i \sim j$. Качественная информация о важности, для обозначения которой будет использоваться последняя буква греческого алфавита Ω (омега), образуется накопленными (полученными от ЛПР и/или экспертов) сведениями о том, что некоторые критерии одинаковы по важности и что одни критерии важнее других[28], т.е. сообщениями вида $i \sim j$ и $i \succ j$. Например, если стало известно, что первый критерий важнее второго, а второй и третий критерии равноважны, то $\Omega = \{1 \succ 2, 2 \sim 3\}$.

2. Обратимся, наконец, к центральному вопросу точного определения понятий равенства и превосходства критериев в важности.

Предположим, что студенты изучали всего два учебных предмета, так что каждый студент получил всего две итоговые оценки. Если для характеристики общей успеваемости студента достаточно (и так нередко делается в жизни) перечислить полученные им оценки в произвольном порядке, не указывая при этом, какая оценка относится к тому или иному предмету (т.е. сказать, например, что у этого студента пятерка и тройка, а у того – пятерка и четверка), то это и означает, что каждый из предметов имеет одинаковую важность. Если же это не так, причем считается, что из любых двух студентов, имеющих одинаковые пары оценок, лучше учится тот, у которого более высокая оценка по определенному предмету, то этот предмет важнее другого. Если предметов более двух, то сравнивать относительную важность двух выбранных предметов можно путем сопоставления общей успеваемости таких студентов, которые имеют одинаковые пары оценок по этим предметам, но по всем остальным предметам оценки у них должны быть одинаковыми.

Идеи разобранного примера лежат в основе следующих определений. В них под x^{ij} понимается векторная оценка, полученная из x перестановкой ее компонент x_i и x_j. Например, если $x = (5, 4, 3, 4)$, то $x^{14} = (4, 4, 3, 5)$ и $x^{23} = (5, 3, 4, 4)$.

---

[28] Частично сведения такого рода иногда могут быть получены и из других источников, например, в результате исследований моделей более высокого уровня. Так, относительная важность некоторых критериев, характеризующих работу предприятия, может быть оценена при помощи модели функционирования объединения, в которое оно входит.

Определение 2.1. Критерии K_i и K_j *равноважны,* или *одинаково важны*, когда любые две векторные оценки x и x^{ij} одинаковы по предпочтительности.

Определение 2.2. Критерий K_i *важнее* критерия K_j, когда всякая векторная оценка x, в которой $x_i > x_j$, предпочтительнее, чем x^{ij}.

Согласно первому из этих определений сообщение $i \sim j$ связывает векторные оценки x и y такие, что $y = x^{ij}$, отношением безразличия $I^{i \sim j}$. Согласно второму определению, сообщение $i \succ j$ связывает векторные оценки x и y такие, что $x_i > x_j$, $y = x^{ij}$, отношением предпочтения $P^{i \succ j}$.

Например, верно (**5**, **4**, 3, 4) $P^{1 \succ 2}$ (**4**, **5**, 3, 4), поскольку вторая векторная оценка получается из первой перестановкой ее первых двух компонент, причем именно в первой векторной оценке на первом месте (как значение более важного критерия) стоит 5 – большее из двух чисел 4 и 5. Иными словами, указанная перестановка приводит к ухудшению первой векторной оценки.

Верно также (5, **4**, **3**, 4) $I^{2 \sim 3}$ (5, **3**, **4**, 4). Действительно, здесь вторая векторная оценка получена из первой перестановкой второй и третьей компонент, а второй и третий критерии равноважны. Поэтому такая перестановка не приводит к изменению предпочтений.

§ 2.3. Получение и анализ качественной информации о важности критериев

Недооценивать важность не менее пагубно, чем ее преувеличивать, особенно если делать это в ущерб фактам.

Пол Гилберт. «Потерянные записки о Шерлоке Холмсе. Добросовестный констебль.»

1. Для получения от ЛПР (или эксперта) качественной информации о важности критериев Ω ему необходимо предложить попарно сравнивать критерии по важности. Для каждой выбранной пары критериев ЛПР должно указать, что один из критериев более важен, чем другой, или что они равноважны, или же, возможно, считать эти критерии несравнимыми по важности.

Для сравнения критериев K_i и K_j можно исходить непосредственно из определений 2.1 и 2.2 равенства и превосходства в важности и сопоставлять по предпочтению пары векторных оценок вида x и $y = x^{ij}$. Так, для сравнения по важности первого и второго критериев нужно сопоставлять векторные оценки вида $(a, b, *, \ldots, *)$ и $(b, a, *, \ldots, *)$, где $a > b$ и звездочки «*» означают, что на одинаковых местах в обеих оценках стоят произвольные, но равные шкальные значения. Следует брать несколько пар векторных оценок такого вида, причем целесообразно на месте «*» использовать один раз наихудшее шкальное значение, один раз наилучшее, и один раз некоторое среднее значение (в задаче со студентами, например, 2, 3 и 5). И в роли чисел a и b использовать указанные шкальные значения и ближайшие к ним (в задаче со студентами брать 2 и 3; 4 и 5), если из предыдущих ответов можно предположить, что первый критерий важнее второго, или, наоборот, наилучшее и наихудшее значения (2 и 5), если появляется предположение о равенстве сравниваемых критериев по важности. Таким образом, пар чисел a, b тоже будет несколько. Если из ответов ЛПР будет следовать, что во всех случаях первая векторная оценка предпочтительнее второй, то можно задать заключительный вопрос типа «Если варианты различаются лишь перестановкой значений первых двух критериев, а значения всех остальных соответствующих критериев для них равны, то верно ли, что всегда предпочтительнее тот вариант, для которого значение первого критерия больше?». При положительном ответе на этот вопрос можно считать, что первый критерий важнее второго, т.е. получено сообщение $1 \succ 2$. Аналогично надо действовать, если выяснится, что обе векторные оценки всегда одинаковы по предпочтительности, и, возможно, получить сообщение $1 \sim 2$.

Конечно, опрос ЛПР согласно приведенной «полной программе – процедура весьма трудоемкая и потому реально вряд ли выполнимая. Поэтому практически можно для выбранной пары критериев предложить ему сравнить лишь две-три пары векторных оценок и задать заключительный вопрос. А затем, когда ЛПР поймет смысл, вкладываемый в понятия равенства и превосходство по важности, и согласится с ним, то ограничиться лишь одним заключительным вопросом для каждой предъявляемой пары критериев. Хотя целью опроса ЛПР является упорядочение всех критериев по важности, число пар критериев, предъявляемых для сравнения, должно быть, по возможности, минимальным. Но, разумеется, для проверки могут быть заданы и контрольные вопросы. Например, если установлено, что $1 \succ 2$ и $2 \sim 3$, то можно проверить, верно ли, что $1 \succ 3$.

В каждой конкретной задаче ЛПР нужно представлять не абстрактные векторные оценки, а варианты (реальные или гипотетические) с соответствующими векторными оценками, состоящими из действительно возможных значений критериев. Например, в задаче со студентами можно предлагать попарно сравнивать студентов, имеющих оценки успеваемости по предметам *А, Б, В, Г* соответственно 2, 3, 3, 3 и 3, 2, 3, 3; затем (если первый из сравниваемых студентов будет признан лучшим по успеваемости, чем второй) 2, 5, 3, 3 и 5, 2, 3, 3, и т.д.

Разумеется, далеко не во всякой задаче обязательно все критерии удастся сравнить по важности: некоторые из них могут оказаться несравнимыми (т.е., например, не будет верно ни $1 \succ 2$, ни $2 \succ 1$, ни $1 \sim 2$)[29].

2. И последнее замечание, касающееся сбора сведений о важности критериев. Предварительные исследования показали[30], что смысл, вкладываемый людьми в утверждения «Один критерий важнее другого» и «Критерии равноважны», вполне согласуется[31] с определениями 2.1 и 2.2. Поэтому при дефиците времени можно, казалось бы, вовсе обойтись без описанных выше процедур, просто предлагая ЛПР, исходя из своего интуитивного представления о важности критериев, в каждой предъявляемой паре критериев указать более важный критерий или отметить, что оба критерия одинаково важны. Или даже сразу ранжировать все критерии по важности. Однако на деле все-таки стоит проверить хотя бы некоторые из полученных сообщений о важности, воспользовавшись описанным выше подходом, причем специально подчеркнуть, что критерии имеют общую шкалу!

3. Накопленную качественную информацию о важности Ω нужно проверять на непротиворечивость, поскольку в нее могут вкрасться ошибки. Противоречивость проявится в том, что при помощи сообщений из Ω можно будет составить цикл, приводящий

---

[29] Причин такого положения может быть несколько. Одна из них состоит в том, что данные выше определения вводят, по существу, понятие «глобальной» важности, т.е. охватывающей все множество векторных оценок. Однако на практике бывают случаи, когда в одной части этого множества, например, при одних значениях третьего критерия, первый критерий важнее второго, а в другой, при других значениях третьего критерия, наоборот, второй важнее первого (так что существует зависимость соотношений по важности первых двух критериев от третьего критерия). Так, выбирая загородный дом, покупатель или арендатор может полагать, что при наличии на участке бассейна близость леса важнее близости «воды» для купания (пруда, озера или речки), а при отсутствии бассейна, наоборот, что близость «воды» важнее близости леса. В таких случаях следует скорректировать исходные определения, ограничив их «действие» лишь некоторой областью из множества векторных оценок (что будет соответствовать понятию «локальной» важности).

[30] *Подиновский В.В.* Коэффициенты важности как информация о предпочтениях / Принятие решений в условиях многокритериальности и неопределенности. Тезисы докл. на IV Всес. сем. по исслед. операций и системному анализу (Батуми, 10–15 октября 1983). М.: ВШПД ВЦСПС, 1983. С. 43.

[31] Мне кажется, что это может относиться лишь к случаю, когда людям очевидно, что критерии имеют одну шкалу. И представляется очень важным явно предостеречь от использования такого «наивного» подхода к опросу в случае разных шкал (*замечание П.Ю. Чеботарёва*).

к заключению, что некоторый критерий важнее самого себя. Тогда соответствующие сообщения надо проверить и скорректировать. Так, если Ω содержит сообщения $1 \succ 2$, $2 \succ 3$ и $3 \succ 1$, то отсюда будет формально вытекать③, например, что $1 \succ 1$. Следовательно, по крайней мере одно из указанных трех суждений ошибочно. Если при проверке выяснится, что неверно суждение $3 \succ 1$, то его нужно заменить на $1 \succ 3$.

§ 2.4. Использование качественной информации о важности критериев для анализа многокритериальных задач

Слов немного – ну, может, пяток,
Но какие из них комбинации!

Александр Иванов. «Обучение русскому»

1. Каждое сообщение $i \succ j$ или $i \sim j$ из полученной качественной информации о важности Ω задает на множестве векторных оценок, как было выяснено выше, отношение предпочтения $P^{i \succ j}$ или безразличия $I^{i \sim j}$. Комбинируя эти отношения и отношение Эджворта–Парето P^0, можно сравнивать по предпочтительности векторные оценки с использованием всей информации Ω и таким образом сконструировать отношения P^{Ω} и I^{Ω}, порождаемым всей этой информацией.

Пусть, например, в двухкритериальной задаче известно, что первый критерий важнее второго, т.е. $\Omega = \{1 \succ 2\}$. Понятно, что для векторных оценок (5, 3) и (2, 4) неверно ни $(5, 3)\ P^{1 \succ 2}\,(2, 4)$, ни $(5, 3)\ P^0\,(2, 4)$. Однако можно составить цепочку из двух звеньев – верных соотношений

$$(5, 3)\ P^{1 \succ 2}\,(3, 5),\ (3, 5)\ P^0\,(2, 4),$$

которую сокращенно запишем следующим образом:

$$(5, 3)\ P^{1 \succ 2}\,(3, 5)\ P^0\,(2, 4).$$

Рассмотрев эту цепочку, можно утверждать④, что векторная оценка (5, 3) предпочтительнее, чем (2, 4), т.е. $(5, 3)\ P^{\Omega}\,(2, 4)$.

Построенная цепочка не единственна. Например, можно построить и такую цепочку:

$$(5, 3)\ P^0\ (4, 3) P^{1 \succ 2}\ (3, 4)\ P^0\ (2, 4),$$

и другие цепочки. Но для того чтобы убедиться в справедливости $(5, 3)\ P^{\Omega}\,(2, 4)$, достаточно было построить только одну цепочку от

③ В предположении, что отношение важности транзитивно.

④ То есть принимается допущение о транзитивности предпочтений.

(5, 3) до (2, 4). Более того, построить «обратную» цепочку от (2, 4) до (5, 3) невозможно (попробуйте убедиться в этом сами).

Пусть теперь в рассматриваемой двухкритериальной задаче оба критерия равноважны: $\Omega = \{1 \sim 2\}$. Векторные оценки (5, 3) и (2, 4) связывает цепочка

$$(5, 3)\ I^{1 \sim 2}\,(3, 5)\ P^{0}\,(2, 4),$$

т.е. векторная оценка (5, 3) одинакова по предпочтительности с векторной оценкой (3, 5), которая, в свою очередь, предпочтительнее векторной оценки (2, 4). Поэтому и здесь следует признать, что векторная оценка (5, 3) предпочтительнее, чем (2, 4), т.е. верно (5, 3) P^{Ω} (2, 4).

2. Отношения P^{Ω} и I^{Ω} порождают на множестве вариантов V аналогичные по смыслу отношения P_{Ω} и I_{Ω}, при помощи которых можно сравнивать по предпочтительности варианты. (Напомним еще раз, что верхние индексы ставятся у обозначений, касающихся векторных оценок, а нижние – у обозначений, касающихся вариантов.)

Вариант v^* такой, для которого не существует варианта v, лучшего по отношению P_{Ω}, т.е. для которого было бы верно $vP_{\Omega}v^*$, называется *недоминируемым* (по отношению P_{Ω}). В противном случае он является *доминируемым*. Множество недоминируемых вариантов будем обозначать V_{Ω}. Только недоминируемые варианты могут претендовать на роль оптимальных.

3. Обратимся к нашему примеру со студентами. Предположим, что получена информация: предмет *А* важнее предмета *Б*, предметы *Б* и *В* одинаково важны, и каждый из них важнее предмета *Г* (разумеется, в смысле данных выше определений). Эту информацию сокращенно можно записать так: $\Omega = \{1 \succ 2,\ 2 \sim 3,\ 3 \succ 4\}$. Попробуем, используя ее, продолжить поиск лучшего в учебе студента.

Поскольку предмет *В* (критерий K_3) важнее предмета *Г* (критерия K_4), то векторная оценка $x(v^1) = (3, 5, 5, 4)$, согласно определению 2.2, предпочтительнее, чем $y = x^{34} = (3, 5, 4, 5)$, т.е. верна запись $x(v^1)\ P^{3 \succ 4}y$. Далее, справедливо соотношение yP^0z, где $z = (3, 5, 3, 5)$. Таким образом, имеем цепочку из трех звеньев:

$$(3, 5, 5, 4)\ P^{3 \succ 4}\,(3, 5, 4, 5)\ P^{0}(3, 5, 3, 5).$$

Следовательно, верно (3, 5, 5, 4) P^{Ω} (3, 5, 3, 5). Но (3, 5, 3, 5) есть векторная оценка и студента v^4, и студента v^6. Следовательно, первый студент по учебе предпочтительнее, чем и четвертый, и шестой: $v^1P_{\Omega}v^4$ и $v^1P_{\Omega}v^6$. Отсюда вытекает, что четвертый и шестой студенты не могут претендовать на роль наилучших (т.е., согласно общей терминологии, v^4 и v^6 – доминируемые варианты).

Подчеркнем двоякую роль построенной цепочки и подобных ей. С одной стороны, цепочка от x к y показывает, что верно $xP^{\Omega}y$, т.е. x предпочтительнее, чем y. С другой стороны, она позволяет наглядно и ясно объяснить, причем в терминах собранных сведений о предпочтениях, почему x предпочтительнее, чем y. И в этом еще одно существенное преимущество рассматриваемых методов перед теми, которые опираются на построение обобщенных критериев. Поэтому подобного рода цепочки будем называть *объясняющими*. Понятно, что в роли объясняющей желательно иметь цепочку возможно меньшей длины.

Далее, поскольку предметы *Б* и *В* (критерии K_2 и K_3) одинаково важны, то векторные оценки $x(v^3) = (5, 4, 3, 3)$ и $x(v^7) = (5, 3, 4, 3)$, согласно определению 2.1, одинаковы по предпочтительности: $(5, 4, 3, 3)\ I^{2\sim 3}\ (5, 3, 4, 3)$, и потому верно соотношение[32]: $(5, 4, 3, 3)$ $I^{\Omega}\,(5, 3, 4, 3)$. Поэтому справедливо и $v^3 I_{\Omega} v^7$, так что студенты v^3 и v^7 в учебе равны.

4. Разумеется, хотелось бы иметь эффективные методы, позволяющие построить объясняющую цепочку, связывающую две произвольные векторные оценки x и y, или же выяснить, что таковой не существует. И такие методы для любого состава множества Ω (они называются комбинаторными, так как носят переборный характер) были разработаны. С их помощью можно убедиться в том, что сравнить по общей успеваемости студентов v^1, v^2 и v^3 (или v^7) между собой на основе информации Ω невозможно. Поэтому варианты v^1, v^2, v^3, v^7 являются недоминируемыми по отношению P_{Ω}. Таким образом, информация Ω позволила сузить множество выбора V_0 до множества $V_{\Omega} = \{v^1, v^2, v^3, v^7\}$, в котором два варианта одинаковы по предпочтительности.

5. Для случая, когда все критерии упорядочены по важности, как в примере со студентами, разработаны более простые, алгебраические методы проверки соотношений $xP^{\Omega}y$ и $xI^{\Omega}y$. Один такой метод представлен ниже⑤. С другим заинтересованный читатель может ознакомиться, прочитав следующий параграф.

Итак, пусть все критерии упорядочены по важности. Для простоты записи предположим, что все они перенумерованы в порядке убывания (точнее, не возрастания) их важности, что сокращенно можно представить в виде цепочки:

$$1 \sim 2 \sim \ldots \sim i_1 \succ i_1 + 1 \sim \ldots \sim i_2 \succ \ldots \succ i_{r-1} + 1 \sim \ldots \sim i_r,$$

где $i_r = m$. Например, для задачи о студентах такая цепочка имеет вид:

$$1 \succ 2 \sim 3 \succ 4$$

так что $r = 3$, $i_1 = 1$, $i_2 = 3$ и $i_3 = 4$.

---

[32] Можно считать, что векторные оценки (5, 4, 3, 4) и (5, 3, 4, 4) связывает цепочка, состоящая лишь из одного звена: $(5, 4, 3, 4)\ I^{2\sim 3}\ (5, 3, 4, 4)$.

⑤Этот метод предложен в статье: *Подиновский В.В., Подиновская О.В.* Новые многокритериальные решающие правила в теории важности критериев // Доклады академии наук. 2013. Т. 451. № 1. С. 21–23.

Для векторной оценки $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ обозначим через $y^{[1,\ k]}$ вектор, составленные из ее первых k компонент. Так, для $y = (3, 2, 8, 1)$ и $k = 3$ имеем $y^{[1,\ 3]} = (3, 2, 8)$.

Под $y_{\downarrow}^{[1,k]}$ будем понимать вектор, полученный из $y^{[1,\ k]}$ упорядочением компонент по убыванию (точнее, по невозрастанию). Так, для $y = (3, 2, 8, 1)$ и $k = 3$ имеем $y_{\downarrow}^{[1,3]} = (8,3,2)$.

Наконец, напомним, что два вектора считаются равными, если их соответственные компоненты равны. А под векторным неравенством понимается совокупность неравенств между его соответственными компонентами. Например, для $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ и $z = (z_1, z_2, ..., z_m)$ векторное неравенство $y \geq z$ означает, что $y_1 \geq z_1, y_2 \geq z_2, ..., y_m \geq z_m$.

Теперь можно сформулировать следующие утверждения, лежащие в основе рассматриваемого метода:

$yI^{\Omega}z$ верно тогда и только тогда, когда справедливы равенства

$$y_{\downarrow}^{[1,k]} = z_{\downarrow}^{[1,k]}, \quad k = i_1, i_2, ..., i_r;$$

$yP^{\Omega}z$ верно тогда и только тогда, когда справедливы неравенства

$$y_{\downarrow}^{[1,k]} \geq z_{\downarrow}^{[1,k]}, \quad k = i_1, i_2, ..., i_r,$$

но не все предыдущие равенства верны.

Используя эти утверждения, сравним по предпочтительности варианты в задаче о студентах, учтя, как отмечено выше, $r = 3$, $i_1 = 1$, $i_2 = 3$ и $i_3 = 4$. Для этого запишем все «усеченные» векторы $y^{[1,\ k]}$ и $y_{\downarrow}^{[1,k]}(v^j)$, $k = 1, 2, 3$ в табл. 2.1.

Таблица 2.1. Векторы $y^{[1,\ k]}$ и $y_{\downarrow}^{[1,k]}(v^j)$

j	1	2	3	4	7
$y^{[1,\ k]}$ $k = 1, 2, 3$	3 (3, 5, 5) (3, 5, 5, 4)	4 (4, 4, 4) (4, 4, 4, 5)	5 (5, 4, 3) (5, 4, 3, 3)	3 (3, 5, 3) (3, 5, 3, 5)	5 (5, 3, 4) (5, 3, 4, 3)
$y_{\downarrow}^{[1,k]}(v^j)$ $k = 1, 2, 3$	3 (5, 5, 3) (5, 5, 4, 3)	4 (4, 4, 4) (5, 4, 4, 4)	5 (5, 4, 3) (5, 4, 3, 3)	3 (5, 3, 3) (5, 5, 3, 3)	5 (5, 4, 3) (5, 4, 3, 3)

Сравним вначале y^1 и y^2. Для этого запишем три соответствующих неравенства:

$$3 \geq 4,\ (5, 5, 3) \geq (4, 4, 4),\ (5, 5, 4, 3) \geq (5, 4, 4, 4).$$

Первое и второе из них не выполнены. Нетрудно понять, что и равенства между этими векторами неверны. Наконец, и среди обратных неравенств

$$4 \geq 3,\ (4, 4, 4) \geq (5, 3, 3),\ (5, 4, 4, 4) \geq (5, 4, 4, 3)$$

второе неверно. Следовательно, y^1 и y^2 не сравнимы по предпочтительности.

Аналогично можно убедиться в том, что и варианты y^1 и y^3 не сравнимы.

А вот для пары y^1 и y^4 векторные неравенства

$$3 \geq 3, (5, 5, 3) \geq (5, 3, 3), (5, 5, 4, 3) \geq (5, 5, 3, 3)$$

справедливы, причем для некоторых компонент векторов из второго и третьего неравенств неравенства строгие. Поэтому верно $y^1 P^\Omega y^4$.

Проведя проверку всех остальных пар, убедимся, что справедливо лишь соотношение $y^3 I^\Omega y^7$.

Разумеется, эти результаты совпадают с полученными в предыдущем параграфе.

6. Рассмотрим теперь случай, когда все критерии равноважны, т.е. любые два критерия одинаковы по важности. Такую информацию будем обозначать буквой[33] S. Для него рассмотренный выше метод оказывается особенно простым, так как $r = 1$ и $i_1 = m$, так что достаточно ограничиваться рассмотрением лишь одного векторного неравенства. Пусть $y_\downarrow$ – векторная оценка, полученная из y упорядочением её компонент по убыванию (точнее, по невозрастанию). Например, если $y = (3, 4, 2, 3, 5)$, то $y_\downarrow = (5, 4, 3, 3, 2)$. Теперь можно записать следующие утверждения:

$yI^S z$ верно в том и только том случае, когда справедливо равенство $y_\downarrow = z_\downarrow$.

$yP^S z$ верно в том и только том случае, когда справедливо $y_\downarrow \geq z_\downarrow$, но $y_\downarrow \neq z_\downarrow$.

Для иллюстрации предположим, что в нашем примере со студентами все предметы одинаково важны. Тогда, например, второй студент будет предпочтительнее седьмого, поскольку $y_\downarrow(v^2) = (5, 4, 4, 4)$, $y_\downarrow(v^7) = (5, 4, 3, 3)$ и верно $(5, 4, 4, 4) \geq (5, 4, 3, 3)$, но эти векторы не равны.

§ 2.5.* Качественные величины важности критериев и их применение для сравнения вариантов по предпочтительности

– Когда я беру слово, оно означает то, что я хочу, не больше и не меньше, – сказал Шалтай презрительно.
– Вопрос в том, подчинится ли оно вам, – сказала Алиса.
– Вопрос в том, кто из нас здесь хозяин, – сказал Шалтай-Болтай. – Вот в чем вопрос.

Льюис Кэрролл. «Алиса в Зазеркалье»

---

[33] Первая буква английского слова symmetry – симметрия.

1. Введем несколько полезных для дальнейшего изложения определений. Вначале рассмотрим случай множества сообщений Ω произвольного состава.

<u>Определение 2.3.</u> *Качественными величинами важности критериев* β_i^Ω, *порождаемыми информацией* (или *соответствующими информации*) Ω, называются числа, удовлетворяющие следующему условию: более важному критерию соответствует большее число, а одинаковым по важности критериям – равные числа, т.е.

если Ω содержит $i \succ j$, то $\beta_i^\Omega > \beta_j^\Omega$;

если Ω содержит $i \sim j$, то $\beta_i^\Omega = \beta_j^\Omega$. (2.1)

Если качественные величины важности положительны и в сумме равны 1, то они называются *качественными коэффициентами важности* и обозначаются α_i^Ω.

<u>Пример 2.1.</u> Если $m = 4$ и $\Omega = \{1 \succ 2, 3 \sim 4\}$, то можно положить, скажем,

$\beta_1^\Omega = 4$, $\beta_2^\Omega = 2$, $\beta_3^\Omega = \beta_4^\Omega = 2$; или же $\beta_1^\Omega = 10$, $\beta_2^\Omega = -314$, $\beta_3^\Omega = \beta_4^\Omega = 7/8$;

а также

$\alpha_1^\Omega = 0{,}4$; $\alpha_2^\Omega = 0{,}2$; $\alpha_3^\Omega = \alpha_4^\Omega = 0{,}2$; или же $\alpha_1^\Omega = 0{,}2$; $\alpha_2^\Omega = 0{,}1$; $\alpha_3^\Omega = \alpha_4^\Omega = 0{,}35$.

Качественные величины (и коэффициенты) важности существуют тогда и только тогда, когда информация Ω непротиворечива. Для противоречивой информации подобрать соответствующие величины важности невозможно. Например, если Ω содержит сообщения $1 \succ 2$, $2 \sim 3$ и $3 \succ 1$, то им, согласно (2.1), будут соответствовать следующие два неравенства и равенство

$$\beta_1^\Omega > \beta_2^\Omega, \quad \beta_2^\Omega = \beta_3^\Omega, \quad \beta_3^\Omega > \beta_1^\Omega,$$

которые, очевидно, несовместны.

Качественные величины (а также и коэффициенты) важности критериев, полностью упорядоченных по важности, т.е. соответствующие полной непротиворечивой информации Ω, называются *порядковыми,* или *ординальными*.

2. Будем рассматривать случай, когда все критерии упорядочены по важности. Такая информация порождает порядковые величины важности $\beta_1^\Omega, \ldots, \beta_m^\Omega$. Полагаем также, что общая шкала критериев Z_0 имеет q упорядоченных по предпочтительности градаций, которые будем представлять их номерами от 1 до q. Таким образом, $Z_0 = \{1, 2, \ldots, q\}$, где q – самая высокая градация, а 1 – самая низкая. Подчеркнем, что шкала критериев Z_0 является *порядковой*. Это значит, что номера градаций отражают только их упорядоченность по предпочтительности: чем больше номер градации, тем она предпочтительнее. Поэтому, например, бессмысленно считать, что градация

4 в два раза предпочтительнее градации 2. Методы сравнения вариантов по предпочтительности, включая изложенные выше и описываемые далее, не предполагают выполнения с этими номерами никаких арифметических операций!

Пусть d – число, меньшее, чем наименьшее из всех m чисел $\beta_1^\Omega, ..., \beta_m^\Omega$. Для векторной оценки $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ положим:

$$\beta_i^k(y) = \begin{cases} \beta_i^\Omega, & y_i \le k \\ d, & y_i > k \end{cases}, \quad k = 1, ..., q-1; \tag{2.2}$$

$$\beta^k(y) = (\beta_1^k(y), ..., \beta_m^k(y)). \tag{2.3}$$

Согласно (2.2), $\beta_i^k(y) = \beta_i^\Omega$, если $y_i \le k$, и $\beta_i^k(y) = d$, если $y_i > k$. Напомним, что под $\beta_\uparrow^k(y)$ понимается вектор, полученный из вектора $\beta^k(y)$ упорядочением его компонент по неубыванию. Обозначим через $\mathrm{B}^\Omega(y)$ и $\mathrm{B}_\uparrow^\Omega(y)$ матрицы (таблицы) с q–1 строками и m столбцами, составленные соответственно из векторов $\beta^k(y)$ и $\beta_\uparrow^k(y)$ с номерами от 1 до $q - 1$:

$$\mathrm{B}^\Omega(y) = \begin{pmatrix} \beta^1(y) \\ \dots \\ \beta^{q-1}(y) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B}_\uparrow^\Omega(y) = \begin{pmatrix} \beta_\uparrow^1(y) \\ \dots \\ \beta_\uparrow^{q-1}(y) \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Метод сравнения двух векторных оценок y и z по предпочтительности с использованием информации Ω заключается в проверке справедливости следующего матричного неравенства между матрицами $\mathrm{B}_\uparrow^\Omega(y)$ и $\mathrm{B}_\uparrow^\Omega(z)$, понимаемого как совокупность всех $(q-1) \times m$ неравенств между соответственными их элементами:

$$\mathrm{B}_\uparrow^\Omega(y) \le \mathrm{B}_\uparrow^\Omega(z). \tag{2.5}$$

Если матричное неравенство (2.5) выполняется и среди нестрогих неравенств между элементами матриц есть хотя бы одно строгое, то верно $yP^\Omega z$; если нестрогое неравенство (2.5) выполняется как равенство, то верно $yI^\Omega z$. Если неравенство (2.5) не выполняется, то неверно ни $yP^\Omega z$, ни $yI^\Omega z$, и тогда нужно проверить справедливость матричного неравенства $\mathrm{B}_\uparrow^\Omega(z) \le \mathrm{B}_\uparrow^\Omega(y)$. Если $zP^\Omega y$ также не будет верно, то это будет означать, что рассматриваемые векторные оценки на основании информации Ω несравнимы по предпочтительности. Отметим, что в роли чисел $\beta_1^\Omega, ..., \beta_m^\Omega$ можно было использовать, в частности, коэффициенты важности $\alpha_1^\Omega, ..., \alpha_m^\Omega$. Но числа $\beta_1^\Omega, ..., \beta_m^\Omega$ можно выбрать целыми положительными, а коэффициенты важности всегда числа дробные. А при «ручном» счете проще иметь дело с натуральными числами, чем с дробями.

3. Используя описанный метод, попарно сравним по предпочтительности векторные оценки студентов. Вначале отметим, что оценки 1 на нашей шкале нет, и поэтому в формуле (2.2) можно ограничиться рассмотрением значений $k = 2, 3, 4$. Далее, поскольку в (2.4) и (2.5) производится только сравнение по величине соответствующих чисел, то для простоты записи и восприятия выкладок можно, в соответствии с Ω, принять:

$$\beta_1^\Omega = 3\,, \quad \beta_2^\Omega = \beta_2^\Omega = 2\,, \quad \beta_3^\Omega = 1\,, \quad d = 0. \tag{2.6}$$

Будем попарно сравнивать векторные оценки

$$y^1, y^2, y^3, y^4, y^7. \tag{2.7}$$

Векторные оценки y^5 и y^6 в списке (2.7) пропущены, так как первая из них доминируется, как было выяснено в § 1.2, векторной оценкой y^2, а вторая равна векторной оценке y^4. Поскольку в состав векторных оценок (2.7) не входят 1 и 2, то можно ограничиться учетом всего лишь двух значений $k = 3, 4$.

Результаты расчетов по формуле (2.2) и полученные матрицы (2.4)

$$\mathrm{B}^\Omega(y^j) = \begin{pmatrix} \beta^3(y^j) \\ \beta^4(y^j) \end{pmatrix}, \ \mathrm{B}_\uparrow^\Omega(y^j) = \begin{pmatrix} \beta_\uparrow^3(y^j) \\ \beta_\uparrow^4(y^j) \end{pmatrix}$$

удобно свести в табл. 2.2.

Таблица 2.2. Матрицы $\mathrm{B}^\Omega(y^j)$ и $\mathrm{B}_\uparrow^\Omega(y^j)$

j	1	2	3	4	7
$\mathrm{B}^\Omega(y^j)$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathrm{B}_\uparrow^\Omega(y^j)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Сравним вначале y^1 и y^2. Выпишем, используя табл. 2.2, все поэлементные неравенства для матричного неравенства $\mathrm{B}^\Omega(y^1) \leq$ $\leq \mathrm{B}^\Omega(y^2)$:

$$0 \leq 0, 0 \leq 0, 0 \leq 0, 3 \leq 0,$$

$$0 \leq 0, 0 \leq 2, 1 \leq 2, 3 \leq 3.$$

Поскольку неравенство $3 \leq 0$ неверно, то и матричное неравенство $\mathrm{B}^\Omega(y^1) \leq \mathrm{B}^\Omega(y^2)$ не выполнено. Поэтому неверно ни $y^1 P^\Omega y^2$, ни $y^1 I^\Omega y^2$.

Выпишем теперь все поэлементные неравенства для матричного неравенства $\mathrm{B}^{\Omega}(y^2) \le \mathrm{B}^{\Omega}(y^1)$:

$$0 \le 0,\ 0 \le 0,\ 0 \le 0,\ 0 \le 3,$$
$$0 \le 0,\ 2 \le 0,\ 2 \le 1,\ 3 \le 3.$$

Здесь также есть неверное неравенство $2 \le 0$ (а также $2 \le 1$). Следовательно, матричное неравенство $\mathrm{B}^{\Omega}(y^2) \le \mathrm{B}^{\Omega}(y^1)$ не выполнено и потому неверно $y^2P^{\Omega}y^1$. Неверно и соотношение $y^2I^{\Omega}y^1$, которое равносильно соотношению $y^1I^{\Omega}y^2$. Вывод: векторные оценки y^1 и y^2 (а потому и студенты x^1 и x^2) несравнимы по предпочтительности.

Аналогично можно убедиться в том, что для пары y^1 и y^3 неверно ни $\mathrm{B}^{\Omega}(y^1) \le \mathrm{B}^{\Omega}(y^3)$, ни $\mathrm{B}^{\Omega}(y^3) \le \mathrm{B}^{\Omega}(y^1)$, так что y^1 и y^3 также несравнимы по предпочтительности.

А вот для пары y^1 и y^4 матричное неравенство $\mathrm{B}^{\Omega}(y^1) \le \mathrm{B}^{\Omega}(y^4)$ справедливо, причем для их соответственных элементов, стоящих в первых строках и третьих столбцах, имеет место строгое неравенство $0 < 2$. Поэтому верно $y^1P^{\Omega}y^4$.

Проведя проверку всех остальных пар, убедимся, что справедливо лишь равенство $\mathrm{B}^{\Omega}(y^3) = \mathrm{B}^{\Omega}(y^7)$. Поэтому верно соотношение $y^3I^{\Omega}y^7$.

Разумеется, эти результаты совпадают с полученными в предыдущем параграфе.

6. Для случая, когда все критерии упорядочены по важности, разработан еще один простой метод[34], опирающийся на метод, изложенный выше. Он назван матричным. Пусть M_1 – совокупность номеров самых важных критериев (все они равноважны), M_2 – совокупность номеров следующих по важности критериев (все они равноважны), ..., M_r – совокупность номеров наименее важных критериев (все они равноважны). Введем в рассмотрение $(q-1) \times$ $\times\, r$-матрицу $(n_{kl}(y))$, где $n_{kl}(y)$ – число компонент y_i векторной оценки y с номерами i из групп $M_1, M_2, ..., M_l$ и таких, что $y_i \le k$.

Метод сравнения двух векторных оценок y и z по предпочтительности заключается в проверке справедливости следующего матричного неравенства между матрицами $N^{\Omega}(y) = (n_{kl}(y))$ и $N^{\Omega}(z) = (n_{kl}(z))$:

$$N^{\Omega}(y) \le N^{\Omega}(z). \tag{2.8}$$

Если матричное неравенство (2.8) выполняется и среди нестрогих неравенств между элементами матриц есть хотя бы одно стро-

[34] Этот метод предложен в статье: *Подиновский В.В., Подиновская О.В.* Новые многокритериальные решающие правила в теории важности критериев // Доклады академии наук, 2013. Т. 451. № 1. С. 21–23.

гое, то верно $yP^{\Omega}z$; если нестрогое неравенство (2.8) выполняется как равенство, то верно $yI^{\Omega}z$. Если неравенство (2.8) не выполняется, то неверно ни $yP^{\Omega}z$, ни $yI^{\Omega}z$, и тогда нужно проверить справедливость матричного неравенства $N^{\Omega}(y) \geq N^{\Omega}(z)$. Если $zP^{\Omega}y$ и $zI^{\Omega}y$ также не будет верно, то это будет означать, что рассматриваемые векторные оценки на основании информации Ω несравнимы по предпочтительности.

Применим описанный метод для анализа задачи о студентах. Здесь $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{2, 3\}$, $M_3 = \{4\}$, $r = 3$. Для векторных оценок (2.7) запишем матрицы $N^{\Omega}(y^j)$ без строк, соответствующих $k = 1, 2$:

$$N^{\Omega}(y^1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad N^{\Omega}(y^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$N^{\Omega}(y^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$N^{\Omega}(y^4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad N^{\Omega}(y^7) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Сравним вначале y^1 и y^2. Поскольку как матричное неравенство $N^{\Omega}(y^1) \leq N^{\Omega}(y^2)$, так и обратное к нему не выполняются, то эти векторные оценки на основании информации Ω не сравнимы по предпочтительности. Аналогичный вывод получается и при сравнении y^1 с y^3.

А вот для пары y^1 и y^4 матричное неравенство $N^{\Omega}(y^1) \leq N^{\Omega}(y^4)$ справедливо, причем для их соответственных элементов, стоящих во втором столбце, имеет место строгое неравенство $1 < 2$. Поэтому верно $y^1P^{\Omega}y^4$.

Выводы

1. *Сравнивать критерии по важности*, т.е. выяснять, является ли один из них важнее другого или же они одинаково важны (без указания величин изменения их значений), можно лишь тогда, когда они *однородны*. Если критерии изначально *неоднородны*, то их надо *преобразовать в однородные*, приведя к единой шкале, градации которой имеют общую для всех критериев интерпретацию (например, в виде словесной характеристики) в терминах предпочтений.

2. *Точные определения равенства и превосходства в важности* одного критерия над другим основаны на сравнении по предпочти-

тельности векторных оценок *специального вида*. Определения имеют ясный и простой смысл, непосредственно задают отношения безразличия и предпочтения и согласуются с интуитивными представлениями о важности. Опираясь на эти определения, можно как собирать сведения о важности критериев, так и использовать их для сравнения вариантов по предпочтительности.

3. Существуют *специальные методы* сравнения по предпочтительности любых двух вариантов. Для общего случая методы достаточно сложны. Однако для случая, когда все критерии упорядочены по важности, имеются несложные методы.

4. Конструируемые для сравнения вариантов объясняющие цепочки позволяют *наглядно и ясно*, в терминах собранной информации о предпочтениях, *объяснить* ЛПР, *почему* один из вариантов предпочтительнее другого, или почему они одинаковы по предпочтительности. Если объясняющей цепочки, которая соединяет векторные оценки двух вариантов, *не существует*, то сравнить эти варианты по предпочтительности на основании накопленной информации о предпочтительности *невозможно*.

5. *Оптимальными* могут быть лишь те варианты, которые являются *недоминируемыми* по отношению предпочтения, порождаемому всей накопленной качественной информацией о важности критериев.

6. Если качественная информация о важности не позволяет выделить один наилучший вариант, то для анализа задачи следует получить и использовать *дополнительную информацию* о предпочтениях.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое однородные критерии? Приведите примеры многокритериальных задач, в которых исходные критерии оказываются однородными или, напротив, неоднородными.

2. Сформулируйте определения понятий «один критерий важнее другого» и «оба критерия равноважны». Как в них использовано свойство однородности критериев?

3. Объясните, почему при непротиворечивости информации о важности Ω нельзя построить двух объясняющих цепочек – от x к y и от y к x, – в которых было бы звено с P?

4. Объясните, почему доминируемый вариант нельзя считать оптимальным.

5. Найдите все недоминируемые варианты в задаче о студентах, предполагая, что все критерии одинаково важны. Сравните полученное множество недоминируемых вариантов V_S с множеством V_Ω, выделенным при анализе этой задачи в § 2.4, и обсудите результат.

6. Покажите, что если верно xP^0y, то верно и $xP^{\Omega}y$ при любом составе непротиворечивой информации Ω.

7. Пусть, согласно правилу, сформулированному в конце § 2.4, верно xP^Sy или же xI^Sy. Как, исходя из того, что верно $x_{\downarrow} \geq y_{\downarrow}$ или же $x_{\downarrow} = y_{\downarrow}$, построить объясняющую цепочку от x к y? Будет ли она обязательно самой короткой из всех возможных объясняющих цепочек?

8. Пусть $x_{\uparrow}$ – векторная оценка, полученная из x упорядочением ее компонент по возрастанию (точнее, по неубыванию). Например, если $x = (3, 4, 2, 3, 5)$, то $x_{\uparrow} = (2, 3, 3, 4, 5)$. Покажите, опираясь на правило, сформулированное в конце § 2.4, что справедливы утверждения:

xI^Sy верно в том и только том случае, когда справедливо равенство $x_{\uparrow} = y_{\uparrow}$;

xP^Sy верно в том и только том случае, когда справедливо $x_{\uparrow} \geq y_{\uparrow}$, но $x_{\uparrow} \neq y_{\uparrow}$.

9. В двухкритериальной задаче критерии имеют трехбалльную шкалу: $Z_0 = \{1, 2, 3\}$. Попарно сравните по предпочтительности все векторные оценки (их 9) и выясните, сколько пар несравнимых векторных оценок в случаях, когда критерии равноважны и когда один из них важнее другого.

10. Проанализируйте задачу о студентах с использованием системы DASS.

11*. Почему в состав матрицы $\mathrm{B}_{\uparrow}^{\Omega}(y)$ не включена вектор-строка $\beta_{\uparrow}^{q}(y)$?

12*. Попарно сравните по предпочтительности все варианты из задачи о студентах, применяя порядковые величины важности, а также матричный метод.

13*. Предположим, что в задаче о студентах все предметы одинаково важны. Проведите сравнения студентов при помощи аналитических методов из § 2.5* и сравните результаты с полученными в задании 5.

14*. Используя рассмотренные методы, решите следующую задачу о сравнении материалов[35]. Значения четырех критериев в трехбалльной шкале для 13 вариантов представлены в табл. 2.3.

[35] Задача взята из статьи: Kirkwood C.W., Sarin R.K. Ranking with partial information: a method and an application. Operations Research. 1985. V. 33. P. 38–48. Анализ задачи в этой статье проведен с использованием обобщенного критерия $\Phi = a_1K_1 + a_2K_2 + a_3K_3 + a_4K_4$, в котором коэффициенты важности α_i неизвестны, но удовлетворяют неравенствам: $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$.

Таблица 2.3. Значения критериев для вариантов

Варианты (материалы)	K_1 (прочность)	K_2 (деформация ползучести)	K_3 (тепловое расширение	K_4 (устойчивость)
v^1 (базальт)	3	3	2	2
v^2 (гранит)	3	3	2	2
v^3 (сланец)	2	3	2	3
v^4 (кварц)	3	3	2	3
v^5 (золото)	3	1	1	3
v^6 (серебро)	3	1	1	2
v^7 (платина)	3	1	1	3
v^8 (медь)	3	1	1	2
v^9 (свинец)	2	1	1	2
v^{10} (металл. сплав)	3	1	1	2
v^{11} (муллит)	3	3	2	3
v^{12} (стеатит)	3	3	2	3
v^{13} (бетон)	2	3	2	3

Считая, что $1 \succ 2 \succ 3 \succ 4$, сравнить все материалы по предпочтительности.

В оный день, когда над миром новым
Бог склонял свое лицо, тогда
Солнце останавливали словом,
Словом разрушали города.
. . . .
А для низкой жизни были числа,
Как домашний, подъяремный скот,
Потому, что все оттенки смысла
Умное число передает.

Николай Гумилёв. «Слово»

Глава 3
Количественная важность критериев

Вводится строгое определение понятия превосходства в важности одного из критериев над другим в определенное число раз и показывается, как использовать сведения такого рода для сравнения вариантов решений по предпочтительности.

§ 3.1. Базовое определение количественной важности

... тем, чьи взгляды выходят за пределы общеизвестных истин, приходится выполнять двойную работу: во-первых, необходимо добиться понимания того, что они утверждают, а во-вторых, доказать истинность этих утверждений.

Фрэнсис Бэкон.
«О достоинстве и приумножении наук»

1. Количественная важность критериев имеет две основные формы:

1) *степени превосходства в важности* одних критериев над другими: «Критерий K_i в h_{ij} раз важнее критерия K_j», где $h_{ij} > 0$; если $h_{ij} < 1$, то критерий K_j в $1/h_{ij} > 1$ раз важнее критерия K_i, а при $h_{ij} = 1$ критерии равноважны;

2) (*количественные*) *значения важности* отдельных *критериев*, количественно «измеряемой» по общей для них «шкале важности»[6]: «Важность критерия K_i имеет величину β_i», где $\beta_i > 0$.

Между обоими указанными видами количественной важности имеется тесная взаимосвязь: степень превосходства h_{ij} критерия K_i над критерием K_j равна отношению значений их важности β_i и β_j:

$$h_{ij} = \beta_i/\beta_j.$$

---

[6] Эта шкала должна быть шкалой отношений.

Если изменить значения важности всех критериев в одно и то же число раз $t > 0$, т.е. заменить β_i на $t\beta_i$, то величины степеней превосходства в важности не изменятся:

$$t\beta_i/t\beta_j = \beta_i/\beta_j = h_{ij}.$$

Это свойство вполне аналогично свойствам оценок при «обычных» измерениях: например, если один предмет весит β_i кг, а вес второго β_j кг, то первый предмет тяжелее второго в $h_{ij} = \beta_i/\beta_j$ раз, причем величина h остается неизменной при переходе к любым другим единицам измерения (центнерам, фунтам и др.).

В том случае, когда оценки важности критериев β_i в сумме равны единице, они называются (*количественными*) *коэффициентами важности*. Эти коэффициенты, обозначаемые через α_i, суть доли «единичной важности» совокупности всех критериев, приходящиеся на каждый отдельный критерий K_i. Понятно, что коэффициенты α_i легко получить из любого вектора $\beta = (\beta_1, ..., \beta_m)$ нормировкой его компонент: достаточно положить $\alpha_i = \beta_i/\sigma$, где $\sigma = \beta_1 + ... + \beta_m$.

Суждение о степени превосходства в важности «критерий K_i в h_{ij} раз важнее критерия K_j» будем обозначать «словом» $i \overset{h_{ij}}{\succ} j$. Количественная информация о важности, обозначаемая далее греческой буквой Θ (тэта), образуется накопленными (полученными от ЛПР и/или экспертов) сведениями о степенях превосходства в важности одних критериев над другими.

2. Базовое определение количественной важности опирается на расширение исходной модели до так называемой N-кратной модели, или, сокращенно, N-модели. Идею базового определения и «устройство» такой модели можно пояснить при помощи примера со студентами, учитывая накопленную ранее качественную информацию о важности $\Omega = \{1 \succ 2, 2 \sim 3, 3 \succ 4\}$. Вначале оценим степень превосходства в важности третьего критерия (учебного предмета *В*) над четвертым критерием (предметом *Г*). Предположим, что предмет *В* можно представить состоящим из двух одинаковых по значимости разделов (например, курс математики может состоять из алгебры и анализа). Если каждый из этих разделов имеет такую же значимость, как и предмет *Г*, то предмет *В* (критерий K_3) в два раза важнее предмета *Г* (критерия K_4). Теперь обратимся к первому и второму критериям (предметам *А* и *Б*). Поскольку второй и третий критерии одинаково важны, то можно оценивать степень превосходства первого критерия над третьим. Пусть предмет *А* можно представить состоящим из трех одинаковых по значимости разделов. Если каждый из этих трех разделов столь же значим, что и один из двух разделов предмета *В*, то предмет *А* (критерий K_1) в 3/2 раза важнее предмета *В* (критерия K_2). Поскольку критерии K_2 и K_3 равноважны, то всю указанную информацию о важности критериев Θ можно представить записью $1 \succ^{3/2} 2,\ 2 \sim 3,\ 3 \succ^{2} 4$.

На основании вышеизложенного для сравнения по успеваемости оставшихся четырех претендентов можно построить, в соответствии с информацией Θ, их «удлиненные» векторные оценки, выписывая оценку по каждому предмету столько раз, на сколько равноважных разделов можно было разделить этот предмет:

$$y(v^1) = (3, 5, 5, 4) \to (3, 3, 3; 5, 5; 5, 5; 4),$$
$$y(v^2) = (4, 4, 4, 5) \to (4, 4, 4; 4, 4; 4, 4; 5),$$
$$y(v^3) = (5, 4, 3, 3) \to (5, 5, 5; 4, 4; 3, 3; 3),$$
$$y(v^7) = (5, 3, 4, 3) \to (5, 5, 5; 3, 3; 4, 4; 3).$$

Подчеркнем, что компоненты этих «удлиненных» векторных оценок, с учетом их «происхождения», можно рассматривать как значения восьми равноважных критериев! Подобного вида векторные оценки и характеризуют варианты в N-модели, где $N = (3, 2, 2, 1)$, для рассматриваемой задачи. Понятно, что коэффициенты важности критериев здесь таковы: $\alpha_1 = 3/8$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1/4$, $\alpha_4 = 1/8$.

3. Опишем теперь конструкцию N-модели для общего случая. Будем полагать, что важности отдельных критериев β_i – натуральные числа n_i, которые и составляют вектор $N = (n_1, ..., n_m)$, где, напомним, m – это число критериев. Если вначале числа β_i были дробными, то для приведения к требуемому виду все их надо умножить на подходящее натуральное число. Пусть, например, критериев всего два ($m = 2$), $\beta_1 = 2{,}3$ и $\beta_2 = 4{,}5$. После умножения на 10 получаем соответственно $n_1 = 23$ и $n_2 = 45$, так что $N = (23, 45)$. Если же $\beta_1 = 1/4$ и $\beta_2 = 2/3$, то после умножения на 12 получим $n_1 = 3$ и $n_2 = 4$, так что $N = (3, 4)$.

Под N-моделью, где $N = (n_1, ..., n_m)$ понимается модель с $n_1 + ... + n_m$ однородными критериями, причем первые n_1 критериев получаются повторением («клонированием») первого критерия n_1 раз, следующие n_2 критериев получаются повторением второго критерия n_2 раз и т.д. При этом все первые n_1 полученные «подкритерии» считаются равноважными между собой, все следующие n_2 «подкритерии» тоже считаются равноважными, и т.д. Аналогичным способом векторные оценки исходной модели превращаются в «удлиненные» векторные оценки N-модели, или N-кратные оценки, или, короче, N-оценки: оценка варианта по каждому из критериев K_i повторяется n_i раз:

$$y^N = (\underbrace{y_1, ..., y_1}_{n_1}, \underbrace{y_2, ..., y_2}_{n_2}, ..., \underbrace{y_m, ..., y_m}_{n_m}).$$

И наоборот, если в N-оценке первые n_1 компонент между собой равны, следующие n_2 компонент также равны между собой, и т.д., то ей можно поставить в соответствие векторную оценку в исходной модели. Пусть, например, для двухкритериальной задачи построена N-модель, где $N = (3, 4)$. Векторной оценке (1, 6) будет соответствовать N-оценка (1, 1, 1, 6, 6, 6, 6), а N-оценке (2, 2, 2, 5, 5, 5, 5) – векторная оценка (2, 5). А вот N-оценке (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) поставить в соответствие векторную оценку из исходной модели нельзя.

Информации Θ соответствует не одна, а целое семейство N-моделей: достаточно умножить все числа n_i на любое натуральное число, большее 1 (или разделить, если это возможно), и получится новая N-модель. Например, из N-модели с $N = (6, 8)$ можно получить N-модели с $N = (3, 4)$, $N = (9, 12)$, $N = (12, 16)$, и т.д. Однако все такие модели эквивалентны в том смысле, что использование любой из них на рассматриваемом далее пути приведет к одним и тем же конечным результатам. Среди всех N-моделей, соответствующих информации Θ, наиболее простой является та, в которой все m числа $n_1, \ldots n_m$ являются взаимно простыми. Примером является N-модель с $N = (3, 2, 2, 1)$ в задаче о студентах. Использование именно таких моделей, которые можно назвать *основными*, упрощает выкладки.

4. Теперь можно сформулировать базовое определение количественной важности.

Определение 3.1. Критерий K_i в h_{ij} раз важнее критерия K_j, когда для N-модели, соответствующей исходной модели, выполнены следующие условия:

1) $n_i/n_j = h_{ij}$;

2) каждый из n_i критериев, полученных из критерия K_i, равноважен любому из n_j критериев, полученных из критерия K_j.

Подчеркнем, что это определение вовсе не предполагает, что обязательно должна существовать возможность «физического разделения» исходных критериев на «части» одинаковой значимости (на равноважные «подкритерии»). Суть его состоит в том, что относительная важность критериев количественно выражается именно повторением их значений в расширенных векторных оценках (N-оценках) надлежащее число раз[36].

Определению 3.1 можно дать и такую иллюстрацию. Пусть в состав некоторого акционерного общества входит m акционеров. Собрание акционеров должно принять одно из нескольких альтернативных вариантов решений. Акционер i обладает n_i акциями,

[36] Существенно также то, что все эти подкритерии считаются взаимонезависимыми в том смысле, что допустимо рассматривать векторные оценки, в которых компонента, соответствующая одному из этих «подкритериев», может принимать любые значения из Z_0 при произвольных значениях других «подкритериев» (замечание П.Ю. Чеботарёва).

$i = 1, ..., m$, и получает n_i бюллетеней. Каждый акционер i оценивает варианты по некоторой принятой всеми акционерами шкале (например, словесной), выставляя варианту v оценку $y_i(v)$ в каждый свой бюллетень. Можно провести сравнительный анализ вариантов по предпочтительности с учетом разной относительной значимости акционеров (выражаемой числом принадлежащих им акций), если представить каждый вариант v его N-оценкой $y^N(v)$ и рассматривать компоненты этой N-оценки как одинаково важные: все $n = n_1 + ... + n_m$ «голосов» имеют равную значимость. Т.е. практически можно опускать все n бюллетеней в одну урну и при обработке считать «один бюллетень – один голос».

§ 3.2. Получение и анализ количественной информации о важности критериев

Что для одного ошибка, для другого – исходные данные.

Артур Блох. «Законы Мерфи»

1. К настоящему времени разработано огромное количество методов и методик определения количественных оценок важности критериев на основе ответов ЛПР и/или экспертов на «лобовые» вопросы (типа «Во сколько раз первый критерий важнее второго?») или вопросы о сравнении по предпочтительности векторных оценок специального вида[7]. Однако все они не опираются на точное определение понятия важности критериев. Поэтому разные методы зачастую приводят к разным результатам. При этом остается непонятным, как проверить адекватность полученных результатов и, следовательно, как выяснить, какие из них верны (если таковые вообще есть). С другой стороны, нет обоснованных рекомендаций о том, как полученные оценки важности корректно использовать в рамках тех или иных методов анализа многокритериальных задач.

2. На основе базового определения 3.1 можно предложить целый ряд методов оценки относительной важности критериев. Эти методы позволяют найти количественные оценки важности (обычно степени превосходства в важности) на основе результатов сравнения по предпочтительности векторных оценок специального вида,

---

[7] См., например, обзорные статьи:

Анохин А.М., Глотов В.А., Павельев В.В., Черкашин А.М. Методы определения коэффициентов важности критериев // Автоматика и телемеханика. 1997. № 8. С. 3–35.

Глотов В.А., Павельев В.В. Экспертные методы определения весовых коэффициентов // Автоматика и телемеханика. 1976. № 12. С. 95–107.

используемых в определениях понятий равенства или превосходства в важности. Рассмотрим идеи, положенные в основу трех методов – комбинационного, декомпозиционного и вероятностного. Разумеется, все упоминаемые в дальнейшем сведения о равенстве или превосходстве в важности должны быть получены от ЛПР и/или экспертов.

Комбинационный метод основан на проведении сравнений по важности пар отдельных критериев и групп критериев[37]. Конкретный порядок действий определяется спецификой анализируемой многокритериальной задачи. Пусть, например, имеется группа, состоящая из нескольких равноважных критериев, которую назовем *опорной*. Если подгруппа из s критериев опорной группы и некоторый другой критерий K_i, не входящий в нее, имеют одинаковую важность, то, в соответствии с определением 3.1, критерий K_i в s раз важнее каждого из критериев, входящих в опорную группу. Если этот отдельный критерий важнее, чем указанная подгруппа из s критериев, то степень превосходства в важности этого критерия над любым из опорной группы больше, чем s. Если же этот отдельный критерий менее важен, чем указанная подгруппа из s критериев, то степень превосходства в важности этого критерия над любым из опорной группы меньше, чем s. Этот простой пример показывает, что комбинационный метод более эффективен при анализе задач с достаточно большим числом критериев. Поэтому его целесообразно применять совместно с декомпозиционным методом.

Декомпозиционный метод предполагает, что некоторые критерии характеризуют «комплексные» характеристики вариантов и потому могут быть разложены на составляющие. Примерами таких характеристик могут служить «ущерб окружающей среде», «надежность системы», «социальные последствия» и т.д. При наличии таких критериев ЛПР и/или эксперту можно предложить подумать, разлагается ли каждый из них на подкритерии равной важности. Если это возможно, то исходный критерий представляется в виде группы равноважных критериев. А далее проводится анализ тем же путем, что и в предыдущем методе.

Иллюстрацией рассмотренного подхода является проведенный выше анализ задачи со студентами.

---

[37] В теории важности критериев разработаны также базовые определения понятий «одна группа критериев важнее другой» и «обе группы критериев равноважны», являющиеся обобщениями базовых определений 2.1 и 2.2. (См. *Подиновский В.В.* Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Современное состояние теории исследования операций / Под ред. Н.Н. Моисеева. – М.: Наука, 1979. С. 117–145). Сравнение по важности групп критериев должно проводиться на их основе.

3. Из изложенного становится ясным, что результатом количественного оценивания важности интервальные оценки (значение степени превосходства в важности одного критерия над другим лежит в интервале от l до r), получать проще, чем точечные (значение степени превосходства в важности одного критерия над другим равно h). Более того, в отличие от информации качественной, противоречивость собранной количественной информации о важности (т.е. совокупности полученных оценок степеней превосходства в важности) – типичный случай, особенно для точечных оценок. Но ведь и требования на согласованность, предъявляемые к количественным оценкам, в особенности точечным, являются существенно более жесткими. Действительно, если выяснено, например, что первый критерий важнее второго, а второй – важнее третьего, то при сравнении первого и третьего критериев должно получиться лишь, что первый важнее третьего. Если же получены количественные оценки: первый критерий важнее второго в 2 раза, а второй важнее третьего в 3 раза, то при сравнении первого и третьего критериев степень превосходства важности должна оказаться равной ровно 6. А теперь представьте, что вместо 2 было 1,5 и вместо 3 было 2,5 ... Требование непротиворечивости к накопленным интервальным оценкам более мягкое: должны найтись согласованные точные значения степеней превосходства в важности, такие, чтобы каждое из них попадало в «свою» интервальную оценку.

4. *Вероятностный метод* основан на понятии вероятности. Под вероятностью события понимается число, которое заключено в пределах от 0 до 1 и является количественной мерой возможности наступления этого события (разумеется, при реализации некоторого комплекса условий). Если событие наступит обязательно (такое событие называется *достоверным*), то его вероятность равна 1. Если событие заведомо не наступит (такое событие называется *невозможным*), то его вероятность равна 0. Если событие может как наступить, так и не наступить (такое событие называется *случайным*[38]), то его вероятность лежит в пределах между 0 и 1, причем, чем более возможно его наступление, тем ближе его вероятность к 1.

Например, при бросании монеты возможности выпадения и герба, и цифры (в силу симметрии монеты) одинаковы, и потому, скажем, вероятность выпадения герба (как, впрочем, и цифры), равна ½. Разумеется, при этом подразумевается, что выполнены определенные условия: монета – правильная (не деформирована или умышленно не «подправлена»), бросание осуществляется без

[38] Случайные явления изучает теория вероятностей, в которой даются строгие определения и случайного события, и его вероятности.

ухищрений, на Земле (а не в невесомости), над горизонтальной ровной достаточно большой площадкой и т.п. При указанных условиях окончательное положение монеты – лежа плашмя на одной из двух своих сторон (лицевой – аверсе или же оборотной – реверсе) – событие достоверное, а вот зависание монеты в воздухе или остановка её на ребре (гурте, или ранте) – события невозможные.

Если имеется комплект (колода) n одинаковых карточек (карт), то после тщательного их перемешивания («тасовки») вероятность открыть (вытащить наугад) некоторую заранее «задуманную» карточку (карту) равна $1/n$. Разумеется, и здесь предполагается, что для каждой карточки обеспечена равная возможность ее выбора (такое условие может оказаться нарушенным при игре в карты с шулером). При помощи карточек можно сформировать событие с любой заранее заданной (не очень «некруглой») вероятностью. Например, для вероятности 0,3 можно взять десять карточек и на трех из них сделать пометки: вероятность открыть помеченную карточку окажется равной $3/10 = 0{,}3$. Аналогично, для вероятности $5/8$ нужно взять 8 карточек и 5 из них пометить. Понятно, что для вероятности, например, 0,123456789 такой способ становится технически слишком сложным.

Нам для дальнейшего изложения приведенных сведений о вероятности вполне достаточно. Отметим лишь, что при проведении расчетов на компьютерах программно обеспечена возможность моделирования случайных событий практически с любой заданной вероятностью.

Обратимся теперь к вероятностному методу оценки важности критериев. Вначале разберем его для случая двухкритериальной задачи ($m = 2$), в которой первый критерий важнее второго: $1 \succ 2$. Мы хотим оценить, во сколько раз первый критерий важнее второго, т.е. выяснить, при какой величине $h > 1$ раз верно соотношение $1 \succ^h 2$ (разумеется, понимаемого в смысле данного ранее определения 3.1).

Пусть a и b – две произвольные шкальные градации, причем $a < b$. Поскольку $1 \succ 2$, то векторная оценка (b, a) более предпочтительна, чем векторная оценка (a, b) (т.е. $(b, a)P^{1\succ 2}(a, b)$), но менее предпочтительна, чем (b, b) (т.е. $(b, b)P^0(b, a)$).

ЛПР предлагается либо сразу согласиться на вариант с векторной оценкой (b, a), либо, как говорят, принять участие в лотерее L, где вариант с векторной оценкой (b, b) появляется с вероятностью p, а вариант с векторной оценкой (a, b) – с вероятностью $1 - p$. Схематически эти две возможности для выбора ЛПР представлены на рис. 3.1.

$$\bullet \xrightarrow{\;1\;} (b, a) \quad \overset{?}{\leftrightarrow} \quad L \bullet \begin{cases} \xrightarrow{\;p\;} (b, b) \\ \xrightarrow{\;1-p\;} (a, b) \end{cases}$$

Рис. 3.1. Общая схема для оценивания степени превосходства в важности

Здесь получение одного варианта с векторной оценкой (b, a) наверняка условно изображен в виде «лотереи» с одним исходом – «выигрышем» (b, a), получаемым с вероятностью 1.

Понятно, что если вероятность p близка к 1, то ЛПР предпочтет участие в лотерее, так как (b, b) предпочтительнее, чем (b, a). Если же вероятность p близка к 0, то ему предпочтительнее выбрать вариант с векторной оценкой (b, a), так как (b, a) предпочтительнее, чем (a, b). Следовательно, теоретически должно существовать некоторое значение вероятности p^*, при котором для ЛПР безразлично, выбрать ли вариант с векторной оценкой (b, a) или же согласиться на участие в лотерее. Оказывается, что

$$p* = 1 - \frac{1}{h},$$

и это справедливо при любых градациях a и $b > a$ (!)⑧.

5. Сформулированное утверждение указывает следующий путь оценивания степени превосходства в важности. Вначале надо выяснить, какой из критериев важнее. Пусть это будет первый критерий. Затем по ответам ЛПР найти такое значение вероятности p^*, при котором ему будет безразлично, взять ли вариант (b, a) или же принять участие в выше указанной лотерее. И, наконец, вычислить

$$h = \frac{1}{1 - p^*}.$$

Полезно посмотреть на таблицу 3.1 (значения h в ней приведены с точностью до двух знаков после запятой).

Таблица 3.1. Значения вероятности p^* и соответствующие степени превосходства в важности h

P^*	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
h	1,05	1,11	1,25	1,43	1,67	2,00	2,50	3,33	5,00	10,00	20,00

Для оценки величины p^* можно, назначив числа a и b (их разность $b - a > 0$ должна быть не «слишком большой» и не «слишком малой»), начать с величины вероятности p, близкой к 1, такой, чтобы ЛПР заведомо предпочел участие в лотерее (которую при необходимости можно смоделировать, например, при помощи подходящего комплекта карточек). Постепенно уменьшая вероятность p, дойти до такого значения p^+, при котором ЛПР еще предпочтет

⑧ Предполагается, что ЛПР нейтрален к риску. Обоснование этой формулы дано в сноске на стр. 55.

лотерею, а после очередного уменьшения p уже не сможет сказать, что для него предпочтительнее. Затем аналогичную процедуру проделать, начиная с величины p, близкой к 0, и получить значение p^-. Понятно, что искомое значение p^* будет лежать в найденных пределах: $p^- < p^* < p^+$. А для величины степени превосходства в важности h будем иметь интервальную оценку

$$\left(\frac{1}{1-p^-},\ \frac{1}{1-p^+}\right).$$

Пример 3.1. Предположим, что шкала критериев имеет пять градаций, $a = 2$, $b = 4$ и возможности выбора для ЛПР представляются схемой на рис. 3.2.

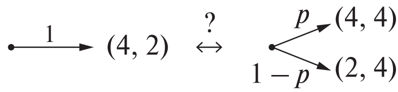

Рис. 3.2. Схема для оценивания степени превосходства в важности

Пусть при вероятностях $p = 0{,}9$ и $p = 0{,}8$ ЛПР предпочел участвовать в лотерее, а при $p = 0{,}7$ затруднился с ответом. Тогда $p^+ = 0{,}8$. Пусть, далее, при $p = 0{,}4$ и $p = 0{,}5$ ЛПР предпочел выбрать вариант с (4, 2), а при $p = 0{,}6$ затруднился с ответом. Тогда $p^- = 0{,}5$. Согласно табл. 3.1, можно принять, что степень превосходства в важности h первого критерия над вторым лежит в пределах от 2 до 5, т.е. в интервале (2, 5). Практика показала, что при использовании вероятностного метода подобная достаточно большая величина интервала – типичный случай, так как предлагаемый выбор для ЛПР оказывается далеко не простым (особенно если у него нет навыка количественно анализировать решения в условиях риска)!

Заметим, что по возможности стоит провести описанную выше процедуру при нескольких парах чисел a и b. Значения полученных границ не должны «сильно» различаться. За итоговый результат можно, например, принять («для надежности») наименьшее из полученных чисел p^- и наибольшее из чисел p^+. Изложенное еще раз показывает, что результатом количественного оценивания важности оказываются чаще интервальные, а не точечные оценки.

В случае, когда критериев больше двух, метод остается в принципе тем же, с той лишь разницей, что для сравнения по важности двух выбранных критериев значения всех остальных следует фиксировать на некоторых уровнях подобно тому, как это было описано в § 2.3 при рассмотрении вопроса о получении качественной информации о важности.

6. Если накопленная количественная информация о важности критериев Θ представляет собой достаточно полную совокупность суждений о превосходстве в важности одних критериев над другими, задающих непротиворечивые точечные оценки, то она позволяет однозначно вычислить коэффициенты важности критериев. Примером служит информация о важности в задаче о студентах $\Theta = \{1 \succ^{3/2} 2, 2 \sim 3, 3 \succ^{2} 4\}$. Значения коэффициентов важности для нее уже были приведены выше: $\alpha_1 = 3/8$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1/4$, $\alpha_4 = 1/8$.

Сложнее обстоит дело в случае интервальных или противоречивых точечных оценок важности. Существуют два возможных пути обработки такой информации о важности, преследующие разные цели – получение согласованных точечных оценок степеней превосходства в важности и получение согласованных интервальных оценок. Обычно следуют по первому пути, так как использование точечных оценок важности значительно проще и эффективнее при анализе многокритериальных задач, чем интервальных, хотя вторые существенно более надежны, чем первые⑨. Второй путь ранее использовался редко, хотя он более корректен.

§ 3.3. Использование количественной информации о важности критериев для анализа многокритериальных задач

Что ж, метод определен. Теперь техника.

Борис Акунин. «Смерть Ахиллеса»

1. Вначале будем рассматривать случай, когда на основе количественной информации о важности критериев Θ получены точные (точечные) согласованные значения степеней превосходства в важности, так что можно построить соответствующую N-модель. Поскольку в этой модели все критерии равноважны, то для сравнения N-оценок можно использовать аналитический метод, описанный в конце § 2.4. Проиллюстрируем это положение на примере со студентами.

Для этого примера в § 3.1 было выяснено, что информации $\Theta = \{1 \succ^{3/2} 2, 2 \sim 3, 3 \succ^{2} 4\}$ соответствует (базовая) N-модель с

⑨ Разработано много методов получения согласованных значений коэффициентов важности при несогласованных оценках важности. С известным методом обработки точечных оценок, использующим понятие правого собственного вектора матрицы, можно ознакомиться по книге: *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993. Метод получения согласованных точных значений коэффициентов важности (при несогласованных точечных или интервальных оценках) был предложен в статье: *Подиновский В.В.* Задача оценивания коэффициентов важности как симметрически-лексикографическая задача оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2003. № 5. С. 150–162.

$N = (3, 2, 2, 1)$ и были выписаны N-оценки четырех студентов. Представим эти оценки еще раз:

$$x^N(v^1) = (3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 4),\ x^N(v^2) = (4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5),$$

$$x^N(v^3) = (5, 5, 5. 4, 4, 3, 3, 3),\ x^N(v^7) = (5, 5, 5, 3, 3, 4, 4, 3).$$

Перепишем эти оценки, упорядочив их компоненты по невозрастанию:

$$x_{\downarrow}^N(v^1) = (5, 5, 5, 5, 4, 3, 3, 3),\ x_{\downarrow}^N(v^2) = (5, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4),$$

$$x_{\downarrow}^N(v^3) = x_{\downarrow}^N(v^7) = (5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3).$$

Сравнивая N-оценки первого и третьего (или седьмого) студентов по отношению P^0, т.е. сопоставляя по величине их соответствующие компоненты, приходим к выводу, что верно

$$x_{\downarrow}^N(v^1) \geq x_{\downarrow}^N(v^3) \text{ и } x_{\downarrow}^N(v^1) \geq x_{\downarrow}^N(v^7),$$

причем оба векторных неравенства не выполняются как равенства. Это означает, что первый студент, с учетом информации Θ, по успеваемости предпочтительнее, чем и третий, и седьмой: $v^1 P_\Theta v^3$, $v^1 P_\Theta v^7$. Используя общую терминологию, можно сказать, что первый вариант доминирует (по отношению P_Θ) над третьим и над седьмым вариантами, так что последние оказываются доминируемыми.

Рассматривая N-оценки первого и второго студентов, приходим к выводу, что они оказываются несравнимыми по предпочтительности. Следовательно, только первый и второй студенты могут претендовать на звание самого лучшего. Таким образом, информация Θ позволила сузить множество выбора $V_\Omega = \{v^1, v^2, v^3, v^7\}$ до множества $V_\Theta = \{v^1, v^2\}$, включающего лишь два несравнимых между собой варианта.

2. Обратимся теперь к случаю, когда на основе количественной информации о важности критериев (Θ) получены непротиворечивые интервальные оценки важности, так что для пар критериев K_i и K_j, которые сравнивались по важности, известен интервал (l_{ij}, r_{ij}), в котором лежит оцениваемое значение h_{ij} степени превосходства в важности K_i над K_j. При такой информации ввести какую-то одну определенную N-модель не представляется возможным. Поэтому отношения предпочтения и безразличия определяются следующим образом.

Поскольку интервальные оценки важности непротиворечивы, то существует N-модель, согласованная с информацией (Θ). Это означает, что существует набор чисел $\{h_{ij}\}$ таких, что величина $h_{ij} = n_i/n_j$ для каждой пары критериев K_i и K_j, которые сравнивались по важности, попадает в соответствующий интервал (l_{ij}, r_{ij}), т.е. выполняется двойное неравенство $l_{ij} < h_{ij} < r_{ij}$. Отношения безразличия $I^{(\Theta)}$ и предпочтения $P^{(\Theta)}$, порождаемые интервальными оценками важности, полученными на основе информации (Θ), определяются так(10):

$xI^{(\Theta)}y$ верно в том и только том случае, когда для каждой N-модели, согласованной с (Θ), верно $xI^{\Theta}y$.

$xP^{(\Theta)}y$ верно в том и только том случае, когда для каждой N-модели, согласованной с (Θ), верно $xP^{\Theta}y$ или $xI^{\Theta}y$, но хотя бы для одной такой модели верно $xP^{\Theta}y$.

Понятно, что для проверки справедливости $xP^{(\Theta)}y$ «перепробовать» каждую N-модель, согласованную с (Θ) (а такая модель не единственна), невозможно. Поэтому нужно привлекать специальные методы. Об одном из них будет рассказано в следующем параграфе.

§ 3.4*. Методы построения отношений предпочтения на основе количественной информации о важности критериев

> И, милой, да на что ж догадка!
> Где силой взять нельзя, там надобна ухватка.
>
> *Иван Крылов. «Два мальчика»*

1. В § 3.3 было показано, как сравнивать по предпочтительности варианты, представляя их N-оценками. Здесь мы вначале опишем другой метод, использующий количественные точные величины важности критериев. Он полезен сам по себе, так как не требуется строить N-оценки, а также его можно обобщить на случай интервальных оценок важности критериев.

2. Пусть имеется точная полная количественная информация о важности Θ, состоящая из точных оценок степеней превосходства в важности одних критериев над другими, так что можно назначить количественные величины важности критериев $\beta_1^{\Theta},\ldots,\beta_m^{\Theta}$, составляющие вектор $\beta^{\Theta}=(\beta_1^{\Theta},\ldots,\beta_m^{\Theta})$. Обозначим через $b_k^{\Theta}(y)$ сумму величин важности для тех компонент y_i векторной оценки y, которые не больше, чем k:

$$b_k^{\Theta}(y)=\sum_{i:\, y_i\le k}\beta_i^{\Theta},\ \ k=1,\ldots,q-1. \tag{3.1}$$

(10) Возможен и иной подход к определению отношения предпочтения $P^{(\Theta)}$, согласно которому $xP^{(\Theta)}y$ верно в том и только в том случае, когда для каждой N-модели, согласованной с Θ, справедливо $xP^{\Theta}y$. О взаимосвязи двух указанных подходов можно узнать из статьи: *Подиновский В.В.* Анализ решений при множественных оценках коэффициентов важности критериев и вероятностей значений неопределенных факторов в целевой функции // Автоматика и телемеханика. 2004. № 11. С. 141–159.

Из чисел (3.1) составим матрицу, имеющую один столбец и $q-1$ строку:

$$B^{\Theta}(y)=\begin{pmatrix} b_1^{\Theta}(y) \\ \dots \\ b_{q-1}^{\Theta}(y) \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Полезно сравнить матрицу (3.2) с матрицами (2.2) – (2.4).

Метод сравнения двух векторных оценок y и z по предпочтительности на основе информации Θ с использованием количественных величин важности заключается в проверке справедливости следующего матричного неравенства между матрицами $B^{\Theta}(y)$ и $B^{\Theta}(z)$, понимаемого как систему всех $(q-1)$ неравенств между соответственными их элементами:

$$B^{\Theta}(y) \le B^{\Theta}(z). \tag{3.3}$$

Если неравенство (3.3) выполняется и среди нестрогих неравенств между элементами матриц есть хотя бы одно строгое, то верно $yP^{\Theta}z$; если нестрогое неравенство (3.3) выполняется как равенство, то верно $yI^{\Theta}z$. Если неравенство (3.3) не выполняется, то неверно ни $yP^{\Theta}z$, ни $yI^{\Theta}z$, и тогда нужно проверить справедливость обратного матричного неравенства $B^{\Theta}(z) \le B^{\Theta}(y)$. Если $zP^{\Theta}y$ и $zI^{\Theta}y$ также не будет верно, то это будет означать, что рассматриваемые векторные оценки на основании информации Θ несравнимы по предпочтительности(11).

Определение 3.2. Количественная информация о важности критериев Θ *согласована* с качественной информацией Ω, или Θ *непротиворечиво расширяет* информацию Ω, или Θ *уточняет* Ω, когда выполнено условие:

если Ω содержит $i \succ j$, то $h_{ij} > 1$; если Ω содержит $i \sim j$, то $h_{ij} = 1$.

Применяя изложенные выше методы, использующие качественные и количественные величины важности, несложно доказать, что

(11) Теперь можно дать обоснование вероятностному методу получения количественной важности критериев, основанному на схеме, изображенной на рис. 3.1. Для двухкритериальной задачи, в которой первый критерий важнее второго, имеем утверждение $1 \succ^{h} 2$, в котором величина $h > 1$ подлежит оцениванию. Положим $\beta_1 = h$, $\beta_2 = 1$. Поскольку в состав векторных оценок, участвующих в выборе, входят всего лишь две градации a и b, причем $a < b$, то в состав соответствующих матриц (3.2), имеющих один столбец, можно включить лишь одну строку для $k = a$, и тогда эти матрицы будут задаваться одним числом: $B^{\Theta}(b, a) = 1$, $B^{\Theta}(b, b) = 0$, $B^{\Theta}(a, b) = h$. Для вероятности $p = p^*$ выполняется равенство $1 = p^* \times 0 + (1-p^*) \times h$, из которого следует, что $h = 1/(1-p^*)$. При этом предполагается, что ЛПР безразличен к риску.

если Θ согласована с Ω и верно $yP^{\Omega}z$ или $yI^{\Omega}z$, то верно соответственно $yP^{\Theta}z$ или $yI^{\Theta}z$.

3. Используя описанный метод, попытаемся выделить лучшего по успеваемости студента в рассматривавшейся ранее задаче на основе количественной информации $\Theta = \{1 \succ^{3/2} 2,\ 2 \sim 3,\ 3 \succ^{2} 4\}$. Прежде всего, заметим, что информация Θ согласована с ранее собранной качественной информацией $\Omega = \{1 \succ 2 \sim 3 \succ 4\}$. Поэтому, учитывая последнее замечание из предыдущего пункта о связи отношений P^{Θ} и I^{Θ} с отношениями P^{Ω} и I^{Ω}, можно ограничиться рассмотрением только студентов из множества V_{Ω}. (Именно так мы поступили в § 3.3.) Таким образом, будем попарно сравнивать векторные оценки этих студентов:

$$y^1, y^2, y^3. \tag{3.4}$$

Так как верно $y^3 I^{\Omega} y^7$, т.е. варианты x^3 и x^7 одинаковы по предпочтительности, то векторная оценка y^7 в список (3.4) не включена. Как и при проведении анализа задачи на основе качественной информации о важности в § 2.5*, ограничимся учетом значений $k = 3, 4$.

Поскольку количественные величины важности критериев β_i^{Θ} определяются с точностью до положительного множителя, то удобно положить их равными натуральным компонентам n_i вектора N из базовой N-модели. В нашей задаче $N = (3, 2, 2, 1)$. Поэтому принимаем: $\beta_1^{\Theta} = 3$, $\beta_2^{\Theta} = \beta_3^{\Theta} = 2$, $\beta_4^{\Theta} = 1$.

Результаты расчетов по формуле (3.1) и полученные матрицы

$$B^{\Theta}(y^j) = \begin{pmatrix} b_3^{\Theta}(y^j) \\ b_4^{\Theta}(y^j) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3,$$

удобно свести в табл. 3.2.

Таблица 3.2. Матрицы $B^{\Theta}(y^j)$

j	1	2	3
$B^{\Theta}(y^j)$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Сравним вначале y^1 и y^2. Выпишем, используя табл. 3.2, два поэлементных неравенства для матричного неравенства $B^{\Theta}(y^1) \leq$ $\leq B^{\Theta}(y^2)$:

$$3 \leq 0, \quad 4 \leq 7\,.$$

Поскольку неравенство $3 \leq 0$ неверно, то матричное неравенство $B^{\Theta}(y^1) \leq B^{\Theta}(y^2)$ не выполнено. Поэтому неверно ни $y^1 P^{\Theta} y^2$, ни

$y^1 I^\Theta y^2$. Выпишем теперь все поэлементные неравенства для матричного неравенства $B^\Theta(y^2) \le B^\Theta(y^1)$:

$$0 \le 3, \quad 7 \le 4.$$

Здесь также есть неверное неравенство $7 \le 4$. Следовательно, матричное неравенство $B^\Theta(y^2) \le B^\Theta(y^1)$ не выполнено и потому неверно $y^2 P^\Theta y^1$. Вывод: векторные оценки y^1 и y^2 (а потому и студенты x^1 и x^2) несравнимы по предпочтительности.

Для пары y^1 и y^3 матричное неравенство $B^\Theta(y^1) \le B^\Theta(y^3)$ справедливо, так как

$$3 \le 3, \quad 4 \le 5.$$

Поскольку неравенство $4 \le 5$ выполняется как строгое, то верно $y^1 P^\Theta y^3$.

Нетрудно проверить, что векторные оценки y^2 и y^3 несравнимы.

Таким образом, среди претендентов на лучшего осталось два студента – это v^1 и v^2 (вспомним, что верно $y^3 I^\Omega y^7$, т.е. варианты v^3 и v^7 одинаковы по предпочтительности, и поэтому вариант v^7 также доминируем).

Итак, точная количественная информация о важности критериев позволила сузить множество выбора $V_\Omega = \{v^1, v^2, v^3, v^7\}$ до множества $V_\Theta = \{v^1, v^2\}$. Разумеется, этот результат совпадает с полученным в предыдущем параграфе.

4. Рассмотрим теперь случай, когда имеется непротиворечивая интервальная информация (Θ), состоящая из сообщений вида

$$l_{ij} < h_{ij} < r_{ij}, \tag{3.5}$$

где $1 < l_{ij} < r_{ij}$, если критерий K_i важнее критерия K_j (для равных по важности критериев вместо двойного неравенства имеем равенство $h_{ij} = 1$). Поскольку $l_{ij} > 1$, то определение согласованности (Θ) с Ω формулируется следующим образом.

Определение 3.3. Интервальная информация о важности критериев (Θ) *согласована* с качественной информацией Ω, или (Θ) *непротиворечиво расширяет* информацию Ω, когда выполнено условие:

если Ω содержит $i \succ j$, то $l_{ij} < h_{ij} < r_{ij}$; если Ω содержит $i \sim j$, то $h_{ij} = 1$.

Поскольку $h_{ij} = \beta_i/\beta_j$, то на основании неравенства (3.5) можно записать неравенства:

$$l_{ij}\beta_j < \beta_i < r_{ij}\beta_j, \tag{3.6}$$

а для равных по важности критериев имеем равенство $\beta_i = \beta_j$. Совокупность ограничений (3.6) и условие положительности величин важности задает множество $\mathrm{B}^{(\Theta)}$ возможных значений вектора важности $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Заметим еще, что условие (3.3) с учетом (3.2) можно записать в виде $q-1$ неравенств:

$$b_k^\Theta(y) - b_k^\Theta(z) \le 0, \qquad k = 1, \ldots, q-1. \tag{3.7}$$

Разность $b_k^{\Theta}(y) - b_k^{\Theta}(z)$ представляет собой алгебраическую сумму вида:

$$c_{1k}(y,z)\beta_1 + c_{2k}(y,z)\beta_2 + ... + c_{mk}(y,z)\beta_m, \tag{3.8}$$

где каждый коэффициент $c_{ik}(y, z)$ равен -1, 0 или 1. Для разностей в (3.7) будем использовать обозначение $\Delta_k^{y,z}(\beta)$.

Отношения $I^{(\Theta)}$ и $P^{(\Theta)}$ зададим следующим образом:

$yI^{(\Theta)}z$ верно тогда и только тогда, когда $\Delta_k^{y,z}(\beta) = 0$, $k = 1, ..., q-1$, при любом β из множества $B^{(\Theta)}$; (3.9)

$yP^{(\Theta)}z$ верно тогда и только тогда, когда $\Delta_k^{y,z}(\beta) \leq 0$, $k = 1, ..., q-1$, при любом β из множества $B^{(\Theta)}$ и $yI^{(\Theta)}z$ неверно. (3.10)

Отметим еще следующее обстоятельство. Неравенство $\Delta_k^{y,z}(\beta) \leq 0$ при любом β из множества $B^{(\Theta)}$ выполняется тогда и только тогда, когда максимальное значение[12] функции $\Delta_k^{y,z}(\beta)$ на $B^{(\Theta)}$ не превосходит нуля. Это максимальное значение будем обозначать через $M_k^{y,z}$, так что $M_k^{y,z} \leq 0$. Если же хотя бы при одном значении β из множества $B^{(\Theta)}$верно неравенство $\Delta_k^{y,z}(\beta) > 0$, то и $M_k^{y,z}$ будет больше нуля. Но величины важности определены с точностью до произвольного положительного множителя. Поэтому фактически в первом случае этот максимум оказывается равным нулю, т.е. $M_k^{y,z} = 0$, а во втором случае функция $\Delta_k^{y,z}(\beta)$ будет неограниченной сверху на $B^{(\Theta)}$, и тогда принято писать $M_k^{y,z} = +\infty$.

Возможные результаты сравнения векторных оценок y и z по предпочтительности с использованием информации (Θ), согласно определениям (3.9) – (3.10), с учетом сделанных замечаний удобно представить в виде табл. 3.3.

Таблица 3.3. Возможные результаты сравнения y и z с использованием (Θ)

(Θ)	Все $M_k^{z,y} = 0$	Есть $M_k^{z,y} = +\infty$
Все $M_k^{y,z} = 0$	y и z одинаковы по предпочтительности: верно $yI^{(\Theta)}z$	y предпочтительнее, чем z: верно $zP^{(\Theta)}y$
Есть $M_k^{y,z} = +\infty$	z предпочтительнее, чем y верно $yP^{(\Theta)}z$	y и z не сравнимы по предпочтительности

Табл. 3.3 показывает, что для сравнения векторных оценок y и z достаточно найти $M_k^{y,z}$ и $M_k^{z,y}$ для $k = 1, ..., q-1$. Число решаемых

[12] Здесь вместо «максимум» правильнее говорить «точная верхняя грань» и вместо max писать sup.

оптимизационных задач практически существенно сокращается, если учесть, что процесс нахождения величин $M_k^{y,z}$ (как и процесс нахождения $M_k^{z,y}$) можно закончить при получении первого значения $M_k^{y,z} = +\infty$ (соответственно $M_k^{z,y} = +\infty$).

Таким образом, для сравнения вариантов по предпочтительности на основе интервальной информации о важности критериев описанным методом приходится решать оптимизационные задачи – искать максимумы функций. Поэтому метод называется *оптимизационным*.

5. Предположим для простоты записи, что все критерии перенумерованы в порядке невозрастания их важности (так что самым важным является первый критерий) и информацию (Θ) можно представить в виде совокупности неравенств (см. (3.5)):

$$l_{12}\beta_2 < \beta_1 < r_{12}\beta_2, \ldots, l_{m-1}\beta_m < \beta_{m-1} < r_{m-1}\beta_m. \qquad (3.11)$$

(если некоторые два критерия равноважны, то вместо двойного неравенства здесь ставится равенство соответствующих величин важности). Эта информация непротиворечива.

Задачу отыскания $M_k^{y,z}$ с учетом положительности количественных величин важности и выражения (3.8) в развернутом виде можно записать следующим образом:

Максимизировать $c_{1k}(y,z)\beta_1 + c_{2k}(y,z)\beta_2 + \ldots + c_{2m}(y,z)\beta_m$

при ограничениях $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_m > 0$ и (3.11).

В этой задаче целевая (т.е. максимизируемая) функция линейна и все ограничения линейны, однородны и совместны. Поэтому можно все нестрогие неравенства заменить строгими(13) . В итоге задача отыскания $\Delta_k^{y,z}(\beta)$ запишется в следующем виде:

Максимизировать

$$c_{1k}(y,z)\beta_1 + c_{2k}(y,z)\beta_2 + \ldots + c_{2m}(y,z)\beta_m \qquad (3.12)$$

при ограничениях

$$\beta_1 \geq 0, \ldots, \beta_m \geq 0, l_{12}\beta_2 \leq \beta_1 \leq r_{12}\beta_2, \ldots, l_{m-1}\beta_m \leq \beta_{m-1} \leq r_{m-1}\beta_m. \qquad (3.13)$$

Задачи вида (3.12)–(3.13) называются задачами линейного программирования. Для их решения разработаны высокоэффективные алгоритмы, реализованные во многих компьютерных системах, в том числе MS EXCEL.

6. Предположим, что в задаче о студентах имеется следующая интервальная информация о важности критериев:

$$1{,}2 < h_{12} < 1{,}7; \quad h_{23} = 1{,}7 < h_{12} < 2{,}5,$$

которой соответствуют следующие ограничения на величины важности (см. (3.6)):

$$1{,}2\beta_2 < \beta_1 < 1{,}7\beta_2, \quad \beta_2 = \beta_3, \quad 1{,}7\beta_4 < \beta_3 < 2{,}5\beta_4. \qquad (3.14)$$

---

(13) Доказательство можно найти в статье, указанной в сноске (10) на с. 54.

Сравним по предпочтительности, например, варианты v^1 и v^3. Для этого, используя формулы (3.1), выпишем соответствующие выражения для $b_k^{\Theta}(y^1)$ и $b_k^{\Theta}(y^3)$:

$b_4^{\Theta}(y^1) = \beta_1, \quad b_5^{\Theta}(y^1) = \beta_1 + \beta_4; \quad b_4^{\Theta}(y^3) = \beta_3 + \beta_4; \quad b_5^{\Theta}(y^3) =$
$= \beta_2 + \beta_3 + \beta_4.$

Теперь можно записать:

$$\Delta_4^{y^1,y^3}(\beta) = \beta_1 - \beta_3 - \beta_4\,, \quad \Delta_4^{y^3,y^1}(\beta) = -\beta_1 + \beta_3 + \beta_4\,;$$

$$\Delta_5^{y^1,y^3}(\beta) = \beta_1 - \beta_2 - \beta_3\,, \quad \Delta_5^{y^3,y^1}(\beta) = -\beta_1 + \beta_2 + \beta_3\,.$$

При расчете величины $M_4^{y^1,y^3} = \max_{\beta \in B^{(\Theta)}} \Delta_4^{y^1,y^3}(\beta)$ задача (3.12) – (3.13) с учетом (3.14) после замены нестрогих неравенств строгими принимает вид:

Максимизировать $\beta_1 - \beta_3 - \beta_4$

при ограничениях

$$\beta_1 \geq 0,\ \beta_2 \geq 0,\ \beta_3 \geq 0,\ \beta_4 \geq 0,\ 1{,}2\beta_2 < \beta_1 < 1{,}7\beta_2,$$

$$\beta_2 = \beta_3,\ 1{,}7\beta_4 < \beta_3 < 2{,}5\beta_4. \tag{3.15}$$

В этой задаче целевая функция не ограничена сверху, так что $M_4^{y^1,y^3} = +\infty$. Поэтому, согласно таблице 3.2, $M_5^{y^1,y^3}$ можно не искать.

Для расчета величины $M_4^{y^3,y^1}$ имеем задачу:

Максимизировать $-\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ при ограничениях (3.15).

Её решение $M_4^{y^3,y^1} = 0$.

Для расчета величины $M_5^{y^3,y^1}$ следует решить задачу:

Максимизировать $-\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ при ограничениях (3.13).

В результате получим $M_4^{y^3,y^1} = +\infty$.

Таким образом, согласно табл. 3.2, при наличии информации (Θ) варианты v^1 и v^3 несравнимы по предпочтительности.

Если же степень превосходства первого критерия над вторым лежит в более узких пределах от 1,3 до 1,5, а степень превосходства третьего над четвертым находится в пределах от 1,7 до 2, то будет выполнено $v^1 P_{(\Theta)} v^3$ и $v^1 P_{(\Theta)} v^7$, так что первый студент, с учетом интервальной информации (Θ), по успеваемости предпочтительнее, чем третий и седьмой.

Выводы

1. Точное определение понятия *превосходства в важности* одного критерия над другим в определенное число раз опирается на понятие N-модели. Эта модель получается за счет того, что каждая компонента исходной векторной оценки *повторяется подходящее число раз*, так, чтобы отношение числа повторений для двух компонент

было равно как раз отношению величин важностей соответствующих критериев. В отличие от конструирования взвешенной суммы критериев, такой прием *позволяет избежать* выполнения арифметических операций со значениями критериев и потому оказывается корректным и для критериев с *качественной* (порядковой) шкалой.

2. После построения N-модели, согласованной с количественной информацией о важности, для сравнения по предпочтительности любых двух вариантов можно применить *простой аналитический метод*, так как в N-модели все критерии являются равноважными.

3. Для объяснения результатов сравнения вариантов по предпочтительности, как и в случае качественной информации о важности, можно использовать *объясняющие цепочки*, которые связывают их «расширенные» векторные оценки из N-модели.

4. При наличии интервальной информации о важности критериев для сравнения вариантов по предпочтительности следует применять специальные оптимизационные методы, реализуемые при использовании компьютерных программ.

5. *Оптимальными* могут быть лишь те варианты, которые являются *недоминируемыми* по отношению предпочтения, порождаемому всей накопленной количественной информацией о важности критериев.

Контрольные вопросы и задания

1. Из чего состоит точная количественная информация о важности критериев? В чем проявляется противоречивость такой информации? Что нужно делать, если информация оказалась противоречивой?

2. Что такое N-модель и N-оценки? Как по количественной информации о важности критериев построить соответствующую ей N-модель? Будет ли эта N-модель единственной?

3. Найдите $N = (n_1, n_2, n_3)$ для построения основной (наиболее простой) N-модели в трехкритериальной задаче при наличии информации о важности $\Theta = \{1 \succ^{1,2} 2, 2 \succ^{1,8} 3\}$.

4. Как для векторной оценки построить соответствующую ей N-оценку? Каждой ли N-оценке соответствует некоторая векторная оценка?

5. Объясните, почему именно основную N-модель (в которой все числа n_i являются взаимно простыми) удобнее других подходящих N-моделей использовать для сравнения вариантов по предпочтительности.

6. Сформулируйте определение понятия «один критерий важнее другого в h раз».

7. Объясните суть метода сравнения векторных оценок по предпочтительности при помощи соответствующих им N-оценок.

8. Предположим, что в задаче о студентах все предметы одинаково важны. Как будут выглядеть N-оценки вариантов для основной N-модели?

9. Дайте определения количественных величин и коэффициентов важности критериев, порождаемых количественной информацией о важности.

10. Как на основе сведений о превосходстве в важности одних критериев над другими, т.е. сообщений вида $i \overset{h_{ij}}{\succ} j$, рассчитать величины и коэффициенты важности критериев? Найдите коэффициенты важности критериев для информации

$$\Theta = \{3 \succ^{2,5} 2,\ 2 \succ^{1,8} 4,\ 4 \sim 1,\ 1 \succ^{5/3} 5\}.$$

11*. Предположим, что в задаче о студентах все предметы одинаково важны. Проведите их сравнения по успеваемости при помощи аналитического метода из § 3.4* и сравните результаты с полученными ранее в § 2.4.

12*. Объясните, почему замена количественных величин важности β_1^Θ, ..., β_m^Θ величинами важности $t\beta_1^\Theta$, ..., $t\beta_m^\Theta$, где t – произвольное положительное число, не приведет к изменению отношений P^Θ и I^Θ, определяемых при помощи неравенства (3.3).

13*. Докажите, что если Θ согласована с Ω и верно $yP^\Omega z$ или $yI^\Omega z$, то верно соответственно $yP^\Theta z$ или $yI^\Theta z$.

14*. Докажите, что если (Θ) согласована с Ω и верно $yP^\Omega z$ или $yI^\Omega z$, то верно соответственно $yP^{(\Theta)}z$ или $yI^{(\Theta)}z$.

15*. Применяя вместо величин важности критериев коэффициенты важности, решите графо-аналитическим методом разобранные в § 3.4* линейные оптимизационные задачи, возникающие при сравнении вариантов по предпочтительности. (Указание: сократите число переменных с четырех до двух, учтя равенство $\alpha_2 = \alpha_3$ и условие нормировки $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$.) Почему здесь все величины $M_k^{y,z}$ будут числами, т.е. случай $M_k^{y,z} = +\infty$ невозможен?

Вещь не перестает быть истинной оттого, что она не признана многими.

Бенедикт Спиноза

Глава 4
Совершенствование шкалы критериев

Показывается, как оценить «скорость» изменения предпочтений вдоль шкалы критериев и использовать полученные оценки совместно с информацией о важности критериев для сравнения вариантов решений по предпочтительности.

§ 4.1. Изменение предпочтений вдоль шкалы критериев и его оценивание

Я не отрицаю, что цветы хороши, но миллион цветов не в миллион раз лучше одного цветка.

Рекс Стаут. «Черные орхидеи»

1. Количественная информация о важности, позволяющая получить точные оценки важности, далеко не всегда позволяет выделить единственный наилучший вариант. Так, в частности, обстояло дело в нашей задаче со студентами. Причина такого положения заключается в том, что шкала критериев предполагалась порядковой, т.е. градации шкалы были лишь упорядочены по предпочтительности. Для дальнейшего сужения множества выбора необходима дополнительная информация о предпочтениях. А чтобы её получить, остается заняться усовершенствованием (уточнением) шкалы.

Для порядковой шкалы известно лишь, что при переходе от одной градации к следующей предпочтения возрастают. Теперь придется сравнивать «приращения предпочтений» при таких переходах. Как получить такого рода информацию? Сразу напрашивается прямой способ: задавать (разумеется, ЛПР) вопросы типа: «Когда (Ваши) предпочтения возрастают больше – при переходе от градации $k-1$ к градации k или от градации k к градации $k+1$?». Применительно к задаче оценивания успеваемости студентов вопрос может выглядеть, например, так: «Когда успеваемость по отдельному учебному предмету улучшается больше – при переходе от оценки 2 (*неудовлетворительно*) к оценке 3 (*удовлетворительно*) или от оценки 3 к оценке 4 (*хорошо*)?». Разумеется, в такой прямой постановке вопросы могут оказаться непростыми, как, например, при сравнении переходов от 3 к 4 и от 4 к 5.

Предположим[39], что при переходе от оценки 2 к оценке 3 возрастание знаний оценивается как бóльшее по сравнению с возрастанием знаний при переходе от 3 к 4, которое, в свою очередь, больше, чем при переходе от 4 к 5. Это – пример случая замедления роста предпочтений вдоль шкалы. Такую информацию будем обозначать буквой *D*.

2. Существует общий способ, основанный на сравнении лотерей специального вида. Он основан на схеме, представленной на рис. 4.1.

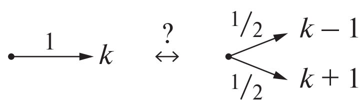

Рис. 4.1. Схема для оценивания роста предпочтений вдоль шкалы критериев

Согласно этой схеме, нужно сравнить «выставление» (или «получение») оценки k наверняка с участием в лотерее, в которой с равными вероятностями может быть «поставлена» (или «получена») либо оценка $k - 1$, либо оценка $k + 1$. В зависимости от выбора получаются следующие результаты[14]:

– если выбрано выставление оценки k, то рост (или возрастание, приращение) предпочтений при переходе от оценки $k - 1$ к оценке k больше, чем при переходе от оценки k к оценке $k + 1$;

– если выбрано участие в лотерее, то рост предпочтений при переходе от оценки $k - 1$ к оценке k меньше, чем при переходе от оценки k к оценке $k + 1$;

– если выставление оценки k наверняка и участие в лотерее одинаковы по предпочтительности, то рост предпочтений при переходе от оценки $k - 1$ к оценке k равен росту предпочтений при переходе от оценки k к оценке $k + 1$.

3. Для многокритериальных задач с однородными критериями существует способ, который не требует рассмотрения лотерей. Предположим для простоты записи, что первый и второй критерии имеют одинаковую важность. Будем рассматривать векторные

---

[39] Это вполне соответствует методике оценивания и сложившейся практике выставления оценок.

[14] Эти результаты можно пояснить следующим образом. Обозначим через $u(k)$ ценность (полезность) градации k. Для порядковой шкалы известно лишь, что $u(k-1) < u(k) < u(k+1)$. Средняя ожидаемая ценность лотереи равна $½\,u(k-1) + ½\,u(k + 1)$. Поэтому, например, для первого из рассмотренных случаев можно записать неравенство $u(k) > ½\,u(k - 1) + ½\,u(k + 1)$, из которого следует, что $u(k) - u(k-1) > u(k+1) - u(k)$.

оценки, различающиеся только первыми двумя компонентами (т.е. у которых третьи компоненты равны между собой, четвертые являются равными и т.д.), и поэтому выписывать будем только эти первые компоненты. Рассмотрим две векторные оценки:

$$y = (k-1, k+1), \quad z = (k, k).$$

При переходе от векторной оценки y к z происходит её улучшение за счет увеличения значения первого критерия от $k-1$ до k при одновременном её ухудшении за счет уменьшения значения второго критерия от $k+1$ до k. Сравним векторные оценки y и z по предпочтительности (разумеется, это должен делать ЛПР). Предположим, оказалось, что векторная оценка z предпочтительнее, чем y. Поскольку критерии равноважны, то это означает, что рост предпочтений при переходе от градации $k-1$ к градации k больше роста предпочтений при переходе от k до $k+1$ (или, что то же, уменьшения предпочтений при переходе от $k+1$ до k). Если окажется, что, наоборот, y предпочтительнее, чем z, то рост предпочтений при переходе от градации $k-1$ к градации k меньше роста предпочтений при переходе от k до $k+1$. Наконец, если обе оценки y и z будут одинаковыми по предпочтительности, то рост предпочтений при переходе от градации $k-1$ к градации k равен росту предпочтений при переходе от k до $k+1$.

Если рост предпочтений при переходе от оценки $k-1$ к оценке k равен росту предпочтений при переходе от оценки k к оценке $k+1$ для любого значения $k = 2, ..., q-1$ (напомним, что q – это число градаций шкалы), то шкала будет *равномерной*. К сожалению, на практике такие шкалы встречаются нечасто.

Последний из рассмотренных методов представляется значительно более удобным для человека, чем предыдущие, и потому позволяет получить надежную информацию о росте предпочтений вдоль шкалы. Отметим лишь, что практически при сравнении векторных оценок в конкретной задаче, следует, если это возможно, использовать не числовые (например, балльные), а соответствующие «физические» («содержательные») оценки (если таковые, конечно, имеются).

§ 4.2. Использование информации об изменении предпочтений вдоль шкалы критериев для анализа многокритериальных задач

> В том-то и дело, что простое объяснение всегда приходит в голову в последнюю очередь.
>
> *Артур Конан Дойл. «Знак четырех»*

1. Сравнительная оценка роста предпочтений от градации $k-1$ к градации k с ростом предпочтений при переходе от k до $k+1$, согласно изложенному выше, позволяет ввести на множестве векторных оценок соответствующее отношение строгого предпочтения или же безразличия. Для разных значений k будут получаться, вообще говоря, «свои» отношения. Все эти отношения можно использовать для построения цепочек при попарном сравнении векторных оценок по предпочтительности. Особенно просто это делать, когда все критерии равноважны, в частности, в рамках N-моделей.

2. Для пояснения и иллюстрации указанного положения обратимся к задаче о студентах. После получения количественной информации о важности $\Theta = \{1 \succ^{3/2} 2,\ 2 \sim 3,\ 3 \succ^{2} 4\}$ и ее использования для анализа задачи осталось лишь два претендента на лучшего – первый и второй студенты с векторными оценками

$$y^1 = (3, 5, 5, 4), \quad y^2 = (4, 4, 4, 5).$$

Поскольку среди компонент этих векторных оценок встречаются лишь 3, 4 и 5, то нужно сравнить рост предпочтений при переходе от 3 к 4 с ростом предпочтений от 4 к 5. Для этого, учтя, что второй и третий критерии равноважны, будем сравнивать по успеваемости студентов, различающихся оценками по предметами Б и В. Рассмотрим, согласно рекомендациям из § 4.1, двух (гипотетических) студентов, у которых успеваемость по предметам А и Г (соответствующие оценки) одинаковы, а оценки по предметам Б и В заданы следующими парами (словесными аналогами векторных оценок y и z):

$$(\textit{уд., отл.}), (\textit{хор., хор.}).$$

Предположим, что второй из этих студентов признан (разумеется, по мнению ЛПР) лучшим по учебе, чем первый. Это означает, что улучшение успеваемости (по любому отдельному предмету) при переходе от оценки *уд.* к оценке *хор.* больше, чем при переходе от оценки *хор.* к оценке *отл*. Используем полученную информацию для сравнения студентов. Для их N-оценок

$$y^N(v^1) = (3, 3, 3, 5, 5; 5, 5, 4), \quad y^N(v^2) = (4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5),$$

с учетом равноважности всех компонент можно составить цепочку от второй оценки к первой (цепочка не уместилась на одной строке и записана на трех):

$$y^N_{\downarrow}(v^2) = (5, \mathbf{4}, \mathbf{4}, 4, 4, 4, 4, 4)\ P^D\ (5, \mathbf{3}, \mathbf{5}, 4, 4, 4, 4, 5),$$

$$(5, 3, 5, \mathbf{4}, \mathbf{4}, 4, 4, 5)\ P^D\ (5, 3, 5, \mathbf{3}, \mathbf{5}, 4, 4, 5),$$

$$(5, 3, 5, 3, 5, \mathbf{4}, \mathbf{4}, 5)\ P^D\ (5, 3, 5, 3, 5, \mathbf{3}, \mathbf{5}, 5).$$

В этой цепочке через P^D обозначено отношение предпочтения, порожденное полученной выше информацией о росте предпочтений вдоль шкалы от градации 3 к градации 4 и далее до градации 5. А так как в N-модели все критерии равноважны и

$$(5,3,5,3,5,3,5,5)_{\downarrow} = y_{\downarrow}^{N}(v^1),$$

то приходим к заключению, что второй студент по успеваемости предпочтительнее первого. Это можно записать так: $v^2 P_{\Theta D} v^1$. Иначе говоря, второй вариант доминирует (по отношению $P_{\Theta D}$) над первым вариантом, который оказывается доминируемым.

§ 4.3*. Методы построения отношений предпочтения на основе количественной информации о важности критериев при замедлении роста предпочтений вдоль их шкалы

Наука резюмируется в методе.

Георг Гегель

1. Вначале рассмотрим случай, когда количественная информация о важности Θ состоит из точных оценок степеней превосходства в важности одних критериев над другими и можно назначить количественные величины важности критериев $\beta_1^{\Theta},\ldots,\beta_m^{\Theta}$, составляющие вектор $\beta^{\Theta} = (\beta_1^{\Theta},\ldots,\beta_m^{\Theta})$. Отношения предпочтения и безразличия, порождаемые совокупной информацией $\Theta\&D$ (т.е. совместно Θ и D), будем обозначать $P^{\Theta D}$ и $I^{\Theta D}$ соответственно.

Векторную оценку, полученную из векторной оценки y путем прибавления к её компоненте y_i числа k и вычитания из её компоненты y_j того же числа k будем записывать в виде $(y \,|\, y_i + k, y_j - k)$. Например, если $y = (4, 5, 5, 2)$, то для $i = 4$, $j = 2$, $k = 1$ имеем $(y \,|\, y_i + k, y_j - k) = (4, 4, 5, 3)$.

Предположим, что критерии K_i и K_j равноважны. Тогда, согласно информации D, после увеличения меньшей из компонент z_i и z_j векторной оценки z на натуральное число k и одновременного уменьшения большей из компонент на то же число k, такого, что увеличенная компонента не больше уменьшенной, получится векторная оценка y, более предпочтительная, чем исходная векторная оценка z. Т.е. информация D совместно с $i \sim j$ задает на множестве векторных оценок отношение предпочтения $P^{i\sim jD}$:

$yP^{i\sim jD}z$ верно тогда и только тогда, когда $y = (z \,|\, z_i + k,\ z_j - k)$ и $z_i + k \le z_j - k$ или когда $y = (z \,|\, z_j + k, z_i - k)$ и $z_j + k \le z_i - k$.

Согласно этому определению верны, например, следующие соотношения при равноважности первых двух критериев и $q \ge 6$:

$$(2, 5, z_3, \ldots, z_m)\ P^{1\sim 2D}\ (1, 6, z_3, \ldots, z_m),$$

$$(3, 4, z_3, \ldots, z_m)\ P^{1\sim 2D}\ (2, 5, z_3, \ldots, z_m),$$

а соотношение $(4, 3, z_3, \ldots, z_m)\ P^{1\sim 2D}\ (3, 4, z_3, \ldots, z_m)$ уже неверно.

В N-модели, соответствующей количественной информации о важности критериев Θ, любые два критерия равноважны и отношение $P^{i\sim jD}$ определено для всякой пары критериев. Поэтому для сравнения по предпочтительности любых двух N-оценок можно пытаться строить объясняющие цепочки, используя это отношение и отношение Парето P^0 (что и было сделано в § 4.2 с использованием обозначения P^D). Заданное указанным образом отношение предпочтения на множестве N-оценок порождает на множестве векторных оценок отношение предпочтения $P^{\Theta D}$. Заметим, что поскольку информация D вводит на множестве N-оценок только отношения строгого предпочтения $P^{i\sim jD}$, то отношение безразличия на нем остается прежним, и поэтому $I^{\Theta D} = I^{\Theta}$.

Оказывается, что проверку справедливости соотношения $yP^{\Theta D}z$ можно произвести и без построения N-модели. Введем в рассмотрение суммы (см. (3.1))

$$b_k^{\Theta D}(y) = b_1^{\Theta}(y) + ... + b_k^{\Theta}(y), \quad k = 1, ..., q-1, \tag{4.1}$$

и матрицу, имеющую один столбец и $q-1$ строку:

$$B^{\Theta D}(y) = \begin{pmatrix} b_1^{\Theta D}(y) \\ \dots \\ b_{q-1}^{\Theta D}(y) \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Метод сравнения двух векторных оценок y и z по предпочтительности на основе информации $\Theta\&D$ с использованием количественных величин важности заключается в проверке справедливости следующего матричного неравенства между матрицами $B^{\Theta D}(y)$ и $B^{\Theta D}(z)$, понимаемого как систему всех $(q-1)$ неравенств между соответственными их элементами:

$$B^{\Theta D}(y) \leq B^{\Theta D}(z). \tag{4.3}$$

Если неравенство (4.3) выполняется и среди нестрогих неравенств между соответственными элементами матриц есть хотя бы одно строгое, то верно $yP^{\Theta D}z$; если нестрогое неравенство (4.3) выполняется как равенство, то верно $yI^{\Theta D}z$. Если неравенство (4.3) не выполняется, то неверно ни $yP^{\Theta D}z$, ни $yI^{\Theta D}z$, и тогда нужно проверить справедливость обратного матричного неравенства $B^{\Theta D}(y) \geq B^{\Theta D}(z)$. Если $zP^{\Theta D}y$ также не будет верно, то это будет означать, что рассматриваемые векторные оценки на основании информации $\Theta\&D$ несравнимы по предпочтительности.

2. Для примера «работы» изложенного метода рассмотрим двух студентов v^1 и v^2, которые остались после анализа задачи с использованием количественной информации о важности $\Theta = \{1 \succ^{3/2} 2, 2 \sim 3,$

$3 \succ {}^2 4\}$ как претенденты на звание лучшего студента. В качестве величин важности критериев удобно, как и ранее в § 3.4*, взять соответственные компоненты основной N-модели, т.е. принять:

$$\beta_1^\Theta = 3\,,\quad \beta_2^\Theta = \beta_3^\Theta = 2\,,\quad \beta_4^\Theta = 1\,.$$

Выпишем векторные оценки студентов:

$$y^1 = (3, 5, 5, 4),\quad y^2 = (4, 4, 4, 5).$$

Поскольку в этих векторных оценках нет 1 и 2, то суммы (4.1) можно рассчитать только для $k = 3$ и $k = 4$. Поэтому можно воспользоваться матрицами $B^\Theta(y^j)$, рассчитанными в § 3.4* (см. таблицу 3.2), и получить из них матрицы $B^{\Theta D}(y^j)$ в соответствии с (4.1):

$$B^{\Theta D}(y^1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix},\quad B^{\Theta D}(y^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Матричное неравенство $B^{\Theta D}(y^2) \le B^{\Theta D}(y^1)$ верно, причем для первых их элементов справедливо строгое неравенство $0 < 3$. Приходим к заключению, что второй студент по успеваемости предпочтительнее первого: $y^2 P_{\Theta D} y^1$. Разумеется, это тот же результат, что и полученный ранее в § 4.2 методом, использующим N-оценки.

3. Рассмотрим теперь случай, когда имеется непротиворечивая интервальная информация о важности критериев (Θ), состоящая из сообщений вида (3.5). Отметим вначале, что порядок проведения сравнения векторных оценок y и z с использованием информации $\Theta\&D$ отличается от порядка проведения их сравнения с использованием информации Θ лишь тем, что анализируется матричное неравенство $B^{\Theta D}(y) \le B^{\Theta D}(z)$ вместо матричного неравенства $B^\Theta(y) \le B^\Theta(z)$. Поэтому, положив

$$\hat{\Delta}_k^{y,z}(\beta) = b_k^{\Theta D}(y) - b_k^{\Theta D}(z)\,,\quad k = 1, \ldots, q-1,$$

и обозначив через $\hat{M}_k^{y,z}$ максимальное значение функции $\hat{\Delta}_k^{y,z}(\beta)$ на множестве $\mathrm{B}^{(\Theta)}$, можно сразу составить табл. 4.1, аналогичную табл. 3.3.

Таблица 4.1. Возможные результаты сравнения y и z с использованием информации $(\Theta)\&D$

$(\Theta)\&D$	Все $\hat{M}_k^{z,y} = 0$	Есть $\hat{M}_k^{z,y} = +\infty$
Все $\hat{M}_k^{z,y} = 0$	y и z одинаковы по предпочтительности: верно $yI^{(\Theta)D}z$	y предпочтительнее, чем z: верно $zP^{(\Theta)D}y$
Есть $\hat{M}_k^{z,y} = +\infty$	z предпочтительнее, чем y: верно $yP^{(\Theta)D}z$	y и z несравнимы по предпочтительности

Эта таблица указывает порядок проведения сравнения y и z по предпочтительности с использованием информации $(\Theta)\&D$.

§ 4.4*. Методы построения отношения предпочтения на основе качественной информации о важности критериев при замедлении роста предпочтений вдоль их шкалы[40]

Чего один не сделает –
сделаем вместе.

Владимир Маяковский. «Кем быть?»

1. Выше рассматривался случай, когда информация D использовалась при наличии количественной информации о важности критериев. Однако ее можно использовать и при наличии только качественной информации о важности Ω.

Для случая, когда критерии K_i и K_j равноважны, отношение строгого предпочтения $P^{i\sim jD}$ было введено в § 4.3*. Определение отношения $P^{i\succ jD}$ для случая, когда критерий K_i важнее критерия K_j, выглядит так:

$yP^{i\succ jD}z$ верно тогда и только тогда, когда $y = (z\,|\,z_i + k,\ z_j - k)$ и $z_i + k \leq z_j - k$.

Отношения $P^{\Omega D}$ и $I^{\Omega D}$ определяются при помощи объясняющих цепочек, в которых могут участвовать отношения $P^{i\sim j}$, $P^{i\succ j}$, $P^{i\sim jD}$, $P^{i\succ jD}$ и P^0. Здесь также верно равенство $I^{\Omega D} = I^{\Omega}$.

Для проверки соотношения $yP^{\Omega D}z$ разработан довольно сложный комбинаторный алгоритм. Однако для случая, когда все критерии упорядочены по важности, найден простой аналитический метод. Правда, он предполагает, что существуют количественные величины важности критериев, согласованные с Ω, хотя и не требуется их оценивать.

Итак, пусть все критерии упорядочены по важности:

$$1 \sim 2 \sim \ldots \sim i_1 \succ i_1 + 1 \sim \ldots \sim i_2 \succ \ldots \succ i_{r-1} \sim \ldots \sim i_r, \text{ где } i_r = m.$$

Обозначим через $\beta^{[1\ldots k]}(y)$ вектор, составленный из первых k векторов $\beta^k(y)$ (см. (2.3)), т.е. из первых k столбцов матрицы $\mathrm{B}^{\Omega}(y)$ векторной оценки y (см. (2.4)):

$$\beta^{[1\ldots k]}(y) = (\beta^1(y),\ldots,\beta^k(y)) = (\beta_1^1(y),\ldots,\ \beta_m^1(y),\ldots,\beta_1^k(y),\ldots,\ \beta_m^k(y))\,. \tag{4.4}$$

[40] Пункт 1 этого параграфа написан на основе статьи: *Нелюбин А.П., Подиновский В.В.* Аналитические решающие правила, использующие упорядоченность по важности критериев со шкалой первой порядковой метрики // Автоматика и телемеханика. 2012. № 5. С. 84–96.

Пусть $\beta_{\downarrow}^{[1\ldots k]}(y)$ – вектор, полученный из вектора $\beta^{[1\ldots k]}(y)$ упорядочением его компонент по убыванию (точнее, по невозрастанию).

Метод сравнения двух векторных оценок y и z по предпочтительности на основе информации $\Omega\&D$ заключается в проверке справедливости следующих векторных неравенств между векторами $\beta_{\downarrow}^{[1\ldots k]}(y)$ и $\beta_{\downarrow}^{[1\ldots k]}(z)$:

$$\beta_{\downarrow}^{[1\ldots k]}(y) \leq \beta_{\downarrow}^{[1\ldots k]}(z),\ k = 1, 2, \ldots, q-1. \tag{4.5}$$

Если все неравенства (4.5) выполняются и среди нестрогих неравенств между соответственными элементами векторов есть хотя бы одно строгое, то верно $yP^{\Omega D}z$; если же все нестрогие неравенства (4.5) выполняются как равенства, то верно $yI^{\Omega D}z$. Если не все неравенства (4.5) выполняются, то неверно ни $yP^{\Omega D}z$, ни $yI^{\Omega}z$, и тогда нужно проверить справедливость $q-1$ обратных векторных неравенства $\beta_{\downarrow}^{[1\ldots k]}(y) \geq \beta_{\downarrow}^{[1\ldots k]}(z)$. Если $zP^{\Omega D}y$ также не будет верно, то это будет означать, что рассматриваемые векторные оценки на основании информации $\Omega\&D$ несравнимы по предпочтительности.

2. Проиллюстрируем применение рассмотренного метода на примере задачи о студентах, в которой критерии, согласно информации Ω, упорядочены по важности:

$$1 \succ 2 \sim 3 \succ 4.$$

Выберем студентов v^1 и v^3. Их векторные оценки $y^1 = (3, 5, 5, 4)$ и $y^3 = (5, 4, 3, 3)$. Используя табл. 2.2, выпишем векторы $\beta^{[1\ldots k]}(y)$ и $\beta^{[1\ldots k]}(z)$, убрав из их состава $\beta^k(y)$ и $\beta^k(z)$ для $k = 1, 2$ (так как этих градаций нет в составе рассматриваемых векторных оценок):

$$\beta^{[3\ldots3]}(y) = (3, 0, 0, 0),\ \beta^{[3\ldots4]}(y) = (3, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 1),$$

$$\beta^{[3\ldots3]}(z) = (0, 0, 2, 1),\ \beta^{[3\ldots4]}(z) = (0, 0, 2, 1, 0, 2, 2, 1).$$

Для этих векторов имеем:

$$\beta_{\downarrow}^{[3\ldots3]}(y) = (3, 0, 0, 0),\ \beta_{\downarrow}^{[3\ldots4]}(y) = (3, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$\beta_{\downarrow}^{[3\ldots3]}(z) = (2, 1, 0, 0),\ \beta_{\downarrow}^{[3\ldots4]}(z) = (2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 0).$$

Поскольку ни неравенства (4.5) для $k = 3, 4$, ни обратные им неравенства не выполняются, то информация $\Omega\&D$ не позволяет выяснить, какой из студентов v^1 и v^3 лучше в учебе.

3. Опишем теперь матричный метод сравнения вариантов по предпочтительности, основанный на предыдущем методе. При этом будем использовать обозначения из п. 6 § 2.5*. Для векторной оценки y введем в рассмотрение $(q-1)\times r$-матрицу $N^{\Omega D}(y) = \left(n_{kl}^{+}(y)\right)$, где:

$$n_{kl}^{+}(y) = n_{1l}(y) + \ldots + n_{kl}(y),\ \ k = 1, \ldots,\ \ q-1,\ \ l = 1, \ldots r.$$

Метод сравнения двух векторных оценок y и z по предпочтительности заключается в проверке справедливости следующего матричного неравенства между $N^{\Omega D}(y)$ и $N^{\Omega D}(z)$:

$$N^{\Omega D}(y) \leq N^{\Omega D}(z). \tag{4.6}$$

Если матричное неравенство (4.6) выполняется и среди нестрогих неравенств между элементами матриц есть хотя бы одно строгое, то верно $yP^{\Omega D}z$; если нестрогое неравенство (4.6) выполняется как равенство, то верно $yI^{\Omega D}z$. Если неравенство (4.6) не выполняется, то неверно ни $yP^{\Omega D}z$, ни $yI^{\Omega D}z$, и тогда нужно проверить справедливость обратного к (4.6) матричного неравенства. Если $zP^{\Omega D}y$ и $zI^{\Omega D}y$ также не будет верно, то это будет означать, что рассматриваемые векторные оценки на основании информации $\Omega\&D$ несравнимы по предпочтительности.

Применим описанный метод для анализа задачи о студентах. Здесь $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{2, 3\}$, $M_3 = \{4\}$, $r = 3$. Для векторных оценок (2.7) запишем матрицы $N^{\Omega D}(y^j)$ без строк, соответствующих $k = 1, 2$:

$$N^{\Omega D}(y^1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$N^{\Omega D}(y^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad N^{\Omega D}(y^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$N^{\Omega D}(y^4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad N^{\Omega D}(y^7) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Сравним, для примера, y^1 и y^2. Поскольку как матричное неравенство $N^{\Omega D}(y^1) \leq N^{\Omega D}(y^2)$, так и обратное к нему не выполняются, то эти векторные оценки на основании информации $\Omega\&D$ несравнимы по предпочтительности.

Выводы

1. *Качественную* (нечисловую) *информацию о росте предпочтений* вдоль шкалы критериев составляют сведения о сравнении *приращения предпочтений* при переходе от градации $k-1$ шкалы к градации k с *приращением предпочтений* при переходе от градации k шкалы к градации $k+1$.

2. Общий способ получения качественной информации о росте предпочтений вдоль шкалы, т.е. выяснения, какое из указанных выше приращений больше, предполагает использование лотерей

специального вида. Однако для случая наличия равноважных критериев существует более простой и надежный способ получения такой информации.

3. После построения N-модели, согласованной с количественной информацией о важности, для сравнения любых двух вариантов с использованием информации о росте предпочтений вдоль шкалы критериев можно строить объясняющие цепочки.

4. *Оптимальными* могут быть лишь те варианты, которые являются *недоминируемыми* по отношению предпочтения, порождаемому всей накопленной количественной информацией о важности критериев и качественной информацией о росте предпочтений вдоль их шкалы.

5. Если качественная информация о росте предпочтений вдоль шкалы критериев не позволяет выделить наилучший вариант, то для дальнейшего анализа задачи следует получить и использовать *дополнительную информацию* в виде более точных, например, *интервальных оценок* роста предпочтений.

6*. Существуют методы, которые позволяют попарно сравнивать варианты по предпочтительности на основании количественной информации о важности критериев и качественной информации о росте предпочтений вдоль их шкалы без построения N-модели. В случае, когда оценки степеней превосходства в важности являются точными, соответствующий аналитический метод достаточно прост и может применяться при «ручном счете». В случае интервальных оценок задача сравнения двух вариантов сводится к линейным оптимизационным задачам, которые эффективно решаются алгоритмами линейного программирования, реализованными во многих компьютерных системах, в том числе MS EXEL.

7*. Качественная информация о росте предпочтений вдоль шкалы критериев может использоваться и при качественной информации об их важности. Варианты можно сравнивать в рамках N-моделей, строя объясняющие цепочки, но это непростой путь. Однако существуют достаточно простые аналитические методы сравнения вариантов по предпочтительности, не требующие построения N-моделей.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие сведения о предпочтениях позволяют усовершенствовать шкалу критериев?

2. Что означает утверждение «Рост предпочтений вдоль шкалы критериев замедляется»?

3. Убедитесь, используя N-модель, в том, что если из двух пар оценок

(*удовл., отл.*), (*хор.*, *хор.*)

более предпочтительной считается первая, то лучшим по успеваемости окажется первый, а не второй студент. А если эти пары оценок одинаковы по предпочтительности, то обоих студентов следует считать одинаковыми в учебе и каждый из них «с равным правом» может считаться лучшим.

4*. Объясните при помощи матриц $\mathrm{B}^{\Theta D}(y^j)$ и $\mathrm{B}^{\Theta}(y^j)$, почему верно равенство $I^{\Theta D} = I^{\Theta}$.

5*. Почему при отсутствии градации k среди компонент сравниваемых векторных оценок y и z в матрицах $\mathrm{B}^{\Theta D}(y)$ и $\mathrm{B}^{\Theta D}(z)$ можно вычеркнуть k-ю строку?

6*. Проведите решение задачи о студентах для информации $\Omega\&D$, используя матричный метод из § 4.4*, и проанализируйте полученные результаты.

7*. Сравните варианты по предпочтительности из задачи 13* о материалах из главы 2, предполагая, что рост предпочтений вдоль шкалы критериев замедляется. Используйте аналитические методы из § 4.4*. Какие из ранее несравнимых вариантов стали сравнимыми?

Обдумывать надо много раз,
принимать решение – однажды.

Публилий Сир

Глава 5
Итеративный подход к решению многокритериальных задач

Показывается, что анализ задач принятия решений методами теории важности критериев целесообразно осуществлять по шагам, причем на первых шагах анализа следует получать и использовать более простую и надежную – качественную информацию о важности критериев и росте предпочтений вдоль их шкалы, и лишь потом, при необходимости, привлекать более сложную, но и менее надежную – количественную информацию.

§ 5.1. Суть итеративного подхода к анализу многокритериальных задач принятия решений

Я беру глыбу мрамора и отсекаю от нее все лишнее.

Эти слова Микеланжело привел французский скульптор Огюст Роден в ответ на вопрос одного из своих учеников, в чем состоит искусство скульптора.

1. Как неоднократно отмечалось выше, качественная информация о предпочтениях по сравнению с количественной более надежна (меньше возможностей появления в ней ошибок), но и менее эффективна в том смысле, что позволяет сравнить по предпочтительности меньшее число вариантов. А количественная информация более эффективна, но и менее надежна. Какую информацию и как лучше получать и использовать для анализа многокритериальных задач принятия решений?

Общие рекомендации по этому вопросу дает подход к моделированию предпочтений, названный его авторами *итеративным*[41]. Он базируется на двух основных соображениях:

---

[41] Итеративный подход был предложен в работе: →

1) в *первую очередь* следует получать *более простую и надежную* информацию о предпочтениях, и лишь *потом*, *в случае необходимости* (когда такой информации недостаточно), привлекать *более сложную* и потому менее надежную информацию;

2) необходимо *проводить проверку* ранее накопленной и получаемой дополнительно информации на непротиворечивость и при выявлении противоречий осуществлять ее *корректировку*; при этом проверку менее надежного сообщения надо проводить при помощи более надежных или хотя бы нескольких столь же надежных сообщений[42].

При реализации итеративного подхода процесс анализа задачи представляется в виде *последовательности шагов*, на каждом из которых вначале получается дополнительная информация о предпочтениях, затем она проверяется на непротиворечивость, при необходимости корректируется, и уже на основе такой информации строятся отношения предпочтения и безразличия. При этом отношения предпочтения и безразличия, конструируемые на каждом шаге, должны быть определенным образом связаны.

Допустим, на k-м шаге имелась информация о предпочтениях $G(k)$ и на ее основе были построены на множестве векторных оценок отношения предпочтения $P(k)$ и безразличия $I(k)$. Предположим, далее, что на следующем, $k + 1$-м шаге получена дополнительная информация и на основе всей накопленной информации $G(k + 1)$ построены отношения $P(k + 1)$ и $I(k + 1)$. Должно выполняться следующее вполне понятное требование к последовательно конструируемым отношениям предпочтения и безразличия:

Требование непротиворечивости к уточнению информации о предпочтениях. Если на k-м шаге было выявлено, что одна из векторных оценок более предпочтительна, чем другая, или же что они одинаковы по предпочтительности, то такое же соотношение между

Озерной В.М., Гафт М.Г. Построение решающих правил в многокритериальных задачах // Проблемы принятия решений. М.: Институт проблем управления, 1974. С. 30–44.

Там же дана классификация видов информации о многокритериальных предпочтениях по их сложности. Потом этот подход был развит в ряде других работ, в том числе:

Озерной В.М., Гафт М.Г. Методология решения дискретных многокритериальных задач // Многокритериальные задачи принятия решений. М.: Машиностроение, 1978. С. 14–47.

Гафт М.Г., Подиновский В.В. О построении решающих правил в задачах принятия решений // Автоматика и телемеханика. 1981. № 6. С. 128–138.

[42] Название «итеративный» не очень удачно: существует много методов, которые реализуются «по шагам», но на каждом шаге используют однотипную информацию о предпочтениях. Более подошел бы термин «эволюционный», но он «занят» (см., например: Multiobjective optimization – interactive and evolutionary approaches / J.R. Branke, K. Deb, K. Miettinen, R. Slowinski (eds.). New York: Springer, 2008).

ними должно остаться и на следующем, $k + 1$-м шаге, т.е. для любых векторных оценок y и z должно быть выполнено условие(15):

$$yP(k)z \text{ влечет } yP(k+1)\,z;\ yI(k)z \text{ влечет } yI(k+1)\,z.$$

На первом шаге процесса в качестве отношения $P(0)$ обычно принимается отношение P^0, а в роли отношения $I(0)$ выступает отношение равенства. В случае, когда результаты k-го шага не позволяют выделить один наилучший вариант, а указывают несколько недоминируемых и несравнимых между собой вариантов, необходимо перейти к очередному, $k + 1$-му шагу и организовать получение дополнительной информации о предпочтениях. Если возможности получения информации исчерпаны, то итеративный процесс анализа задачи заканчивается.

При выполнении требования непротиворечивости каждый вариант, который был доминируемым на k-м шаге, не может стать недоминируемым на следующем, $k + 1$-м шаге(16). Поэтому в процессе анализа задачи множество недоминируемых вариантов, вообще говоря, сужается.

2. Практически процесс анализа задач принятия решений в рамках итеративного подхода осуществляется в виде *интерактивной процедуры* (т.е. протекающей в форме диалога человек – компьютер), в которой на каждом шаге чередуются этапы получения информации о предпочтениях от ЛПР и/или экспертов с этапами их обработки на компьютере и представления результатов анализа ЛПР. При этом диалог с человеком должен вестись на привычном для него языке, а результаты анализа представляться в удобном и понятном для него виде.

Для практической реализации итеративного подхода нужно иметь достаточно богатый арсенал подходящих методов. Таких методов по мере развития теории принятия решений постепенно становится все больше и больше.

§ 5.2. Итеративный подход к решению многокритериальных задач методами теории важности критериев

Во всем большом есть постепенность,
А не внезапность и мгновенность.

Иоганн Гёте. «Фауст»

1. Набор методов теории важности критериев, разработанных к настоящему времени, является достаточно полным для их ис-

(15) Это требование можно записать в таком виде: $P(k) \subseteq P(k+1)$, $I(k) \subseteq I(k+1)$.

(16) То есть справедливо вложение $V(k) \supseteq V(k+1)$, где $V(k)$ и $V(k+1)$ – множества недоминируемых вариантов на k-м и $k + 1$-м шагах соответственно.

пользования в рамках итеративного подхода. При этом весьма существенным является следующее утверждение, которое ранее формулировалось для отдельных видов информации:

> Если для некоторой информации о важности критериев и росте предпочтений вдоль их шкалы оказалось, что векторная оценка y предпочтительнее векторной оценки z (или эти векторные оценки одинаковы по предпочтительности), то при любом *уточнении* этой информации векторная оценка *y останется* более предпочтительной, чем z (или, соответственно, они останутся одинаковыми по предпочтительности)!

Возможные сочетания видов информации о важности критериев и их шкале представлены в табл. 5.1. Каждая ее рабочая клетка с координатами (i, j) соответствует определенному сочетанию видов информации и в ней отмечен подходящий метод теории важности критериев. Например, клетка (3, 1) соответствует точной количественной информации о важности критериев с порядковой шкалой, и ей соответствуют методы, рассмотренные в главе 2. Всем клеткам строки с номером $i = 0$ соответствует метод 0–(1–4); это означает, что совершенствование шкалы критериев при отсутствии информации об их важности не позволяет расширить отношение Парето P^0.

Нумерация строк и столбцов таблице соответствует направлениям уточнения информации о предпочтениях. Это означает, что при анализе многокритериальной задачи движение от одного сочетания видов информации к другому следует осуществлять, переходя из текущей клетки в верхнюю или правую смежную с ней клетку. Например, если имеется качественная информация о важности критериев Ω с порядковой шкалой – текущая клетка (1, 1), – то можно либо уточнить информацию о важности до интервальной информации (Θ) – перейти в клетку (1, 2), – либо получить качественную информацию о росте предпочтений вдоль шкалы D – перейти в клетку (2,1). Заметим, что клетки столбцов с номерами $j = 3$ и $j = 4$ соответствуют видам информации о росте предпочтений вдоль шкалы критериев, которые выше не рассматривались.

Подчеркнем, что проведенное решение задачи о студентах фактически осуществлялось в рамках итеративного подхода: вначале использовалась качественная информация о важности критериев, потом была привлечена количественная информация о важности, и, наконец, была добавлена качественная информация о росте предпочтений вдоль шкалы критериев.

2*. Клетки столбца с номером $j = 3$ соответствуют интервальной информации о росте предпочтений вдоль шкалы критериев, которая состоит из оценок вида:

$$a_k < \frac{u_0(k) - u_0(k-1)}{u_0(k+1) - u_0(k)} < b_k \,, \tag{5.1}$$

Таблица 5.1. Сочетания видов информации о предпочтениях и соответствующие им методы

<table>
<tr><td colspan="4" rowspan="3">Информация:
↓ о важности критериев
о шкале критериев →</td><td colspan="4">Информация о шкальных градациях</td></tr>
<tr><td colspan="2">Качественная</td><td colspan="2">Количественная</td></tr>
<tr><td>O (упорядочение шкальных градаций по предпочтительности)</td><td>D (упорядочение разностей ценностей шкальных градаций)</td><td>(Λ) (интервальные оценки ценностей шкальных градаций)</td><td>Λ (точные оценки ценностей шкальных градаций)</td></tr>
<tr><td colspan="4">j \ i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Информация о важности критериев</td><td rowspan="2">Количественная</td><td>Θ (оценки важности точные)</td><td>3</td><td>Аналитические методы</td><td>Аналитические методы</td><td>Оптимизационные методы</td><td>Аналитический метод</td></tr>
<tr><td>(Θ) (оценки важности интервальные)</td><td>2</td><td>Оптимизационные методы</td><td>Оптимизационные методы</td><td>Оптимизационные методы</td><td>Оптимизационные методы</td></tr>
<tr><td>Качественная</td><td>Ω (упорядочение критериев по важности)</td><td>1</td><td>Аналитические методы</td><td>Аналитические методы</td><td>Оптимизационные методы</td><td>Аналитические методы</td></tr>
<tr><td colspan="2">∅ (отсутствует)</td><td>0</td><td colspan="4">Аналитический метод</td></tr>
</table>

где $u_0(k)$ – ценность шкальной градации k. Указанная оценка показывает, что отношение приращения предпочтений при переходе от градации $k - 1$ к градации k к приращению предпочтений при переходе от градации k к градации $k + 1$ лежит в пределах от a_k до b_k. Информацию такого вида удобнее получать, используя пары равноважных критериев. Предположим для простоты записи, что первый и второй критерии имеют одинаковую важность. Будем рассматривать векторные оценки, различающиеся только первыми двумя компонентами (т.е. у которых третьи компоненты равны между собой, четвертые являются равными, и т.д.), и поэтому выписывать будем только эти первые компоненты. Рассмотрим две векторные оценки (k, k) и $(k-1, k+1)$. Поскольку рост предпочтений вдоль шкалы критериев замедляется, то первая из них предпочтительнее второй: $(k, k)P(k-1, k+1)$. Однако если при некотором натуральном числе $r > 1$ оказывается, что векторная оценка $(k-1, k+r)$ предпочтительнее, чем (k, k), т.е. верно $(k-1, k+r)P(k, k)$, то справедливо двойное неравенство (5.1) при $a_k = 1$ и $b_k = r$.

Клетки столбца с номером $j = 4$ соответствуют случаю, когда величины $u_0(k)$ являются результатом точного количественного оценивания ценности шкальных градаций. В рассматриваемом случае вводится в рассмотрение аддитивная функция ценности:

$$u(y) = \beta_1 u_0(y_1) + \beta_2 u_0(y_2) + \ldots + \beta_m u_0(y_m), \qquad (5.2)$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ – величины важности критериев $K_1, K_2, \ldots, K_m$. В случае наличия количественной информации о важности Θ величины β_i известны (с точностью до постоянного множителя). Это сочетание видов информации соответствует клетке (3, 4) таблицы, а функция u позволяет сравнить по предпочтительности любые две векторные оценки:

векторная оценка y более предпочтительна, чем z, когда $u(y) > u(z)$;

векторные оценки y и z одинаковы по предпочтительности, когда $u(y) = u(z)$.

Таким образом, чем больше значение функции ценности $u(K(v))$, тем предпочтительнее вариант v. Следовательно, при наличии функции ценности (5.2) с известными величинами важности β_i и величинами ценности шкальных градаций $u_0(k)$ можно всегда найти оптимальный вариант: им будет вариант v^*, для которого значение функции ценности $u(K(v^*))$ максимально. Однако построение функции ценности – весьма сложная и трудоемкая проблема, так как требует получения сложной количественной информации о предпочтениях. Поэтому шаги, предусматривающие построение функции ценности, если в них возникнет необходимость и имеется возможность их осуществления, должны быть последними при анализе многокритериальной задачи в рамках итеративного подхода.

Отметим, что если верно соотношение $yP^{\Theta}z$ или $yI^{\Theta}z$, то справедливо соответственно неравенство $u(y) > u(z)$ или равенство $u(y) = u(z)$. Если же функция $u_0(k)$ удовлетворяет условию (которое соответствует замедлению роста предпочтений вдоль шкалы критериев):

$$u_0(k) - u_0(k-1) > u_0(k+1) - u_0(k), \quad k = 2, \ldots, q-1,$$

то при справедливости соотношений $yP^{\Theta D}z$ или $yI^{\Theta D}z$ выполняется соответственно неравенство $u(y) > u(z)$ или же равенство $u(y) = u(z)$.

Поэтому требование непротиворечивости уточнения информации о предпочтениях выполняется.

3. И последнее замечание. Понятно, что проведение интерактивной процедуры согласно описанным выше правилам – дело весьма трудоемкое и сложное даже при использовании современных информационных и вычислительных технологий. Поэтому естественная область применения итеративного подхода – анализ сложных и ответственных задач принятия решений уникального или штучного (т.е. редко повторяющегося) характера. Однако и для типовых, нередко решаемых задач он представляется полезным: прежде чем строить функции ценности (в частности, обобщенные критерии), стоит воспользоваться методами теории важности критериев, получив хотя бы качественную информацию о важности критериев и их шкале. Это может привести к искомому решению задачи; в противном случае позволит составить ясное представление о том, какие результаты являются вполне надежными, а какие можно получить лишь после принятия трудно проверяемых допущений и недостаточно надежных экспертных оценок[17].

§ 5.3. Пример решения многокритериальной задачи выбора методами теории важности критериев

Нет ничего практичнее хорошей теории.

Альберт Эйнштейн или/и *Нильс Бор, Энрико Ферми, Эрнест Резерфорд, Оскар Майер, Луи де Бройль, Людвиг Больцман, Густав Кирхгоф*

1. Для того чтобы освоить тот или иной метод анализа многокритериальных задач принятия решений и «прочувствовать» его достоинства и недостатки, человек сам должен выступить в роли ЛПР и применить этот метод к анализу «своей» задачи (очень полезно также поработать консультантом-аналитиком). Поэтому при изучении дисциплин, связанных с математической теорией принятия решений, таких, как «Анализ и поддержка решений» и «Принятие решений при многих критериях», студенты Высшей школы

---

[17] Наконец, можно использовать согласительные, или суррогатные решения. Для знакомства с этими понятиями можно обратиться к статьям:

Подиновский В.В. Согласительные решения многокритериальных задач выбора // Проблемы управления. 2017. № 2. С. 17–26.

Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Многокритериальный выбор методами теории важности критериев при неточной информации о предпочтениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 9. С. 1475–1483.

экономики получают домашнее задание: самостоятельно сформулировать задачу принятия решения и затем проанализировать ее с использованием изученного метода. Задачи оказываются самыми разными – от покупки нового ноутбука, стиральной машины или домашнего телескопа до выбора иностранного языка (помимо уже освоенного) для изучения, места проведения очередного отпуска, квартиры для снятия в аренду и т.д. Поскольку четкая постановка задачи (включающая определение ЛПР, формулировку цели, выбор критериев и формирование вариантов) играет определяющую роль для получения полезных результатов, то вначале каждый студент на аудиторном занятии представляет свою задачу и ее постановка активно обсуждается. После проведения студентами анализа своих задач разбираются полученные результаты.

Далее для примера приводится задача, сформулированная и проанализированная при помощи методов теории важности критериев студентом магистратуры Никитой Винокуровым при выполнении домашнего задания в первом семестре 2011/12 учебного года. Оригинальный текст отчета о домашнем задании отредактирован и дополнен, но форма изложения от первого лица оставлена.

2. Мой племянник пойдет в школу будущей осенью. Поэтому встала задача выбора школы для его учебы. Лицом, принимающим решение, являются его родители. А я выступаю в роли аналитика-консультанта.

После предварительного анализа для выбора был составлен список школ:

A. «Елена-Сервис».

B. Школа № 12 (обучение по Мишпахтейну).

C. Гимназия № 19.

D. Школа № 177.

E. Школа № 18.

F. Школа № 39.

Для сравнительной оценки школ будут использоваться шесть критериев:

K_1 – Удаленность от дома 1 (рассчитывается в минутах)[43].

K_2 – Удаленность от дома 2 (рассчитывается в минутах).

K_3 – Качество здания (субъективная оценка по 10-балльной шкале).

K_4 – Качество обучения (субъективная оценка по 10-балльной шкале).

K_5 – Количество учеников на одного учителя.

K_6 – Стоимость обучения (за год в рублях).

Критерии K_1, K_2, K_5 и K_6 необходимо минимизировать, а критерии K_3 и K_4 – максимизировать.

Исходные данные, полученные от родителей, представлены табл. 5.2.

---

[43] Ребенок может жить поочередно в двух квартирах.

Таблица 5.2. Оценки школ по критериям

Критерии / Школы	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
A	25	45	7	10	15	120 000
B	6	30	6	8	30	50 000
C	40	25	9	8	60	30 000
D	30	50	10	7	35	5000
E	15	40	5	6	30	15 000
F	12	40	6	6	25	15 000

Попарно сравнивая варианты с использованием отношения Парето, убеждаемся, что верно FP_0E, т.е. школа *E* является доминируемой и поэтому из дальнейшего рассмотрения исключается.

3. Вначале необходимо привести все критерии к однородному виду. В качестве общей шкалы была принята 5-балльная шкала. Приведение осуществляется с помощью табл. 5.3.

Таблица 5.3. Таблица перевода значений критериев в градации общей шкалы

Критерии / Градации	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
1	> 45	> 45	1, 2, 3	1, 2, 3	> 60	> 120 000
2	(30; 45]	(30; 45]	4, 5	4, 5	36–60	(60 000; 120 000]
3	(20; 30]	(20; 30]	6, 7	6, 7	21–35	(25 000; 60 000]
4	(10; 20]	(10; 20]	8, 9	8, 9	11–20	(10 000; 25 000]
5	(0;10]	(0;10]	10	10	<10	(0; 10 000]

Оценки школ по однородным критериям представлены в табл. 5.4.

Таблица 5.4. Оценки школ по пятибалльной шкале

Критерии / Школы	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
A	3	2	3	5	4	2
B	5	3	3	4	3	3
C	2	3	4	4	2	3
D	3	1	5	3	3	5
F	4	2	3	3	3	4

4. Теперь необходимо ранжировать критерии по важности. Для этого буду предлагать родителям племянника для сравнения по предпочтительности векторные оценки, различающиеся перестановкой компонент, соответствующих сопоставляемым критериям. Вначале сравниваются первый критерий со вторым. Результаты сравнения для нескольких пар векторных оценок:

$$(\mathbf{5}, \mathbf{1}, 1, 1, 1)\, P(\mathbf{1}, \mathbf{5}, 1, 1, 1),\ (\mathbf{5}, \mathbf{1}, 5, 5, 5)\, P(\mathbf{1}, \mathbf{5}, 5, 5, 5),$$

$$(\mathbf{4}, \mathbf{2}, 1, 1, 1)\, P(\mathbf{2}, \mathbf{4}, 1, 1, 1),\ (\mathbf{5}, \mathbf{3}, 5, 3, 1)\, P(\mathbf{3}, \mathbf{5}, 5, 3, 1).$$

Затем родителям был задан вопрос: «Если школы различаются лишь перестановкой значений первых двух критериев – удаленностей от домов 1 и 2, а значения каждого из остальных критериев для них равны, то верно ли, что предпочтительнее та школа, для которой удаленность от дома 1 меньше, чем от дома 2?». После получения на него положительного ответа было установлено, что первый критерий важнее второго, т.е. принято сообщение $1 \succ 2$.

Аналогичным образом сравнивались по важности другие пары критериев. В итоге критерии оказались проранжированными согласно полученной качественной информации о важности Ω:

$$4 \succ 1 \succ 5 \sim 3 \succ 2 \sim 6.$$

5. Пользуясь полученной информацией Ω, можно сравнивать школы по предпочтительности. В итоге были выделены три школы, недоминируемые по отношению P_Ω: это школы A («Елена-Сервис»), B (Школа № 12) и D (Школа № 177). Построение этого отношения рассмотрено в следующем пункте.

6*. Информации Ω ставлю в соответствие величины важности критериев

$$\beta_1^\Omega = 3\,,\ \beta_2^\Omega = 1\,,\ \beta_3^\Omega = 2\,,\ \beta_4^\Omega = 4\,,\ \beta_5^\Omega = 2\,,\ \beta_6^\Omega = 1\,,$$

и назначаю число $d = 0$. Векторы $\beta^k(y^j)$ и $\beta^k_\uparrow(y^j)$, из которых составляются матрицы $\mathrm{B}^\Omega(y^j)$ и $\mathrm{B}^\Omega_\uparrow(y^j)$, представлены в табл. 5.5 и 5.6.

Таблица 5.5. Векторы $\beta^k(y^j)$ – строки матриц $\mathrm{B}^\Omega(y^j)$

k \ j	1 (A)	2 (B)	3 (C)	4 (D)	6 (F)
1	(0,0,0,0,0,0)	(0,0,0,0,0,0)	(0,0,0,0,0,0)	(0,1,0,0,0,0)	(0,0,0,0,0,0)
2	(0,1,0,0,0,1)	(0,0,0,0,0,0)	(3,0,0,0,2,0)	(0,1,0,0,0,0)	(0,1,0,0,0,0)
3	(3,1,2,0,0,1)	(0,1,2,0,2,1)	(3,1,0,0,2,1)	(3,1,0,4,2,0)	(0,1,2,4,2,0)
4	(3,1,2,0,2,1)	(0,1,2,4,2,1)	(3,1,2,4,2,1)	(3,1,0,4,2,0)	(3,1,2,4,2,1)

Таблица 5.6. Векторы $\beta^k(y^j)$ – строки матриц $\mathrm{B}^{\Omega}_{\uparrow}(y^j)$

$k \backslash j$	1 (A)	2 (B)	3 (C)	4 (D)	6 (F)
1	(0,0,0,0,0,0)	(0,0,0,0,0,0)	(0,0,0,0,0,0)	(0,0,0,0,0,1)	(0,0,0,0,0,0)
2	(0,0,0,0,1,1)	(0,0,0,0,0,0)	(0,0,0,0,2,3)	(0,0,0,0,0,1)	(0,0,0,0,0,1)
3	(0,0,0,1,2,3)	(0,0,1,1,2,2)	(0,0,1,1,2,3)	(0,0,1,2,3,4)	(0,0,1,2,2,4)
4	(0,1,1,2,2,3)	(0,1,1,2,2,4)	(1,1,2,2,3,4)	(0,0,1,2,3,4)	(0,1,2,2,3,4)

При помощи табл. 5.6 путем попарного сопоставления векторов, соответствующих очередной паре сравниваемых пяти школ, выясняю, что справедливы только три соотношения:

$$AP_{\Omega}C,\ BP_{\Omega}C,\ BP_{\Omega}F.$$

Следовательно, недоминируемы школы A, B и D (между собой они несравнимы по предпочтительности).

7. Качественная информация о важности не позволила выделить единственную школу. Поэтому получим интервальную информацию о важности критериев. Сначала сравниваю по важности первый и четвертый критерии, предлагая ЛПР выбор согласно схеме, представленной на рис. 5.1 (с учетом того, что для школ A, B и D критерий K_4 не принимает значений 1 и 2).

$$\bullet \xrightarrow{1} (5, *, *, 3, *, *) \quad \overset{?}{\leftrightarrow} \quad \bullet \begin{cases} \xrightarrow{p} (5, *, *, 5, *, *) \\ \xrightarrow{1-p} (3, *, *, 5, *, *) \end{cases}$$

Рис. 5.1. Схема для оценивания степени превосходства в важности четвертого критерия над первым

Вопрос формулировался следующим образом: «Что вы предпочтёте: отдать ребенка в школу, в которой качество обучения отличное, а удаленность от дома 1 около 25 минут, или вначале участвовать в лотерее и затем отдать его в школу, которая будет соответствовать выпавшей векторной оценке – либо школа с отличным качеством обучения и в 5 минутах от дома 1, либо школа с удовлетворительным качеством обучения и в 25 минутах от дома 1 (значения всех остальных критериев для школ одинаковы)?».

При вероятности $p = 0{,}95$ ЛПР предпочло участвовать в лотерее, а при $p = 0{,}9$ затруднилось с ответом. При $p = 0{,}7$ и $p = 0{,}8$ ЛПР предпочло выбрать школу с векторной оценкой (**5**, *, *, **3**, *, *), а при $p = 0{,}9$ затруднилось с ответом. Поэтому $p^+ = 0{,}95$ и $p^- = 0{,}8$.

Согласно табл. 3.1, было принято, что степень превосходства в важности h первого критерия над вторым лежит в пределах от 5 до 20, т.е. в интервале (5, 20).

Аналогичным способом были получены сведения о превосходстве в важности первого критерия над пятым и третьего над шестым. В итоге имеем количественную интервальную информацию о важности критериев:

$$(\Theta) = \{4 \succ^{(5;\,20)} 1,\ 1 \succ^{(1{,}25;\,2)} 3,\ 3 \sim 5,\ 5 \succ^{(1{,}25;\,2)} 2,\ 2 \sim 6\}.$$

При помощи системы DASS было установлено, что эта информация не позволяет сузить множество выбора: по отношению предпочтения $P_{(\Theta)}$ недоминируемыми остались все школы A, B и D (между собой они несравнимы по предпочтительности).

8. На следующем шаге анализа была усовершенствована шкала критериев. Для этого сравнивались векторные оценки, различающиеся лишь третье и пятой компонентами: эти компоненты соответствуют равным по важным третьему и пятому критериям. По мнению ЛПР, рассмотренные пары векторных оценок связаны по предпочтительности следующим образом:

$$(*, *, \mathbf{4}, *, \mathbf{4}, *)P(*, *, \mathbf{3}, *, \mathbf{5}, *),\ (*, *, \mathbf{3}, *, \mathbf{3}, *)P(*, *, \mathbf{2}, *, \mathbf{4}, *),$$
$$(*, *, \mathbf{2}, *, \mathbf{2}, *)P(*, *, \mathbf{1}, *, \mathbf{3}, *).$$

Следовательно, получена информация D: рост предпочтений вдоль шкалы критериев замедляется. При помощи системы DASS было установлено, что информация $(\Theta)\&D$ позволяет сузить множество выбора до двух школ A и B, так как школа D доминируется школой A, т.е. верно $AP_{(\Theta)D}D$. Школы A и B несравнимы по предпочтительности.

9. После обсуждения с ЛПР интервал для степени превосходства в важности четвертого критерия над первым был сужен до (10, 20), т.е. информация (Θ) была заменена на

$$(\Theta') = \{4 \succ^{(10;\,20)} 1,\ 1 \succ^{(1{,}25;\,2)} 3,\ 3 \sim 5,\ 5 \succ^{(1{,}25;\,2)} 2,\ 2 \sim 6\}.$$

Однако и она не позволила сузить множество выбора: недоминируемыми остались школы A и B.

10*. Далее была получена дополнительная информация для дальнейшего усовершенствования шкалы критериев. Для этого сравнивались векторные оценки, различающиеся лишь третьей и пятой компонентами, которые соответствуют равным по важности третьему и пятому критериям. По мнению ЛПР, рассмотренные им пары векторных оценок связаны по предпочтительности следующим образом:

$$(*, *, \mathbf{1}, *, \mathbf{4}, *)P(*, *, \mathbf{2}, *, \mathbf{2}, *),\ (*, *, \mathbf{2}, *, \mathbf{5}, *)P(*, *, \mathbf{3}, *, \mathbf{3}, *).$$

Следовательно, получена интервальная информация (Λ) вида (5.1) о росте предпочтений вдоль шкалы критериев, состоящая из оценок:

$$1 < \frac{u_0(k) - u_0(k-1)}{u_0(k+1) - u_0(k)} < 2\,, \quad k = 2, 3, 4.$$

Расчетами, проведенными при помощи системы DASS, было установлено, что информация $(\Theta')\&(\Lambda)$ позволяет выделить единственную школу A как лучшую для учебы ребенка, так как школа B оказывается доминируемой: верно $AP_{(\Theta')(\Lambda)}B$.

Таким образом, решить задачу выбора школы – выделить школу A как лучшую для обучения ребенка – удалось с использованием интервальной информации о важности критериев и росте предпочтений вдоль их шкалы.

Выводы

1. Для повышения надежности результатов решения многокритериальных задач при возможно меньшем объеме запрашиваемой у ЛПР информации о предпочтениях следует использовать итеративный подход. Для практической реализации итеративного подхода нужно иметь богатый арсенал подходящих методов.

2. Набор методов теории важности критериев, разработанных к настоящему времени, является достаточно полным для их использования в рамках итеративного подхода.

3. Естественная область применения итеративного подхода – анализ сложных и ответственных задач принятия решений уникального или штучного (т.е. редко повторяющегося) характера.

4. Решение задачи о студентах фактически осуществлялось в рамках итеративного подхода: вначале использовалась качественная информация о важности критериев, потом была привлечена количественная информация о важности, и, наконец, была добавлена качественная информация о росте предпочтений вдоль шкалы критериев.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем состоит итеративный подход к анализу задач принятия решений? Укажите на сильные и слабые стороны этого подхода.

2. Сформулируйте требование непротиворечивости к уточнению информации о предпочтениях и объясните, почему оно должно выполняться.

3. Почему методы теории важности критериев позволяют реализовывать итеративный подход при анализе многокритериальных задач?

4*. Какой смысл приобретает функция ценности (5.2) в случае, когда все критерии равноважны, $u_0(k) = k$ для всех градаций k их шкалы и в роли величин важности β_i выступают коэффициенты важности α_i?

5*. Предположим, что для функции ценности (5.2) справедливо неравенство $u(y) > u(z)$. Докажите, что если функцию u преобразовать в функцию $\tilde{u}(k)$, заменив $u_0(k)$ на $au_0(k) + b$, где $a > 0$, а величины важности β_i – величинами $\tilde{\beta}_i = t\beta_i$, где $t > 0$, то будет верно неравенство $\tilde{u}(y) > \tilde{u}(z)$.

Послесловие

> Тяжкий жребий – писать в наши дни математические книги... Если не соблюдать надлежащей строгости в формулировках теорем, пояснениях, доказательствах и следствиях, то книгу нельзя считать математической. Если неукоснительно соблюдать все требования строгости, то чтение книги становится весьма затруднительным.
>
> *Иоганн Кеплер*

Теория важности критериев в настоящее время оказалась востребованной практикой принятия решений и продолжает активно развиваться. На основе ее идей и методов создаются компьютерные системы поддержки принятия решений, как проблемно-ориентированные, так и общего назначения, в том числе учебные. Как уже указывалось в Предисловии, одну их таких систем – системы DASS – можно бесплатно скачать с сайтов http://mcodm.ru/soft/dass/ и criteria-importance-theory.ru.

В настоящей небольшой книжке далеко не все идеи, положения и методы теории важности критериев удалось даже хотя бы упомянуть. Читатель, желающий глубже ознакомиться с этой теорией, может обратиться к научной литературе, указанной в приложении.

Приложение

История и библиография

Истина долго проникала в мое сознание ...

Гастон Леру. «Призрак Оперы»

1. Теория качественной важности критериев, называемой симметрической, начала создаваться в 70-е – 80-е годы прошлого века. Первыми работами, содержащими базовые идеи и первые основные результаты этой теории, были статьи[1]:

1. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1975. № 2. С. 330–344. *Английский перевод*: Podinovskii V.V. Multicriterial problems with uniform equivalent criteria. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1975. V. 15. No 2. P. 47–60.
2. *Подиновский В.В.* Задачи с одинаковыми по важности критериями // Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М.: Советское радио. 1975. С. 171–183. 2-е изд. М.: ЛЕНАНД, 2015. С. 171–183.
3. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности однородными критериями // Автоматика и телемеханика, 1976. № 11. С. 118–127. *Английский перевод*: Podinovskii V.V. Multicriterial problems with importance-ordered criteria. Automation and remote control, 1976. V. 37. No 11, part 2. P. 1728–1736.

---

[1] Основные научные результаты из этих статей были представлены в докладах на конференциях и опубликованы в работах:

Подиновский В.В. Задачи принятия решений по нескольким однородным равноценным критериям // III Всес. конф. по теории игр. Тезисы докл. Одесса: Изд-во Одесского гос. ун-та, 1974. С. 131–132.

Подиновский В.В. Многокритериальные задачи синтеза сложных систем с неравноценными критериями // Автоматизированные системы планирования и управления. Ереван: Айастан, 1975. С. 106–109.

4. *Подиновский В.В.* Двухкритериальные задачи с неравноценными критериями // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1977. № 5. С. 44–50. *Английский перевод*: Podinovskii V.V. Two-criterial problem with unequally rated criteria. Engineering Cybernetics. 1977. V. 15. No 5. P. 30–36.

Затем был опубликован целый ряд работ, в том числе:

5. *Подиновский В.В.* Коэффициенты важности критериев в задачах принятия решений. Порядковые, или ординальные, коэффициенты важности // Автоматика и телемеханика, 1978. № 10. С. 130–141. *Английский перевод*: Podinovskii V.V. Importance coefficients of criteria in decision making problems. Serial, or ordinal importance coefficients. Automation and Remote Contro, 1978. V. 39. P. 1514–1524.

6. *Подиновский В.В.* О построении множества эффективных стратегий в многокритериальных задачах с упорядоченными по важности критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1978. Т. 18. № 4. С. 908–915. *Английский перевод*: Podinovskii V.V. Construction of the set of effective strategies in a multi-criterion problem with importance-ordered criteria // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1978. V. 18. No 4. P. 88–95.

7. *Яшина Н.П.* Упорядочение множества векторных оценок при наличии информации о сравнительной важности групп критериев // Депонир. рукопись № 2903-В86. М.: ВИНИТИ, 1986.

8. *Осипова В.А., Подиновский В.В.* Диалоговое восстановление многокритериальной структуры предпочтений // Модели и методы оптимизации экономических систем. Новосибирск: Наука, 1987. С. 57–69.

9. *Барышников Ю.А.* О среднем числе вариантов, недоминируемых по сравнениям В.В. Подиновского // Автоматика и телемеханика, 1990. № 6. С. 161–167.

10. *Барышников Ю.М., Подиновский В.В., Поляшук М.В.* Эффективность решающих правил в многокритериальных задачах выбора нескольких объектов // Автоматика и телемеханика, 1990. № 12. С. 136–142. *Английский перевод*: Baryshnikov Yu.M., Podinovskii V.V., Polyashuk M.V. Effectiveness of decision rules in multicriterion choice of several best alternatives. Automation and Remote Control, 1991. V. 51. No 12, part 2. P. 1719–1724.

11. *Podinovski V.V.* Problems with importance-ordered criteria // User-Oriented Methodology and Techniques of Decision Analysis and Support / J. Wessels and A.P. Wierzbicki (Eds.). Lecture Notes in Economics and Math. Systems. V. 397. Berlin: Springer, 1993. P. 150–155.

12. *Алексеев Н.С., Осипова В.А.* Декомпозиция задачи выбора оптимальных решений при аксиоматическом подходе к оценке сравнительной важности критериев // Депонир. рукоп. № 2218-В94. М.: ВИНИТИ, 1994.

13. *Алексеев Н.С.* Алгоритмы многокритериального сравнения вариантов решения при ранжированных по важности критериях // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1997. Т. 36, № 9. С. 60–70.

Наиболее полно результаты теории качественной важности, полученные до 1980 г., изложены в главе 4 монографии:

14. *Подиновский В.В.* Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Современное состояние теории исследования операций / Под ред. Н.Н. Моисеева. М.: Наука, 1979. С. 117–145,

а более поздние результаты в § 8.3 и § 8.4 монографий:

15. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи оптимизации с упорядоченными по важности критериями. Оценка эффективности решающих правил в дискретных многокритериальных задачах // Методы оптимизации в экономико-математическом моделировании / Под ред. Е.Г. Гольштейна. М.: Наука, 1991. С. 308–336.

16. *Podinovski V.V.* Multicriteria optimization problems involving importance-ordered criteria. Efficiency estimation of decision rules in discrete multiobjective problems // Modern Mathematical Methods of Optimization / K.-H. Elster (Ed.). Berlin: Akademie, 1993. P. 254–277.

Глава 4 монографии [14] содержит также и много нового материала, в том числе определения понятий равенства и превосходства в важности для групп критериев, определения понятий сравнительных степеней превосходства в важности, и др.

Отдельные результаты качественной теории важности получили дальнейшее развитие в нескольких научных монографиях:

17. *Березовский Б.А., Борзенко В.И., Кемпнер Л.М.* Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации. М.: Наука, 1981.

18. *Вилкас Э.Й., Майминас Е.З.* Решения: теория, информация, моделирование. М.: Радио и связь, 1981.

19. *Березовский Б.А., Барышников Ю.М., Борзенко В.И., Кемпнер Л.М.* Многокритериальная оптимизация. Математические аспекты. М.: Наука, 1989.

20. *Полищук Л.И.* Анализ многокритериальных экономико-математических моделей. Новосибирск: Наука, 1989.

21. *Вилкас Э.Й.* Оптимальность в играх и решениях. М.: Наука, 1990.

2. Теория количественной важности, также именуемой симметрической, была заложена на рубеже первого и второго тысячелетий. Первыми работами были статьи[2]:

22. *Подиновский В.В.* Количественные оценки важности критериев в многокритериальной оптимизации // Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы. 1999. № 5. С. 22–25. *Английский перевод*: Podinovskii V.V. Quantitative estimators of the importance of criteria in multicriteria optimization. Automatic Documentation and Mathematical Linguistic, 1999. V. 33. No 3. P. 12–18.

23. *Подиновский В.В.* Количественная важность критериев // Автоматика и телемеханика. 2000. № 5. С. 110–123. *Английский перевод*: Podinovskii V.V. Quantitative importance of criteria. Automation and Remote Control, 2000. V. 61. No 5, part 2. P. 817–828.

24. *Podinovski V.V.* The quantitative importance of criteria for MCDA // Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 2002. V. 11. P. 1–15.

Затем были опубликованы статьи:

25. *Подиновский В.В.* Интервальные оценки важности критериев в многокритериальной оптимизации // Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы, 2002. № 10. С. 19–21. *Ан-*

[2] Основные результаты из них были представлены в докладе: *Подиновский В.В.* Важность критериев // Тр. Междунар. конф. по пробл. управления. Т. 2. М.: ИПУ РАН, 1999. С. 336.

глийский перевод: Podinovskii V.V. Interval estimators for criterion importance in multicriterion optimization // Automatic Documentation and Mathematical Linguistics, 2002. V. 36. Part 5. P. 46–50.

26. *Подиновский В.В.* Количественная важность критериев с дискретной шкалой первой порядковой метрики // Автоматика и телемеханика. 2004. № 8. С. 196–203. *Английский перевод*: Podinovskii V.V. The quantitative importance of criteria with discrete first-order metric scale // Automation and Remote Control, 2004. V. 65. No 8. P. 1348–1354.

27. *Подиновский В.В.* Информация о важности критериев и их шкалах в многокритериальной оптимизации // Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы, 2005. № 1. С. 22–26. *Английский перевод*: Podinovski V.V. Information on criteria and scale importance in multicriterion optimization // Automatic Documentation and Mathematical Linguistics, 2005. V. 39. No 1. P. 9–15.

28. *Подиновский В.В.* Количественная важность критериев с непрерывной шкалой первой порядковой метрики // Автоматика и телемеханика, 2005. № 9. С. 129–137. *Английский перевод*: Podinovskii V.V. The quantitative importance of criteria with a continuous first-order metric scale // Automation and Remote Control, 2005. V. 66. No 9. P. 1478–1485.

29. *Подиновский В.В.*, *Раббот Ж.М.* Количественная важность критериев со шкалой первой порядковой метрики и выпуклыми предпочтениями // Автоматика и телемеханика, 2006. № 3. С. 186–191. *Английский перевод*: Podinovskii V.V., Rabbot Zh.M. Quantitative importance of criteria with the scale of the first ordinal metric and convex preferences. Automation and Remote Control, 2006. V. 67. No 3. P. 512–515.

30. *Подиновский В.В.* Интервальные оценки важности критериев в многокритериальной оптимизации // Информационные технологии моделирования и управления, 2006. № 8 (33). С. 975–979.

31. *Подиновский В.В.* Интервальная информация о важности критериев в анализе многокритериальных задач принятия решений // Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы, 2007. № 6. С. 15–18.

32. *Podinovski V.V.* On the use of importance information in MCDA problems with criteria measured on the first ordered metric scale // Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 2009. V. 15. P. 163–174.

В 2007 году вышло учебное пособие по теории важности критериев, популярно излагающее идеи и подходы этой теории к анализу многокритериальных задач:

33. *Подиновский В.В.* Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / Уч. пособие. М.: Физматлит, 2007.

Через пять лет расширенное издание этого пособия вышло в Болгарии:

34. *Подиновский В.В.* Основы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. Варна: ИК «ХРИСТ», 2012. *Болгарский перевод*: Основи на терията за важност на критериите в многокритериалните задачи за вземане на решения. България: ИК «ДЕСК», 2012.

3. Теория важности критериев, как количественной, так и качественной, активно развивалась в последнее десятилетие:

35. *Подиновский В.В.* Об одном подходе к решению задач нелинейного программирования при неточной информации о коэффициентах важ-

ности и градациях шкал критериев в аддитивной функции ценности // Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы, 2010. № 4. С. 26–28. *Английский перевод*: Podinovski V.V. On an approach to the solution of nonlinear programming problems in inexact information on criterion importance coefficients and scale gradation in the additive value function // Automatic Documentation and Mathematical Linguistics, 2010. V. 44. No 3. P. 26–28.

36. *Салтыков С.А.* Экспериментальное сопоставление методов взвешенной суммы, теории полезности и теории важности критериев для решения многокритериальных задач с балльными критериями // Управление большими системами, 2010. Вып. 29. С. 16–41.

37. *Подиновский В.В.* Теория важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений при неопределенности. I. Исходные положения // Информационные технологии моделирования и управления. 2010, № 5 (64). С. 599–607.

38. *Нелюбин А.П., Подиновский В.В.* Билинейная оптимизация в анализе многокритериальных задач методами теории важности критериев при неточной информации о предпочтениях // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2011. Т. 51. № 5. С. 802–813. *Английский перевод*: Nelyubin A.P., Podinovski V.V. Bilinear optimization in the analysis of multicriteria problems using criteria importance theory under inexact information about preferences // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2011. V. 51. No. 5. P. 751–761.

39. *Подиновский В.В.* Качественная важность критериев и аддитивность многокритериальной структуры предпочтений // Открытое образование, 2011. № 2 (85). Ч. 2. С. 189–192.

40. *Нелюбин А.П., Подиновский В.В.* Методы оптимизации в анализе многокритериальных задач принятия решений при интервальной информации о важности критериев или ценности шкальных градаций // Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы, 2011. № 8. С. 22–29. *Английский перевод*: Nelyubin A.P., Podinovski V.V. Optimization methods in multi-criteria decision making analysis with interval information on the importance of criteria and values of scale gradations // Automatic Documentation and Mathematical Linguistics, 2011. V. 45. No. 4. P. 202–210.

41. *Нелюбин А.П., Подиновский В.В.* Взаимосвязь качественной и количественной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Открытое образование, 2011. № 6 (89). С. 108–115.

42. *Podinovski V.V.* Qualitative importance of criteria and additive preference structure. In: Informational and Communication Technologies Theory and Practice: Proceedings of the International scientific conference ICTMC-2010 devoted to the 80th anniversary of I.V. Prangishvili. New York: Nova Science Publishers, 2011. P. 499–500.

43. *Подиновский В.В., Подиновская О.В.* Информация об изменении предпочтений вдоль шкалы однородных критериев для анализа многокритериальных задач принятия решений методами теории важности критериев // Информационные технологии моделирования и управления, 2011. № 4 (69). С. 407–417.

44. *Нелюбин А.П., Подиновский В.В.* Алгоритмическое решающее правило, использующее ординальные коэффициенты важности критериев со шкалой первой порядковой метрики // Журнал вычислительной мате-

матики и математической физики, 2012. Т. 52. № 1. С. 43–59. *Английский перевод*: Nelyubin A.P., Podinovski V.V. Algorithmic decision rule using ordinal criteria importance coefficients with a first ordinal metric scale // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2012. V. 52. No 1. P. 48–65.

45. *Нелюбин А.П., Подиновский В.В.* Аналитические решающие правила, использующие упорядоченность по важности критериев со шкалой первой порядковой метрики // Автоматика и телемеханика, 2012. № 5. С. 84–96. *Английский перевод*: Nelyubin A.P., Podinovski V.V. Analytical decision rules using importance-ordered criteria with a scale of the first ordinal metric // Automation and Remote Control, 2012. V. 73. No 5. P. 831–840.

46. *Нелюбин А.П.* Анализ устойчивости многокритериального выбора методами теории важности критериев при изменении интервальных оценок важности критериев // Открытое образование, 2012. № 2. С. 47–51.

47. *Подиновский В.В.* Теория важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений при неопределенности. II. Задачи с количественной информацией о важности критериев и вероятностях значений неопределенного фактора // Информационные технологии моделирования и управления, 2012. № 2 (74). С. 131–137.

48. *Подиновский В.В.* Теория важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений при неопределенности. III. Задачи с качественной информацией о важности критериев и количественной информацией о вероятностях значений неопределенного фактора // Информационные технологии моделирования и управления, 2012. № 3 (75). С. 186–193.

49. *Подиновский В.В.* Вероятностно-лексикографический максимин для многокритериальных задач принятия решений в условиях риска при наличии количественной информации о важности критериев // Открытое образование, 2012. № 5. С. 11–15.

50. *Nelyubin A.P., Podinovski V.V.* On the relationship between qualitative and quantitative importance of criteria in multicriterial decision making problems. In: Several problems of applied mathematics and mechanics / I. Gorgidze, T. Lominadze (Eds.). New York: Nova Publishers, 2012. P. 43–55.

51. *Подиновский В.В.* Количественная важность критериев и аддитивные функции ценности // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2013. Т. 53. № 1. С. 133–142.

52. *Nelyubin A.P.* Criteria importance theory: Sensitivity analysis of multicriterial choice using interval importance information // American Journal of Control Systems and Information Technology (Science Book Publishing House LLC), 2013. V. 1, No. 1. P. 13–17.

53. *Подиновский В.В., Подиновская О.В.* Новые многокритериальные решающие правила в теории важности критериев // Доклады академии наук. 2013. Т. 451. № 1. С. 21–23. *Английский перевод*: *Podinovski V.V., Podinovskaya O.V.* New multicriterial decision rules in criteria importance theory // Doklady Mathematics, 2013. V. 88. No. 1. P. 486–488.

54. *Нелюбин А.П.* Построение объясняющих цепочек наименьшей длины при упорядоченных по важности критериях с порядковой шкалой // Вестник Московского университета имени С.Ю. Витте. Серия 1: Экономика и управление, 2013. № 3(5). С. 54–62.

55. *Подиновский В.В., Подиновская О.В.* Подход теории важности критериев к задачам принятия решений с иерархической критериальной структурой // Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы, 2014. № 1. С. 1–6. *Английский перевод*: Podinovski V.V., Podinovskaya O.V. An approach of the criteria importance theory to decision making problems with hierarchical criterial structures // Automatic Documentation and Mathematical Linguistics, 2014. V. 48. No. 1. P. 1–5.

56. *Подиновская О.В., Подиновский В.В.* Анализ иерархических многокритериальных задач принятия решений методами теории важности критериев // Проблемы управления, 2014. № 6. С. 2–8.

57. *Нелюбин А.П., Подиновский В.В.* Аналитические решающие правила для упорядоченных по важности критериев со шкалой первой порядковой метрики общего вида // Автоматика и телемеханика, 2014. № 9. С. 97–107. *Английский перевод*: Nelyubin A.P., Podinovski V.V. Analytic decision rules for importance-ordered criteria with a first ordered metric scale in the general form. Automation and Remote Control, 2014. V. 75. P. 1618–1625.

58. *Podinovskaya O.V., Podinovski V.V.* Criteria importance theory for multicriterial decision making problems with a hierarchical structure // European Journal of Operational Research, 2017. V. 258. P. 983–992.

4. Подходы и методы теории важности критериев были реализованы в ряде компьютерных систем поддержки принятия многокритериальных решений (они были созданы коллективами разработчиков под руководством автора):

59. *Подиновский В.В.* Система, использующая информацию о важности критериев для анализа альтернатив (СИВКА) // Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы, 1998. № 3. С. 52–57. *Английский перевод*: Podinovski V.V. A system using information on criteria importance for analysis of alternatives. Automatic documentation and mathematical linguistics, 1998. V. 32. No 2. 40–48.

60. *Подиновский В.В., Коллеганов М.М., Мокшанцев А.О., Рыбалко М.В., Семенов В.Ю., Ткачев В.И., Худайгулов А.Ф.* Компьютерная система поддержки принятия многокритериальных решений «Бурка» // Информационные технологии моделирования и управления, 2007. № 6 (40). С. 720–724.

61. *Подиновский В.В.* Анализ задач многокритериального выбора методами теории важности критериев при помощи компьютерных систем поддержки принятия решений // Известия РАН. Теория и системы управления, 2008. № 2. С. 64–68. *Английский перевод*: Podinovski V.V. Analysis of multicriteria choice problems by methods of the theory of criteria importance, based on computer systems of decision making support // Journal of Computer and System Sciences International, 2008. V. 47. No 2. P. 221–225.

62. *Подиновский В.В., Потапов М.А., Нелюбин А.П., Соловьев И.С., Павлов А.А.* Система для выбора и анализа многокритериальных решений с неполными предпочтениями // Информационные технологии в науке, образовании и управлении, 2017. № 2. С. 50–57.

63. *Nelyubin A.P., Podinovski V.V., Potapov M.A.* System for solving multicriteria problems with fuzzy preferences // Journal of Physics: Conference Series, 2019. Ser. 1203, No. 1. 012070.

Ряд приложений теории важности критериев описаны в статьях

64. *Ефанов В.В., Подиновский В.В.* Решение многокритериальной задачи оптимизации систем разделения при проектировании космических аппаратов // Ракетная и космическая техника, 1982. № 1.

65. *Подиновский В.В., Грумондз В.Т., Осипова В.А., Алексеев Н.С.* Методы теории важности критериев в задачах динамического проектирования // Сборник трудов 1-й Московской международной конференции по исследованию операций. М.: ВЦ РАН, 1996. С. 82–86.

66. *Подиновский В.В.* Задача оценивания коэффициентов важности как симметрически-лексикографическая задача оптимизации // Автоматика и телемеханика, 2003. № 3. С. 150–162. *Английский перевод*: Podinovskii V.V. The problem of estimation of importance factors as a symmetric-lexicographic problem of optimization // Automation and Remote Control, 2003. V. 64. No 3. P. 480–492.

67. *Нехорошев С.Н., Подиновский В.В.* и др. Использование теории многокритериального выбора в системе поддержки принятия решений НЦУКС МЧС России // Технологии гражданской безопасности, 2008. № 1–2. С. 128–130.

68. *Салтыков С.А.* Снижение затрат на построение функции ценности при использовании решающих правил теории важности критериев по сравнению с традиционным подходом теории полезности // Управление большими системами, 2011. Вып. 34 (19). С. 5–29.

69. *Сидельников Ю.В.*, *Салтыков С.А.* Процедура отбора наиболее приемлемых разновидностей экспертных методов // Управление большими системами, 2010. Вып. 30. С. 35–66.

5. Теории симметрической важности критериев и ее приложениям посвящен ряд обзорных статей, в том числе:

70. *Подиновский В.В., Потапов М.А.* Важность критериев в многокритериальных задачах принятия решений: теория, методы, софт и приложения // Открытое образование, 2012. № 2. С. 55–61.

71. *Подиновский В.В., Потапов М.А., Нелюбин А.П., Подиновская О.В.* Теория важности критериев: современное состояние и направления дальнейшего её развития // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16–19 июня 2014 г. ИПУ РАН [Электронный ресурс]. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 7697–7702. http://vspu2014.ipu.ru/node/8581

72. *Nelyubin A.P.*, *Podinovski V.V.*, *Potapov M.A.* Methods of criteria importance theory and their software implementation. In: Kalyagin V., Pardalos P., Prokopyev O., Utkina I. (Eds) Computational Aspects and Applications in Large-Scale Networks. NET 2016. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2018. V. 247. Cham: Springer. P. 189–196.

73. *Подиновский В.В., Потапов М.А.* Анализ чувствительности решений многокритериальных задач по параметрическим частичным отношениям предпочтения // Автоматика и телемеханика, 2019. № 7. С. 142–154. *Английский перевод*: Podinovski V.V., Potapov M.A. Analysis of the sensitivity of solutions of multi-criteria problems based on parametric partial preference relations. Automation and Remote Control, 2019. V. 80. No. 7. P. 1294–1303.

6. Теория важности неоднородных критериев, именуемой также параметрической, которая в данной книге не рассматривалась, была заложена в статье:

74. *Подиновский В.В.* Об относительной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Многокритериальные задачи принятия решений / Под ред. С.В. Емельянова. М.: Машиностроение, 1978. С. 48–82.

В ней были предложены определения равенства и превосходства в важности отдельных неоднородных критериев и групп критериев, а также определения сравнений степеней превосходства в важности; были даны и решающие (задающие отношения предпочтения) правила для двухкритериальных задач с континуальными и дискретными критериями. Указанные определения, а также некоторые результаты были приведены также и в [15, 16].

Дальнейшие результаты теории важности для неоднородных критериев (имеющих континуальные шкалы, причем как неограниченные, так и ограниченные) были опубликованы в статье❸:

75. *Меньшикова О.Р., Подиновский В.В.* Построение отношения предпочтения и ядра в многокритериальных задачах с упорядоченными по важности неоднородными критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1988. № 5. С. 647–659. *Английский перевод*: Men'shikova O.R., Podinovskii V.V. Construction of the preference relation and the core in multicriterial problems with inhomogeneous criteria that are ordered with respect to importance. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1988, V. 28. No 3. P. 15–22.

Затем методы теории параметрической важности были применены для задач с интервальными оценками замещений критериев:

76. *Berman V.P., Naumov G. Ye., Podinovski V.V.* Interval value tradeoff: Theory, method, software, and applications / Multiple Criteria Decision Making. Berlin: Springer, 1992. P. 81–91.

77. *Berman V.P., Naumov G. Ye., Podinovski V.V.* Interval Value Tradeoffs Methodology and Techniques of Multi-Criteria Decision Analysis / User-Oriented Methodology and Techniques of Decision Analysis and Support. Berlin: Springer, 1993. P. 144–149.

В указанных статьях, помимо обзора теоретических результатов и их приложений, кратко описана основанная на них компьютерная система поддержки принятия решений MSITOS (система была создана в начале 90-х годов при участии автора). В следующей статье представлена более современная система DAM:

78. *Podinovski Vic.V.* A DSS for multiple criteria analysis with imprecisely specified trade-offs // European Journal of Operational Research. 1999. V. 113. P. 261–270.

7. В дальнейшем теория параметрической важности продолжала развиваться в основном совместно с теорией интервалов неопределенности замещений критериев:

79. *Климова О.Н.*, *Ногин В.Д.* Учет взаимно зависимой информации об относительной важности критериев в процессе принятия решений // Жур-

---

❸Основные результаты статьи анонсированы в докладе: *Подиновский В.В., Меньшикова О.Р.* Применение методов линейного программирования для решений задач с упорядоченными по важности критериями // I Всес. совещание по статист. и дискр. анализу нечисл. информации, экспертным оценкам и дискр. оптимизации. Тез. докл. М.: ВИНИТИ. 1981. С. 145–146.

нал вычислительной математики и математической физики, 2006. т. 46. № 12. С. 2179–2191.

80. *Богданова А.В.*, *Ногин В.Д.* Сужение множества Парето на основе простейших наборов нечёткой информации об относительной важности критериев // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: “Прикладная математика. Информатика. Процессы управления”, 2007. вып. 2. С. 3–17.

81. *Меньшикова О.Р., Подиновский В.В.* Отношение предпочтения с интервалами неопределенности замещений // Автоматика и телемеханика, 2007. № 6. С. 157–165. *Английский перевод*: Men’shikova O.R., Podinovskii V.V. Preference relation with intervals of value tradeoffs uncertainty// Automation and remote control, 2007. V. 68. No 6. C. 1075–1082.

82. *Подиновский В.В.* Интервалы неопределенности замещений критериев в анализе многокритериальных задач // Системы управления и информационные технологии, 2007. № 4 (30). С. 41–46.

83. *Подиновский В.В.* Параметрическая важность критериев и интервалы неопределенности замещений в анализе многокритериальных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2008. Т. 48. № 11. С. 1979–1998. *Английский перевод*: Podinovski V.V. Parametric importance of criteria and intervals of value tradeoffs uncertainty in the analysis of multicriteria problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2008. V. 48. № 11. P. 1981–1998.

84. *Подиновский В.В., Кривцун И.Л.* Параметрическая множественная важность критериев в анализе многокритериальных задач // Труды Четвертой международной конференции по проблемам управления (26–30 января 2009 г., М., ИПУ РАН). М.: ИПУ РАН, 2009. С. 1067–1071.

85. *Подиновский В.В.* Использование интервальной информации об относительных замещениях критериев в анализе многокритериальных задач принятия решений // Автоматика и телемеханика, 2010. № 8. С. 154–167. *Английский перевод*: Podinovski V.V. Using interval information on relative criteria tradeoffs in analyzing multicriterial decision making problems // Automation and Remote Control. 2010. V. 71. No 8. P. 1648–1660.

86. *Подиновский В.В.* Анализ чувствительности многокритериального выбора к изменению интервальных оценок замещений критериев // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2018. Т. 58. № 3. С. 485–494. *Английский перевод*: Podinovski V.V. Sensitivity analysis of mulcriteria choice to changes in intervals of value tradeoffs // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. V. 58. No 3. P. 461–469.

Примечание. Результаты, идентичные, по сути, базовым результатам статей [74, 75], касающимся случая критериев с неограниченными шкалами, были опубликованы в 1991–2000 годах Ногиным В.Д. в нескольких работах, а затем составили основное содержание его монографии:

87. *Ногин В.Д.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2002. 2-е изд.2005.

Случай критериев с ограниченными и/или дискретными шкалами в этих работах не рассматривался. Сравнительный анализ этих результатов был проведен в [83].

8. Обобщение теории качественной важности и теории важности неоднородных критериев было дано в статьях:

88. *Podinovski V.V.* Criteria importance theory // Multiobjective Problems of Mathematical Programming / A. Lewandowski, V. Volkovich (Eds.). Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin: Springer, 1991. V. 351. P. 64–70.

89. *Podinovski V.V.* Criteria importance theory // Mathematical Social Sciences, 1994. V. 27. P. 237–252, а затем представлено и в монографиях [14, 15].

9. Теория важности критериев базируется на моделях предпочтений, основанных на частичных квазипорядках (рефлексивных и транзитивных бинарных отношениях). Для её разработки и практического использования возникла необходимость и в развитии (общей) теории принятия решений с использованием отношений предпочтения и безразличия. Приведем здесь основные работы, посвященные решению последней проблемы.

90. *Подиновский В.В.* Принцип гарантированного результата для частичных отношений предпочтения // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1979. № 6. С. 1436–1450. *Английский перевод*: Podinovskii V.V. The principle of guaranteed result for partial preference relations. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1980. V. 19. P. 77–90.

91. *Гафт М.Г., Подиновский В.В.* О построении решающих правил в задачах принятия решений // Автоматика и телемеханика. 1981. № 6. С. 128–138. *Английский перевод*: Gaft M.G., Podinovskii V.V. Construction of decision rules in decision-making problems. Automation and Remote Control, 1981. V. 42. P. 806–814.

92. *Осипова В.А., Подиновский В.В., Яшина Н.П.* О непротиворечивом расширении отношений предпочтения в задачах принятия решений // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1984. № 6. С. 831–840. *Английский перевод*: Osipova V.A., Podinovskii V.V., Yashina N.P. On non-contradictory extension of preference relations in decision making problems. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1984. V. 24. No 3. P. 128–134.

93. *Подиновский Вик.В.* Лексикографический подход к принятию решений в условиях неопределенности // Программное обеспечение вычислительных комплексов. М.: Изд-во МГУ, 1985. С. 104–119.

94. *Подиновский В.В.* Об оценке эффективности решающих правил в многокритериальных задачах // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1987. № 1. С. 3–9. *Английский перевод*: Podinovskii V.V. Estimation of the efficiency of decision rules in multicriterial problems. Soviet Journal of Computer and System Sciences, 1988. V. 26.No 1. P. 1–7.

95. *Подиновский В.В.* Об использовании информации в итеративных методах выбора оптимальных решений // Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы, 2004. № 2. С. 29–31. *Английский перевод*: Podinovskii V.V. Data use in iterative methods of choosing best decisions // Automatic documentation and mathematical linguistics. 2004. V. 38. No 1. P. 47–50.

96. *Подиновский В.В.* Формирование набора нескольких лучших объектов при частичной информации о предпочтениях // Искусственный интеллект и принятие решений. 2008. № 4. С. 3–11. *Английский перевод*: Podinovski V.V. Creating a set of optimal objects using partial preference information // Scientific and Technical Information Processing, 2010. V. 37, No. 5. P. 284–291.

97. *Подиновский В.В.* Выбор нескольких лучших объектов при частичном отношении предпочтения // Доклады академии наук. 2009. Т. 424. № 5. С. 604–606. *Английский перевод*: Podinovski V.V. The choice of several best objects with respect to a partial preference relations // Doklady Mathematics, 2009. V. 79. No 1. P. 141–143.

98. *Подиновский В.В.* Анализ устойчивости результатов выбора при частичном отношении предпочтения // Искусственный интеллект и принятие решений. 2009. № 4. С. 45–52. *Английский перевод*: Podinovski V.V. Analyzing the stability of choice for the partial preference relation // Scientific and Technical Information Processing, 2011. V. 38. No. 5. P. 1–7.

99. *Podinovski V.V.* Set choice problems with incomplete information about the preferences of the decision maker // European Journal of Operational Research, 2010. V. 207. No 1. P. 371–379.

100. *Podinovski V.V.* Sensitivity analysis for choice problems with partial preference relations // European Journal of Operational Research, 2012. V. 221. No 1. P. 198–204.

101. *Podinovski V.V.* Non-dominance and potential optimality for partial preference relations // European Journal of Operational Research, 2013. V. 229. P. 482–486.

102. *Подиновский В.В.* Потенциальная оптимальность в многокритериальной оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2014. Т. 54. № 3. С. 44–45. *Английский перевод*: Podinovski V.V. Potential optimality in multicriterial optimization. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2014. V. 54, No. 1. P. 429–438.

103. *Подиновский В.В., Нелюбин А.П.* Потенциальная недоминируемость в задачах выбора при неточной информации о предпочтениях // Искусственный интеллект и принятие решений, 2014. № 4. С. 83–95.

10. Добавлено в корректуре:

104. *Броневич А.Г., Розенберг И.Н.* Применение моделей неточных вероятностей в математической теории важности критериев // Автоматика и телемеханика. 2017. № 8, С. 127–144. *Английский перевод*: Bronevich A.G., Rosenberg I.N. Applying models of imprecise probabilities in the mathematical theory of criteria importance // Automation and Remote Control. 2017. V. 78. P. 1460–1473.

Я помню древнюю молитву мастеров:
Храни нас, Господи, от тех учеников,
Которые хотят, чтоб наш убогий гений
Кощунственно искал все новых откровений.
....
Лишь Небу ведомы пределы наших сил,
Потомством взвесится, кто сколько утаил.
Что создадим мы впредь, на это власть Господня,
Но что мы создали, то с нами посегодня.

Николай Гумилёв. «Молитва мастеров»

Оглавление

Научное издание

ПОДИНОВСКИЙ Владислав Владимирович

Идеи и методы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений

Редактор *Е.Ю. Федорова*
Художник *В.Ю. Яковлев*
Корректоры *Р.В. Молоканова, В.П. Терехов*

Подписано к печати 07.10.2019
Формат 60 × 90 $^{1}/_{16}$. Гарнитура Ньютон.
Печать офсетная. Усл.печ.л. 6,5. Уч.-изд.л. 6,0
Тип. зак.

ФГУП Издательство «Наука»
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

E-mail: info@naukaran.com
https://naukapublishers.ru
https://naukabooks.ru

ФГУП Издательство «Наука»
(Типография «Наука»)
121099, Москва, Шубинский пер., 6