ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2019, том 55, № 9, с. 1209–1217

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.4+517.958:57

ПРИНЦИП ЛЕРЕ–ШАУДЕРА В ПРИМЕНЕНИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

© 2019 г. М. В. Николаев, А. А. Никитин

Изучается нелинейное интегральное уравнение, получающееся в результате параметрического замыкания третьего пространственного момента в модели У. Дикмана и Р. Лоу стационарных биологических сообществ. Исследуется вопрос о существовании неподвижной точки интегрального оператора, определяемого данным уравнением. Доказывается некомпактность полученного оператора. Формулируются условия, при которых рассматриваемое уравнение имеет нетривиальное решение.

DOI: 10.1134/S037406411909005X

Введение. В настоящей работе продолжается начатое в работах [1–3] изучение интегральных уравнений, возникающих в модели У. Дикмана и Р. Лоу стационарных биологических сообществ. Один из важнейших результатов указанных работ заключался в выводе системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\dot{N} = (b-d)N - d'\int\limits_{\mathbb{R}} C(\xi)w(\xi)\,d\xi,$$

$$\dot{C}(\xi) = bm(\xi)N + \int\limits_{\mathbb{R}} bm(\xi')C(\xi+\xi')\,d\xi' - (d + d'\omega(\xi))C(\xi) - \int\limits_{\mathbb{R}} d'\omega(\xi')T(\xi,\xi')\,d\xi',$$

описывающих динамику пространственных моментов. Здесь постоянные b, d, d', а также функции m и ω считаются известными, а функции N, C, T (первый, второй и третий пространственные моменты соответственно) подлежат определению.

Рассматривая данную систему в состоянии равновесия (моменты не изменяются со временем) и выражая третий пространственный момент через первые два [4], приходим к различным линейным и нелинейным интегральным уравнениям равновесия. Линейное интегральное уравнение равновесия

$$(b + d'w(x))C(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} bm(y)C(x+y)\,dy + \frac{b}{b-d}m(x)\int\limits_{\mathbb{R}} d'w(y)C(y)\,dy$$

изучалось многими авторами (см., например, [5–8]), и к настоящему времени показано, что оно недостаточно хорошо описывает изучаемую биологическую систему. Поэтому в вопросах функционирования стационарных биологических сообществ его рассмотрение содержательного значения не имеет.

Главным предметом исследования в настоящей работе является нелинейное интегральное уравнение равновесия

$$\left(\overline{\omega} + b - \frac{\alpha}{2}\left(b - d - \frac{d'(b-d)}{Y}\right)\right)C =$$

$$= \frac{Y\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m} * C] - \alpha\frac{b-d}{2Y}((C+2)[\overline{\omega} * C] + [\overline{\omega}C * C]), \tag{1}$$

где $\alpha \in [0,1]$, $\overline{m} = bm$, $\overline{\omega} = d'\omega$, $Y = \int_{\mathbb{R}}(C(x)+1)\overline{\omega}(x)\,dx$, через $*$ обозначена операция свёртки функций.

Вывод уравнения (1) описан в работах [9, 10]. В них указывалось, что аналитическое исследование этого уравнения достаточно сложно и поэтому его изучение проводилось численно.

Запишем уравнение (1) в операторном виде $\mathcal{A}f = f$, где

$$\mathcal{A}f = \left(\frac{Y\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m} * f] - \alpha\frac{b-d}{2Y}((f+2)[\overline{\omega} * f] + [\overline{\omega} f * f])\right)\left(\overline{\omega} + b - \frac{\alpha}{2}\left(b - d - \frac{d'(b-d)}{Y}\right)\right)^{-1}. \quad (2)$$

Трудности, связанные с аналитическим исследованием этого нелинейного интегрального оператора, обусловлены прежде всего тем, что он не является ни компактным, ни сжимающим, и это существенно усложняет изучение вопроса о существовании его неподвижной точки.

1. Вспомогательные утверждения. Приведём утверждения, которые будут использоваться в работе.

Лемма 1. *Пусть f – измеримая функция, $g \in L_1(\mathbb{R})$ и для почти всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $|f(x)| \leqslant g(x)$. Тогда $f \in L_1(\mathbb{R})$.*

Следствие 1. *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, а функция g ограничена и измерима, то $fg \in L_1(\mathbb{R})$.*

Лемма 2. *Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$. Тогда функция f ограничена.*

Лемма 3. *Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$. Тогда функция f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.*

Лемма 4. *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при каждом $h \in \mathbb{R}$, удовлетворяющем неравенству $|h| \leqslant \delta$, справедлива оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|\,dx \leqslant \varepsilon.$$

Лемма 5 (критерий Рисса). *Множество $K \subset L_p(\mathbb{R})$ является предкомпактом тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

1) существует положительная постоянная M такая, что для любой функции $f \in K$ верно неравенство $\|f\|_p \leqslant M$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при каждом $h \in \mathbb{R}$, удовлетворяющем неравенству $|h| \leqslant \delta$, и произвольной функции $f \in K$ справедлива оценка

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon.$$

Теорема (Фубини). *Пусть функция $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима и для почти всех $y \in \mathbb{R}$ существует интеграл $\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\,dx = F(y)$, причём $\int_{\mathbb{R}} F(y)\,dy < +\infty$. Тогда существуют интегралы*

$$\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{и} \quad \int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

кроме того, верны равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\right)dy = \int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Замечание 1. В дальнейших рассуждениях будем пользоваться следующим очевидным утверждением: для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ и каждого $y \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x+y)|\,dx = \|f\|_1.$$

Также будем считать известным тот факт, что функция суммируема тогда и только тогда, когда суммируем её модуль [11, § 9, п. 111].

Замечание 2. Всюду далее считаем, что функции ω и m принадлежат пространству $C(\mathbb{R})\bigcap L_1(\mathbb{R})$ и являются неотрицательными и чётными, а также что $\|m\|_1 = \|\omega\|_1 = 1$ и $\lim\limits_{|x|\to\infty} m(x) = \lim\limits_{|x|\to\infty} \omega(x) = 0$. Тогда, согласно леммам 2 и 3, функции ω и m ограничены и равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$.

Замечание 3. Для числа $R > 0$ через $B(R)$ в дальнейшем обозначаем множество $B(R) = \{f \in L_1(\mathbb{R}) : \|f\|_1 \leqslant R\}$ – замкнутый шар радиуса R с центром в нуле в пространстве $L_1(\mathbb{R})$.

2. Основное доказательство.

Лемма 6. *Оператор* $\mathcal{B}_\omega f = [\omega * f]$ *является компактным как действующий из* $L_1(\mathbb{R})$ *в* $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из свойств свёртки непосредственно следует, что оператор действительно действует в $L_1(\mathbb{R})$.

Пусть $M > 0$. Для любой функции $f \in B(M)$ имеем

$$\|\mathcal{B}_\omega f\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \omega(x-y) f(y)\, dy \right| dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} |\omega(x-y) f(y)|\, dy\, dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} |f(y)| \int\limits_{\mathbb{R}} |\omega(x-y)|\, dx\, dy = \|\omega\|_1 \|f\|_1 \leqslant M.$$

Возможность перестановки порядка интегрирования вытекает их теоремы Фубини, которая здесь применима, поскольку свёртка является суммируемой функцией, а значит, внутренний интеграл существует при любом x и суммируем.

Далее оценим выражение $\int_{\mathbb{R}} |[\mathcal{B}_\omega f](x+h) - [\mathcal{B}_\omega f](x)|\, dx$ сверху. Воспользовавшись теоремой Фубини и леммой 4, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left| [\mathcal{B}_\omega f](x+h) - [\mathcal{B}_\omega f](x) \right| dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} [\omega(x+h-y) - \omega(x-y)] f(y)\, dy \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} |\omega(x+h-y) - \omega(x-y)||f(y)|\, dy\, dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} |f(y)| \int\limits_{\mathbb{R}} |\omega(x+h-y) - \omega(x-y)|\, dx\, dy \leqslant \varepsilon \|f\|_1 \leqslant \varepsilon M.$$

Значит, при достаточно малых h значение оцениваемого выражения также мало́, т.е. образ $B(M)$ под действием оператора $\mathcal{B}_\omega$ равномерно ограничен и равностепенно непрерывен в смысле $L_1(\mathbb{R})$. Согласно критерию Рисса это означает, что множество предкомпактно. Таким образом, оператор $\mathcal{B}_\omega$ переводит ограниченные множества в предкомпактные, а следовательно, является компактным. Лемма доказана.

Замечание 4. Очевидно, что оператор $\mathcal{B}_m f = [m * f]$ также компактен.

Лемма 7. *Оператор*

$$\mathcal{C} f = \varphi(x) \int\limits_{\mathbb{R}} \omega(y) f(y)\, dx + \psi(x),$$

где φ, ψ *– непрерывные суммируемые функции, является компактным как действующий из* $L_1(\mathbb{R})$ *в* $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. В силу лемм 2 и 4 функции φ и ψ являются ограниченными и непрерывными в смысле L_1 на $\mathbb{R}$. Воспользуемся критерием Рисса. Пусть $M > 0$ и $f \in B(M)$, тогда

$$\|\mathcal{C} f\| = \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\, dx \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \omega(y) f(y)\, dy \right| + \int\limits_{\mathbb{R}} |\psi(x)|\, dx \leqslant M \|\varphi\|_1 \|\omega\|_C + \|\psi\|_1,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \Big|[\mathcal{C}f](x+h) - [\mathcal{C}f](x)\Big|\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x+h)-\varphi(x)|\,dx \int\limits_{\mathbb{R}} |\omega(y)f(y)|\,dy +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}} |\psi(x+h)-\psi(x)|\,dx \leqslant \varepsilon M\|\omega\|_C + \varepsilon.$$

Следовательно, оператор $\mathcal{C}$ компактен. Лемма доказана.

Рассмотрим далее введённый формулой (2) оператор $\mathcal{A}$. Представим его в виде суммы $\mathcal{A} = \mathcal{K} + \mathcal{S}$, где

$$\mathcal{K}f = \left(\frac{Y\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} + [\overline{m}*f] - \alpha\frac{b-d}{Y}[\overline{\omega}*f]\right)\left(\overline{\omega} + b - \frac{\alpha}{2}\left(b-d-\frac{d'(b-d)}{Y}\right)\right)^{-1},$$

$$\mathcal{S}f = -\alpha\frac{b-d}{2Y}(f[\overline{\omega}*f] + [\overline{\omega}f*f])\left(\overline{\omega} + b - \frac{\alpha}{2}\left(b-d-\frac{d'(b-d)}{Y}\right)\right)^{-1}.$$

Теорема 1. *Пусть $b > d \geqslant 0$, $d' \geqslant 0$, $\alpha \in [0,1]$. Тогда, если $R < 1/(\|\omega\|_C)$, оператор $\mathcal{K}$ определён как действующий из $B(R)$ в $L_1(\mathbb{R})$ и компактен.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g_s(x) = \left(\overline{\omega}(x) + b - \frac{\alpha}{2}\left(b-d-\frac{d'(b-d)}{s}\right)\right)^{-1}.$$

Фиксируем $x = x_0$, при котором знаменатель этой функции обращается в нуль, и выразим параметр s из уравнения

$$\overline{\omega}(x_0) + b - \frac{\alpha}{2}\left(b-d-\frac{d'(b-d)}{s}\right) = 0,$$

тогда

$$s = \frac{\alpha d'(b-d)}{(\alpha-2)b - \alpha d - 2\overline{\omega}(x_0)}.$$

Так как $b > d$, $\alpha \in [0,1]$, то $s \leqslant 0$, в таком случае справедлива оценка

$$s \leqslant \frac{\alpha d'(b-d)}{(\alpha-2)b-\alpha d} = q.$$

Отсюда следует, что функция $g_s(x)$ непрерывна при $s > q$.

С другой стороны, $Y \geqslant d' - \|\overline{\omega}\|_C\|f\|_1$, таким образом, если $\|f\|_1 < (d'-q)/\|\overline{\omega}\|_C$, то $Y > q$. Если положить $s = Y$, то очевидно, что функция $g_Y(x)$ ограничена и непрерывна, в частности, измерима в $\mathbb{R}$. Это означает, что домножение её на любую суммируемую функцию не выводит из класса $L_1(\mathbb{R})$ (следствие 1).

Оператор $\mathcal{K}$ представим в виде

$$\mathcal{K}f = g_Y\left(\mathcal{C} + \mathcal{B}_{\overline{m}} - \alpha\frac{b-d}{Y}\mathcal{B}_{\overline{\omega}}\right)f,$$

где

$$\mathcal{C}f = \frac{Y\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega}, \quad \mathcal{B}_{\overline{m}}f = [\overline{m}*f], \quad \mathcal{B}_{\overline{\omega}}f = -\alpha\frac{b-d}{Y}[\overline{\omega}*f].$$

При условии

$$\|f\|_1 \leqslant R < \frac{d'}{\|\overline{\omega}\|_C} = \frac{1}{\|\omega\|_C}$$

выражение
$$-\alpha\frac{b-d}{2Y} = -\alpha(b-d)\left(2\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\omega}(x)\,dx + d'\right)\right)^{-1}$$
равномерно ограничено по f. Этого условия достаточно, чтобы функция $g_Y(x)$ была ограниченной и измеримой. В таком случае операторы $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}_{\overline{m}}$ и $\mathcal{B}_{\overline{\omega}}$ действуют в $L_1(\mathbb{R})$ и являются компактными по леммам 6 и 7, а значит, компактным будет и оператор $\mathcal{K}$. Теорема доказана.

Теорема (Лере–Шаудера). *Если оператор $\mathcal{A}$, определённый на замкнутом шаре B банахова пространства, является компактным и $\mathcal{A}[\partial B] \subset B$, то существует $f \in B$, для которого $f = \mathcal{A}f$.*

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в монографии [12, с. 129–130]. Отметим только, что оно опирается на понятие вращения отображения. В частности, если вращение компактного оператора на границе шара не равно нулю, то такой оператор имеет неподвижные точки.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 если $\rho = 1 - R\|\omega\|_C > 0$ и $\alpha > 0$, то существует $d' \in (0, 3\rho/4)$ такое, что оператор $\mathcal{K}$ имеет в $B(R)$ неподвижную точку. Если $\alpha = 0$, то для существования неподвижной точки достаточно, чтобы $d' = 0$.*

Доказательство. Оценим норму образа функции $f \in B(R)$ под действием оператора $\mathcal{K}$. Сначала найдём оценку величины Y. Так как $0 < R\|\omega\|_C < 1$, то $1 + R\|\omega\|_C < 2$, тогда
$$0 < d'\rho = d'(1 - R\|\omega\|_C) \leqslant Y \leqslant d'(1 + R\|\omega\|_C) < 2d'.$$
Таким образом,
$$\frac{1}{d'\rho} \geqslant \frac{1}{Y} > \frac{1}{2d'}.$$
Значит, для функции $g_Y(x)$, определённой в доказательстве теоремы 1, верна следующая оценка:
$$|g_Y(x)| < \left(\omega(x) + \frac{\alpha}{2}\frac{d'(b-d)}{2d'} + b - \frac{\alpha}{2}(b-d)\right)^{-1} < \left(\frac{3}{4}\alpha(b-d) + b\right)^{-1}.$$

Оценим норму свёрток, входящих в определение оператора $\mathcal{K}$. Имеем
$$\Big\|[\overline{m} * f]\Big\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \overline{m}(x-y)f(y)\,dy\right|dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |\overline{m}(x-y)||f(y)|\,dy\,dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} |f(y)| \int\limits_{\mathbb{R}} |\overline{m}(x-y)|\,dx\,dy = \|\overline{m}\|_1\|f\|_1 \leqslant bR.$$
Перестановка порядка интегрирования возможна в силу теоремы Фубини (поскольку свёртка суммируемых функций суммируема). Аналогично получаем, что
$$\|[\overline{\omega} * f]\|_1 \leqslant d'R.$$

В итоге приходим к следующим оценкам:
$$\|\mathcal{K}f\|_1 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}}\left|\overline{\omega}(x) + b - \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{d'}{Y}\right)(b-d)\right|^{-1}\left(\left|\frac{Y\overline{m}(x)}{b-d}\right| + |\overline{\omega}(x)| + |[\overline{m}*f](x)| + \left|\alpha\frac{b-d}{Y}[\overline{\omega}*f](x)\right|\right)dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}}\left(b + \frac{3}{4}\alpha(b-d)\right)^{-1}\left(\frac{2bd'}{b-d}|\overline{m}(x)| + |\overline{\omega}(x)| + \Big|[\overline{m}*f](x)\Big| + \alpha\frac{b-d}{\rho}\Big|[\overline{\omega}*f](x)\Big|\right)dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(b + \frac{3}{4}\alpha(b-d)\right)^{-1}\left(\frac{2bd'}{b-d} + d' + bR + \alpha d'\frac{b-d}{\rho}R\right) =$$
$$= \left(b + \frac{3}{4}\alpha(b-d)\right)^{-1}\left(d'\left(\frac{2bd'}{b-d} + 1\right) + \left(b + \alpha d'\frac{b-d}{\rho}\right)R\right).$$

Обозначим

$$\xi = d'\left(b+\frac{3}{4}\alpha(b-d)\right)^{-1}\left(\frac{2bd'}{b-d}+1\right), \quad \eta = \left(b+\frac{3}{4}\alpha(b-d)\right)^{-1}\left(b+\frac{d'}{\rho}\alpha(b-d)\right),$$

тогда $\|\mathcal{K}f\|_1 \leqslant \xi + \eta R$. Очевидно, что $\eta < 1$, если $d' < 3\rho/4$ и $\alpha > 0$. Кроме того, $\xi \to 0$ при $d' \to 0$. Из этих двух фактов следует существование такого $d' \in (0, 3\rho/4)$, что для любой функции $f \in B(R)$ выполняется неравенство $\|\mathcal{K}f\|_1 < R$, т.е. $\mathcal{K}f \in \operatorname{int} B(R)$.

Итак, найдётся настолько малое число $d' \in (0, 3\rho/4)$, при котором оператор $\mathcal{K}$ переводит шар $B(R)$ внутрь шара $B(R)$. Тогда вследствие его компактности в этом шаре по теореме Лере–Шаудера он имеет в $B(R)$ неподвижную точку.

Если же $\alpha = 0$, то $\eta = 1$ и $\mathcal{K}f \leqslant R$ при условии, что $d' = 0$. Аналогично по теореме Лере–Шаудера оператор $\mathcal{K}$ имеет неподвижную точку в $B(R)$.

Отметим, что в дальнейших теоремах существен тот факт, что при $\alpha > 0$ шар $B(R)$ под действием оператора $\mathcal{K}$ переходит в некоторый замкнутый подшар $B' \subset B(R)$ такой, что $d(\partial B', \partial B(R)) > 0$. Здесь через $d(A, B)$ обозначено расстояние между множествами A и B в метрике, порождённой нормой пространства $L_1(\mathbb{R})$. Теорема доказана.

Замечание 5. Отметим, что оператор $\mathcal{S}$ также определён как действующий из $B(R)$ в $L_1(\mathbb{R})$ (где условие, налагаемое на R, такое же, что и в теореме 1), но не является компактным.

Докажем утверждения, сформулированные в этом замечании. Пусть $f \in B(R)$. Из свойств свёртки следует, что $[\overline{\omega} f * f] \in L_1(\mathbb{R})$, кроме того

$$|[\overline{\omega} * f](x)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\omega}(x-y) f(y)\, dy\right| \leqslant R\|\overline{\omega}\|_C,$$

т.е. согласно следствию из леммы 1 имеет место включение $f[\overline{\omega} * f] \in L_1(\mathbb{R})$. Из доказательства теоремы 2 следует, что при условии $f \in B(R)$ функция

$$h_Y(x) = -\alpha\frac{b-d}{2Y} g_Y(x) = -\alpha\frac{b-d}{2Y}\left(\omega(x) + b - \frac{\alpha}{2}\left(b - d - \frac{d'(b-d)}{Y}\right)\right)^{-1}$$

отделена от бесконечности равномерно по f. Таким образом, оператор $\mathcal{S}$ действует из $B(R)$ в $L_1(\mathbb{R})$.

Для того чтобы показать его некомпактность, достаточно найти последовательность функций $f_n \in B(R)$, $n \in \mathbb{N}$, из образа которой нельзя выделить фундаментальную подпоследовательность.

Так как $\overline{\omega}(x)$ – неотрицательная непрерывная функция, равная по норме единице, то найдутся такие $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$, что для любого $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $\overline{\omega}(x_0) \geqslant \mu > 0$. Не ограничивая общности, считаем, что $x_0 > 0$, так как функция ω чётная. Пусть $I_n = [nx_0, (n+1)x_0]$, $n \in \mathbb{N}$, зададим функцию f_n равенством

$$f_n(x) = \begin{cases} R/(2x_0), & x \in I_n, \\ 0, & x \notin I_n. \end{cases}$$

Очевидно, что f_n, $n \in \mathbb{N}$, лежат в шаре $B(R)$. Заметим также, что, поскольку функция $h_Y(x)$ равномерно по f отделена от нуля и бесконечности, достаточно показать некомпактность оператора $\mathcal{P}f = f[\overline{\omega} * f] + [\overline{\omega} f * f]$. В дальнейших выкладках учтём тот факт, что при $x \in (nx_0, (n+1)x_0)$, $y \in (mx_0, (m+1)x_0)$, $m \neq n$, справедливы равенства

$$f_n(x-y) = f_m(x-y) = 0.$$

Пусть $n, p \in \mathbb{N}$, тогда

$$\|\mathcal{P}f_{n+p} - \mathcal{P}f_n\|_1 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} |f_{n+p}(x)[\overline{\omega} * f_{n+p}](x) + [\overline{\omega} f_{n+p} * f_{n+p}](x) - f_n(x)[\overline{\omega} * f_n](x) - [\overline{\omega} f_n * f_n](x)|\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{I_n} |f_{n+p}(x)[\overline{\omega} * f_{n+p}](x) + [\overline{\omega} f_{n+p} * f_{n+p}](x) - f_n(x)[\overline{\omega} * f_n](x) - [\overline{\omega} f_n * f_n](x)|\, dx =$$

$$= \int\limits_{I_n} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\omega}(y) f_{n+p}(y) f_{n+p}(x-y)\, dy - f_n(x)[\overline{\omega} * f_n](x) - [\overline{\omega} f_n * f_n](x) \right| dx =$$

$$= \int\limits_{I_n} \left| \frac{R}{2x_0} \int\limits_{I_{n+p}} \overline{\omega}(y) f_{n+p}(x-y)\, dy - f_n(x)[\overline{\omega} * f_n](x) - [\overline{\omega} f_n * f_n](x) \right| dx =$$

$$= \int\limits_{I_n} |f_n(x)[\overline{\omega} * f_n](x) + [\overline{\omega} f_n * f_n](x)|\, dx.$$

В последнем выражении оба слагаемых неотрицательны в силу неотрицательности функций f_n и $\overline{\omega}$, поэтому

$$\int\limits_{I_n} |f_n(x)[\overline{\omega} * f_n](x) + [\overline{\omega} f_n * f_n](x)|\, dx = \int\limits_{I_n} (f_n(x)[\overline{\omega} * f_n](x) + [\overline{\omega} f_n * f_n](x))\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{I_n} f_n(x)[\overline{\omega} * f_n](x)\, dx = \frac{R}{2x_0} \int\limits_{I_n} [\overline{\omega} * f_n](x)\, dx = \frac{R^2}{4x_0^2} \int\limits_{I_n} \int\limits_{I_n} \overline{\omega}(x-y)\, dy\, dx \geqslant \frac{R^2\delta^2}{4x_0^2}\mu > 0.$$

Таким образом, существует такое $\varepsilon = R^2\delta^2\mu/(4x_0^2) > 0$, что при любых натуральных n и p имеет место оценка

$$\|\mathcal{P}f_{n+p} - \mathcal{P}f_n\|_1 \geqslant \varepsilon,$$

что означает некомпактность оператора $\mathcal{P}$, а соответственно, и оператора $\mathcal{S}$. Утверждения из замечания 5 доказаны.

Теорема (о неподвижных точках возмущённого компактного оператора). *Пусть на области G банахова пространства задан компактный оператор с ненулевым вращением на границе, при этом он переводит область G в некоторую подобласть $H \subset G$, такую, что*

$$d(\partial G, \partial H) = \delta > 0.$$

Если его возмутить липшицевым оператором, норма которого не превосходит δ, то возмущённый оператор будет иметь в G неподвижные точки.

Доказательство этой теоремы можно найти в монографии [12, с. 162–163].

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теорем 1 и 2. Если $\alpha > 0$, то при достаточно малом d' оператор $\mathcal{A}$ имеет в $B(R)$ неподвижную точку.*

Доказательство. Установим липшицевость оператора $\mathcal{S}$. Пусть $f \in B(R)$. В силу условия, накладываемого на R, выражение

$$-\alpha \frac{b-d}{2Y} \left(\overline{\omega} + b - \frac{\alpha}{2} \left(b - d - \frac{d'(b-d)}{Y} \right) \right)^{-1}$$

равномерно по f отделено от нуля и бесконечности, поэтому достаточно показать липшицевость оператора $\mathcal{P}f = f[\overline{\omega} * f] + [\overline{\omega} f * f]$.

Верны следующие оценки:

$$\|f[\overline{\omega}*f]-g[\overline{\omega}*g]\|_1=\|f[\overline{\omega}*f]-f[\overline{\omega}*g]+f[\overline{\omega}*g]-g[\overline{\omega}*g]\|_1=$$
$$=\|f[\overline{\omega}*(f-g)]+(f-g)[\overline{\omega}*g]\|_1\leqslant\|f[\overline{\omega}*(f-g)]\|_1+\|(f-g)[\overline{\omega}*g]\|_1=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}}\left|f(x)\int\limits_{\mathbb{R}}\overline{\omega}(x-y)[f(y)-g(y)]\,dy\right|dx+\int\limits_{\mathbb{R}}\left|[f(x)-g(x)]\int\limits_{\mathbb{R}}\overline{\omega}(x-y)g(y)\,dy\right|dx\leqslant$$
$$\leqslant\|\overline{\omega}\|_C\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x)|\int\limits_{\mathbb{R}}|f(y)-g(y)|\,dy\,dx+\|\overline{\omega}\|_C\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|\int\limits_{\mathbb{R}}|g(y)|\,dy\,dx=$$
$$=\|\overline{\omega}\|_C\|f-g\|_1(\|f\|_1+\|g\|_1)\leqslant 2R\|\overline{\omega}\|_C\|f-g\|_1<2d'\|f-g\|_1,$$
$$\|[\overline{\omega}f*f]-[\overline{\omega}g*g]\|_1=\|[\overline{\omega}f*f]-[\overline{\omega}f*g]+[\overline{\omega}f*g]-[\overline{\omega}g*g]\|_1=$$
$$=\|[\overline{\omega}f*(f-g)]+[\overline{\omega}(f-g)*g]\|_1\leqslant\|[\overline{\omega}f*(f-g)]\|_1+\|[\overline{\omega}(f-g)*g]\|_1=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}}\overline{\omega}(y)f(y)[f(x-y)-g(x-y)]\,dy\right|dx+\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}}\overline{\omega}(y)[f(y)-g(y)]g(x-y)\,dy\right|dx\leqslant$$
$$\leqslant\|\overline{\omega}\|_C\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}|f(y)||f(x-y)-g(x-y)|\,dy\,dx+\|\overline{\omega}\|_C\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}|f(y)-g(y)||g(x-y)|\,dy\,dx=$$
$$=\|\overline{\omega}\|_C\int\limits_{\mathbb{R}}|f(y)|\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x-y)-g(x-y)|\,dx\,dy+\|\overline{\omega}\|_C\int\limits_{\mathbb{R}}|f(y)-g(y)|\int\limits_{\mathbb{R}}|g(x-y)|\,dx\,dy=$$
$$=\|\overline{\omega}\|_C\|f-g\|_1(\|g\|_1+\|f\|_1)\leqslant 2R\|\overline{\omega}\|_C\|f-g\|_1<2d'\|f-g\|_1.$$

Возможность перестановки порядка интегрирования вытекает из теоремы Фубини. Таким образом, если $f,g\in B(R)$, то
$$\|\mathcal{P}f-\mathcal{P}g\|_1\leqslant 4d'\|f-g\|_1.$$

Оценим норму оператора $\mathcal{P}$. Для этого рассмотрим по отдельности выражения $f[\overline{\omega}*f]$ и $[f\overline{\omega}*f]$:

$$\|f[\overline{\omega}*f]\|_1=\int\limits_{\mathbb{R}}\left|f(x)\int\limits_{\mathbb{R}}\overline{\omega}(x-y)f(y)\,dy\right|dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x)|\int\limits_{\mathbb{R}}|\overline{\omega}(x-y)||f(y)|\,dy\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\|\overline{\omega}\|_C\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x)|\int\limits_{\mathbb{R}}|f(y)|\,dy\,dx=\|\overline{\omega}\|_C\|f\|_1^2\leqslant\|\overline{\omega}\|_C R\|f\|_1<d'\|f\|_1,$$
$$\|[f\overline{\omega}*f]\|_1=\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}}f(x-y)\overline{\omega}(x-y)f(y)\,dy\right|dx\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x-y)||\overline{\omega}(x-y)||f(y)|\,dy\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}}|f(y)|\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x-y)||\overline{\omega}(x-y)|\,dx\,dy\leqslant$$
$$\leqslant\|\overline{\omega}\|_C\int\limits_{\mathbb{R}}|f(y)|\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x-y)|\,dx\,dy=\|\overline{\omega}\|_C\|f\|_1^2\leqslant d'\|f\|_1.$$

Итак, норма оператора $\mathcal{P}$ не превосходит $2d'$, а значит, она стремится к нулю, когда d' стремится к нулю. Это означает, что и норма оператора $\mathcal{S}$ также стремится к нулю, когда d' стремится к нулю. Из доказательства теоремы 2 следует, что при $\alpha>0$ величина

$d(\partial B(R), \partial\mathcal{K}[B(R)])$ положительна и не зависит от d'. Таким образом, по теореме о неподвижных точках возмущённого компактного оператора оператор $\mathcal{K} + \mathcal{S} = \mathcal{A}$ имеет в $B(R)$ неподвижную точку при достаточно малом значении d'. Теорема доказана.

Следствие 2. *Уравнение равновесия, имеющее вид* $C = \mathcal{A}C$, *при выполнении условий теоремы 3 имеет решение.*

Заключение. Несмотря на определённое продвижение в аналитическом исследовании корректности поставленной биологами задачи, остаются открытыми многие важные вопросы, относящиеся к уравнению (1). Одним из них является вопрос о единственности его решения. В работах [5, 6] показано, что при $\alpha = 0$ и $d = 0$ у него кроме тривиального решения $C \equiv 0$ при выполнении некоторых условий на функции m и ω существует и решение C, не равное тождественно нулю. Интересен также вопрос об устойчивости решения поставленной задачи.

Отметим, что все результаты данной работы без труда переносятся на многомерные случаи. В частности, решение нелинейного уравнения равновесия при условиях, схожих с описанными в теореме 3, существует в двумерном и трёхмерном случаях, которые являются наиболее интересными с биологической точки зрения.

Авторы выражают благодарность Ульфу Дикману за постановку задачи и интерес к работе.

Исследования А.А. Никитина выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01168).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Law R., Murrell D.J., Dieckmann U.* Population growth in space and time: spatial logistic equations // Ecology. 2003. V. 84. № 1. P. 252–262.
2. *Raghib M., Nicholas A.H., Dieckmann U.* A multiscale maximum entropy moment closure for locally regulated space-time point process models of population dynamics // J. Math. Biol. 2011. V. 62. P. 605–653.
3. *Law R., Plank M.J.* Spatial point processes and moment dynamics in the life sciences: a parsimonious derivation and some extensions // Bull. Math. Biol. 2015. V. 77. P. 586–613.
4. *Murrell D.J., Dieckmann U.* On moment closures for population dynamics in continuous space // J. Theor. Biology. 2004. V. 229. P. 421–432.
5. *Давыдов А.А., Данченко В.И., Никитин А.А.* Об интегральном уравнении для стационарных распределений биологических сообществ // Проблемы динамического управления. Сб. науч. тр. 2009. С. 15–29.
6. *Давыдов А.А., Данченко В.И., Звягин М.Ю.* Существование и единственность стационарного распределения биологического сообщества // Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2009. Т. 267. С. 46–55.
7. *Бодров А.Г., Никитин А.А.* Качественный и численный анализ интегрального уравнения, возникающего в модели стационарных сообществ // Докл. РАН. 2014. Т. 455. № 5. С. 507–511.
8. *Бодров А.Г., Никитин А.А.* Исследование интегрального уравнения плотности биологического вида в пространствах различных размерностей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2015. Т. 4. С. 7–13.
9. *Никитин А.А., Николаев М.В.* Исследование интегрального уравнения равновесия с ядрами-куртозианами в пространствах различных размерностей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2018. Т. 3. С. 11–19.
10. *Никитин А.А.* О замыкании пространственных моментов в биологической модели и интегральных уравнениях, к которым оно приводит // Int. J. of Open Information Technologies. 2018. V. 6. № 10. С. 1–8.
11. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 2. М., 1974.
12. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Российский университет дружбы народов,
г. Москва

Поступила в редакцию 21.02.2019 г.
После доработки 21.02.2019 г.
Принята к публикации 16.04.2019 г.