# Соответствие на счетных структурах и запросы к теориям

***Золин Е. Е.*** (*Москва*)

In Modal Correspondence Theory, one says that a first-order (FO) formula $q(x)$ *corresponds* to a modal formula $A$ in case if $A$ is valid on a pointed Kripke frame $(F, w)$ iff $F \models q(w)$. *Query answering* means finding all constants $c$ that satisfy a given FO formula $q(x)$ in a given FO theory $T$, i.e., for which the entailment $T \models q(c)$ holds. Recently it was discovered that these two notions are closely related. Here we analyze this relationship, generalize it to formulas with several variables $q(x_1, \ldots, x_n)$ and to arbitrary FO signatures, and investigate its links to the Modal Correspondence Theory over countable frames.

В модальной теории соответствия [1, Sect. 3.5] говорят, что формула первого порядка с одной свободной переменной $q(x)$ сигнатуры $\{R, =\}$, где $R$ – бинарный предикатный символ, *соответствует* модальной формуле $A$, если для любой шкалы Крипке $F = (W, R)$ и точки $w \in W$, имеем: $F \models q(w) \Leftrightarrow F, w \models A$. Будем обозначать соответствие $q(x) \rightsquigarrow A$, следуя [4], где оно также изучалось для случая формул с несколькими свободными переменными $q(x_1, \ldots, x_n)$. Всякой модальной формуле $A$ соответствует ее стандартный перевод – формула первого порядка $A^*(x)$ в сигнатуре $\{R, =\} \cup \{P_0, P_1, \ldots\}$, где $P_i$ – одноместные предикатные символы.

Сигнатуру $\Sigma$ будем называть *допустимой*, если она расширяет $\{R, =\}$, но *не* содержит символы $P_i$. Пусть $T$ – теория первого порядка в допустимой сигнатуре $\Sigma$. *Ответом* на запрос $q(x)$ к теории $T$ называется всякая константа $c$, такая что $T \models q(c)$. Аналогично можно называть *ответом* на запрос $A^*(x)$ к теории $T$ всякую константу $c$, такую что $T \models A^*(c)$; хотя $T$ и $A^*(x)$ в разных сигнатурах, отношение $\models$ можно понимать в объединении сигнатур; при этом по одноместным символам $P_i$, входящим в $A^*(x)$, фактически стоят неявные кванторы всеобщности второго порядка, что напоминает общезначимость модальной формулы.

Мы говорим, что $q(x)$ и $A$ дают *идентичные ответы*, если для любой теории $T$ в любой допустимой сигнатуре $\Sigma$, ответы на запросы $q(x)$ и $A^*(x)$ к теории $T$ совпадают. Данное отношение будем обозначать $q(x) \approx A$.

Наша задача — исследовать связь между отношениями $\rightsquigarrow$ и $\approx$.

**Теорема 1.** *Если* $q(x) \rightsquigarrow A$, *то* $q(x) \approx A$.

Этот факт оказался полезен как приложение (см. [5, 3]) модальной теории соответствия к задаче нахождения ответов на запросы к базам знаний (теориям первого порядка специального вида, являющимися разрешимыми и тесно связанными с модальными языками): если в модальной логике мы обнаруживаем соответствие $q(x) \rightsquigarrow A$, причем $A$ попадает в фрагмент, которому принадлежат базы знаний, и мы можем построить $A$ эффективно по $q(x)$, то вместо поиска ответов на запрос $q(x)$ к теории $T$ мы можем проверять следование $T \models A^*(c)$, которое является разрешимой задачей.

Обратный к Теореме 1 вопрос оказался нетривиальным. Введем отношение $q(x) \overset{\omega}{\leftrightsquigarrow} A$, означающее, что $q(x)$ соответствует формуле $A$ на всех *(не более чем) счетных* шкалах. Очевидно, что из $q(x) \leftrightsquigarrow A$ следует $q(x) \overset{\omega}{\leftrightsquigarrow} A$. Оказалось, что Теорему 1 можно усилить следующим образом.

**Теорема 2.** *Если* $q(x) \overset{\omega}{\leftrightsquigarrow} A$, *то* $q(x) \approx A$.

Из $q(x) \overset{\omega}{\leftrightsquigarrow} A$ *не* следует $q(x) \leftrightsquigarrow A$, поскольку модальная формула $\Diamond\Box(p \vee q) \to \Diamond(\Box p \vee \Box q)$ соответствует некоторой формуле первого порядка $q(x)$ на счетных, но не на всех шкалах [2]. Как следствие, обратная импликация в Теореме 1 заведомо не верна.

Однако теперь возникает вопрос об обратной импликации в Теореме 2. Пока он открыт, но имеется следующее частичное продвижение. Будем писать $q(x) \rightsquigarrow A$, если для любой шкалы Крипке $F = (W, R)$ и точки $w \in W$, имеем: $F \models q(w) \Rightarrow F, w \models A$. Аналогично введем отношение $q(x) \overset{\omega}{\rightsquigarrow} A$.

**Лемма.** *Если* $q(x) \approx A$, *то* $q(x) \rightsquigarrow A$ *(и, следовательно,* $q(x) \overset{\omega}{\rightsquigarrow} A$*)*.

Кроме того, удалось доказать обратную импликацию к Теореме 2, если ограничиться лишь шкалами $F = (W, R)$ *конечного ветвления*, то есть у которых множество последователей $R(w)$ каждой точки $w \in W$ конечно.

Теоремы 1 и 2 и Лемму удалось обобщить на случай, когда формула $q(x_1, \ldots, x_n)$ имеет несколько свободных переменных и записана в произвольной сигнатуре $\Sigma_{\mathsf{query}}$, вместо $A^*(x)$ рассматривается формула первого порядка $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ в произвольной сигнатуре $\Sigma_{\mathsf{modal}}$, расширяющей $\Sigma_{\mathsf{query}}$, а допустимой называется всякая сигнатура $\Sigma$, содержащая $\Sigma_{\mathsf{query}}$, но не содержащая символов из $\Sigma_{\mathsf{modal}} \setminus \Sigma_{\mathsf{query}}$. Общая картина такова:

$$\boxed{q(\vec{x}) \leftrightsquigarrow \Phi(\vec{x})} \quad \begin{array}{c}\Longrightarrow\\ \not\Longleftarrow\end{array} \quad \boxed{q(\vec{x}) \overset{\omega}{\leftrightsquigarrow} \Phi(\vec{x})} \quad \begin{array}{c}\Longrightarrow\\ \overset{?}{\Longleftarrow}\end{array} \quad \boxed{q(\vec{x}) \approx \Phi(\vec{x})}$$

Таким образом, данные результаты являются не просто фактами о соответствии модальных формул и формул первого порядка, а представляют собой утверждения общего характера о языке первого порядка.

*Статья подготовлена в ходе исследования в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ) с использованием средств субсидии в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации “5-100”.*

### Литература

[1] Blackburn P., de Rijke M., Venema Y. *Modal Logic*. Cambridge Univ. Press, 2001.

[2] Doets H. C. *Completeness and Definability: Applications of the Ehrenfeucht Game in Second-Order and Intensional Logic*. PhD thesis, Univ. van Amsterdam, 1987.

[3] Kikot S., Zolin E. *Modal definability of first-order formulas with free variables and query answering*. Journal of Applied Logic, vol. 11, num. 2, pp. 190–216.

[4] Kracht M. *Tools and Techniques in Modal Logic*, Elsevier, 1999.

[5] Zolin E. *Query answering based on modal correspondence theory*, In Proc. of the 4th “Methods for Modalities” Workshop (M4M-4), 2005, pp. 21–37.