ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 488, № 6, с. 1–4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.43

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

М. В. Николаев*, А. А. Никитин**

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 20.06.2019 г.

Поступило 26.06.2019 г.

В данной работе изучается нелинейное интегральное уравнение, возникшее в пространственной модели биологических сообществ, разработанной австрийскими учёными Ульфом Дикманом и Ричардом Лоу. Были найдены достаточные условия существования решения данного уравнения (неподвижной точки интегрального оператора). Также изучен вопрос о единственности решения.

Ключевые слова: математическое моделирование, интегральные уравнения, численные методы, математическая биология.

DOI:

1. ВВЕДЕНИЕ

Главным предметом изучения в настоящей статье является нелинейное интегральное уравнение, возникшее в пространственной биологическиой модели адаптивной динамики У. Дикмана и Р. Лоу [1, 2]. В этой модели рассматривается некоторое самоструктурирующееся сообщество биологических видов. Краткое описание данной модели приведено во второй части нашей работы. Более подробное изложение можно найти в указанных выше статьях или в статьях авторов [3, 4]. Далее будет проведена математическая постановка задачи, связанной с упомянутым выше интегральным уравнеием, и изучены некоторые вопросы корректности поставленной задачи. А именно, будут найдены достаточные условия существования решения нелинейного интегрального уравнения и показана его единственность.

2. ОПИСАНИЕ БИОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим некоторое одновидовое сообщество, обитающее в области $A \subset \mathbb{R}^n$. Внешняя биологическая среда характеризуется рядом гомогенных параметров: d — естественная смертность, d' — смертность от конкуренции, b — интенсивность рождения новых видов; а также двумя радиально-симметричными функциями: m — ядро движения (при рождении) и ω — ядро конкуренции, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad m(x) \geqslant 0, \; \omega(x) \geqslant 0.$$

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} m(x) = \lim_{\|x\| \to +\infty} \omega(x) = 0.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} m(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x)dx = 1.$$

В каждый временной промежуток состояние изучаемого сообщества характеризуется тремя пространственными моментами (неизвестными функциями): $N(t)$ — средняя плотность особей; $C(x,t)$ — средняя плотность пар особей, в которых сдвиг второго индивида относительно первого равен x; $T(x,y,t)$ — средняя плотность троек особей, в которых сдвиг второго индивида относительно первого равен x, а сдвиг третьего — y.

В настоящей статье мы будем работать с состоянием равновесия сообщества, которое описывается стационарной точкой системы уравнений пространственной динамики

$$\begin{gathered}
\frac{dN}{dt}(t) = (b-d)N(t) - d' \int_{\mathbb{R}^n} C(\xi,t)w(\xi)d\xi, \\
\frac{\partial C}{\partial t}(\xi, t) = bm(\xi)N(t) + \int_{\mathbb{R}^n} bm(\xi')C(\xi+\xi',t)d\xi' - \\
-(d + d'\omega(\xi))C(\xi,t) - \int_{\mathbb{R}^n} d'\omega(\xi')T(\xi,\xi',t)d\xi'.
\end{gathered} \tag{1}$$

3. ОПЕРАТОР РАВНОВЕСИЯ

Как и в статье [4], рассмотрим параметрическое замыкание второй степени третьего пространственного момента

$$T_\alpha(\xi,\xi') = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{C(\xi)C(\xi')}{N} + \frac{C(\xi)C(\xi'-\xi)}{N} + \frac{C(\xi')C(\xi'-\xi)}{N} - N^3\right) + (1-\alpha)\frac{C(\xi)C(\xi')}{N},$$

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

**E-mail: nikolaev.mihail@inbox.ru*

***E-mail: nikitin@cs.msu.ru*

Подстановка данного выражения в систему динамики пространственных моментов (1) после обнуления производных и некоторых алгебраических преобразований, см., например, [4], приводит к нелинейному интегральному уравнению

$$\left(\bar{\omega} + b - \frac{\alpha}{2}\left(b - d - \frac{d'(b-d)}{Y}\right)\right)Q = \frac{Y\bar{m}}{b-d} - \bar{\omega} + [\bar{m} * Q] - \alpha\frac{b-d}{2Y}\big((Q+2)[\bar{m} * Q] + [\bar{\omega}Q * Q]\big), \quad (2)$$

где $Y = Y(Q) = \langle \bar{\omega}, Q+1\rangle$, $\bar{\omega} = d'\omega$, $\bar{m} = bm$. Изучение этого уравнения далее будет проводиться в операторной форме.

Введём в расмотрение «оператор равновесия». Для этого перепишем в виде $\mathcal{A}Q = Q$, где оператор $\mathcal{A}$ действует по правилу

$$\mathcal{A}f = \frac{\dfrac{Y\bar{m}}{b-d} - \bar{\omega} + [\bar{m} * f] - \alpha\dfrac{b-d}{2Y}\big((f+2)[\bar{\omega} * f] + [\bar{\omega}f * f]\big)}{\bar{\omega} + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{Y}\right)}, \quad (3)$$

и рассмотрим задачу о нахождении неподвижной точки данного оператора (3). Трудности в изучении оператора заключаются в том, что он не является ни сжимающим, ни компактным. Постараемся представить его в виде суммы компактной и некомактной частей: $\mathcal{A} = \mathcal{K} + \mathcal{S}$. Здесь

$$\mathcal{K}f = \frac{\dfrac{Y\bar{m}}{b-d} - \bar{\omega} + [\bar{m} * f] - \alpha\dfrac{b-d}{Y}[\bar{\omega} * f]}{\bar{\omega} + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{Y}\right)},$$

$$\mathcal{S}f = -\alpha\frac{b-d}{2Y}\,\frac{f[\bar{\omega} * f] + [\bar{\omega}f * f]}{\bar{\omega} + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{Y}\right)}.$$

Дальнейшее изложение результатов проводится в предположении, что функции m и ω дополнительно являются всюду непрерывными.

В определении введённых выше операторов фигурируют дроби, знаменатели которых зависят от f (через Y). Этот факт может вызвать затруднения в исследовании операторов на компактность. Однако имеют место следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $R < \dfrac{1}{\|\omega\|_C}$ *и* $d' > 0$ *тогда дробь* $\dfrac{1}{Y}$ *равномерно по* f *отделена от нуля и бесконечности при всех* $f \in B(R)$.

Лемма 2. *Пусть* $b > d \geqslant 0$, $d' > 0$, $\alpha \in [0;1]$, *тогда при условии, что* $R < \dfrac{1}{\|\omega\|_C}$, *функция*

$$g_Y(x) = \frac{1}{\bar{\omega}(x) + b - \dfrac{\alpha}{2}\left(b - d - \dfrac{d'(b-d)}{Y}\right)}$$

непрерывна и отделена от нуля и бесконечности равномерно по f *при всех* $f \in B(R)$.

Далее, используя классические теоремы Фубини и критерий Рисса, можно доказать компактность “блоков”, входящих в оператор $\mathcal{K}$, а именно, справедливы следующие утверждения.

Лемма 3. *Операторы* $\mathcal{B}_\omega f = [\omega * f]$ *и* $\mathcal{B}_m f = [m * f]$ *являются компактными как действующие из* $L_1(\mathbb{R})$ *в* $L_1(\mathbb{R})$.

Лемма 4. *Оператор* $\mathcal{C}f = \varphi(x)\int_{\mathbb{R}}\omega(y)f(y)dx + \psi(x)$, *где* φ, ψ *— непрерывные суммируемые функции, является компактным как действующий из* $L_1(\mathbb{R})$ *в* $L_1(\mathbb{R})$.

Данные утверждения позволяют найти условия гарантирующие компактность всего оператора $\mathcal{K}$. Сформулируем их в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $b > d \geqslant 0$, $d' > 0$, $\alpha \in [0;1]$; *тогда при условии, что* $R < \dfrac{1}{\|\omega\|_C}$, *оператор* $\mathcal{K}$ *определён как действующий из* $B(R)$ *в* $L_1(\mathbb{R})$ *и является компактным.*

С использованием принципа Лере–Шаудера существования неподвижной точки компактного оператора, [5] доказывается

Теорема 2. *В условиях теоремы 1, если* $\rho = 1 - R\|\omega\|_C > 0$ *и* $\alpha > 0$, *то* $\exists d' \in \left(0; \dfrac{3}{4}\rho\right)$ *такое, что оператор* $\mathcal{K}$ *имеет в* $B(R)$ *неподвижную точку.*

Далее используется факт, что при $\alpha > 0$ образ $B(R)$ под действием оператора $\mathcal{K}$ переходит в некоторый замкнутый подшар $B' \subset B(R)$ такой, что $d(\partial B', \partial B(R)) > 0$. Здесь под $d(A,B)$ подразумевается расстояние между множествами A и B в метрике, порождённой нормой пространства $L_1(\mathbb{R})$.

Вторая часть оператора равновесия – оператор $\mathcal{S}$ также определён как действующий из $B(R)$ в $L_1(\mathbb{R})$ (где условие, налагаемое на R, такое же, что и в теореме 1), но не является компактным. Это можно доказать, например, построением последовательности функций $f_n \in B(R)$, из образа которой (при воздействии оператора $\mathcal{S}$) нельзя выделить фундаментальную подпоследовательность.

Для дальнейшего доказательства существования неподвижной точки у оператора равновесия нам понадобтся следующий результат из монографии М.А. Красносельского [5].

Теорема (теорема о неподвижных точках возмущенного компактного оператора). *Пусть на области* G *банахова пространства задан компактный оператор с ненулевым вращением на границе, при этом он переводит область* G *в некоторую подобласть* $H \subset G$, *такую что* $d(\partial G, \partial H) = \delta > 0$. *Если его возмутить липшецевым оператором, норма которого не превосходит* δ, *то возмущённый оператор будет иметь в* G *неподвижные точки.*

Отметим, что при выполнении условий лемм 1 и 2 введённый оператор $\mathcal{S}$ удовлетворяет всем условиям этой теоремы, т.е. данный оператор является липшицевым с некоторой константой $L = L(d')$, и его норма стремится к нулю при $d' \to 0+0$.

Всё это позволяет доказать важнейшую теорему настоящей работы.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теорем* 1 *и* 2. *Если* $\alpha > 0$, *то при достаточно малом* d' *оператор* $\mathcal{A}$ *имеет в* $B(R)$ *неподвижную точку.*

Отсюда моментально вытекает существование решения уравнения (2), а также интересный с биологической точки зрения факт, что если $\dfrac{d'\overline{m}}{b-d} - \overline{\omega} \not\equiv 0$, то неподвижная точка оператора $\mathcal{A}$ ненулевая.

4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Далее рассмотрим вопрос о достаточных условиях единственности неподвижной точки оператора $\mathcal{A}$. Для этого ~~нам~~ потребуется доказать следующее утверждение.

Лемма 5. *В условиях теоремы* 1 *существует такое* $b_0 > 0$, *что для всех* $b \in (0; b_0)$ *и для всех* $d \in [0; b)$ *существует* $d'_0 = d'_0(b, d) > 0$ *такое, что при всех* $d' \in (0; d'_0)$ *оператор* $\mathcal{K}$ *является липшицевым с константой липшицевости* $L < 1$.

Воспользуемся фактом, что если оператор липшицев с константой липшицевости $L < 1$, тогда у него не может существовать более одной неподвижной точки. Это позволяет доказать, что справедлива

Теорема 4. *В условиях теоремы* 3 *и леммы* 5 *существуют такие константы* $b > d \geqslant 0$ *и настолько малое* $d' > 0$, *что оператор* $\mathcal{A}$ *имеет в шаре* $B(R)$ *единственную неподвижную точку.*

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе были изучены некоторые вопросы корректности задачи, связанной с решением нелинейного интегрального уравнения, полученного в результате параметрического замыкания третьего пространственного момента второй степени. Были найдены достаточные условия существования и единственности решения этого уравнения в случае, когда ядра конкуренции и движения непрерывны. Отметим, что линейное интегральное уравнение, получающееся после замыкания с $\alpha = 0$ (так называемого асимметричного замыкания второй степени) было широко изучено ранее в работах [6–8]. В этих работах было показано, что при параметре $d \neq 0$ линейное уравнение может иметь только тривиальное решение. При $d = 0$, кроме тривиального, у интегрального уравнения существуют и неривиальные решения, которые могут быть найдены, например, с помощью итерационных рядов Неймана. Открытым является вопрос об устойчивости рассмотренной задачи.

Источник финансирования. Публикация подготовлена в результате проведения исследования (проект № 18–05–0011) в рамках Программы “Научный фонд НИУ ВШЭ” в 2018–2019 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dieckmann U., Law R.* Moment Approximations of Individual-Based Models // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. 2000. P. 252–270.
2. *Dieckmann U., Law R.* Relaxation Projections and the Method of Moments // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge Univ. Press. 2000. P. 412–455.
3. *Бодров А.Г., Никитин А.А.* Качественный и численный анализ интегрального уравнения, возникающего в модели стационарных сообществ // ДАН. 2014. Т. 455. № 5. С. 507–511.
4. *Никитин А.А., Николаев М.В.* Исследование интегрального уравнения равновесия с ядрами-куртозианами в пространствах различных размерностей // Вест. Московск. унив. Сер 15: Вычисл. матем. и киберн. 2018. № 3. С. 11–19.
5. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. // М.: ГИТТЛ. 1956.
6. *Давыдов А.А., Данченко В.И., Звягин М.Ю.* Существование и единственность стационарного распределения биологического сообщества //Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 2009. Т. 267 № 2. С. 46–55.
7. *Давыдов А.А., Данченко В.И., Никитин А.А.* Об интегральном уравнении для стационарных распределений биологических сообществ // Проблемы динамического управления. Сб. научн. Трудов. 2009. С. 15–29.

8. *Бодров А.Г., Никитин А.А.* Исследование уравнения равновесной плотности биологического вида в пространствах различных размерностей // Вестн. Московск. унив. Сер. 15: Вычисл. матем. и киберн. 2015. № 4. С. 7–13.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF A NONLINEAR INTEGRAL EQUATION

M. V. Nikolaev, A. A. Nikitin

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev June 20, 2019

Received June 26, 2019

In this paper we study the nonlinear integral equation that arose in the spatial model of biological communities developed by Austrian scientists *Ulf Dieckmann and Richard* Law. Sufficient conditions for the existence of the solution of this equation (the fixed point of the integral operator) were found. The question of uniqueness of the solution is also studied.

Keywords: mathematical modelling, integral equations, numerical methods, mathematical biology.