В. З. Гринес, Е. Д. Куренков, Диффеоморфизмы двумерных многообразий с одномерными просторно расположенными базисными множествами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2020, том 84, выпуск 5, 40–97

DOI: https://doi.org/10.4213/im8923

УДК 517.9

В. З. Гринес, $\boxed{\text{Е. Д. Куренков}}$

Диффеоморфизмы двумерных многообразий с одномерными просторно расположенными базисными множествами

В настоящей работе рассматриваются сохраняющие ориентацию A-диффеоморфизмы ориентируемых поверхностей рода большего единицы, содержащие одномерный просторно расположенный совершенный аттрактор. Устанавливается, что вопрос о топологической классификации ограничений диффеоморфизмов на такие базисные множества сводится к задаче топологической классификации псевдоаносовских гомеоморфизмов с отмеченным множеством седловых особенностей. В частности, дано доказательство анонсированной Ю. А. Жировым и Р. В. Плыкиным топологической классификации A-диффеоморфизмов рассматриваемых поверхностей, неблуждающее множество которых состоит из одномерного просторно расположенного аттрактора и нульмерных источников.

Библиография: 34 наименования.

Ключевые слова: аксиома A, одномерное базисное множество, совершенный аттрактор, просторно расположенное множество.

DOI: https://doi.org/10.4213/im8923

Посвящается памяти Р. В. Плыкина

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматриваются сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы, заданные на замкнутом ориентируемом двумерном многообразии M^2 рода $p \geqslant 2$, удовлетворяющие аксиоме A, введенной С. Смейлом [1] (A-диффеоморфизмы)[1]. Согласно спектральной теореме С. Смейла неблуждающее множество $\mathrm{NW}(f)$ A-диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных базисных множеств, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 17-11-01041), за исключением раздела 2, выполненного в рамках выполнения программы ЦФИ (проект ТЗ-100) НИУ ВШЭ за 2019 год.

Настоящая работа содержит доказательство результатов, анонсированных в [2].

[1]Диффеоморфизм $f\colon M^2 \to M^2$ удовлетворяет аксиоме A, если:

1) периодические точки диффеоморфизма f плотны в неблуждающем множестве $\mathrm{NW}(f)$;

2) неблуждающее множество $\mathrm{NW}(f)$ является гиперболическим.

Инвариантное множество Λ называется гиперболическим, если существуют константы $C > 0$, $0 < \mu < 1$ и непрерывное Df-инвариантное разложение касательного подрасслоения $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$ такое, что:

1) $\|Df^k(v)\| \leqslant C\mu^k \|v\|$, при $k \geqslant 0$, $v \in E^s_\Lambda$;

2) $\|Df^{-k}(v)\| \leqslant C\mu^k \|v\|$, при $k \geqslant 0$, $v \in E^u_\Lambda$.

Примерами нетривиальных (отличных от периодических орбит) базисных множеств диффеоморфизмов двумерных многообразий являются: двумерное базисное множество диффеоморфизма f на M^2 (в этом случае базисное множество совпадает с многообразием M^2, которое есть двумерный тор, а f – диффеоморфизм Аносова), одномерное базисное множество DA-диффеоморфизма двумерного тора, полученного из диффеоморфизма Аносова применением “хирургической операции” [1] и одномерный аттрактор Р. В. Плыкина диффеоморфизма двумерной сферы [3]. В работе [4] было анонсировано обобщение хирургической операции С. Смейла, применение которой к псевдоаносовскому гомеоморфизму ориентируемой поверхности рода $p \geqslant 2$ приводит к появлению структурно устойчивого диффеоморфизма этой же поверхности с неблуждающим множеством, состоящим в точности из одного одномерного аттрактора и конечного числа источниковых периодических точек (согласно определению 1.4 настоящей работы такой аттрактор является совершенным). В [4] также была анонсирована без доказательства топологическая классификация таких структурно устойчивых диффеоморфизмов посредством топологической классификации псевдоаносовских гомеоморфизмов с отмеченным подмножеством периодических точек. Позже в книге [5] был упомянут результат (который составил содержание диссертации [6], но не был опубликован), утверждающий, что ограничение A-диффеоморфизма на одномерное базисное множество полусопряжено с некоторым псевдоаносовским или обобщенным псевдоаносовским гомеоморфизмом. Доказательство этого результата следует из работы [7], в которой аналогичный факт доказан в более общей ситуации (для так называемых экспансивных аттракторов).

Следует подчеркнуть, что полученные авторами настоящей работы классификационные результаты, доказанные в основной теореме 1.10, не следуют непосредственно из полусопряженности каждого из рассматриваемых диффеоморфизмов с соответствующим псевдоаносовским гомеоморфизмом. Сам факт существования такого псевдоаносовского гомеоморфизма следует из теоремы 1.6, в которой доказана гиперболичность действия, индуцированного диффеоморфизмом, в фундаментальной группе несущей поверхности (с помощью рассмотрения геодезической ламинации, соответствующей просторно расположенному аттрактору диффеоморфизма). Построение в теореме 1.9 гомеоморфизма, полусопрягающего диффеоморфизм из рассматриваемого в работе класса с псевдоаносовским гомеоморфизмом, является необходимым промежуточным этапом для построения в теореме 1.10 гомеоморфизма несущей поверхности, сопрягающего ограничения двух диффеоморфизмов на их совершенные аттракторы.

Отметим, что проблема классификации просторно расположенных аттракторов A-диффеоморфизмов, заданных на двумерном торе (в этом случае аттрактор автоматически является совершенным), была решена значительно раньше в работе [8] посредством классификации алгебраических автоморфизмов Аносова с отмеченным множеством периодических точек. Что же касается поверхностей, отличных от тора, то доказательство анонсированных в [4] классификационных результатов до сих пор отсутствует. В настоящей работе этот пробел ликвидируется для совершенных просторно расположенных базисных множеств, сохраняющих ориентацию A-диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей отрицательной эйлеровой характеристики. Предложенный в настоящей работе метод, связанный с применением геодезических ламинаций, может быть применен для классификации произвольных одномерных базисных множеств A-диффеоморфизмов (с использованием ветвленых накрытий), заданных и на неориентируемых поверхностях (с учетом техники работы [9] и книги [10]), но доказательства при этом оказываются значительно более громоздкими, поэтому в данной работе мы ограничиваемся случаем ориентируемых поверхностей и базисных множеств без связок степени один.

В настоящей работе выделяется класс A-диффеоморфизмов ориентируемых двумерных поверхностей рода большего единицы, неблуждающее множество которых содержит совершенный просторно расположенный аттрактор (см. определения 1.1, 1.4) и устанавливается, что классификация ограничений таких диффеоморфизмов на аттракторы посредством гомеоморфизмов поверхности, сводится к топологической классификации псевдоаносовских гомеоморфизмов с отмеченным подмножеством седловых гиперболических периодических точек. Как сообщил авторам настоящей статьи А. Ю. Жиров, алгоритм для решения данной задачи можно извлечь из книги [10]. Анонсированные классификационые результаты работы [4] для случая, когда одномерный аттрактор рассматриваемого A-диффеоморфизма ориентируемой поверхности рода большего единицы не содержит связок степени один, являются следствием теорем 1.9 и 1.10 настоящей работы.

Проблема классификации A-диффеоморфизмов, неблуждающие множества которых содержат одномерные базисные множества, имеет довольно длинную историю. Первые классификационные результаты были получены первым автором настоящей работы в [11], [8] для ориентируемых одномерных аттракторов и репеллеров и затем обобщены в [12], [9] Р. В. Плыкиным на случай просторно расположенных одномерных базисных множеств (ориентируемое базисное множество A-диффеоморфизма двумерного тора автоматически является просторно расположенным и наоборот). В работах В. З. Гринеса и Х. Х. Калая был получен полный топологический инвариант для ограничений диффеоморфизмов на произвольные одномерные базисные множества посредством сведения этой проблемы к алгебраической классификации автоморфизмов фундаментальных групп поверхностей с краем, являющихся носителями одномерных базисных множеств (см. [13]–[16]). В серии работ А. Ю. Жирова [17]–[19] было дано полное комбинаторное описание ограничений диффеоморфизмов поверхностей на одномерные базисные множества. Следует также отметить работы Х. Бонатти и Р. Ланжевена, В. З. Гринеса и Х. Х. Калая, в которых найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности содержательных классов структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей, чьи неблуждающие множества содержат нетривиальные одномерные и нульмерные базисные множества ([20], [5], [21], [16]).

Для формулировки основных результатов настоящей работы напомним определение из [3], являющееся обобщением понятия ориентируемого базисного множества введенного в [11].

Определение 1.1. Базисное множество Λ A-диффеоморфизма $f\colon M^2\to M^2$ называется просторно расположенным, если для различных точек $x, y \in \Lambda$ любая замкнутая кривая, составленная из дуг $[x, y]^s \subset W^s_x$ и $[x, y]^u \subset W^u_x$, не гомотопна нулю[2].

В настоящей работе рассматриваются A-диффеоморфизмы замкнутого ориентируемого двумерного многообразия M^2 рода $p \geqslant 2$, неблуждающее множество которых содержит одномерное просторно расположенное базисное множество Λ такое, что множество $M^2 \setminus \Lambda$ состоит из конечного числа областей, гомеоморфных двумерному диску (такое базисное множество называется совершенным, см. определение 1.4). Как оказывается, проблема топологической классификации таких диффеоморфизмов тесно взаимосвязана с топологической классификацией псевдоаносовских гомеоморфизмов поверхностей.

Введем на M^2 аналитическую структуру, превращающую M^2 в риманову поверхность. Рассмотрим конформное отображение π универсальной накрывающей $\overline{M}^2$ на M^2, где $\overline{M}^2$ – плоскость Лобачевского в реализации Пуанкаре на внутренности круга $|z| < 1$ комплексной z-плоскости. Известно [22], что M^2 соответствует однозначно определенная дискретная группа Γ неевклидовых переносов таких, что M^2 конформно эквивалентно $\overline{M}^2/\Gamma$ и Γ изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(M^2)$ многообразия M^2.

Обозначим через $\pi\colon \overline{M}^2 \to M^2$ естественную проекцию. Напомним, что каждый элемент $\gamma \in \Gamma$ имеет две и только две неподвижные точки: устойчивую γ^+ и неустойчивую γ^-, и эти точки лежат на абсолюте $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1|\}$. Геодезическая $\bar{l}_\gamma$ на плоскости Лобачевского $\overline{M}^2$ с граничными точками γ^+ и γ^- является единственной инвариантной относительно γ геодезической на $\overline{M}^2$. Согласно [23] точки абсолюта, являющиеся неподвижными для какого-либо элемента $\gamma \in \Gamma$ $(\gamma \neq \mathrm{id})$, называются рациональными. Множество рациональных точек является счетным и всюду плотным на абсолюте [22]. Точки, принадлежащие дополнению к множеству рациональных точек на абсолюте называются иррациональными точками.

Для диффеоморфизма $f\colon M^2 \to M^2$ обозначим через $\bar{f}\colon \overline{M}^2 \to \overline{M}^2$ диффеоморфизм, накрывающий f, т. е. диффеоморфизм, для которого $\pi \circ \bar{f} = f \circ \pi$. Преобразование $\bar{f}_*\colon \Gamma \to \Gamma$, действующее по правилу $\bar{f}_*(\gamma) = \bar{f} \circ \gamma \circ \bar{f}^{-1}$, есть автоморфизм группы Γ.

В силу теории Нильсена [22] отображение $\bar{f}_*$ индуцирует гомеоморфизм абсолюта $\bar{f}^*\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ по следующему правилу. Пусть $\gamma_1 \in \Gamma$ $(\gamma_1 \neq \mathrm{id})$, и пусть $\gamma_2 = \bar{f}_*(\gamma_1)$, тогда $f^*(\gamma_1^+) = \gamma_2^+$, $f^*(\gamma_1^-) = \gamma_2^-$. Таким образом, $\bar{f}^*$ однозначно определено на множестве рациональных точек абсолюта $\mathbb{E}$, и его можно однозначно продолжить до гомеоморфизма всего абсолюта $\mathbb{E}$. Кроме того, гомеоморфизм $\bar{f}$ имеет однозначное непрерывное продолжение на абсолют, которое совпадает с $\bar{f}^*$ (см. следствие из леммы 2.4). Для упрощения обозначений в дальнейшем продолжение $\bar{f}$ на множество $\overline{M}^2 \cup \mathbb{E}$ будем также обозначать через $\bar{f}$.

[2] $[x, y]^s$, $[x, y]^u$, $(x, y)^s$, $(x, y)^u$ обозначают отрезки и интервалы, ограниченные точками x, y, содержащиеся в одномерных устойчивом W^s_x и неустойчивом W^u_x многообразиях соответственно.

Определение 1.2. Автоморфизм $\bar{f}_*$ группы Γ называется гиперболическим, если для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ ($\gamma_1 \neq \mathrm{id}$) и любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение $\bar{f}^n_*(\gamma_1) \neq \gamma_2\gamma_1\gamma_2^{-1}$.

Из определения гиперболичности немедленно вытекает, что гиперболичность не зависит от выбора конкретного поднятия $\bar{f}$ и что автоморфизм $\bar{f}_*$ гиперболичен тогда и только тогда, когда для каждого n гиперболичен автоморфизм $\bar{f}^n_*$. Следующее утверждение разъясняет топологический смысл данного определения (доказательство см. в § 2).

Утверждение 1.3. *Автоморфизм $\bar{f}_*\colon \Gamma \to \Gamma$ является гиперболическим тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой замкнутой негомотопной нулю кривой l на M^2 замкнутые кривые l и $f^n(l)$ не являются гомотопными.*

Базисное множество A-диффеоморфизма, отличное от периодической орбиты, будем называть нетривиальным.

Определение 1.4. Нетривиальное базисное множество Λ A-диффеоморфизма $f\colon M^2 \to M^2$ назовем совершенным, если его дополнение $M^2 \setminus \Lambda$ состоит из конечного числа областей Δ, гомеоморфных диску.

В § 2 (см. лемму 2.2) будет показано, что совершенное базисное множество A-диффеоморфизма $f\colon M^2 \to M^2$ является связным одномерным множеством. С другой стороны, из [24, теорема 3] следует, что одномерное базисное множество A-диффеоморфизма двумерной поверхности является либо аттрактором, либо репеллером и в силу [24, теорема 1] в первом случае содержит неустойчивые, а во втором случае – устойчивые многообразия своих точек[3]. Кроме того, из той же работы (теорема 2) вытекает следующее предложение.

Предложение 1.5. *Пусть Λ – одномерное базисное множество A-диффеоморфизма $f\colon M^2 \to M^2$. Тогда Λ локально гомеоморфно прямому произведению интервала на канторовское множество.*

Следующий результат является ключевым в топологической классификации A-диффеоморфизмов, чье неблуждающее множество содержит совершенное просторно расположенное базисное множество.

Теорема 1.6. *Пусть $f\colon M^2 \to M^2$ – диффеоморфизм, неблуждающее множество которого содержит совершенный просторно расположенный аттрактор или репеллер, и $\bar{f}\colon \overline{M}^2 \to \overline{M}^2$ – диффеоморфизм, накрывающий f. Тогда автоморфизм $\bar{f}_*$ является гиперболическим.*

Определение 1.7. Гомеоморфизм $P\colon M^2 \to M^2$ называется псевдоаносовским, если на M^2 существует такая пара P-инвариантных трансверсальных

[3] Базисное множество Λ A-диффеоморфизма f называется аттрактором, если существует замкнутая окрестность U множества Λ такая, что $f(U) \subset \operatorname{int} U$, $\bigcap_{k=0}^{+\infty} f^k(U) = \Lambda$.

слоений $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ с трансверсальными мерами μ^s, μ^u соответственно, и общим множеством $\mathcal{S}$ седловых особенностей[4], что

1) каждая седловая особенность из $\mathcal{S}$ имеет не менее трех сепаратрис;

2) существует число $\lambda > 1$ такое, что

$$\mu^s(P(\alpha)) = \lambda\mu^s(\alpha) \qquad (\mu^u(P(\alpha)) = \lambda^{-1}\mu^u(\alpha))$$

для любой дуги α, трансверсальной $\mathcal{F}^s$ $(\mathcal{F}^u)$.

Из теории Нильсена–Терстена (см., например, [25], [26]) следует, что если для диффеоморфизма $\bar{f}$, накрывающего f, автоморфизм $\bar{f}_*$ является гиперболическим, то существует псевдоаносовский гомеоморфизм $P_f\colon M^2 \to M^2$ гомотопный диффеоморфизму f.

Для определенности далее (если не оговорено противное) мы будем предполагать, что рассматриваемое одномерное базисное множество Λ является аттрактором (в случае репеллера достаточно рассмотреть диффеоморфизм f^{-1}).

Следуя [3] и [11], дадим следующее определение.

Определение 1.8. Периодическую точку $p \in \Lambda$ будем называть граничной периодической точкой одномерного аттрактора Λ, если одна из компонент линейной связности множества $W^s(p) \setminus p$ не пересекается с Λ. Периодическую точку, не являющуюся граничной, будем называть внутренней.

Согласно [11] множество граничных периодических точек в одномерном аттракторе непусто и конечно.

Аналогично [11] устанавливается, что достижимая изнутри граница[5] каждой области Δ, являющейся компонетой связности множества $M^2 \setminus \Lambda$, состоит из конечного числа одномерных неустойчивых многообразий $W^u_{p_1}, \dots, W^u_{p_{r_C}}$ $(r_C \geqslant 1)$ граничных периодических точек $p_1, \dots, p_{r_C}$ множества Λ. В [12] множество $C = \bigcup_{j=1}^{r_C} W^u_{p_j}$ названо связкой степени r_C.

Теорема 1.9. *Пусть $f\colon M^2 \to M^2$ – диффеоморфизм, обладающий совершенным просторно расположенным аттрактором Λ. Тогда существует гомотопное тождественному непрерывное отображение $h\colon M^2 \to M^2$ такое, что*

1) $hf = P_f h$;

2) *ограничение отображения h на множество Λ является взаимно однозначным за исключением множества $\Gamma^u = W^u(q_1) \cup W^u(q_2) \cup \dots \cup W^u(q_k)$ $(k \geqslant 6)$, состоящего из неустойчивых многообразий всех граничных периодических точек $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$ из множества Λ;*

3) *множество $h(Q)$ содержит множество $\mathcal{S}$;*

---

[4]Трансверсальная мера μ для слоения с особенностями $\mathcal{F}$ сопоставляет каждой дуге α трансверсальной $\mathcal{F}$, борелевскую меру $\mu|_\alpha$ со следующими свойствами:

1) если β – поддуга дуги α, то $\mu|_\beta$ есть ограничение меры $\mu|_\alpha$;

2) если α_0 и α_1 суть две дуги, трансверсальные $\mathcal{F}$ и связанные гомотопией $\alpha\colon I \times I \to M^2$ такой, что $\alpha(I \times 0) = \alpha_0, \alpha(I \times 1) = \alpha_1$ и $\alpha(a \times I)$ для любого a содержится в некотором слое $\mathcal{F}$, то $\mu|_{\alpha_0} = \mu|_{\alpha_1}$.

[5]Достижимой изнутри границей области $\Delta \subset M^2 \setminus \Lambda$ называется подмножество $C \subset \Lambda$ такое, что для любой точки $y \in C$ найдется путь $\psi_y\colon I \to \Delta \cup C$, такой что $\psi_y(1) = y$, и $\psi_y(t) \in \Delta$ для любого $t \in [0, 1)$.

4) *для точек* $q_{i_1}, q_{i_2} \in Q$ *выполняется условие* $h(q_{i_1}) = h(q_{i_2})$ *тогда и только тогда, когда* q_{i_1}, q_{i_2} *принадлежат одной и той же связке множества* Λ.

Положим $B = h(Q)$. Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1.10. *Пусть* $f, f'\colon M^2 \to M^2$ *– диффеоморфизмы, обладающие совершенными просторно расположенными аттракторами* Λ *и* Λ' *соответственно. Тогда для того, чтобы существовал гомеоморфизм* $\varphi\colon M^2 \to M^2$ *такой, что* $f'|_{\Lambda'} = \varphi f \varphi^{-1}|_{\Lambda'}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовал гомеоморфизм* $\psi\colon M^2 \to M^2$ *такой, что* $\psi(B) = B'$ *и* $P_{f'} = \psi P_f \psi^{-1}$.

Если любые базисные множества Λ_i и Λ'_i диффеоморфизмов f и f' соответственно отличные от аттракторов Λ и Λ' являются периодическими источниковыми орбитами, то отображение $\varphi\colon M^2 \to M^2$ в теореме 1.10 можно выбрать таким, что φ будет сопрягать диффеоморфизмы f и f' на всей поверхности M^2. Другими словами верно следующее утверждение.

Следствие 1.11. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1.10, *и множества* $\mathrm{NW}(f) \setminus \Lambda$ *и* $\mathrm{NW}(f') \setminus \Lambda'$ *состоят из источниковых периодических орбит. Тогда для того, чтобы существовал гомеоморфизм* $\varphi\colon M^2 \to M^2$ *такой, что* $f' = \varphi f \varphi^{-1}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовал гомеоморфизм* $\psi\colon M^2 \to M^2$ *такой, что* $\psi(B) = B'$ *и* $P_{f'} = \psi P_f \psi^{-1}$.

Авторы выражают благодарность А. Ю. Жирову за полезные обсуждения и внимание к работе.

§ 2. Вспомогательные сведения и результаты

2.1. Связность и одномерность совершенного базисного множества. Основной результат данного параграфа (лемма 2.2) основан на следующем топологическом факте. Положим $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ – стандартный открытый диск.

Утверждение 2.1. *Пусть* M^2 *– произвольная связная компактная поверхность, и* $\varphi_i\colon D^2 \to M^2$, $i = 1, \dots, k$, *– вложения диска* D^2 *в поверхность* M^2 *такие, что* $\varphi_i(D^2) \cap \varphi_j(D^2) = \varnothing$ *для любых* $i \neq j$. *Тогда* $M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D^2)$ *является связным компактным множеством.*

Доказательство. Пусть $D^2_r \subset D^2$ – открытый диск радиуса $r > 0$ (считаем, что $D^2_1 = D^2$), а $\mathbb{S}^1_r$ – окружность радиуса r. Покажем, что множество $M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D^2_r)$ при $0 < r < 1$ – связное компактное множество. Действительно, так как φ_i – гомеоморфизмы на образ, то $\bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D^2_r)$ – открытое множество, а тогда $M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D^2_r)$ – замкнуто, а следовательно, компактно как замкнутое подмножество компактного пространства. Покажем, что $M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D^2_r)$ – линейно связное множество. Пусть $p, q \in M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D^2_r)$ – произвольные точки, а $l\colon I \to M^2$ ($I = [0,1]$) – путь, соединяющий их в M^2. Покажем, что точки x, y можно соединить путем, лежащим в $M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D^2_r)$.

Если

$$l(I) \subset M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \varphi_i(D_r^2),$$

то путь l искомый. Предположим, что $l(I) \cap \varphi_i(D_r^2) \neq \varnothing$ для некоторого i. В силу теоремы Жордана, примененной к множеству $\varphi_i(D^2)$, пересечение $\varphi_i(S_r^1) \cap l(I)$ непусто. Так как множество $\varphi_i(S_r^1) \cap l(I)$ замкнуто, то среди точек $l^{-1}(\varphi_i(S_r^1) \cap l(I))$ найдутся минимальная x_m и максимальная x_M. При этом $x_m \neq x_M$ в силу открытости $\varphi_i(D_r)$. Построим путь $l_i\colon I \to M^2 \setminus \varphi_i(D_r^2)$, совпадающий с l на отрезках $[0, x_m]$ и $[x_M, 1]$ и совпадающий с одной из дуг окружности $\varphi(\mathbb{S}_r^1)$ на отрезке $[x_m, x_M]$. Повторяя, если нужно, описанную процедуру последовательно для всех индексов i таких, что $l(I) \cap \varphi(D_r^2) \neq \varnothing$, получаем путь

$$\widetilde{l}\colon I \to M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \varphi_i(D_r^2),$$

соединяющий точки p и q. Таким образом, множество

$$M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \varphi_i(D_r^2)$$

является линейно связным, а, следовательно, и связным.

Рассмотрим произвольную монотонно возрастающую последовательность $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $r_j \to 1$ при $j \to \infty$. Ей соответствует последовательность вложенных компактных связных множеств $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_j \supset \cdots$, где

$$A_j = M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \varphi_i(D_{r_j}^2).$$

Положим

$$A = M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \varphi_i(D^2).$$

Покажем, что для любой открытой окрестности U множества A найдется номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что для любого $j > N$ выполнено включение $A_j \subset U$. Предположим противное. Тогда $A_j \cap (M^2 \setminus U) \neq \varnothing$ для бесконечного числа индексов j. Рассмотрим последовательность точек $\{y_{j_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ такую, что $y_{j_l} \in A_j \cap (M^2 \setminus U)$. Так как множество $M^2 \setminus U$ компактно как замкнутое подмножество компактного пространства, то без ограничения общности последовательность $\{y_{j_l}\}$ можно считать сходящейся к некоторой точке $y \in M^2 \setminus U$. Так как каждое множество A_j замкнутое, то имеет место включение $y \in A_j$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Но тогда в силу того, что $A = \bigcap_{j=0}^{\infty} A_j$, имеет место включение $y \in A$, что противоречит тому, что $A \subset U$.

Покажем теперь, что множество A связно. Предположим противное. Тогда найдется пара непустых непересекающихся замкнутых множеств B_1 и B_2 таких, что $A = B_1 \cup B_2$. Так как поверхность M^2 является нормальным топологическим пространством, то найдутся две непересекающиеся открытые окрестности U_1 и U_2 множеств B_1 и B_2. В силу доказанного выше найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для любого $j > N$ имеет место включение $A_j \subset U_1 \cup U_2$ для любого $j > N$, причем $A_j \cap U_1 \neq \varnothing$ и $A_j \cap U_2 \neq \varnothing$ в силу того, что $A \subset A_j$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Получаем противоречие со связностью множества A_j. Утверждение доказано.

Согласно [27], [28] базисное множество Λ единственным образом представляется в виде конечного объединения $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_q$, $q \geqslant 1$, замкнутых подмножеств, которые называются периодическими компонентами, таких, что $f(\Lambda_i) = \Lambda_{i+1}$ при $i = 1, \dots, q-1$, $f(\Lambda_q) = \Lambda_1$. Для любой точки $x \in \Lambda_i$ множества $W^s_x \cap \Lambda_i$ и $W^u_x \cap \Lambda_i$ плотны в Λ_i

Лемма 2.2. *Совершенное базисное множество Λ A-диффеоморфизма $f\colon M^2 \to M^2$ замкнутой поверхности M^2 является связным одномерным множеством и, следовательно, состоит в точности из одной периодической компоненты.*

Доказательство. Из определения совершенности базисного множества следует, что дополнение к Λ состоит из конечного числа областей гомеоморфных диску. Тогда в силу утверждения 2.1 Λ является связным и, следовательно, состоит из одной периодической компоненты. Покажем теперь, что Λ является одномерным. Предположим противное, тогда Λ либо нульмерно, либо двумерно. Если Λ нульмерно, то в силу его нетривиальности оно состоит более чем из одной точки. С другой стороны, в силу нульмерности оно должно быть вполне несвязным, что противоречит его связности.

Предположим, что Λ двумерно. Тогда множество Λ совпадает с объемлющим многообразием M^2 (см., например, [29, теорема 8.1.1.]), что противоречит определению совершенного базисного множества. Лемма доказана.

2.2. Свойства элементов группы Γ и накрывающих отображений. Приведем основные свойства отображений $\bar{f}$, $\bar{f}_*$, $\bar{f}^*$, определенных во введении.

Лемма 2.3. *Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\gamma_1, \gamma_2 \neq \mathrm{id}$ и $\bar{l}_{\gamma_1}$, $\bar{l}_{\gamma_2}$ – инвариантные геодезические элементов γ_1 и γ_2 соответственно. Тогда $\pi(\bar{l}_{\gamma_1}) = \pi(\bar{l}_{\gamma_2})$ в том и только том случае, когда некоторые степени элементов γ_1 и γ_2 сопряжены в Γ, т. е. существует такой элемент $\beta \in \Gamma$ и такие целые числа n_1, n_2, отличные от нуля, что $\gamma_2^{n_2} = \beta \circ \gamma_1^{n_1} \circ \beta^{-1}$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\gamma_1^{n_1}$ и $\gamma_2^{n_2}$ сопряжены при некоторых $n_1, n_2 \neq 0$, т. е. найдется элемент $\beta \in \Gamma$ такой, что $\gamma_2^{n_2} = \beta \circ \gamma_1^{n_1} \circ \beta^{-1}$. Пусть $\beta(\bar{l}_{\gamma_1^{n_1}})$ – инвариантная относительно $\gamma_1^{n_1}$ геодезическая. Тогда $\beta(\bar{l}_{\gamma_1^{n_1}})$ – геодезическая инвариантная относительно $\gamma_2^{n_2}$, так как

$$\gamma_2^{n_2}(\beta(\bar{l}_{\gamma_1^{n_1}})) = \beta \circ \gamma_1^{n_1} \circ \beta^{-1}(\beta(\bar{l}_{\gamma_1})) = \beta(\bar{l}_{\gamma_1^{n_1}}).$$

В силу того, что геодезическая $\bar{l}_{\gamma_2}$, инвариантная относительно γ_2, единственна, имеет место равенство $\bar{l}_{\gamma_2} = \beta(\bar{l}_{\gamma_1})$. Таким образом, $\pi(\bar{l}_{\gamma_2}) = \pi(\beta(\bar{l}_{\gamma_1})) = \pi(\bar{l}_{\gamma_1})$.

Докажем достаточность. Пусть $\pi(\bar{l}_{\gamma_1}) = \pi(\bar{l}_{\gamma_2})$. Так как $\pi^{-1}(\pi(\bar{l}_{\gamma_1}))$ состоит из счетного числа непересекающихся кривых, то найдется такой элемент $\beta \in \Gamma$, что $\bar{l}_{\gamma_2} = \beta(\bar{l}_{\gamma_1})$. Так как геодезическая $\bar{l}_{\gamma_2}$ инвариантна относительно элемента $\beta \circ \gamma_1 \circ \beta^{-1}$, то найдутся целые числа $n_1, n_2 \neq 0$ такие, что $\gamma_2^{n_2} = (\beta \circ \gamma_1 \circ \beta^{-1})^{n_1}$, что равносильно равенству $\gamma_2^{n_2} = \beta^{n_1} \circ \gamma_1^{n_1} \circ \beta^{-n_1}$.

Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть* $\bar f_*(\gamma_1)=\gamma_2$, *тогда* $\bar f(\gamma_1^+)=\gamma_2^+$, $\bar f(\gamma_1^-)=\gamma_2^-$.

Доказательство. Пусть $\bar l_{\gamma_1}$ – геодезическая, инвариантная относительно элемента $\gamma_1\in\Gamma$, $\gamma_1\neq\mathrm{id}$. Тогда из равенства

$$\bar f_*(\gamma_1)(\bar f(\bar l_{\gamma_1}))=\bar f\circ\gamma_1\circ\bar f^{-1}(\bar f(\bar l_{\gamma_1}))=\bar f(\bar l_{\gamma_1})$$

следует, что $\bar f(\bar l_{\gamma_1})$ – кривая, инвариантная относительно $\bar f_*(\gamma_1)$. Граничные точки кривой $\bar f(\bar l_{\gamma_1})$ являются неподвижными точками продолжения на абсолют отображения $\bar f_*(\gamma_1)$, следовательно, они являются граничными точками геодезической, инвариантной относительно $\bar f_*(\gamma_1)$. Таким образом, имеет место ровно одна из следующей пары равенств либо $\bar f(\gamma_1^+)=\gamma_2^+$, $\bar f(\gamma_1^-)=\gamma_2^-$, либо $\bar f(\gamma_1^+)=\gamma_2^-$, $\bar f(\gamma_1^-)=\gamma_2^+$.

Покажем, что верна первая пара равенств. Рассмотрим произвольную точку $\bar x\in\bar f(\bar l_{\gamma_1})$. Тогда точки $\bar f^{-1}(\bar x)$ и $\gamma_1(\bar f^{-1}(\bar x))$ принадлежат геодезической $\bar l_{\gamma_1}$, причем точки $\bar f^{-1}(\bar x)$, $\gamma_1(\bar f^{-1}(\bar x))$, γ_1^+ располагаются в указанном порядке на геодезической $\bar l_{\gamma_1}$. Тогда точки $\bar x$, $\bar f\circ\gamma_1\circ\bar f^{-1}(\bar x)$, $\bar f(\gamma_1^+)$ располагаются в указанном порядке на кривой $\bar f(\bar l_{\gamma_1})$. Таким образом, точка $\bar f(\gamma_1^+)$ является притягивающей точкой элемента $\gamma_2=\bar f_*(\gamma_1)$, а значит, $\bar f(\gamma_1^+)=\gamma_2^+$ и $\bar f(\gamma_1^-)=\gamma_2^-$. Лемма доказана.

Следствие 2.5. *Продолжение* $\bar f$ *на абсолют совпадает с отображением* $\bar f^*$.

Лемма 2.6. *Пусть* $f_0\colon M^2\to M^2$ *и* $f_1\colon M^2\to M^2$ *– гомотопные гомеоморфизмы поверхности* M^2. *Тогда для любого поднятия* $\bar f_0\colon\overline{M}^2\to\overline{M}^2$ *найдется поднятие* $\bar f_1\colon\overline{M}^2\to\overline{M}^2$ *такое, что продолжения отображений* $\bar f_0$ *и* $\bar f_1$ *на абсолют совпадают.*

Доказательство. Так как M^2 – компактная поверхность, а f_0 и f_1 гомотопны, то из результатов Эпштейна [30] следует, что существует изотопия $f_t\colon M^2\to M^2$ между отображениями f_0 и f_1. По теореме о накрывающей гомотопии найдется отображение $\bar f_t\colon\overline{M}^2\to\overline{M}^2$ такое, что $\pi\circ\bar f_t=f_t\circ\pi$. Так как f_t – изотопия, то при любом t отображение $\bar f_t$ является гомеоморфизмом, а значит, корректно определено отображение $\bar f_{t*}\colon\Gamma\to\Gamma$. При любом $\gamma\in\Gamma$ отображение $\bar f_{t*}(\gamma)$ есть элемент группы Γ. Покажем, что данный элемент не зависит от t. Рассмотрим произвольную точку $\bar x\in\overline{M}^2$, тогда $\bar f_{t*}(\gamma)(\bar x)$ есть непрерывная кривая, лежащая в $\pi^{-1}(\pi(\bar x))$. Но тогда в силу дискретности $\pi^{-1}(\pi(\bar x))$ путь $\bar f_{t*}(\gamma)(\bar x)$ является постоянным. Таким образом, автоморфизм $\bar f_{1*}$ совпадает с $\bar f_{0*}$. Отсюда в силу следствия из леммы 2.4 получаем, что продолжения на абсолют гомеоморфизмов $\bar f_0$ и $\bar f_1$ совпадают. Лемма доказана.

2.3. Топологический критерий гиперболичности автоморфизма группы Γ.

Доказательство утверждения 1.3. Докажем необходимость. Предположим противное. Пусть $\bar f_*$ гиперболичен, и существует такая замкнутая негомотопная нулю кривая $l\colon I\to M^2$, $l(0)=l(1)$ и такое $n\in\mathbb N$, что кривые l и $f^n(l)$ свободно гомотопны. Пусть $F\colon I\times I\to M^2$ – гомотопия между кривыми l и $f^n(l)$, $F(t,0)=l(t)$ и $F(t,1)=f^n(l(t))$. Положим $x_0=l(0)$, и пусть $\bar x_0\in\pi^{-1}$ –

некоторый прообраз точки x_0. По теореме о накрывающей гомотопии найдется единственная гомотопия $\overline{F}\colon I\times I\to M^2$ такая, что $\bar{x}_0=\overline{F}(0,0)$. Положим $\bar{x}_1=\overline{F}(1,0)$. Так как кривая l не гомотопна нулю, то $\bar{x}_1\neq\bar{x}_0$, и в силу того, что $\pi(\bar{x}_1)=\pi(\bar{x}_0)=x_0$, найдется единственный элемент $\gamma\in\Gamma$ такой, что $\gamma(\bar{x}_0)=\bar{x}_1$. Так как пути $\overline{F}(1,t)$ и $\gamma(\overline{F}(0,t))$ являются поднятиями пути $F(0,t)$ с началом в точке $\bar{x}_1$, то в силу единственности поднятия имеет место равенство $F(1,t)=\gamma(F(0,t))$. Рассмотрим поднятие $\bar{f}_n$ диффеоморфизма f^n такое, что $\bar{f}_n(\bar{x}_0)=\overline{F}(0,1)$. Так как $\overline{F}(t,1)$ и $\bar{f}_n(\overline{F}(t,1))$ являются поднятиями пути $f^n(l)$ с началом в точке $\bar{x}_2=\overline{F}(1,0)$, то в силу единственности поднятия имеет место равенство $\overline{F}(t,1)=\bar{f}_n(\overline{F}(t,1))$. Рассмотрим композицию $\gamma^{-1}\circ\bar{f}_n\circ\gamma\circ\bar{f}_n^{-1}$, являющуюся элементом группы Γ. Из полученных выше равенств вытекает, что $\gamma^{-1}\circ\bar{f}_n\circ\gamma\circ\bar{f}_n^{-1}(\bar{x}_2)=\bar{x}_2$, следовательно, $\gamma^{-1}\circ\bar{f}_n\circ\gamma\circ\bar{f}_n^{-1}=\mathrm{id}$ и $\bar{f}_{n*}(\gamma)=\gamma$. Таким образом, автоморфизм $\bar{f}_{n*}$ не является гиперболическим, а следовательно, и $\bar{f}_*$ не является гиперболическим, что противоречит сделанному предположению о гиперболичности автоморфизма $\bar{f}_*$.

Докажем достаточность. Предположим противное. Пусть никакая негомотопная нулю кривая не переходит ни при какой итерации $\bar{f}$ в гомотопную себе, и автоморфизм $\bar{f}_*$ не является гиперболическим. Тогда для некоторых $n\in\mathbb{N}$ и $\beta,\gamma\in\Gamma$, $\gamma\neq\mathrm{id}$, будет иметь место соотношение $\bar{f}^n\circ\gamma\circ\bar{f}^{-n}=\beta\gamma\beta^{-1}$. Положим $\bar{f}_n=\beta^{-1}\circ\bar{f}^n$. Тогда $\bar{f}_n\circ\gamma\circ\bar{f}_n^{-1}=\gamma$. Пусть $\bar{l}_\gamma\subset\overline{M}^2$ – инвариантная относительно γ геодезическая. Рассмотрим произвольную точку $\bar{x}_0\in\bar{l}_\gamma$. Положим $\bar{x}_1=\gamma(\bar{x}_0)$. Пусть $\bar{\varphi}\colon I\to\overline{M}^2$ – произвольная кривая, соединяющая точки $\bar{x}_0$ и $\bar{f}_n(\bar{x}_0)$. Тогда из $\bar{f}_n\circ\gamma=\gamma\circ\bar{f}_n$ следует равенство $\bar{f}_n(\bar{x}_1)=\gamma(\bar{f}_n(\bar{x}_0))$. Рассмотрим отображение $\overline{F}\colon I\times I\to\overline{M}^2$, заданное по правилу $\overline{F}(t,s)=\gamma^s(\varphi(t))$, где $\{\gamma^s\mid s\in\mathbb{R}\}$ – семейство гиперболических движений плоскости Лобачевского с неподвижными точками γ^+ и γ^- на абсолюте такое, что $\gamma^{s_1}\gamma^{s_2}=\gamma^{s_1+s_2}$, и $\gamma^1=\gamma$. Отображение $\overline{F}$ является гомотопией между отрезком кривой $\bar{l}_\gamma$, ограниченным точками $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_1$, и отрезком кривой $\bar{f}_n(\bar{l}_\gamma)$, ограниченным точками $\bar{f}_n(\bar{x}_0)$ и $\bar{f}_n(\bar{x}_1)$. Кроме того, так как $\pi\circ\varphi=\pi\circ\gamma\circ\varphi$, то гомотопия $\overline{F}$ проектируется в гомотопию F между замкнутыми кривыми $\pi(\bar{l}_\gamma)$ и $f^n(\pi(\bar{l}_\gamma))$, что противоречит предположению о том, что никакая кривая негомотопная нулю под действием f^n не переходит в гомотопную себе.

Утверждение доказано.

2.4. Асимптотическое поведение прообразов устойчивых и неустойчивых многообразий одномерного совершенного аттрактора на плоскости Лобачевского. Пусть Λ – одномерный совершенный аттрактор A-диффеоморфизма $f\colon M^2\to M^2$.

Определение 2.7. Точка $x\in\Lambda$ называется s-плотной (u-плотной), если каждая из компонент линейной связности множества $W^s_x\setminus x$ ($W^u_x\setminus x$) содержит подмножество плотное в Λ.

Следующее предложение доказывается аналогично [11, лемма 2.1, лемма 2.2], [29, теорема 8.2.1].

Предложение 2.8. *Пусть Λ – одномерный аттрактор диффеоморфизма f. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *все точки* Λ *являются* u*-плотными*;

2) *точка* $x \in \Lambda$ *является* s*-плотной тогда и только тогда, когда многообразие* W^s_x *не содержит граничную периодическую точку*;

3) *если* W^s_x *содержит граничную периодическую точку* p $(x \neq p)$, *то компонента линейной связности множества* $W^s_x \setminus x$, *не содержащая граничной периодической точки* p, *содержит подмножество, плотное в* Λ, *а компонента линейной связности множества* $W^s_x \setminus x$, *содержащая граничную периодическую точку* p, *не содержит подмножества, плотного в* Λ.

Следующие определения и утверждения были введены и доказаны в серии работ [11], [15], [16], [12], [29] в предположениях различной общности. Подробное доказательство утверждений ниже можно извлечь из [29, гл. 9.1].

Определение 2.9. Простая замкнутая кривая C_Λ называется *квазитрансверсалью аттрактора* Λ, если:

1) C_Λ является объединением дуг $[z,y]^u \subset W^u_z$ и $[y,z]^s \subset W^s_z$ для некоторых точек $z, y \in \Lambda$;

2) $(z,y)^u \cap \Lambda \neq \varnothing$ и $(y,z)^s \cap \Lambda \neq \varnothing$;

3) индекс пересечения $[z,y]^u$ и $[y,z]^s$ один и тот же в точках z и y.

Существование квазитрансверсали для совершенного аттрактора следует непосредственно из предложения 2.8 (см. [29, лемма 9.1.1]). Кроме того, в силу просторной расположенности множества Λ квазитрансверсаль C_Λ является негомотопной нулю кривой.

Из свойств группы Γ следует, что полный прообраз $\overline{C}_\Lambda = \pi^{-1}(C_\Lambda)$ разбивается на счетное множество кривых без самопересечений таких, что

1) каждая кривая $\bar{c} \in \overline{C}_\Lambda$ имеет в точности две граничные точки, являющиеся неподвижными точками некоторого элемента $\gamma_{\bar{c}}$, такого, что для любой точки $\bar{x} \in \bar{c}$ дуга $(\bar{x}, \gamma_{\bar{c}}(\bar{x}))$ не содержит когруэнтных точек в силу какого-либо элемента группы Γ, отличного от тождественного;

2) любые две кривые $\bar{c}, \bar{c}'$ из множества $\overline{C}_\Lambda$ не имеют общих граничных точек на абсолюте.

Существование квазитрансверсали позволяет исследовать асимптотические свойства прообразов устойчивых и неустойчивых многообразий точек совершенного просторно расположенного аттрактора Λ на универсальном накрытии поверхности M^2 (плоскости Лобачевского).

Пусть $W^{\delta+}_x$, где $\delta \in \{s,u\}$, – компонента линейной связности множества $W^\delta_x \setminus x$, содержащая множество плотное в Λ. Тогда из определения квазитрансверсали следует, что пересечение $W^{\delta+}_x \cap C_\Lambda$ не пусто и состоит из счетного множества точек. Пусть $\bar{x}$ – прообраз точки x, а $\bar{w}^{\delta+}_{\bar{x}}$ – компонента линейной связности множества $w^\delta_{\bar{x}} \setminus \bar{x}$ такая, что $\pi(\bar{w}^{\delta+}_{\bar{x}}) = W^{\delta+}_x$. Тогда существует последовательность кривых $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_i, \dots \subset \overline{C}_\Lambda$ таких, что пересечение $\bar{c}_i \cap \bar{w}^{\delta+}_{\bar{x}}$ не пусто для любого $i \in \mathbb{N}$ (см. рис. 1).

Следующие два предложения доказываются аналогично [23, теорема 1] (см. также [29, лемма 9.1.3, теорема 9.1.2, лемма 9.3.2]), кроме п. 8) предложения 2.11, доказательство которого непосредственно следует из утверждения п. 7) предложения 2.11 и определения совершенного аттрактора.

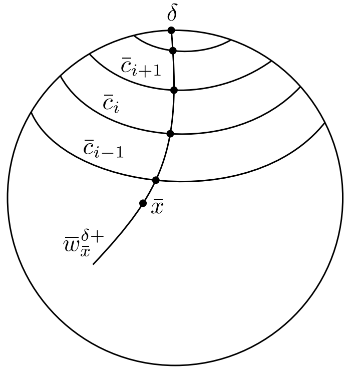

Рис. 1. Поднятие квазитрансверсали

Предложение 2.10. *Топологический предел кривых $\bar{c}_i$ на множестве $\overline{M}^2 \cup \mathbb{E}$ состоит из единственной иррациональной точки δ, принадлежащей $\mathbb{E}$ (см. рис. 1).*

Для совершенного аттрактора Λ обозначим через $\bar{\Lambda} = \pi^{-1}(\Lambda)$ полный прообраз множества Λ на $\overline{M}^2$.

Предложение 2.11. *Пусть W^δ_x, $\delta \in \{s, u\}$, – инвариантное многообразие точки x аттрактора Λ, $\bar{w}^\delta_{\bar{x}}$ ($\bar{x} \in \bar{\Lambda}$, $\pi(\bar{x}) = x$) – компонента линейной связности полного прообраза $\pi^{-1}(W^\delta_x)$, содержащая точку $\bar{x}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\bar{w}^u_{\bar{x}}$ является гладкой кривой, граница которой состоит из двух точек $u^1_{\bar{x}}$, $u^2_{\bar{x}}$ ($u^1_{\bar{x}} \neq u^2_{\bar{x}}$), лежащих на абсолюте и являющихся иррациональными точками;

2) если W^s_x не содержит граничной периодической точки, то $\bar{w}^s_{\bar{x}}$ является гладкой кривой, граница которой состоит из двух точек $s^1_{\bar{x}}$, $s^2_{\bar{x}}$ ($s^1_{\bar{x}} \neq s^2_{\bar{x}}$), лежащих на абсолюте и являющихся иррациональными точками;

3) если W^s_x содержит граничную периодическую точку p, то $\bar{w}^s_{\bar{x}}$ является гладкой кривой, граница которой состоит из одной граничной точки $s_{\bar{x}}$, лежащей на абсолюте и являющейся иррациональной точкой, и одной граничной точки $\bar{p}$ такой, что $\pi(\bar{p}) = p$;

4) если $p \in \Lambda$ – внутренняя периодическая точка периода k и $\bar{f}_k$ – поднятие отображения f^k такое, что $\bar{f}_k(\bar{p}) = \bar{p}$, то гомеоморфизм $\bar{f}_k^{\,2}$ имеет на абсолюте в точности четыре неподвижные точки $u^1_{\bar{p}}$, $u^2_{\bar{p}}$, $s^1_{\bar{p}}$, $s^2_{\bar{p}}$, являющиеся граничными точками на абсолюте кривых $\bar{w}^u_{\bar{p}}$, $\bar{w}^s_{\bar{p}}$ соответственно, причем точки $u^1_{\bar{p}}$, $u^2_{\bar{p}}$ являются притягивающими, а $s^1_{\bar{p}}$, $s^2_{\bar{p}}$ – отталкивающими;

5) если $\bar{w}^u_{\bar{x}}$ и $\bar{w}^u_{\bar{y}}$ – компоненты линейной связности прообразов неустойчивых многообразий, не содержащих граничных периодических точек, такие, что $\bar{w}^u_{\bar{x}} \cap \bar{w}^u_{\bar{y}} = \varnothing$, тогда точки $u^1_{\bar{x}}$, $u^2_{\bar{x}}$, $u^1_{\bar{y}}$, $u^2_{\bar{y}}$ попарно различны;

6) если $\bar{w}^s_{\bar{x}}$ и $\bar{w}^s_{\bar{y}}$ – компоненты линейной связности прообразов устойчивых многообразий, не содержащих граничных периодических точек, такие, что $\bar{w}^s_{\bar{x}} \cap \bar{w}^s_{\bar{y}} = \varnothing$, тогда точки $s^1_{\bar{x}}$, $s^2_{\bar{x}}$, $s^1_{\bar{y}}$, $s^2_{\bar{y}}$ попарно различны; если $\bar{w}^s_{\bar{x}}$ и $\bar{w}^s_{\bar{y}}$ –

компоненты линейной связности прообразов устойчивых многообразий, каждое из которых содержит граничную периодическую точку и $\bar{w}^s_{\bar{x}} \cap \bar{w}^s_{\bar{y}} = \varnothing$, *тогда* $s_{\bar{x}}$ *и* $s_{\bar{y}}$ *различны; если* $\bar{w}^s_{\bar{x}}$ *и* $\bar{w}^s_{\bar{y}}$ *– компоненты линейной связности прообразов устойчивых многообразий таких, что* $\pi(\bar{w}^s_{\bar{x}})$ *не содержит граничную периодическую точку, а* $\pi(\bar{w}^s_{\bar{y}})$ *содержит граничную периодическую точку, то точки* $s^1_{\bar{x}}$, $s^2_{\bar{x}}$, $s_{\bar{y}}$ *попарно различны;*

7) *если* $\bar{w}^u_{\bar{p}}$ *– компонента линейной связности прообраза неустойчивого многообразия, содержащего граничную периодическую точку* p, *то существуют граничные периодические точки* $q, r \in \Lambda$, *отличные от* p (q *может совпадать с* r), *единственная кривая* $\bar{w}^u_{\bar{q}}$ *такая, что* $\bar{w}^u_{\bar{q}}$ *имеет одной из своих граничных точек на абсолюте точку* $u^1_{\bar{p}}$, *и единственная кривая* $\bar{w}^u_{\bar{r}}$ *такая, что* $\bar{w}^u_{\bar{r}}$ *имеет одной из своих граничных точек на абсолюте точку* $u^2_{\bar{p}}$ (*если* $q = r$, *то* $\bar{w}^u_{\bar{q}} = \bar{w}^u_{\bar{r}}$) (*см. рис.* 2);

8) *пусть* Δ *– открытый диск, являющийся компонентой связности дополнения* $M^2 \setminus \Lambda$, *и* $C = \bigcup_{j=1}^{r_C} W^u_{p_j}$ *– достижимая изнутри граница* Δ. *Тогда каждая компонента линейной связности полного прообраза* $\pi^{-1}(\Delta \cup C)$ *представляет собой идеальный криволинейный многоугольник с* r_C *вершинами* $e_1, e_2, \dots, e_{r_C}$, *принадлежащими абсолюту, и* r_C *сторонами* $\bar{w}^u_{\bar{p}_1}, \bar{w}^u_{\bar{p}_2}, \dots, \bar{w}^u_{\bar{p}_{r_C}}$ *такими, что* $\pi(\bar{w}^u_{\bar{p}_j}) = W^u_{p_j}$, $j = 1, \dots, r_C$ (*см. рис.* 2);

9) *пусть* $p_1, p_2, \dots, p_{r_C} \in \Lambda$ *– граничные периодические точки периода* $k \geqslant 1$, *принадлежащие связке степени* r_C, *и* $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{r_C}$ *– их прообразы, принадлежат одному идеальному криволинейному многоугольнику со сторонами из* $\bar{\Lambda}$, *тогда существует поднятие* $\bar{f}_k$ *отображения* f^k *такое, что* $\bar{f}_k(\bar{p}_i) = \bar{p}_i$, *и гомеоморфизм* $\bar{f}^2_k$ *имеет на абсолюте в точности* $2r_C$ *неподвижных точек* $u^1, u^2, \dots, u^{r_C}, s^1, s^2, \dots, s^{r_C}$, *являющихся граничными точками на абсолюте кривых* $\bar{w}^u_{\bar{p}_1}, \bar{w}^u_{\bar{p}_2}, \dots, \bar{w}^u_{\bar{p}_m}, \bar{w}^s_{\bar{p}_1}, \bar{w}^s_{\bar{p}_2}, \dots, \bar{w}^s_{\bar{p}_{r_C}}$, *причем точки* $u^1, u^2, \dots, u^{r_C}$ *являются притягивающими, а* $s^1, s^2, \dots, s^{r_C}$ *– отталкивающими.*

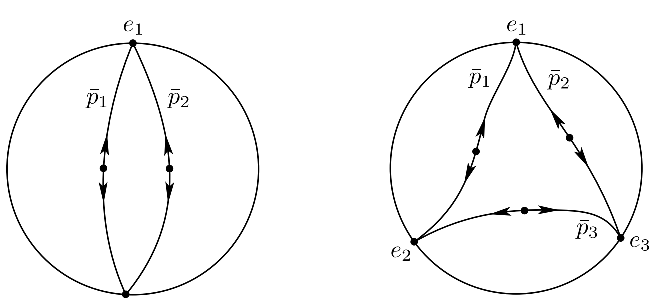

Рис. 2. Идеальный криволинейный многоугольник

В дальнейших рассмотрениях мы будем использовать модификацию конструкции, введенной в [31]. Рассмотрим множество $(\mathbb{E} \times \mathbb{E}) \setminus d$, где d – диагональ прямого произведения $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ и определим на нем отношение эквивалентности $\sim$ такое, что $(e_1, e_2) \sim (e_2, e_1)$ для любых $e_1, e_2 \in \mathbb{E}$. Класс эквивалентности элемента (e_1, e_2) будем обозначать $[e_1, e_2]$, а множество классов эквивалентности, содержащих элементы множества $A \subset \mathbb{E} \times \mathbb{E}$, – через $[A]$. Положим $\mathbb{F} = ((\mathbb{E} \times \mathbb{E}) \setminus d) / \sim$. Непосредственно проверяется, что множество $\mathbb{F}$ гомеоморфно многообразию, которое получено из пленки Мёбиуса после удаления ее края. Пусть $\bar{L}$ – множество кривых без самопересечений на $\overline{M}^2$, каждая из которых имеет ровно две различные граничные точки на абсолюте. Определим отображение $\psi\colon \bar{L} \to \mathbb{F}$, ставящее в соответствие кривой $\bar{v} \in \bar{L}$ с граничными точками e_1, e_2 элемент $[e_1, e_2] \in \mathbb{F}$. Заметим, что по построению $\bar{\Lambda}, \overline{\mathcal{L}} \subset \bar{L}$, и имеет место равенство $\psi(\overline{\mathcal{L}}) = \psi(\bar{\Lambda})$.

Утверждение 2.12. *Пусть Λ – совершенный аттрактор и $\{\bar{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – последовательность точек в $\bar{\Lambda}$, сходящаяся к некоторой точке $\bar{x} \in \bar{\Lambda}$. Если $\{\bar{w}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и $\bar{w}$ – кривые из $\bar{\Lambda}$ такие, что $\bar{x}_i \in \bar{w}_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и $\bar{x} \in \bar{w}$, то последовательность $\{\psi(\bar{w}_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ сходится к точке $\psi(\bar{w})$.*

Доказательство. Положим $f = \psi(\bar{w})$ и $f_i = \psi(\bar{w}_i)$. Пусть $f = [e_1, e_2]$. Рассмотрим произвольную окрестность $V \subset \mathbb{F}$ точки f такую, что $V = [I_1 \times I_2]$, где $I_1, I_2 \subset \mathbb{E}$ – непересекающиеся открытые интервалы, содержащие точки e_1 и e_2 соответственно.

В силу предложения 2.10 для $j \in \{1, 2\}$ найдутся такие кривые $\bar{c}_j \subset \overline{C}_\Lambda$, что граничные точки $\bar{c}_j$ содержатся в открытом интервале I_j (см. рис. 3). В силу непрерывной зависимости неустойчивых многообразий точек из Λ на компактных множествах и свойств накрытия найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для всех $i > N$ имеет место $\bar{w}_i \cap c_j \neq \varnothing$. В силу того, что пересечение $\bar{w}_i \cap c_j$ состоит из единственной точки, граничные точки кривых $\bar{w}_i$ принадлежат интервалам I_1 и I_2 соответственно при $i > N$. Следовательно, $\psi(\bar{w}_i) \in V$ для всех $i > N$, что и означает сходимость последовательности $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ к точке f. Утверждение доказано.

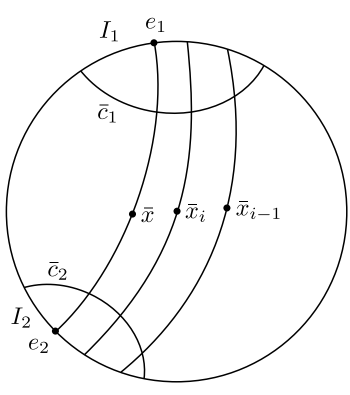

Рис. 3. Сходимость граничных точек на абсолюте

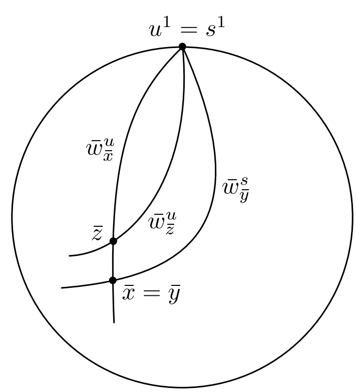

Рис. 4

Доказательство следующего утверждения аналогично предыдущему, и мы его опускаем.

Утверждение 2.13. *Пусть Λ – совершенный аттрактор и $\{\bar{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – последовательность s-плотных точек в $\bar{\Lambda}$, сходящаяся к некоторой s-плотной точке $\bar{x} \in \bar{\Lambda}$. Если $\{\bar{w}_i^s\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\bar{w}^s$ – поднятия устойчивых многообразий точек $x_i = \pi(\bar{x})$ и $x = \pi(\bar{x})$, содержащие точки $\bar{x}_i$ и $\bar{x}$ соответственно, то последовательность $\{\psi(\bar{w}_i^s)\}_{i\in\mathbb{N}}$ сходится к точке $\psi(\bar{w}^s)$.*

Утверждение 2.14. *Пусть $x \in \Lambda$ – произвольная точка просторно расположенного базисного множества Λ, а $\bar{w}_{\bar{x}}^u$ и $\bar{w}_{\bar{x}}^s$ – поднятия устойчивого и неустойчивого многообразия точки x, проходящие через точку $\bar{x}$. Тогда $\bar{x}$ является единственной точкой пересечения кривых $\bar{w}_{\bar{x}}^u$ и $\bar{w}_{\bar{x}}^s$ на $\overline{M}^2$.*

Доказательство. Предположим противное, тогда найдется точка $\bar{y} \in \bar{w}_{\bar{x}}^u \cap \bar{w}_{\bar{x}}^s$, отличная от $\bar{x}$. Рассмотрим замкнутую кривую $\bar{\varphi}\colon \mathbb{S} \to \overline{M}^2$, составленную из дуг $\bar{w}_{\bar{x}}^u$ и $\bar{w}_{\bar{x}}^s$, ограниченных точками $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Из односвязности $\overline{M}^2$ следует, что кривая $\bar{\varphi}$ является стягиваемой. Пусть $\bar{\varphi}_t$ – гомотопия, стягивающая кривую $\bar{\varphi}$ в точку, тогда отображение $\pi\circ\bar{\varphi}$ будет гомотопией, стягивающей кривую $\pi\circ\varphi$ на M^2, что противоречит просторной расположенности базисного множества Λ. Утверждение доказано.

Утверждение 2.15. *Пусть Λ – просторно расположенный аттрактор диффеоморфизма $f\colon M^2 \to M^2$. Пусть $\bar{w}_{\bar{x}}^u$ и $\bar{w}_{\bar{y}}^s$ – произвольные поднятия устойчивого и неустойчивого многообразия точек $x, y \in \Lambda$, и u^1 – граничная точка на абсолюте кривой $\bar{w}_{\bar{x}}^u$, а s^1 – граничная точка на абсолюте кривой $\bar{w}_{\bar{y}}^s$. Тогда $u^1 \neq s^1$.*

Доказательство. Предположим противное, тогда $s^1 = u^1$.

Шаг 1. Рассмотрим случай, когда $\bar{x} = \bar{y}$. Из утверждения 2.14 следует, что отрезки кривых $\bar{w}_{\bar{x}}^u$ и $\bar{w}_{\bar{y}}^s$, ограниченные точками $\bar{x}$ и u^1, ограничивают область на $\overline{M}^2$, гомеоморфную открытому диску (см. рис. 4). Пусть $\bar{z} \in \bar{w}_{\bar{x}}^u$ – прообраз s-плотной точки, принадлежащий интервалу кривой $\bar{w}_{\bar{x}}^u$, ограниченному точками u^1 и $\bar{x}$. Кривая $\bar{w}_{\bar{z}}^s$ имеет две граничные точки на абсолюте $s_{\bar{z}}^1$, $s_{\bar{z}}^2$. Тогда из утверждения 2.14 и того факта, что устойчивые многообразия различных точек из Λ либо совпадают, либо не пересекаются, следует, что одна из точек $s_{\bar{z}}^1$, $s_{\bar{z}}^2$ обязана совпасть с точкой s^1, что противоречит п. 6) предложения 2.11.

Шаг 2. Рассмотрим случай, когда $\bar{x} \neq \bar{y}$, и точка $\bar{y}$ является прообразом s-плотной точки y. Покажем, что в этом случае точки u^2 и s^2, являющиеся граничными точками на абсолюте кривых $\bar{w}_{\bar{x}}^u$ и $\bar{w}_{\bar{y}}^s$, отличными от u^1 и s^1, также совпадают. Предположим противное, тогда $u^2 \neq s^2$. Пусть C_Λ – квазитрансверсаль для базисного множества Λ такая, что $C^u \cap \pi(\bar{w}_{\bar{x}}^u) = \varnothing$ и $C^s \cap \pi(\bar{w}_{\bar{y}}^s) = \varnothing$. Пусть $\{\bar{c}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – последовательность поднятий квазитрансверсали C_Λ, удовлетворяющая следующим свойствам (см. рис. 5):

1) $\bar{c}_i \cap \bar{w}_{\bar{x}}^u \neq \varnothing$, $\bar{c}_i \cap \bar{w}_{\bar{y}}^s \neq \varnothing$ для любого $i \in \mathbb{N}$;

2) последовательность $\bar{c}_i$ имеет точку u^1 своим топологическим пределом;

3) последовательности $\{c_i^1\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{c_i^2\}_{i\in\mathbb{N}}$ граничных точек кривых $\{\bar{c}\}_{i\in\mathbb{N}}$ монотонны на абсолюте;

4) любое поднятие кривой $\overline{C}_\Lambda$, у которого граничные точки на абсолюте принадлежат дуге, ограниченной точками c_1^1, c_1^2, содержащей точку s^1, принадлежит множеству $\{\bar{c}\}_{i\in\mathbb{N}}$.

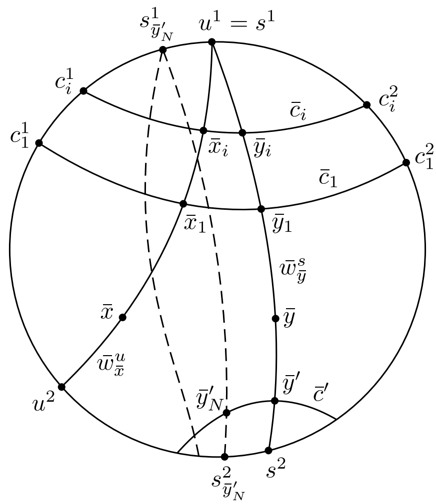

Рис. 5

Положим $\bar x_i = \bar c_i \cap \bar w^u_{\bar x}$, $\bar y_i = \bar c_i \cap \bar w^s_{\bar y}$. Так как в силу нашего предположения $u^2 \neq s^2$, то найдется поднятие $\bar c'$ квазитрансверсали C_Λ такое, что $\bar w^s_{\bar y} \cap \bar c' \neq \varnothing$ и $\bar w^u_{\bar x} \cap \bar c' = \varnothing$. Положим $\bar y' = \bar w^s_{\bar y} \cap \bar c'$. Так как точка y является s-плотной, то каждая компонента линейной связности кривой $\pi(\bar w^s_{\bar y}) \setminus y$ содержит множество плотное в Λ, а тогда найдется подпоследовательность $\{\bar y_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ последовательности $\{\bar y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и последовательность $\{\gamma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ элементов группы Γ такие, что последовательность $\{\bar y'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\bar y'_j = \gamma_j(\bar y_{i_j})$, содержится в кривой $\bar c'$ и сходится к точке $\bar y'$, стремясь к точке $\bar y'$ с обеих сторон по кривой $\bar c'$. В силу непрерывной зависимости на компактных множествах на кривой $\bar c'$ найдется открытый интервал I, содержащий точку $\bar y'$, такой, что $I \subset \bar\Lambda$, и для любого прообраза s-плотной точки $\bar z \in I$ кривая $\bar w^s_{\bar z}$ пересечётся с $\bar c_1$. Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\bar y'_N \in I$, и точка $\bar y'_N$ принадлежит компоненте линейной связности множества $I \setminus \bar y'$ такой, что граничные точки $s^1_{\bar y'_N}, s^2_{\bar y'_N}$ кривой $\bar w^s_{\bar y'_N}$ принадлежат дуге абсолюта, ограниченной точками s^1, s^2 и содержащей точку $\bar u^2$. Тогда кривая $\bar w^s_{\bar y'_N} = \gamma_N(\bar w^s_{\bar y})$ имеет в качестве одной из своих граничных точек на абсолюте точку $s^1_{\bar y'_N}$, принадлежащую интервалу абсолюта ограниченному точками c_1^1, c_2^1 и содержащему точку s^1. Кривая $\gamma_N(\bar w^u_{\bar x})$ также имеет точку s^1 одной из своих граничных точек на абсолюте. В силу того, что $\gamma_N(\bar c_{i_N}) = \bar c'$, точка $\gamma_N(\bar x_{i_N})$ принадлежит кривой $\bar c'$, и, следовательно, кривая $\gamma_N(\bar w^u_{\bar x})$ пересекается с кривой $\bar c'$. Таким образом, кривые $\bar w^u_{\bar x}$ и $\gamma_N(\bar w^u_{\bar x})$ обязаны пересекаться. Полученное противоречие доказывает, что $u^2 = s^2$.

Теперь доказательство шага 2 завершается аналогично шагу 1.

Шаг 3. Рассмотрим случай, когда $\bar x \neq \bar y$, и точка $\bar y$ не является прообразом s-плотной точки y. Покажем, что в этом случае найдутся точки $\bar x', \bar y' \in \bar\Lambda$ такие, что кривые $\bar w^u_{\bar x'}$ и $\bar w^s_{\bar y'}$ имеют общую граничную точку на абсолюте $u'^1 = s'^2$, и точка $y' = \pi(\bar y')$ является s-плотной.

Пусть квазитрансверсаль C_Λ и множество ее поднятий $\{\bar c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и множества точек $\{\bar x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{\bar y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ такие же, как и в шаге 2. Рассмотрим произвольную

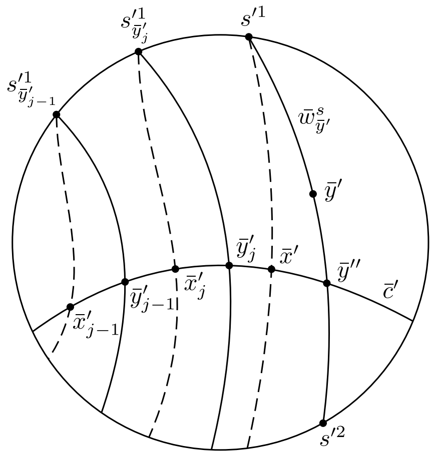

Рис. 6

точку $\bar y' \in \bar\Lambda$, являющуюся прообразом некоторой s-плотной точки $y' \in \Lambda$. Пусть s'^1, s'^2 – граничные точки на абсолюте кривой $\bar w^s_{\bar y'}$. Пусть $\bar c'$ – поднятие квазитрансверсали C_Λ такое, что $\bar c' \cap \bar w^s_{\bar y'} \neq \varnothing$. Положим $\bar y'' = \bar c' \cap \bar w^s_{\bar y'}$. В силу предложения 2.8 образ компоненты линейной связности множества $\bar w^s_{\bar y} \setminus \bar y$, имеющей s^1 в качестве своей предельной точки, содержит множество плотное в Λ. Тогда найдутся подпоследовательность $\{\bar y_{i_j}\}_{j\in\mathbb N}$ последовательности $\{\bar y_i\}_{i\in\mathbb N}$ и последовательность $\{\gamma_j\}_{j\in\mathbb N}$ элементов группы Γ такие, что последовательность $\{\bar y'_j\}_{j\in\mathbb N}$, $\bar y'_j = \gamma_j(\bar y_j)$, содержится в кривой $\bar c'$ и сходится к точке $\bar y''$, стремясь к точке $\bar y''$ с обеих сторон по кривой $\bar c'$. Тогда из утверждения 2.13 следует, что последовательность $\{s'^1_{\bar y'_j}\}_{j\in\mathbb N}$ граничных точек на абсолюте кривых $\{\bar w^s_{\bar y'_j}\}_{j\in\mathbb N}$ сходится к точке s'^1 (см. рис. 6). Положим $\bar x'_j = \bar c' \cap \gamma_j(\bar w^u_{\bar x})$. Покажем, что последовательность $\bar x'_j$ имеет предельную точку на кривой $\bar c'$. Пусть $\gamma' \in \Gamma$, $\gamma' \neq \mathrm{id}$, – элемент, оставляющий инвариантной кривую $\bar c'$. Так как последовательность $\{\bar y'_j\}$ сходится к точке $\bar y''$, то найдется целое k такое, что все точки последовательности $\{\bar y'_j\}$ принадлежат отрезку кривой $\bar c'$, ограниченному точками $\gamma'^k(\bar y'_1)$ и $\gamma'^{-k}(\bar y'_1)$. Тогда в силу того, что поднятия устойчивых многообразий либо не пересекаются, либо совпадают, все граничные точки $\{s'^1_{\bar y'_j}\}_{j\in\mathbb N}$ принадлежат дуге абсолюта, ограниченной точками $\gamma'^k(s'^1_{\bar y'_1})$, $\gamma'^{-k}(s'^1_{\bar y'_1})$, содержащей точку s'^1. Так как кривые $\{\gamma_j(\bar w^u_{\bar x})\}_{j\in\mathbb N}$ имеют $\{s'^1_j\}_{j\in\mathbb N}$ своими граничными точками на абсолюте, а точки $\{\bar x'_j\}_{j\in\mathbb N}$ лежат на кривой $\bar c'$, то из того, что поднятия устойчивых многообразий либо не пересекаются, либо совпадают, следует, что последовательность $\{\bar x'_j\}_{j\in\mathbb N}$ лежит на отрезке кривой $\bar c'$, ограниченном точками $\gamma'^k(\bar x'_1), \gamma'^{-k}(\bar x'_1)$. Пусть $\bar x'$ – произвольная предельная точка последовательности $\{\bar x'_j\}_{j\in\mathbb N}$. Тогда из замкнутости множества $\bar\Lambda$ следует, что $\bar x' \in \bar\Lambda$, а из утверждения 2.12 следует, что кривая $\bar w^u_{\bar x'}$ имеет точку s'^1 одной из своих граничных точек на абсолюте.

Теперь доказательство шага 3 завершается аналогично шагу 2.

Утверждение доказано.

2.5. Асимптотические свойства прообразов устойчивых и неустойчивых слоев псевдоаносовского гомеоморфизма на плоскости Лобачевского. Напомним основные свойства псевдоаносовских гомеоморфизмов (см., например, [32]).

Предложение 2.16. *Пусть* $P\colon M^2 \to M^2$ *– псевдоаносовский гомеоморфизм, тогда*:

1) P *является топологически транзитивным*;

2) *множество периодических точек* P *плотно в* M^2;

3) *слоения* $\mathcal{F}^s$ *и* $\mathcal{F}^u$ *не имеют сепаратрис, идущих из одной особенности в другую или ту же самую особенность*;

4) *каждый слой слоения* $\mathcal{F}^s$ *и* $\mathcal{F}^u$, *отличный от особой точки, всюду плотен в* $\mathcal{F}^s$ *и* $\mathcal{F}^u$ *соответственно.*

Для псевдоаносовского гомеоморфизма P обозначим через $\overline{P}\colon \overline{M}^2 \to \overline{M}^2$ его накрывающий гомеоморфизм. Пусть $x \in M^2$ – неособая точка гомеоморфизма P, и ω^s_x и ω^u_x – слои слоений $\mathcal{F}^s$ и $\mathcal{F}^u$ соответственно, содержащие точку x. Тогда, если $\bar{x} \in \pi^{-1}(x)$ – прообраз точки x, то через $\bar{\omega}^s_{\bar{x}}$ и $\bar{\omega}^u_{\bar{x}}$ будем обозначать компоненты линейной связности полных прообразов $\pi^{-1}(\omega^s_x)$ и $\pi^{-1}(\omega^u_x)$, содержащие точку $\bar{x}$.

Следующее предложение аналогично предложению 2.11 настоящей работы (доказательства пп. 1)–5) можно извлечь из доказательств теорем 3.5, 3.7, 3.13, 3.14, 3.15, A.3, следствия A.2 работы [33]).

Предложение 2.17. *Пусть* $P\colon M^2 \to M^2$ *– псевдоаносовский гомеоморфизм, тогда имеют место следующие свойства*:

1) *если замыкание кривой* $\bar{\omega}^u_{\bar{x}}$ $(\bar{\omega}^s_{\bar{x}})$ *не содержит прообраза особой периодической точки гомеоморфизма* P, *то* $\bar{\omega}^u_{\bar{x}}$ $(\bar{\omega}^s_{\bar{x}})$ *является гладкой гривой, граница которой состоит ровно из двух различных точек* $u^1_{\bar{x}}$, $u^2_{\bar{x}}$ $(s^1_{\bar{x}}, s^2_{\bar{x}})$, *являющихся иррациональными точками абсолюта*;

2) *если замыкание кривой* $\bar{\omega}^u_{\bar{x}}$ $(\bar{\omega}^s_{\bar{x}})$ *содержит прообраз особой периодической точки, то* $\bar{\omega}^u_{\bar{x}}$ $(\bar{\omega}^s_{\bar{x}})$ *является гладкой дугой и имеет в точности две граничные точки, одна из которых принадлежит полному прообразу некоторой особой точки гомеоморфизма* P, *а вторая*, $u_{\bar{x}}$ $(s_{\bar{x}})$, *является иррациональной точкой абсолюта*;

3) *если* $\bar{p}$ *– прообраз неособой периодической точки периода* k *и* $\overline{P}_k$ *– поднятие отображения* P^k *такое, что* $\overline{P}_k(\bar{p}) = \bar{p}$, *то гомеоморфизм* $\overline{P}^2_k$ *имеет на абсолюте ровно четыре неподвижные точки* $u^1_{\bar{p}}$, $u^2_{\bar{p}}$, $s^1_{\bar{p}}$, $s^2_{\bar{p}}$, *являющиеся граничными точками на абсолюте кривых* $\bar{\omega}^u_{\bar{p}}$, $\bar{\omega}^s_{\bar{p}}$ *соответственно, причем точки* $u^1_{\bar{p}}$, $u^2_{\bar{p}}$ *являются притягивающими, а* $s^1_{\bar{p}}$, $s^2_{\bar{p}}$ *– отталкивающими*;

4) *если* $\bar{z}$ *– прообраз особой периодической точки периода* k *с* $2m$ *сепаратрисами и* $\overline{P}_k$ *– поднятие отображения* P^k *такое, что* $\overline{P}_k(\bar{z}) = \bar{z}$, *то гомеоморфизм* $\overline{P}^m_k$ *имеет на абсолюте ровно* $2m$ *неподвижных точек* $u^1_{\bar{z}}, u^2_{\bar{z}}, \ldots, u^m_{\bar{z}}$, $s^1_{\bar{z}}, s^2_{\bar{z}}, \ldots, s^m_{\bar{z}}$, *являющихся граничными точками абсолюта слоев слоений* $\overline{\mathcal{F}}^u$ *и* $\overline{\mathcal{F}}^s$ *соответственно, имеющих точку* $\bar{z}$ *в качестве своей одhousграничной точки, причем точки* $u^1_{\bar{z}}, u^2_{\bar{z}}, \ldots, u^m_{\bar{z}}$ *являются притягивающими, а* $s^1_{\bar{z}}, s^2_{\bar{z}}, \ldots, s^m_{\bar{z}}$ *– отталкивающими*;

5) *если кривые* $\bar{\omega}^u_{\bar{x}}$ $(\bar{\omega}^s_{\bar{x}})$ *и* $\bar{\omega}^u_{\bar{y}}$ $(\bar{\omega}^s_{\bar{y}})$ *не пересекаются, то граничные точки на абсолюте этих кривых попарно различны*;

6) *две произвольные кривые* $\bar{\omega}^u_{\bar{x}}$ *и* $\bar{\omega}^s_{\bar{y}}$ *пересекаются не более чем в одной точке.*

Более того, аналогично доказательствам утверждений 2.12, 2.13 и 2.15 настоящей работы можно доказать следующие утверждения.

Утверждение 2.18. *Пусть* $\{\bar{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\bar{x}$ – *точки в* $\overline{M}^2$, *не являющиеся прообразами особых точек псевдоаносовского гомеоморфизма* P, *причем последовательность* $\{\bar{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *сходится к точке* $\bar{x}$, *а* $\{\bar{\omega}^{s(u)}_{\bar{x}_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *и* $\bar{\omega}^{s(u)}_{\bar{x}}$ – *поднятия устойчивых (неустойчивых) слоев слоения* $\mathcal{F}^{s(u)}$, *содержащие точки* $\bar{x}_i$ *и* $\bar{x}$ *соответственно. Тогда, если* e – *граничная точка на абсолюте слоя* $\bar{\omega}^{s(u)}_{\bar{x}}$, *то найдется последовательность* $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *граничных точек на абсолюте кривых* $\{\bar{\omega}^{s(u)}_{\bar{x}_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, *сходящаяся к точке* e.

Утверждение 2.19. *Пусть* $\bar{\omega}^u_{\bar{x}}$ *и* $\bar{\omega}^s_{\bar{y}}$ – *произвольные слои слоений* $\overline{\mathcal{F}}^u$ *и* $\overline{\mathcal{F}}^s$ *соответственно, и* u^1 – *граничная точка на абсолюте кривой* $\bar{w}^u_{\bar{x}}$, *а* s^1 – *граничная точка на абсолюте кривой* $\bar{w}^s_{\bar{y}}$. *Тогда* $u^1 \neq s^1$.

§ 3. Построение геодезической ламинации, соответствующей совершенному просторно расположенному аттрактору

В этом параграфе, следуя [31], будет приведено построение геодезической ламинации, соответствующей совершенному просторно расположенному аттрактору Λ A-диффеоморфизма f. Наличие геодезической ламинации является ключевым моментом для доказательства гиперболичности автоморфизма $\bar{f}_*$ (теорема 1.6), индуцированного A-диффеоморфизмом, неблуждающее множество которого содержит аттрактор Λ.

Следуя [11], пару неустойчивых многообразий W^u_p и W^u_q, содержащих граничные периодические точки p и q, будем называть *специальной парой*, если существуют компоненты линейной связности $w^u_{\bar{p}}, w^u_{\bar{q}} \subset \bar{\Lambda}$ прообразов $\pi^{-1}(W^u_p)$ и $\pi^{-1}(W^u_q)$ соответственно, такие что их граничные точки на абсолюте совпадают.

Пусть Λ – совершенный аттрактор и $w^u_{\bar{x}}$ – компонента линейной связности множества $\bar{\Lambda}$, тогда в силу п. 1) предложения 2.11 $\bar{w}^u_{\bar{x}}$ является гладкой кривой, граница которой состоит из двух точек $u^1_{\bar{x}}, u^2_{\bar{x}}$ $(u^1_{\bar{x}} \neq u^2_{\bar{x}})$, лежащих на абсолюте. Обозначим через $\bar{l}(u^1_{\bar{x}}, u^2_{\bar{x}})$ геодезическую на $\overline{M}^2$ с граничными точками $u^1_{\bar{x}}, u^2_{\bar{x}}$. Положим $W^u_x = \pi(w^u_{\bar{x}})$ $(\pi(\bar{x}) = x)$, $l = \pi(\bar{l})$, и назовем l геодезической, соответствующей неустойчивому многообразию W^u_x. Множество геодезических построенных для всех компонент линейной связности из множества $\bar{\Lambda}$ обозначим через $\overline{\mathcal{L}}$ и положим $\mathcal{L} = \pi(\overline{\mathcal{L}})$. В лемме 3.1 ниже будет показано, что множество $\mathcal{L}$ является геодезической ламинацией[6], которую будем называть

[6]Геодезическая ламинация есть непустое замкнутое подмножество, представляющее собой объединение непересекающихся геодезических, каждая из которых является либо бесконечной в обе стороны незамкнутой кривой без самопересечений, либо замкнутой кривой, гомеоморфной окружности.

геодезической ламинацией, соответствующей базисному множеству Λ. Если W^u_p является неустойчивым многообразием граничной периодической точки p и не принадлежит специальной паре, то поставленную ему в соответствие геодезическую l будем называть *граничной* геодезической, в противном случае геодезическую, соответствующую W^u_p, будем называть *внутренней*. По построению, каждому неустойчивому многообразию базисного множества Λ ставится в соответствие единственная геодезическая из ламинации $\mathcal{L}$, а каждой геодезической из ламинации $\mathcal{L}$ (кроме тех, которые соответствуют специальной паре неустойчивых многообразий из Λ) соответствует в точности одно неустойчивое многообразие из Λ. При этом специальной паре неустойчивых многообразий из Λ соответствует единственная внутренняя геодезическая из ламинации $\mathcal{L}$.

Лемма 3.1. *Для множества $\mathcal{L}$ верны следующие свойства*:

1) *множество $\mathcal{L}$ является замкнутым*;

2) *любая геодезическая l из $\mathcal{L}$ плотна в $\mathcal{L}$*;

3) *множество $M^2 \setminus \mathcal{L}$ состоит из конечного числа открытых дисков.*

Доказательство. Докажем п. 1). Вначале покажем, что множество $\psi(\bar\Lambda)$ является замкнутым в $\mathbb{F}$. Рассмотрим произвольную предельную точку f множества $\psi(\bar\Lambda)$ и сходящуюся к ней последовательность $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $f_i \in \psi(\bar\Lambda)$. Покажем, что $f \in \psi(\bar\Lambda)$, т. е. найдется кривая $\bar w \subset \bar\Lambda$ (являющаяся прообразом неустойчивого многообразия некоторой точки из множества Λ) такая, что $\psi(\bar w) = f$. Рассмотрим последовательность $\{\bar w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\bar w_i \subset \Lambda$, такую, что $\psi(\bar w_i) = f_i$. Пусть $f = [e_1, e_2]$. Зададим положительное направление обхода абсолюта $\mathbb{E}$ таким образом, что область $\overline{M}^2$ остается слева. Так как множество рациональных точек всюду плотно на абсолюте, то существуют элементы $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ такие, что точки γ_1^+, e_1, γ_2^+, e_2 встречаются в указанном порядке при обходе абсолюта. Пусть $U_1, U_2 \subset \mathbb{E}$ – связные окрестности точек γ_1^+ и γ_2^+ соответственно, не содержащие точек e_1, e_2. Рассмотрим произвольную кривую $\bar w_* \subset \bar\Lambda$ с граничными точками u_1 и u_2 на абсолюте. В силу свойств элементов группы Γ найдутся такие целые числа n_1 и n_2, что $\gamma_1^{n_1}(u_1), \gamma_1^{n_1}(u_2) \in U_1$ и $\gamma_2^{n_2}(u_1), \gamma_2^{n_2}(u_2) \in U_2$. Положим $\bar w_a = \gamma_1^{n_1}(\bar w_*)$ и $\bar w_b = \gamma_2^{n_2}(\bar w_*)$. Тогда точки a_1, a_2, e_1, b_1, b_2, e_2 встречаются в указанном порядке при обходе абсолюта в положительном направлении, где $a_1, a_2 \in \mathbb{E}$ и $b_1, b_2 \in \mathbb{E}$ – граничные точки кривых $\bar w_a, \bar w_b \subset \bar\Lambda$ соответственно (см. рис. 7). Выберем любую кривую $\bar v$ из $\bar L$ с граничными точками v_1, v_2 на абсолюте такую, что

1) точки a_1, v_1, a_2, e_1, b_1, v_2, b_2, e_2 встречаются в указанном порядке при обходе абсолюта в положительном направлении;

2) каждое из пересечений $\bar v \cap \bar w_a$ и $\bar v \cap \bar w_b$ состоит ровно из одной точки.

Так как $f_i \to f$ при $i \to \infty$, то при достаточно больших значениях i кривые $\bar w_i$ пересекаются с $\bar v$. Без ограничения общности можно считать, что для любого $i \in \mathbb{N}$ пересечение $\bar w_i \cap \bar v$ не пусто и содержится в компактном куске кривой $\bar v$, ограниченном точками $\bar v \cap \bar w_a$ и $\bar v \cap \bar w_b$. В каждом из множеств $\bar w_i \cap \bar v$ выберем по точке $\bar x_i$. Последовательность $\{\bar x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ имеет предельную точку $\bar x \in \overline{M}^2$, так как она целиком содержится в компактном куске кривой $\bar v$, ограниченном точками $\bar v \cap \bar w_a$ и $\bar v \cap \bar w_b$.

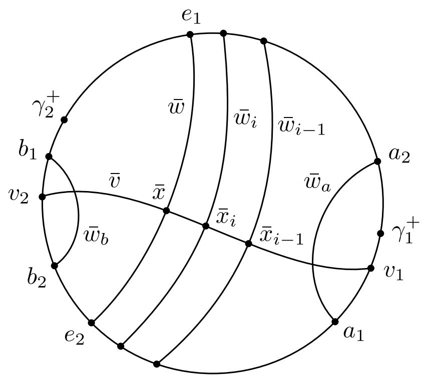

Рис. 7. Свойства геодезической ламинации

Так как множество $\bar{\Lambda}$ замкнуто, то найдется кривая $\bar{w} \in \bar{\Lambda}$, содержащая точку $\bar{x}$. В силу утверждения 2.12 имеем равенство $\psi(\bar{w}) = f$. Значит, $\psi(\bar{\Lambda})$ является замкнутым множеством.

Теперь покажем, что множество $\overline{\mathcal{L}}$ является замкнутым на $\overline{M}^2$. Пусть $\bar{x} \in \overline{M}^2$ – произвольная предельная точка множества $\overline{\mathcal{L}}$, и $\{\bar{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – последовательность точек из $\overline{\mathcal{L}}$, сходящаяся к точке $\bar{x}$ такая, что $\bar{x} \neq \bar{x}_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Пусть $\{\bar{l}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – последовательность геодезических из $\overline{\mathcal{L}}$, содержащих точки последовательности $\{\bar{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Положим $f_i = \psi(\bar{l}_i)$. Покажем, что последовательность $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ имеет предельную точку $f \in \mathbb{F}$. Пусть U – произвольная ограниченная в метрике плоскости Лобачевского окрестность точки $\bar{x}$, и $\bar{L}_U$ – множество всех геодезических на $\overline{M}^2$, имеющих непустое пересечение с U. Заметим, что из ограниченности U и того, что в модели Пуанкаре геодезические являются дугами окружностей, перпендикулярных абсолюту, следует, что расстояние между граничными точками абсолюта любой геодезической из $\bar{L}_U$ в евклидовой метрике[7] больше некоторой константы $R > 0$. Следовательно, множество $\psi(\bar{L}_U)$ содержится в множестве $T_R = \{[e_1, e_2] \in \mathbb{F} \mid \rho(e_1, e_2) \geqslant R\}$, где $\rho\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ – евклидово расстояние между точками комплексной плоскости. Множество T_R является компактным подмножеством $\mathbb{F}$. Так как все геодезические последовательности $\{\bar{l}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, начиная с некоторой, содержатся в $\bar{L}_U$, то последовательность $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ имеет предельную точку $f \in T_R$. Так как множество $\psi(\overline{\mathcal{L}})$, совпадая с $\psi(\bar{\Lambda})$, является замкнутым, то $f \in \psi(\overline{\mathcal{L}})$. Тогда найдется геодезическая $\bar{l} \subset \overline{\mathcal{L}}$ такая, что $\psi(\bar{l}) = f$. Покажем, что имеет место включение $\bar{x} \in \bar{l}$. Предположим противное. Тогда в силу того, что геодезические в модели Пуанкаре являются дугами окружностей, перпендикулярных абсолюту, найдутся такая окрестность $I \subset \mathbb{F}$ точки f и такая окрестность $V \subset \overline{M}^2$ точки $\bar{x}$, что никакая геодезическая $\bar{l}_*$, для которой $\psi(\bar{l}_*) \in I$ не пересекается с окрестностью V. Но это противоречит тому, что последовательность $\bar{x}_i$ сходится к точке $\bar{x}$.

[7]Имеется в виду представление $M^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Замкнутость множества $\mathcal{L}$ следует теперь из равенства $\pi^{-1}(\mathcal{L}) = \overline{\mathcal{L}}$, замкнутости $\overline{\mathcal{L}}$ и того факта, что π является открытым отображением. Действительно, $\overline{M}^2 \setminus \bar{\mathcal{L}}$ является открытым множеством, тогда $\pi(\overline{M}^2 \setminus \bar{\mathcal{L}})$ представляет собой открытое множество, следовательно, $\mathcal{L} = M^2 \setminus (\pi(\overline{M}^2 \setminus \bar{\mathcal{L}}))$ является замкнутым множеством.

Докажем п. 2) леммы. Для этого достаточно показать, что для любой кривой $\bar{w} \subset \bar{\Lambda}$ множество $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \psi(\gamma(\bar{w}))$ плотно в $\psi(\bar{\Lambda})$. Действительно, если это так, то из построения множества $\overline{\mathcal{L}}$ следует, что для любой геодезической $\bar{l} \subset \overline{\mathcal{L}}$ множество $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \psi(\gamma(\bar{l}))$ плотно в $\psi(\bar{\Lambda})$. Тогда из того факта, что в модели Пуанкаре геодезические являются дугами окружностей, перпендикулярными абсолюту, следует, что $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\bar{l})$ плотно в $\overline{\mathcal{L}}$. В силу свойств накрытия π геодезическая $l = \pi(\bar{l}) \subset \mathcal{L}$ плотна в $\mathcal{L}$.

Рассмотрим произвольную кривую $\bar{w} \subset \bar{\Lambda}$ и произвольную точку $f_0 \in \psi(\bar{\Lambda})$. По построению найдется единственная кривая $\bar{w}_0 \subset \bar{\Lambda}$ такая, что $\psi(\bar{w}_0) = f_0$. Покажем, что найдется последовательность $\{\bar{w}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ такая, что $\pi(\bar{w}_i) = \pi(\bar{w})$, и последовательность $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, где $f_i = \psi(\bar{w}_i)$, сходится к точке f_0. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \bar{w}_0$. В силу леммы 2.2 базисное множество Λ состоит из одной периодической компоненты. Так как неустойчивые многообразия W^u_x точек из Λ плотны в своих периодических компонентах, то из свойств накрытия π, следует, что множество $\pi^{-1}(\pi(\bar{w}))$ плотно в $\bar{\Lambda}$. Тогда найдется последовательность точек $\{\bar{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ такая, что $\bar{x}_i \in \pi^{-1}(\pi(\bar{w}))$ и $\bar{x}_i \to \bar{x}_0$ при $i \to \infty$. В силу утверждения 2.12 в качестве $\bar{w}_i$ можно выбрать кривую из $\pi^{-1}(\pi(\bar{w}))$, содержащую точку $\bar{x}_i$.

В силу произвольности точки $f_0 \in \psi(\bar{\Lambda})$ имеет место плотность множества $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \psi(\gamma(\bar{w}))$ в $\psi(\bar{\Lambda})$.

Перейдем к доказательству п. 3) леммы. Пусть Δ – открытый диск, являющийся компонентой связности дополнения $M^2 \setminus \Lambda$ с достижимой изнутри границей $C = \bigcup_{i=1}^{r_C} W^u_{p_i}$, где $r_C \geqslant 3$. В силу п. 8) предложения 2.11 каждая компонента линейной связности полного прообраза $\pi^{-1}(\Delta \cup C)$ представляет собой криволинейный многоугольник с r_C граничными точками $e_1, e_2, \dots, e_{r_C}$ на абсолюте, являющимися его вершинами.

По построению геодезической ламинации $\overline{\mathcal{L}}$ существует геодезический многоугольник A, принадлежащий $\overline{M}^2 \cup \mathbb{E}$, граница которого состоит из объединения точек $e_1, e_2, \dots, e_{r_C}$ и геодезических с граничными точками из множества $\{e_1, e_2, \dots, e_{r_C}\}$. Покажем, что ограничение $\pi|_{\mathrm{int}(A)}$ является гомеоморфизмом на образ. Так как накрытие π является локальным гомеоморфизмом, а множество $\mathrm{int}(A)$ открыто, то достаточно показать, что ограничение $\pi|_{\mathrm{int}(A)}$ является инъективным. Предположим противное. Тогда найдутся две точки $\bar{x}, \bar{y} \in A$ такие, что при некотором $\gamma \in \Gamma$ будет иметь место равенство $\gamma(\bar{x}) = \bar{y}$. Заметим, что элемент γ оставляет инвариантной геодезическую $\bar{l}_\gamma$ на плоскости Лобачевского, проходящую через точки $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Так как $\bar{l}_\gamma$ имеет рациональные граничные точки, а точки $e_1, e_2, \dots, e_{r_C}$ – иррациональные, то она обязана пересечься ровно с двумя сторонами геодезического многоугольника A. Пусть $\bar{l}'$ – та из них, для которой точки $\bar{z} = \bar{l}' \cap \bar{l}_\gamma$, $\bar{x}$, $\bar{y}$ располагаются на геодезической $\bar{l}_\gamma$ в указанном порядке (см. рис. 8). Рассмотрим геодезическую $\gamma(\bar{l}')$.

Она делит плоскость Лобачевского $\overline{M}^2$ на две части так, что геодезическая $\bar{l}'$ и точка $\bar{y}$ находятся по разные стороны от геодезической $\gamma(\bar{l}')$. Отсюда следует, что геодезическая $\gamma(\bar{l}')$ либо пересекается с одной из сторон многоугольника A, либо соединяет две вершины многоугольника A, не являющиеся соседними. В первом случае мы немедленно получаем противоречие с тем, что геодезические ламинации $\overline{\mathcal{L}}$ не пересекаются, что непосредственно следует из того, что неустойчивые многообразия различных точек из Λ либо не пересекаются, либо совпадают. Во втором случае мы получаем противоречие с п. 8) предложения 2.11, поскольку в этом случае из конструкции $\overline{\mathcal{L}}$ следовало бы, что в одном из криволинейных многоугольников $\pi^{-1}(\Delta \cup C)$ нашлась бы кривая из $\bar{\Lambda}$, соединяющая его вершины, не являющиеся соседними. Таким образом, множество $\pi(\mathrm{int}(A))$ гомеоморфно открытому диску.

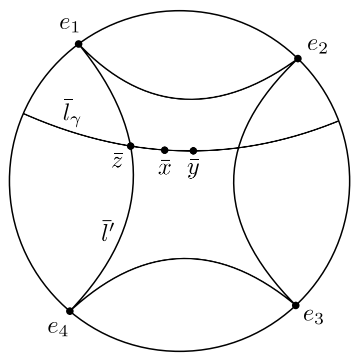

Рис. 8. Идеальный геодезический многоугольник

Покажем, что любая точка $\bar{x} \in \overline{M}^2$ принадлежит либо внутренности некоторого геодезического многоугольника A, либо геодезической ламинации $\overline{\mathcal{L}}$. Рассмотрим произвольную точку $\bar{x} \in \overline{M}^2 \setminus \overline{\mathcal{L}}$. Проведем через нее геодезический луч $\bar{l}^+$, пересекающийся с $\overline{\mathcal{L}}$. Так как множество $\overline{\mathcal{L}}$ – замкнутое, то на геодезическом луче $\bar{l}^+$ найдется точка $\bar{y} \in \overline{\mathcal{L}}$ такая, что отрезок луча $\bar{l}^+$, ограниченный точками $\bar{x}$ и $\bar{y}$, не содержит точек из $\overline{\mathcal{L}}$. Пусть $\bar{l} \subset \overline{\mathcal{L}}$ – геодезическая, содержащая точку $\bar{y}$ и e_1, e_2 – ее граничные точки на абсолюте. Пусть $\bar{w}^u$ – кривая из $\bar{\Lambda}$, имеющая точки e_1, e_2 своими граничными точками на абсолюте.

Покажем, что кривая $\bar{w}^u$ содержит прообраз граничной периодической точки диффеоморфизма f. Предположим противное и покажем, что в этом случае существуют последовательности кривых $\{\bar{w}_i'^u\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{\bar{w}_i''^u\}_{i\in\mathbb{N}}$ такие, что последовательности $\{\psi(\bar{w}_i'^u)\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{\psi(\bar{w}_i''^u)\}_{i\in\mathbb{N}}$ сходятся к $\psi(\bar{w}^u)$, причем множества $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{w}_i'^u$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{w}_i''^u$ целиком содержатся в различных компонентах связности дополнения $\overline{M}^2 \setminus \bar{w}^u$. Возможны два случая: либо кривая $\bar{w}^u$ содержит прообраз периодической точки (не являющейся в этом случае граничной) диффеоморфизма f, либо $\bar{w}^u$ не содержит прообразов периодических точек диффеоморфизма f.

Рассмотрим первый случай. Пусть $\bar{p} \in \bar{w}$ – прообраз периодической точки периода k, и $\bar{f}_k$ – поднятие отображения f^k, для которого $\bar{f}(\bar{p}) = \bar{p}$. Так как периодическая точка $\pi(\bar p)$ не является граничной, то в каждой компоненте линейной связности множества $\bar w^s_{\bar p}\setminus\bar p$ найдется точка, принадлежащая $\bar\Lambda$. Пусть x' и x'' – такие точки. Тогда из п. 4) предложения 2.11 следует, что достаточно положить $\bar w'^u_i=\bar f^{2i}_k(\bar w^u_{\bar x'})$ и $\bar w''^u_i=\bar f^{2i}_k(\bar w^u_{\bar x''})$ для любого $i\in\mathbb N$.

Рассмотрим второй случай. Рассмотрим произвольную точку $\bar z\in\bar w^u$. Пусть $\bar w^s_{\bar z,\varepsilon}$ – поднятие устойчивого многообразия $W^s_{\pi(\bar z),\,\varepsilon}$ точки $\pi(\bar z)$ размера $\varepsilon>0$. Из [11, лемма 2.6] следует, что пересечение каждой из компонент линейной связности множества $\bar w^s_{\bar z,\varepsilon}\setminus\bar z$ с множеством $\bar\Lambda$ непусто для любого $\varepsilon>0$. Тогда существование последовательностей $\{\bar w'^u_i\}_{i\in\mathbb N}$ и $\{\bar w''^u_i\}_{i\in\mathbb N}$, обладающих указанным свойством, немедленно вытекает из утверждения 2.12.

Из того, что последовательности $\{\psi(\bar w'^u_i)\}_{i\in\mathbb N}$ и $\{\psi(\bar w''^u_i)\}_{i\in\mathbb N}$ сходятся к $\psi(\bar w^u)$ следует, что в каждой из компонент связности множества $\overline M^2\setminus\bar l$ найдется последовательность геодезических из $\overline{\mathcal L}$, имеющая геодезическую $\bar l$ своим топологическим пределом. Но тогда точка $\bar y$ не может быть первой точкой на геодезическом луче $\bar l^+$, принадлежащей множеству $\overline{\mathcal L}$.

Полученное противоречие доказывает, что кривая $\bar w^u$ является граничной, а тогда и геодезическая $\bar l$ является граничной. Пусть A – геодезический многоугольник, имеющий одной из своей сторон геодезическую $\bar l$. Тогда точка $\bar x$ обязана лежать внутри A, так как в противном случае нашлась бы геодезическая $\bar l'$, являющаяся стороной A и пересекающая отрезок луча $\bar l^+$, ограниченный точками $\bar x$ и $\bar y$. Лемма доказана.

§ 4. Гиперболичность действия A-диффеоморфизма в фундаментальной группе несущей поверхности

Доказательство теоремы 1.6. Предположим противное, т. е. что автоморфизм $\bar f_*$ не является гиперболическим. Рассмотрим внутреннюю периодическую точку p периода n_1 и поднятие $\bar f_{n_1}$ отображения f^{n_1} такое, что $\bar f^2_{n_1}$ имеет четыре неподвижные точки на абсолюте u_1, u_2, s_1, s_2. Такое поднятие существует в силу п. 4) предложения 2.11.

Так как автоморфизм $\bar f_*$ не является гиперболическим, то автоморфизм $\bar f^2_{n_1*}$ также не является гиперболическим, и, следовательно, найдутся элементы $\gamma,\beta\in\Gamma$, $\gamma\ne\mathrm{id}$, и $n\in\mathbb N$ такие, что $\bar f^{2n}_{n_1*}(\gamma)=\beta\gamma\beta^{-1}$. Положим $\bar g=\bar f^{2n}_{n_1}$, тогда $\bar g_*(\gamma)=\beta\gamma\beta^{-1}$.

Покажем, что найдется элемент $\widetilde\gamma\in\Gamma$, такой что геодезическая $\bar l_{\widetilde\gamma}$ является конгруэнтной $\bar l_\gamma$, и одна из дуг абсолюта $\mathbb E$, ограниченная точками $\widetilde\gamma^+$ и $\widetilde\gamma^-$, содержит ровно одну из точек u_1, u_2, где $\bar l_\gamma$ и $\bar l_{\widetilde\gamma}$ – геодезические, инвариантные относительно элементов γ и $\widetilde\gamma$ соответственно (см. рис. 9).

Покажем, что пересечение $\bar l_\gamma\cap\overline{\mathcal L}$ непусто. Предположим противное, тогда $\bar l_\gamma\subset\overline M^2\setminus\overline{\mathcal L}$. Но тогда в силу п. 3) леммы 3.1 граничные точки геодезической $\bar l_\gamma$ обязаны быть иррациональными, так как в этом случае $\bar l_\gamma$ должна лежать внутри идеального геодезического многоугольника, что противоречит их рациональности. Выберем геодезическую $\bar l_a\subset\overline{\mathcal L}$ такую, что $\bar l_a\cap\bar l_\gamma\ne\varnothing$. Пусть $\bar l_b\subset\mathcal L$ – геодезическая с граничными точками u_1,u_2 на абсолюте. В силу п. 2) леммы 3.1 геодезическая $\pi(\bar l_b)$ плотна в $\mathcal L$, тогда в силу трансверсальности пересечения $\pi(\bar l_a)$ и $\pi(\bar l_\gamma)$ пересечение $\pi(\bar l_b)\cap\pi(\bar l_\gamma)$ также не пусто и трансверсально.

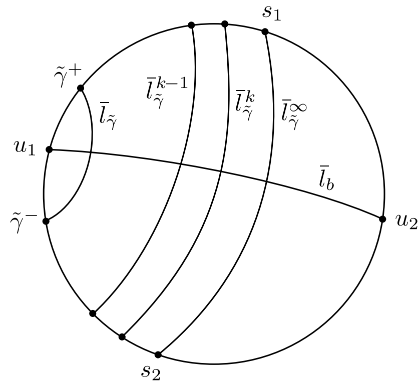

Рис. 9. Гиперболичность

Тогда в множестве $\pi^{-1}(\pi(\bar{l}_\gamma))$ найдется геодезическая $\bar{l}_{\widetilde{\gamma}}$, конгруэнтная $\bar{l}_\gamma$, инвариантная относительно некоторого элемента $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$, такая, что $\bar{l}_{\widetilde{\gamma}} \cap \bar{l}_b \neq \varnothing$.

Рассмотрим последовательность геодезических $\bar{l}^k_{\widetilde{\gamma}}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, такую, что $\bar{l}^0_{\widetilde{\gamma}} = \bar{l}_{\widetilde{\gamma}}$, а $\bar{l}^k_{\widetilde{\gamma}}$ – геодезическая с граничными точками $\widetilde{\gamma}^+_k = \bar{g}^{-1}(\widetilde{\gamma}^+_{k-1})$ и $\widetilde{\gamma}^-_k = \bar{g}^{-1}(\widetilde{\gamma}^-_{k-1})$. Так как точки u_1 и u_2 находятся на разных дугах абсолюта, ограниченных граничными точками $\widetilde{\gamma}^+$ и $\widetilde{\gamma}^-$ геодезической $\bar{l}_{\widetilde{\gamma}}$, то в силу п. 4) предложения 2.11 последовательность $\bar{l}^k_{\widetilde{\gamma}}$ имеет своим топологическим пределом геодезическую $\bar{l}^\infty_{\widetilde{\gamma}}$ с граничными точками s_1, s_2.

Покажем, что геодезические $\bar{l}^k_{\widetilde{\gamma}}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, являются конгруэнтными. Так как геодезические $\bar{l}_\gamma$ и $\bar{l}_{\widetilde{\gamma}}$ конгруэнтны, то из леммы 2.3 следует, что некоторые степени элементов γ и $\widetilde{\gamma}$ сопряжены, т. е. существуют отличные от нуля целые числа t_1 и t_2 и элемент $\delta \in \Gamma$ такие, что $\gamma^{t_1} = \delta\widetilde{\gamma}^{t_2}\delta^{-1}$. Тогда автоморфизм $\bar{g}_*^{-1}$ переводит элемент $\widetilde{\gamma}^{t_2}$ в сопряженный. Действительно, из предположения о противном имеем равенство $\bar{g}_*(\gamma) = \beta\gamma\beta^{-1}$, тогда $\bar{g}_*^{-1}(\gamma^{t_1}) = \bar{g}_*^{-1}(\beta^{-1})\gamma^{t_1}\bar{g}_*^{-1}(\beta)$, поэтому

$$\begin{aligned}\bar{g}_*^{-1}(\widetilde{\gamma}^{t_2}) &= \bar{g}_*^{-1}(\delta^{-1}\gamma^{t_1}\delta) = \bar{g}_*^{-1}(\delta^{-1})\bar{g}_*^{-1}(\beta^{-1})\gamma^{t_1}\bar{g}_*^{-1}(\beta)\bar{g}_*^{-1}(\delta) \\ &= \bar{g}_*^{-1}(\delta^{-1})\bar{g}_*^{-1}(\beta^{-1})\delta\widetilde{\gamma}^{t_2}\delta^{-1}\bar{g}_*^{-1}(\beta)\bar{g}_*^{-1}(\delta) = \varepsilon\widetilde{\gamma}^{t_2}\varepsilon^{-1},\end{aligned}$$

где $\varepsilon = \bar{g}_*^{-1}(\delta^{-1})\bar{g}_*^{-1}(\beta^{-1})\delta$. Так как геодезическая $\bar{l}^0_{\widetilde{\gamma}}$ является инвариантной относительно $\widetilde{\gamma}^{t_2}$, то из следствия леммы 2.4 и определения $\bar{l}^1_{\widetilde{\gamma}}$ следует, что геодезическая $\bar{l}^1_{\widetilde{\gamma}}$ является инвариантной относительно элемента $\bar{g}_*^{-1}(\widetilde{\gamma}^{t_2})$. Тогда из леммы 2.3 следует, что геодезические $\bar{l}^0_{\widetilde{\gamma}}$ и $\bar{l}^1_{\widetilde{\gamma}}$ являются конгруэнтными. Аналогичным образом показывается конгруэнтность геодезических $\bar{l}^k_{\widetilde{\gamma}}$ и $\bar{l}^{k+1}_{\widetilde{\gamma}}$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Таким образом, геодезическая $\pi(\bar{l}^k_{\widetilde{\gamma}})$ не зависит от $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и является замкнутой кривой. Так как геодезическая $\bar{l}^\infty_{\widetilde{\gamma}}$ имеет иррациональные граничные точки s_1 и s_2 на абсолюте, то геодезическая $\pi(\bar{l}^\infty_{\widetilde{\gamma}})$ является незамкнутой кривой и, следовательно, не совпадает с $\pi(\bar{l}_{\widetilde{\gamma}})$. Из того, что последовательность $\bar{l}^k_{\widetilde{\gamma}}$

имеет своим топологическим пределом геодезическую $\bar{l}^{\infty}_{\tilde{\gamma}}$ с граничными точками s_1, s_2 и свойств накрытия следует, что в любой окрестности произвольной точки $x \in \pi(\bar{l}^{\infty}_{\tilde{\gamma}})$ найдется точка $y \in \pi(\bar{l}_{\tilde{\gamma}})$. С другой стороны, в силу компактности геодезической $\pi(\bar{l}_{\tilde{\gamma}})$ для любой точки $x \notin \pi(\bar{l}_{\tilde{\gamma}})$ найдется окрестность $U(x)$ такая, что $U(x) \cap \pi(\bar{l}_{\tilde{\gamma}}) = \varnothing$. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 5. Представление A-диффеоморфизмов посредством псевдоаносовских гомеоморфизмов с точностью до полусопряжения

В силу теоремы 1.6 автоморфизм $\bar{f}_*$ является гиперболическим. Тогда из теории Нильсена–Терстона (см. [25], [26]) следует, что существует псевдоаносовский гомеоморфизм $P_f\colon M^2 \to M^2$, гомотопный f.

Главным шагом доказательства теоремы 1.9 является построение отображения $\bar{h}\colon \bar{\Lambda} \to \overline{M}^2$ (см. шаг 1 доказательства теоремы 1.9), удовлетворяющего следующим условиям:

1) $\bar{h}(\gamma(\bar{x})) = \gamma(\bar{h}(\bar{x}))$ для любых $\bar{x} \in \overline{M}^2$ и $\gamma \in \Gamma$;

2) для любых двух поднятий $\bar{f}$ и $\overline{P}_f$ на $\overline{M}^2$ отображений f и P_f, имеющих одинаковое продолжение на абсолют, имеет место коммутативная диаграмма $\bar{h} \circ \bar{f}|_{\bar{\Lambda}} = \overline{P}_f \circ \bar{h}|_{\bar{\Lambda}}$;

3) $\bar{h}$ взаимно однозначно на множестве $\bar{\Lambda} \setminus \overline{\Gamma}^u$, где $\overline{\Gamma}^u = \pi^{-1}(\Gamma^u)$;

4) если $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \overline{\Gamma}^u$ – точки, отличные от прообразов периодических точек, такие, что $\bar{x}_2 \in \bar{w}^s_{\bar{x}_1}$ и $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \cap \bar{\Lambda} = \varnothing$, то $\bar{h}(\bar{x}_1) = \bar{h}(\bar{x}_2)$;

5) если $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$ – прообразы граничных периодических точек, принадлежащие границе одного идеального криволинейного многоугольника, то $\bar{h}(\bar{p}_1) = \bar{h}(\bar{p}_2)$;

6) пусть $\bar{y} \in \bar{h}(\overline{\Gamma}^u)$, тогда, если $\pi(\bar{y})$ не является особой периодической точкой гомеоморфизма P_f, то полный прообраз $\bar{h}^{-1}(\bar{y})$ состоит в точности из двух точек, если же $\pi(\bar{y})$ является особой периодической точкой с $2m$ сепаратрисами гомеоморфизма P_f, то полный прообраз $\bar{h}^{-1}(\bar{y})$ состоит в точности из m точек.

Построение $\bar{h}$ будет основано на следующих леммах.

Лемма 5.1. *Пусть $\bar{p}$ – прообраз внутренней периодической точки p диффеоморфизма f. Тогда найдется единственная неособая периодическая точка q псевдоаносовского гомеоморфизма P_f и единственный ее прообраз $\bar{q}$ такие, что $\bar{w}^s_{\bar{p}}$, $\bar{w}^u_{\bar{p}}$ имеют одинаковые граничные точки на абсолюте с граничными точками кривых $\bar{\omega}^s_{\bar{q}}$, $\bar{\omega}^u_{\bar{q}}$ соответственно* (*см. рис.* 10).

Доказательство. Пусть p является периодической точкой периода k отображения f. В силу п. 4) предложения 2.11 найдется такое поднятие $\bar{f}_k$ отображения f^k, для которого точка $\bar{p}$ будет неподвижной, а ограничение гомеоморфизма $\bar{f}^2_k$ на абсолют имеет ровно четыре неподвижные точки $u^1_{\bar{p}}$, $u^2_{\bar{p}}$, $s^1_{\bar{p}}$, $s^2_{\bar{p}}$, являющиеся граничными точками кривых $\bar{w}^u_{\bar{p}}$ и $\bar{w}^s_{\bar{p}}$ соответственно. Так как f и P_f – гомотопные отображения, то из леммы 2.6 следует, что найдется поднятие $\overline{P}_{2k}$ отображения P^{2k}_f, имеющее такое же действие на абсолюте, что и отображение $\bar{f}^2_k$. Рассмотрим два экземпляра пространства $\overline{M}^2 \cup \mathbb{E}$, склеенных по тождественному отображению абсолюта $\mathbb{E}$ на себя. Данное пространство гомеоморфно двумерной сфере $\mathbb{S}^2$. Пара отображений $\bar{f}^2_k$ и $\overline{P}_{2k}$ индуцирует

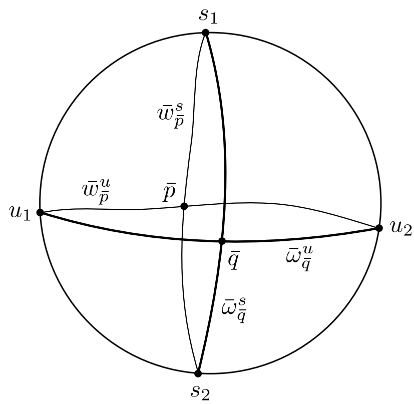

Рис. 10. Соответствие между внутренней периодической точкой диффеоморфизма f и неособой периодической точкой псевдоаносовского гомеоморфизма P_f

сохраняющее ориентацию отображение сферы $F\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ на себя такое, что точка $\bar{p}$ является седловой неподвижной точкой F индекса -1, а точки $u^1_{\bar{p}}$, $u^2_{\bar{p}}$, $s^1_{\bar{p}}$, $s^2_{\bar{p}}$ являются неподвижными узловыми точками и, следовательно, имеют индексы $+1$. Тогда из формулы Лефшеца следует, что сумма индексов неподвижных точек отображения F, лежащих на копии $\overline{M}^2$, не содержащей точки $\bar{p}$, равна -1. Таким образом, отображение $\overline{P}_{2k}$ обязано иметь по крайней мере одну неподвижную точку $\bar{q} \in \overline{M}^2$. Так как точка $\bar{q}$ является прообразом некоторой периодической точки q псевдоаносовского гомеоморфизма P_f, а гомеоморфизмы $\bar{f}^2_k$ и $\overline{P}_{2k}$ имеют одинаковое продолжение на абсолют, то в силу п. 3) предложения 2.17 точки $u^1_{\bar{p}}$, $u^2_{\bar{p}}$ и $s^1_{\bar{p}}$, $s^2_{\bar{p}}$ являются граничными точками кривых $\bar{\omega}^u_{\bar{q}}$ и $\bar{\omega}^s_{\bar{q}}$ соответственно. Из пп. 5) и 6) предложения 2.17 следует, что точка $\bar{q}$ является единственной неподвижной точкой поднятия $\overline{P}_{2k}$. Лемма доказана.

Следующее предложение доказывается аналогично [15] (см. также [29, теорема 9.3.1]).

Предложение 5.2. *Пусть Λ – совершенный просторно расположенный аттрактор, содержащий в точности m связок $C_1, C_2, \dots, C_m$. Тогда существует замкнутая окрестность U аттрактора Λ такая, что для нее выполняются следующие свойства*:

1) $f(U) \subset \operatorname{int}(U)$;

2) $\bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(U) = \Lambda$;

3) *граница ∂U множества U состоит из m простых замкнутых кривых $L_1, L_2, \dots, L_m$*;

4) *L_i принадлежит той компоненте связности множества $M^2 \setminus \Lambda$, для которой связка C_i является достижимой изнутри границей*;

5) $L_i = \bigcup_{j=1}^{r_{C_i}} [\ell_j \cup (\widetilde{x}_{2j}, \widetilde{x}_{2j+1})^s]$ $(\widetilde{x}_{2r_{C_i}+1} = \widetilde{x}_1)$, *где* ℓ_j *– кривая такая, что для любой точки* $x \in C_i$ *пересечение* $W_x^s \cap \ell_j$ *либо состоит из единственной точки и трансверсально, либо пусто,* $\widetilde{x}_{2j-1}$, $\widetilde{x}_{2j}$ *– концы кривой* ℓ_j, *а* $(\widetilde{x}_{2j}, \widetilde{x}_{2j+1})^s$ *– открытый интервал на устойчивом многообразии* $W_{y_j}^s$ *некоторой точки* $y_j \in C_i$.

Лемма 5.3. *Пусть* $p_1, p_2, \dots, p_m$ *– граничные периодические точки диффеоморфизма* f, *принадлежащие связке* C *степени* m, $m \geqslant 2$, *и* $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m \in \overline{C}$ *– их прообразы, принадлежащие границе* $\overline{C} \subset \bar{\Lambda}$ *идеального криволинейного многоугольника* $\bar{\Delta}$. *Тогда найдется единственная периодическая точка* q *псевдоаносовского гомеоморфизма* P_f *с* $2m$ *сепаратрисами и единственный ее прообраз* $\bar{q}$ *такие, что поднятия устойчивых и неустойчивых многообразий точек* $p_1, p_2, \dots, p_m$ *и сепаратрис точки* q *отображений* f *и* P_f, *содержащие точки* $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m$ *и* $\bar{q}$ *соответственно, имеют одинаковые граничные точки на абсолюте* (*см. рис.* 11 *и* 12).

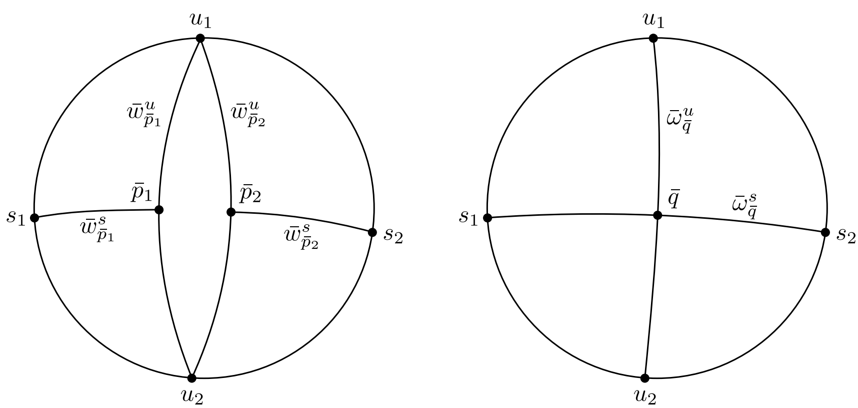

Рис. 11. Соответствие между граничной периодической точкой диффеоморфизма f, принадлежащей связке степени 2, и неособой периодической точкой псевдоаносовского гомеоморфизма P_f

Доказательство. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_m$ – граничные периодические точки периода k отображения f, принадлежащие связке степени m. В силу п. 7) предложения 2.11 найдется поднятие $\bar{f}_k$ отображения f^k такое, что точки $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m$ являются неподвижными точками отображения $\bar{f}_k$, а ограничение гомеоморфизма $\bar{f}_k^2$ на абсолют имеет ровно $2m$ неподвижных точек $u^1, u^2, \dots, u^m, s^1, s^2, \dots, s^m$. Так как f и P_f – гомотопные отображения, то в силу леммы 2.6 найдется поднятие $\overline{P}_{2k}$ отображения P_f^{2k}, имеющее такое же продолжение на абсолют, что и отображение $\bar{f}_k^2$. Положим $\bar{g} = \bar{f}_k^2$

Покажем, что сумма индексов неподвижных точек отображения $\bar{g}$, принадлежащих $\overline{M}^2$, равняется $1 - m$. Из п. 9) предложения 2.11 следует, что все неподвижные точки отображения $\bar{g}$ принадлежат идеальному криволинейному

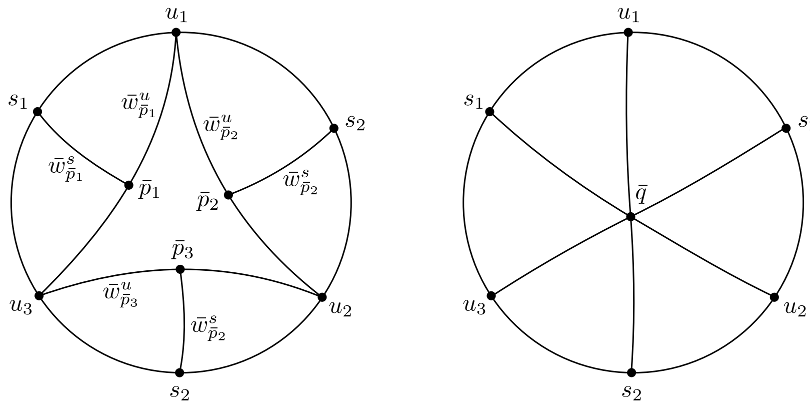

Рис. 12. Соответствие между граничной периодической точкой диффеоморфизма f, принадлежащей связке степени $m \geqslant 3$, и особой периодической точкой псевдоаносовского гомеоморфизма P_f

многоугольнику $\bar{\Delta}$. Из предложения 5.2 следует, что найдется замкнутый диск $\overline{D} \in \operatorname{int}(\bar{\Delta})$ такой, что $\bar{g}(\overline{D}) \supset \overline{D}$ и

$$\bigcup_{l=0}^{+\infty} \bar{g}^l(\overline{D}) = \operatorname{int}(\bar{\Delta}).$$

В качестве такого диска достаточно выбрать компоненту связности полного прообраза диска, ограниченного кривой L_i, содержащемся в многоугольнике $\bar{\Delta}$ (см. рис. 13). Положим $\bar{S} = \partial \overline{D}$, область $(\bar{g}(\overline{D}) \backslash \overline{D}) \cup \bar{S}$ гомеоморфна замкнутому кольцу. Рассмотрим два экземпляра $\bar{g}_1(\overline{D})$ и $\bar{g}_2(\overline{D})$ диска $\bar{g}(\overline{D})$ с определенным на их подмножествах $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$, являющихся копиями диска $\overline{D}$, отображениями $\bar{g}_i\colon \overline{D}_i \to \bar{f}_i(\overline{D}_i)$, $i = 1, 2$. Пусть

$$\psi\colon (\bar{g}_1(\overline{D}_1) \setminus \overline{D}_1) \cup \bar{S}_1 \to (\bar{g}_2(\overline{D}_2) \setminus \overline{D}_2) \cup \bar{S}_2$$

является таким гомеоморфизмом, что если $\bar{x}_1 \in \bar{S}_1, \bar{x}_2 \in \bar{S}_2$ – точки, соответствующие одной и той же точке $\bar{x} \in \bar{S}$, то $\psi(\bar{x}_1) = \bar{g}_2(\bar{x}_2)$ и $\psi^{-1}(\bar{x}_2) = \bar{g}_1(\bar{x}_1)$.

Легко видеть, что пространство $\bar{g}_1(\overline{D}_1) \cup_\psi \bar{g}_2(\overline{D}_2)$ гомеоморфно двумерной сфере $\mathbb{S}^2$. Рассмотрим отображение $G\colon \bar{g}_1(\overline{D}_1) \cup_\psi \bar{g}_2(\overline{D}_2) \to \bar{g}_1(\overline{D}_1) \cup_\psi \bar{g}_2(\overline{D}_2)$, определенное следующим образом: для любой точки $x_1 \in \overline{D}_1$ положим $G(x_1) = \bar{g}_1(x_1)$, а для любой точки $x_2 \in \bar{g}_2(\overline{D}_2)$ положим $G(x_2) = \bar{g}^{-1}(x_2)$. Из определения гомеоморфизма ψ непосредственно следует, что G является гомеоморфизмом двумерной сферы. Так как множество $(\bar{g}_1(\overline{D}_1) \setminus \overline{D}_1) \cup \bar{S}_1 \subset \mathbb{S}^2$ не содержит неподвижных точек, то из формулы Лефшеца следует, что сумма индексов неподвижных точек отображения G, принадлежащих $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$ равна 2. Следовательно, сумма индексов неподвижных точек отображения $\bar{f}$, принадлежащих $\overline{D}$ равна 1. Таким образом, сумма индексов неподвижных точек отображения $\bar{g}$, принадлежащих $\overline{M}^2$ равняется $1 - m$.

Рассмотрим два экземпляра пространства $\overline{M}^2 \cup \mathbb{E}$, склеенных по тождественному отображению абсолюта $\mathbb{E}$ на себя. Данное пространство гомеоморфно

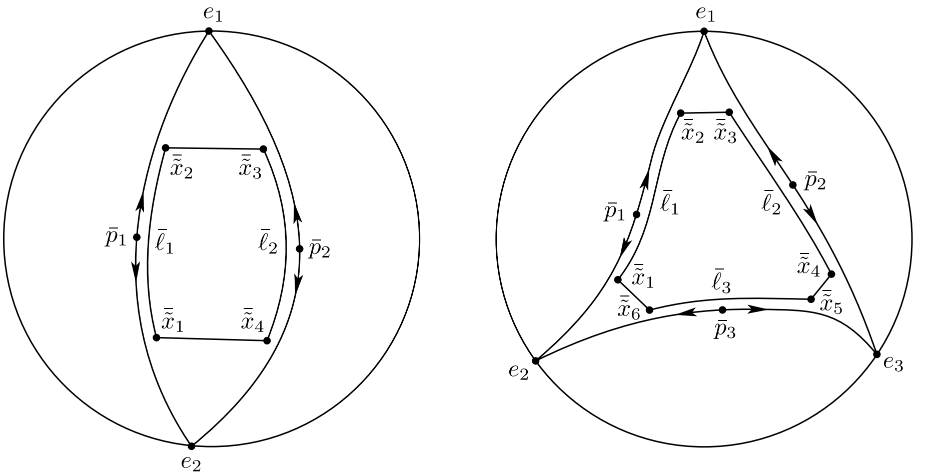

Рис. 13. Поднятие кривой L_i на плоскость Лобачевского ($\bar{\ell}_i$ и $\bar{\bar{x}}_i$ суть прообразы кривых ℓ_i и точек $\widetilde{x}_i$ на плоскости Лобачевского)

двумерной сфере $\mathbb{S}^2$. Пара отображений $\bar{f}_k^2$ и $\overline{P}_{2k}$ индуцируют такое отображение сферы $F\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ на себя, что точки $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_m$ являются седловыми неподвижной точками F, а точки $u^1, u^2, \ldots, u^m, s^1, s^2, \ldots, s^m$ являются неподвижными узловыми точками. Тогда из формулы Лефшеца следует, что сумма индексов неподвижных точек, лежащих на копии $\overline{M}^2$, не содержащей точек $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_m$, равна $1 - m$.

Таким образом, отображение $\overline{P}_{2k}$ обязано иметь, по крайней мере, одну неподвижную точку $\bar{q} \in \overline{M}^2$. Из пп. 3)–6) предложения 2.17 следует, что точка $\bar{q}$ является единственной неподвижной точкой поднятия $\overline{P}_{2k}$. А значит, точка $\bar{q}$ является прообразом периодической точки псевдоаносовского гомеоморфизма P_f с $2m$ сепаратрисами. Лемма доказана.

Лемма 5.4. *Пусть $\bar{q}$ – прообраз неособой периодической точки q псевдоаносовского гомеоморфизма P_f. Тогда найдется либо единственная периодическая точка p диффеоморфизма f и ее единственный прообраз $\bar{p}$ такие, что $\bar{w}^s_{\bar{p}}, \bar{w}^u_{\bar{p}}$ имеют одинаковые граничные точки на абсолюте с граничными точками кривых $\bar{\omega}^s_{\bar{q}}, \bar{\omega}^u_{\bar{q}}$, либо единственная связка $\overline{C}$ степени 2 диффеоморфизма f и ее единственный прообраз $\overline{C}$, являющийся границей некоторого идеального криволинейного двуугольника $\overline{C} \cup \bar{\Delta}$, такие, что прообразы $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ граничных периодических точек $p_1, p_2 \in C$ обладают тем свойством, что $\bar{w}^s_{\bar{p}_1}$, $\bar{w}^s_{\bar{p}_2}$, $\bar{w}^u_{\bar{p}_1}$, $\bar{w}^u_{\bar{p}_2}$ имеют одинаковые граничные точки на абсолюте с граничными точками кривых $\bar{\omega}^s_{\bar{q}}, \bar{\omega}^u_{\bar{q}}$ (см. рис. 10, 11).*

Доказательство. Пусть q – неособая периодическая точка периода k псевдоаносовского гомеоморфизма P_f. Пусть $\bar{q}$ – ее прообраз, и $\overline{P}_k$ – поднятие гомеоморфизма P^k такое, что $\overline{P}_k(\bar{q}) = \bar{q}$. В силу п. 3) предложения 2.17 гомеоморфизм $\overline{P}_k^2$ имеет ровно 4 неподвижных точек на абсолюте u^1, u^2, s^1, s^2, являющихся граничными точками кривых $\bar{\omega}^u_{\bar{q}}$ и $\bar{\omega}^s_{\bar{q}}$ соответственно, и в точности одну неподвижную точку $\bar{q}$ на $\overline{M}^2$. Так как f и P_f – гомотопные отображения, то в силу леммы 2.6 найдется поднятие $\bar{f}_{2k}$ отображения f^{2k}, имеющее такое же продолжение на абсолют, что и отображение $\overline{P}_k^2$.

Рассмотрим два экземпляра пространства $\overline{M}^2 \cup \mathbb{E}$, склеенных по тождественному отображению абсолюта $\mathbb{E}$ на себя. Данное пространство гомеоморфно двумерной сфере $\mathbb{S}^2$. Пара отображений $\bar{f}_{2k}$ и $\overline{P}_k^2$ индуцируют такое отображение сферы $F\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ на себя, что точка $\bar{q}$ является неподвижной седловой точкой индекса -1, а точки u^1, u^2, s^1, s^2 являются неподвижными узловыми точками. Тогда из формулы Лефшеца следует, что сумма индексов неподвижных точек, лежащих на копии $\overline{M}^2$, не содержащей точки $\bar{q}$ равняется -1.

Таким образом, отображение $\bar{f}_{2k}$ имеет неподвижную точку $\bar{p}$ на $\overline{M}^2$. Если данная точка является прообразом периодической точки p, принадлежащей Λ, то из пп. 4), 9) предложения 2.11 немедленно следует утверждение леммы. Если точка $\bar{p}$ является прообразом периодической точки $p \in M^2 \setminus \Lambda$, то в силу инвариантности ламинации $\bar{\Lambda}$ относительно $\bar{f}_{2k}$ геодезический криволинейный многоугольник $\overline{C} \cup \bar{\Delta}$, внутренность $\bar{\Delta}$ которого содержит точку $\bar{p}$, является инвариантным относительно $\bar{f}_{2k}$ и, следовательно, является двуугольником, поскольку $\bar{f}_{2k}$ имеет ровно 4 неподвижных точки на абсолюте. Так как каждая из сторон идеального криволинейного двуугольника $\overline{C} \cup \bar{\Delta}$ содержит ровно по одному прообразу $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ периодических точек $\bar{f}_{2k}$, то из п. 4) предложения 2.11 следует, что $\bar{f}_{2k}(\bar{p}_i) = \bar{p}_i$ при $i = 1, 2$.

Таким образом, граничными точками кривых $\bar{w}^u_{\bar{p}_i}$, $\bar{w}^s_{\bar{p}_i}$, $i = 1, 2$, являются точки u^1, u^2, s^1, s^2. Единственность следует из пп. 5)–7) предложения 2.11 и утверждения 2.14. Лемма доказана.

Лемма 5.5. *Пусть $\bar{q}$ – прообраз особой периодической точки q с $2m$ сепаратрисами, $m \geqslant 3$, псевдоаносовского гомеоморфизма P_f. Тогда найдется единственная связка C степени m диффеомофризма f и ее единственный прообраз $\overline{C}$, являющийся границей некоторого идеального криволинейного многоугольника $\overline{C} \cup \bar{\Delta}$ такие, что прообразы $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m \in \overline{C}$ граничных периодических точек $p_1, p_2, \dots, p_m \in C$ обладают тем свойством, что поднятия устойчивых и неустойчивых многообразий точек $p_1, p_2, \dots, p_m$ и сепаратрис точки q отображений f и P_f, содержащие точки $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m$ и $\bar{q}$ соответственно, имеют одинаковые граничные точки на абсолюте* (см. рис. 12).

Доказательство. Пусть q – особая периодическая точка периода k с $2m$ сепаратрисами, $m \geqslant 3$, псевдоаносовского гомеоморфизма P_f. Пусть $\bar{q}$ – ее прообраз, и $\overline{P}_k$ – поднятие гомеоморфизма P_f^k такое, что $\overline{P}_k(\bar{q}) = \bar{q}$. В силу п. 4) предложения 2.17 гомеоморфизм $\overline{P}_k^m$ имеет ровно $2m$ неподвижных точек на абсолюте $u^1, u^2, \dots, u^m, s^1, s^2, \dots, s^m$ и в точности одну неподвижную точку $\bar{q}$ на $\overline{M}^2$. Так как f и P_f – гомотопные отображения, то в силу леммы 2.6 найдется поднятие $\bar{f}_{mk}$ отображения f^{mk}, имеющее такое же продолжение на абсолют, что и отображение $\overline{P}_k^m$.

Рассмотрим два экземпляра пространства $\overline{M}^2 \cup \mathbb{E}$, склеенных по тождественному отображению абсолюта $\mathbb{E}$ на себя. Данное пространство гомеоморфно двумерной сфере $\mathbb{S}^2$. Пара отображений $\bar{f}_{mk}$ и $\overline{P}_k^m$ индуцируют отображение сферы $F\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ на себя такое, что точка $\bar{q}$ является неподвижной седловой точкой индекса $1-m$, а точки $u^1, u^2, \dots, u^m, s^1, s^2, \dots, s^m$ являются неподвижными узловыми точками. Тогда из формулы Лефшеца следует, что сумма индексов неподвижных точек, лежащих на копии $\overline{M}^2$, не содержащей точку $\bar{q}$, равна $1-m$.

Таким образом, отображение $\bar{f}_{mk}$ имеет неподвижную точку $\bar{p}$ на $\overline{M}^2$. Если данная точка является прообразом периодической точки p, принадлежащей Λ, то из пп. 4), 9) предложения 2.11 немедленно следует утверждение леммы. Если точка $\bar{p}$ является прообразом периодической точки $p \in M^2 \setminus \Lambda$, то в силу инвариантности ламинации $\bar{\Lambda}$ относительно $\bar{f}_{mk}$ геодезический криволинейный многоугольник $\overline{C} \cup \bar{\Delta}$, внутренность $\bar{\Delta}$ которого содержит точку $\bar{p}$, является инвариантным относительно $\bar{f}_{mk}$. Так как каждая из сторон идеального криволинейного многоугольника $\overline{C} \cup \bar{\Delta}$ содержит ровно по одному прообразу $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_l$ периодических точек $\bar{f}_{mk}$, где l – число сторон многоугольника $\overline{C} \cup \bar{\Delta}$, то из п. 9) предложения 2.11 следует, что $\bar{f}^l_{mk}(\bar{p}_i) = \bar{p}_i$ при $i = 1, \dots, l$. Отсюда из п. 9) предложения 2.11 следует, что $l = m$, и что $\bar{f}_{mk}(\bar{p}_i) = \bar{p}_i$.

Таким образом, граничными точками кривых $\bar{w}^u_{\bar{p}_i}, \bar{w}^s_{\bar{p}_i}$, $i = 1, \dots, m$, являются точки $u^1, u^2, \dots, u^m, s^1, s^2, \dots, s^m$. Единственность следует из пп. 6), 7) предложения 2.11 и утверждения 2.14. Лемма доказана.

Лемма 5.6. *Пусть $\bar{x}$ – прообраз s-плотной непериодической точки x диффеоморфизма f, не принадлежащей прообразу $\bar{w}^u_{\bar{p}}$ неустойчивого многообразия граничной периодической точки p связки степени $m \geqslant 3$. Тогда найдутся единственная точка y, являющаяся непериодической точкой псевдоаносовского гомеоморфизма P_f, и ее единственный прообраз $\bar{y}$ такие, что $\bar{w}^u_{\bar{x}}$, $\bar{w}^s_{\bar{x}}$ и $\bar{\omega}^u_{\bar{y}}$, $\bar{\omega}^s_{\bar{y}}$ имеют одинаковые граничные точки на абсолюте* (*см. рис.* 14).

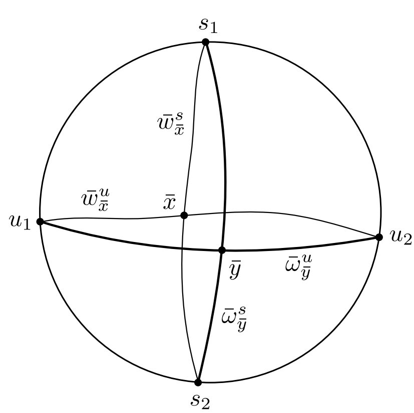

Рис. 14. Соответствие между s-плотной непериодической точкой диффеоморфизма f, не лежащей на неустойчивом многообразии граничной периодической точки связки степени $m \geqslant 3$ и непериодической точкой псевдоаносовского гомеоморфизма P_f

Доказательство. Пусть $u^1_{\bar{x}}$, $u^2_{\bar{x}}$, $s^1_{\bar{x}}$, $s^2_{\bar{x}}$ – граничные точки устойчивого $\bar{w}^s_{\bar{x}}$ и $\bar{w}^u_{\bar{x}}$ неустойчивого многообразия точки $\bar{x}$. Так как множество прообразов внутренних периодических точек f плотно в $\bar{\Lambda}$, то найдется последовательность $\{\bar{p}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ прообразов внутренних периодических точек f, сходящаяся к точке $\bar{x}$.

В силу утверждений 2.12 и 2.13 последовательности граничных точек устойчивых $\bar{w}^s_{\bar{p}_i}$ и неустойчивых $\bar{w}^u_{\bar{p}_i}$ многообразий точек $\bar{p}_i$ сходятся к граничным точкам устойчивого $\bar{w}^s_{\bar{x}}$ и неустойчивого $\bar{w}^u_{\bar{x}}$ многообразия точки $\bar{x}$. В силу леммы 5.1 найдется последовательность прообразов неособых периодических точек $\{\bar{q}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ отображения P_f таких, что граничные точки на абсолюте слоев $\bar{\omega}^s_{\bar{q}_i}$ и $\bar{\omega}^u_{\bar{q}_i}$ совпадают с граничными точками на абсолюте кривых $\bar{w}^s_{\bar{p}_i}$ и $\bar{w}^u_{\bar{p}_i}$ соответственно.

Покажем, что найдется слой слоения $\overline{\mathcal{F}}^u$, не содержащий в своем замыкании прообразов особых периодических точек гомеоморфизма P_f и имеющий точки $u^1_{\bar{x}}, u^2_{\bar{x}}$ своими граничными точками на абсолюте. Зададим положительное направление обхода абсолюта $\mathbb{E}$ таким образом, что область $\overline{M}^2$ остается слева. Так как множество рациональных точек всюду плотно на абсолюте, то существуют элементы $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ такие, что точки γ_1^+, $u^1_{\bar{x}}$, γ_2^+, $u^2_{\bar{x}}$ встречаются в указанном порядке при обходе абсолюта. Пусть $U_1, U_2 \subset \mathbb{E}$ – связные окрестности точек γ_1^+ и γ_2^+ соответственно, не содержащие точек $u^1_{\bar{x}}, u^2_{\bar{x}}$. Рассмотрим произвольную кривую $\bar{\omega}^u \subset \overline{\mathcal{F}}^u$ с граничными точками e_1 и e_2 на абсолюте.

В силу свойств элементов группы Γ найдутся такие целые числа n_1 и n_2, что $\gamma_1^{n_1}(e_1), \gamma_1^{n_1}(e_2) \in U_1$ и $\gamma_2^{n_2}(e_1), \gamma_2^{n_2}(e_2) \in U_2$. Положим $\bar{\omega}^u_a = \gamma_1^{n_1}(\bar{\omega}^u)$ и $\bar{\omega}^u_b = \gamma_2^{n_2}(\bar{\omega}^u)$ (см. рис. 15). Тогда точки a_1, a_2, $u^1_{\bar{x}}$, b_1, b_2, $u^2_{\bar{x}}$ встречаются в указанном порядке при обходе абсолюта в положительном направлении, где $a_1, a_2 \in \mathbb{E}$ и $b_1, b_2 \in \mathbb{E}$, граничные точки кривых $\bar{\omega}^u_a, \bar{\omega}^u_b \subset \overline{\mathcal{F}}^u$ соответственно. Выберем произвольную кривую $\bar{v}$ на $\overline{M}^2$ без самопересечений с граничными точками v_1, v_2 на абсолюте такую, что

1) точки a_1, v_1, a_2, $u^1_{\bar{x}}$, b_1, v_2, b_2, $u^2_{\bar{x}}$ встречаются в указанном порядке при обходе абсолюта в положительном направлении;

2) каждое из пересечений $\bar{v} \cap \bar{\omega}^u_a$ и $\bar{v} \cap \bar{\omega}^u_b$ состоит ровно из одной точки;

3) кривая $\bar{v}$ не содержит прообразов особых периодических точек гомеоморфизма P_f.

Так как граничные точки неустойчивых многообразий $\bar{w}^u_{\bar{p}_i}$ сходятся к граничным точкам неустойчивого многообразия $\bar{w}^u_{\bar{x}}$, то при достаточно больших значениях i кривые $\bar{\omega}^u_{\bar{q}_i}$ пересекаются с $\bar{v}$. Без ограничения общности можно считать, что для любого $i \in \mathbb{N}$ пересечение $\bar{\omega}^u_{\bar{q}_i} \cap \bar{v}$ не пусто и содержится в компактном куске кривой $\bar{v}$, ограниченном точками $\bar{v} \cap \bar{\omega}^u_a$ и $\bar{v} \cap \bar{\omega}^u_b$. В каждом из множеств $\bar{\omega}^u_{\bar{q}_i} \cap \bar{v}$ выберем по точке $\bar{y}_i$. Последовательность $\{\bar{y}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ имеет предельную точку $\bar{y} \in \overline{M}^2$, так как она целиком содержится в компактном куске кривой $\bar{v}$, ограниченном точками $\bar{v} \cap \bar{\omega}^u_a$ и $\bar{v} \cap \bar{\omega}^u_b$.

Так как кривая $\bar{v}$ не содержит прообразов особых точек гомеоморфизма P_f, то найдется кривая $\bar{\omega}^u_{\bar{y}}$, принадлежащая слоению $\overline{\mathcal{F}}^u$, содержащая точку $\bar{y}$. В силу утверждения 2.18, по крайней мере одна из точек $u^1_{\bar{x}}$, $u^2_{\bar{x}}$ является граничной для кривой $\bar{\omega}^u_{\bar{y}}$. Из леммы 5.5 следует, что замыкание кривой $\bar{\omega}^u_{\bar{y}}$ не содержит прообраза особой периодической точки, так как в противном случае

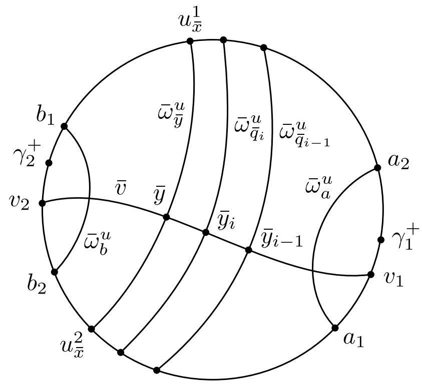

Рис. 15. Нахождение предельного слоя $\bar w^u$ слоения $\overline{\mathcal{F}}^u$

кривая $\bar w^u_{\bar x}$ содержала бы прообраз граничной периодической точки диффеоморфизма f. Так как кривая $\bar\omega^u_{\bar y}$ не содержит прообраза особой периодической точки гомеоморфизма P_f, то из утверждения 2.18 следует, что обе точки $u^1_{\bar x}$, $u^2_{\bar x}$ являются граничными точками кривой $\bar\omega^u_{\bar y}$.

Случай кривой $\bar w^s_{\bar x}$ разбирается аналогично с учетом того, что точка $\bar x$ является прообразом s-плотной точки диффеоморфизма f.

Единственность следует из пп. 5) и 6) предложения 2.17.

Лемма доказана.

Лемма 5.7. *Пусть $\bar x$ – прообраз s-плотной непериодической точки x диффеоморфизма f, принадлежащей прообразу $\bar w^u_{\bar p}$ неустойчивого многообразия граничной периодической точки p связки степени $m \geqslant 3$. Тогда найдутся единственная точка y, принадлежащая сепаратрисе особой периодической точки псевдоаносовского гомеоморфизма P_f, и ее единственный прообраз $\bar y$ такие, что $\bar w^s_{\bar x}$ и $\bar\omega^s_{\bar y}$ имеют одинаковые граничные точки на абсолюте, а граничная точка кривой $\bar\omega^u_{\bar y}$ является одной из граничных точек на абсолюте кривой $\bar w^u_{\bar x}$ (см. рис. 16).*

Доказательство. Пусть $u^1_{\bar x}$, $u^2_{\bar x}$, $s^1_{\bar x}$, $s^2_{\bar x}$ – граничные точки на абсолюте кривых $\bar w^u_{\bar x}$ и $\bar w^s_{\bar x}$ соответственно. Пусть $s_{\bar p}$ – граничные точки на абсолюте кривой $\bar w^s_{\bar p}$. Из леммы 5.3 следует, что найдется прообраз $\bar q$ особой точки q псевдоаносовского гомеоморфизма P_f такой, что точки $u^1_{\bar x}$, $u^2_{\bar x}$, $s_{\bar p}$ являются граничными точками на абсолюте сепаратрис точки $\bar q$.

Для определенности будем считать, что точка $u^1_{\bar x}$ располагается на той дуге абсолюта, ограниченной точками $s^1_{\bar x}$, $s^2_{\bar x}$, не содержащей точки $s_{\bar p}$. Пусть $\bar\omega^u$ – кривая слоения $\overline{\mathcal{F}}^u$, имеющая своей граничной точкой на абсолюте точку $u^1_{\bar x}$ и содержащая в своем замыкании точку $\bar q$. Покажем, что найдется точка $\bar z \in \bar\omega^u$, удовлетворяющая условию леммы. Рассмотрим последовательность точек $\bar x_i$, являющихся прообразами внутренних периодических точек диффеоморфизма f, сходящуюся к точке $\bar x$. Тогда в силу утверждения 2.13 последовательности граничных точек на абсолюте кривых $\bar w^s_{\bar x_i}$ сходятся к точкам $s^1_{\bar x}$, $s^2_{\bar x}$.

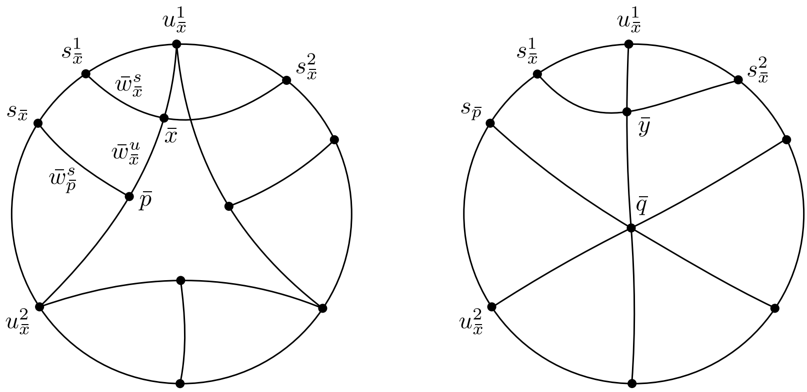

Рис. 16. Соответствие между непериодической точкой диффеоморфизма f, лежащей на неустойчивом многообразии граничной периодической точки, и точкой, принадлежащей сепаратрисе периодической точки псевдоаносовского гомеоморфизма P_f

Из леммы 5.1 следует, что найдется последовательность точек $\bar{y}_i$, являющихся прообразами неособых периодических точек гомеоморфизма P, таких, что граничные точки на абсолюте кривых $\bar{w}^s_{\bar{x}_i}$ и $\bar{\omega}^s_{\bar{y}_i}$ совпадают. Для достаточно больших значений индекса i пересечение $\bar{\omega}^u \cap \bar{\omega}^s_{\bar{y}_i}$ непусто и состоит из единственной точки $\bar{z}_i$. Теперь аналогично лемме 5.6 доказывается, что последовательность $\bar{z}_i$ имеет предельную точку $\bar{z}$ такую, что кривая $\bar{\omega}^s_{\bar{z}}$ имеет $s^1_{\bar{x}}$, $s^2_{\bar{x}}$ своими граничными точками на абсолюте.

Единственность следует из пп. 5) и 6) предложения 2.17.

Лемма доказана.

Лемма 5.8. *Пусть $\bar{y}$ – прообраз непериодической точки y псевдоаносовского гомеоморфизма P_f такой, что кривая ω^s_y вместе со своим замыканием не содержат периодических точек P_f. Тогда найдется непериодическая s-плотная точка x диффеомрфизма f и ее прообраз $\bar{x}$ такие, что кривые $\bar{\omega}^s_{\bar{y}}$ и $\bar{w}^s_{\bar{x}}$ имеют одинаковые граничные точки на абсолюте* (*см. рис.* 17).

Доказательство. Пусть s^1, s^2 – граничные точки на абсолюте кривой $\bar{\omega}^s_{\bar{y}}$. Без ограничения общности можно считать, что точка $\bar{y}$ является прообразом точки y, не лежащей на неустойчивой сепаратрисе особой периодической точки гомеоморфизма P_f. Так как неособые периодические точки отображения P_f плотны на M^2, то найдется последовательность $\{\bar{q}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ прообразов неособых периодических точек P_f, сходящаяся к точке $\bar{y}$. Пусть $s^1_{\bar{q}_i}$, $s^2_{\bar{q}_i}$ – граничные точки на абсолюте кривой $\bar{\omega}^s_{\bar{q}_i}$. Тогда из утверждения 2.18 следует, что последовательности $\{s^1_{\bar{q}_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{s^2_{\bar{q}_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ сходятся к точкам s^1 и s^2 соответственно (см. рис. 18). Из леммы 5.4 следует, что найдется последовательность точек $\bar{p}_i$, являющихся прообразами периодических точек диффеоморфизма f, являющихся либо внутренними периодическими точками, либо граничными периодическими точками, принадлежащими связке степени два, таких, что граничные

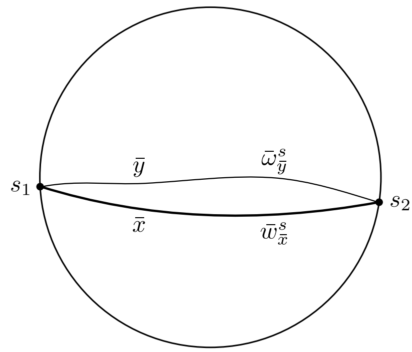

Рис. 17. Соответствие между устойчивым многообразием диффеоморфизма $\bar{f}$ и устойчивым слоем гомеоморфизма $\overline{P}_f$, принадлежащим сепаратрисе периодической точки

точки на абсолюте кривых $\bar{w}^s_{\bar{p}_i}$ совпадают с граничными точками на абсолюте кривых $\bar{\omega}^s_{\bar{q}_i}$. Так как граничных периодических точек лишь конечное число, то в силу свойств накрытия π каждая точка, являющаяся прообразом граничной периодической точки, имеет на $\overline{M}^2$ окрестность, не содержащую других прообразов граничных периодических точек. Тогда без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{\bar{p}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ не содержит прообразов граничных периодических точек.

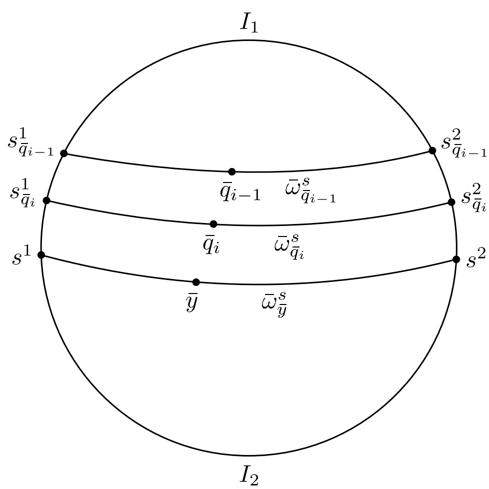

Рис. 18

Обозначим через I_1, I_2 отрезки абсолюта, ограниченные точками s^1 и s^2. Так как слои слоения $\overline{\mathcal{F}}^s$ не пересекаются, то возможны два случая: либо каждое из множеств

$$I_1 \cap \bigcup_{i=1}^{\infty}(s^1_{\bar{q}_i} \cup s^2_{\bar{q}_i}) \quad \text{и} \quad I_2 \cap \bigcup_{i=1}^{\infty}(s^1_{\bar{q}_i} \cup s^2_{\bar{q}_i})$$

бесконечно, либо одно из них конечно, а второе бесконечно. В дальнейшем для определенности будем считать, что во втором случае бесконечным является множество

$$I_1 \cap \bigcup_{i=1}^{\infty}(s^1_{\bar q_i} \cup s^2_{\bar q_i}).$$

Неформально говоря, первый случай соответствует тому, что последовательности $\{s^1_{\bar q_i}\}$ и $\{s^2_{\bar q_i}\}$ сходятся к точкам s^1 и s^2, подходя к ним сколь угодно близко с обеих сторон, а второй – тому, что последовательности $\{s^1_{\bar q_i}\}$ и $\{s^2_{\bar q_i}\}$ сходятся к точкам s^1 и s^2, подходя к ним с коль угодно близко только с одной стороны. Через N_1 и N_2 обозначим множества индексов $i \in \mathbb{N}$, для которых выполнены включения $s^1_{\bar q_i}, s^2_{\bar q_i} \in I_1$ и $s^1_{\bar q_i}, s^2_{\bar q_i} \in I_2$ соответственно.

Покажем, что среди кривых $\{\bar w^u_{\bar p_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ найдется такая, для которой выполнены включения $u^1_{\bar p_i} \in \operatorname{int}(I_1)$, $u^2_{\bar p_i} \in \operatorname{int}(I_2)$. Предположим противное, тогда для любого $i \in N_1$ будут выполнены включения $u^1_{\bar p_i}, u^1_{\bar p_i} \in I_1$. Из утверждения 2.14 следует, что кривые $\bar w^u_{\bar p_i}$ и $\bar w^s_{\bar p_i}$ пересекаются ровно в одной точке $\bar p_i$ на $\overline{M}^2$. Тогда существует такая последовательность точек $\{\bar p_i\}_{i\in T}$, $T \subset N_1$, что среди граничных точек кривых $\{\bar w^u_{\bar p_i}\}_{i\in T}$ найдется последовательность, сходящаяся либо к точке s^1, либо точке s^2. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{u^1_{\bar p_i}\}_{i\in T}$ сходится к точке s^1 (см. рис. 19). Тогда в силу того, что точки $\{u^1_{\bar p_i}\}_{i\in T}$ являются граничными точками на абсолюте кривых $\{\bar\omega^u_{\bar q_i}\}_{i\in T}$ из утверждения 2.18 следует, что точка s^1 является граничной точкой кривой $\bar\omega^u_{\bar y}$. Следовательно, кривые $\bar\omega^s_{\bar y}$ и $\bar\omega^u_{\bar y}$ имеют общую граничную точку на абсолюте, что противоречит утверждению 2.19. Полученное противоречие доказывает, что найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что для граничных точек кривой $\bar w^u_{\bar p_n}$ выполнены включения $u^1_{\bar p_n} \in \operatorname{int}(I_1), u^2_{\bar p_n} \in \operatorname{int}(I_2)$.

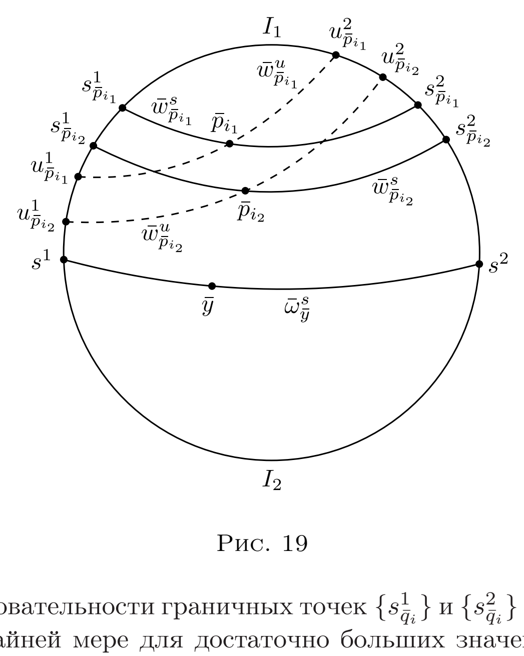

Рис. 19

Так как последовательности граничных точек $\{s^1_{\bar q_i}\}$ и $\{s^2_{\bar q_i}\}$ сходятся к точкам s^1 и s^2, то по крайней мере для достаточно больших значений i пересечение

$\bar{w}^u_{\bar{p}_n} \cap \bar{w}^s_{\bar{p}_i}$ непусто и, как следует из утверждения 2.14, состоит ровно из одной точки $\bar{z}_i$. Покажем, что последовательность $\{\bar{z}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ имеет предельную точку на $\overline{M}^2$. В случае, когда каждое из множеств

$$I_1 \cap \bigcup_{i=1}^{\infty}(s^1_{\bar{q}_i} \cup s^2_{\bar{q}_i}) \quad \text{и} \quad I_2 \cap \bigcup_{i=1}^{\infty}(s^1_{\bar{q}_i} \cup s^2_{\bar{q}_i})$$

бесконечно, данный факт немедленно вытекает из того, что кривые $\bar{w}^s_{\bar{p}_i}$ не пересекаются. Рассмотрим случай, когда множество $I_2 \cap \bigcup_{i=1}^{\infty}(s^1_{\bar{q}_i} \cup s^2_{\bar{q}_i})$ конечно. Предположим, что последовательность $\{\bar{z}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ не имеет предельной точки на $\overline{M}^2$, тогда в силу того, что кривые $\bar{w}^s_{\bar{p}_i}$ не пересекаются, последовательность $\{\bar{z}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ обязана сходится к точке $u^2_{\bar{p}_n}$, являющейся граничной точкой на абсолюте кривой $\bar{w}^s_{\bar{p}_n}$, принадлежащей I_2. Пусть k – период точки $\pi(\bar{p}_n)$ и $\bar{f}_k\colon \overline{M}^2 \to \overline{M}^2$ – поднятие диффеоморфизма f^k такое, что $\bar{f}_k(\bar{p}_n) = \bar{p}_n$. Тогда из п. 4) предложения 2.11 следует, что точки $s^1_{\bar{p}_n}$, $s^2_{\bar{p}_n}$, $u^1_{\bar{p}_n}$, $u^2_{\bar{p}_n}$ являются неподвижными точками абсолюта относительно продолжения на абсолют диффеоморфизма $\bar{f}^2_k$, причем точки $s^1_{\bar{p}_n}$, $s^2_{\bar{p}_n}$ являются отталкивающими, а $u^1_{\bar{p}_n}$, $u^2_{\bar{p}_n}$ – притягивающими. Зафиксируем число $r \in \mathbb{N}$ такое, что граничные точки $s^1_{\bar{p}_r}$, $s^2_{\bar{p}_r}$ кривой $\bar{w}^s_{\bar{p}_r}$ содержатся в интервалах, ограниченных точками s^1, $s^1_{\bar{p}_n}$ и s^2, $s^2_{\bar{p}_n}$ соответственно, принадлежащих отрезку I_1. Тогда из п. 4) предложения 2.11 следует, что найдется число $l \in \mathbb{N}$ такое, что граничные точки на абсолюте $\bar{f}^{2l}_k(s^1_{\bar{p}_r})$, $\bar{f}^{2l}_k(s^2_{\bar{p}_r})$ кривой $\bar{f}^{2l}_k(\bar{w}^s_{\bar{p}_r})$ принадлежат внутренности отрезка I_2. Так как множество устойчивых многообразий точек из Λ инвариантно относительно f, то кривая $\bar{f}^{2l}_k(\bar{w}^s_{\bar{p}_r})$ является поднятием устойчивого многообразия точки $f^{2lk}(\pi(\bar{p}_r))$, содержащим точку $\bar{f}^{2l}_k(\bar{p}_r)$. Так как последовательность $\{\bar{z}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ сходится к точке $u^2_{\bar{p}_n}$, то при достаточно больших значениях i кривые $\bar{w}^s_{\bar{p}_i}$ будут пересекаться с кривой $\bar{f}^{2l}_k(\bar{w}^s_{\bar{p}_r})$ (см. рис. 20), что противоречит, тому, что устойчивые многообразия различных точек либо не пересекаются, либо совпадают. Полученное противоречие доказывает, что в случае, когда множество $I_2 \cap \bigcup_{i=1}^{\infty}(s^1_{\bar{q}_i} \cup s^2_{\bar{q}_i})$ конечно, последовательность $\{\bar{z}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ имеет предельную точку на $\overline{M}^2$.

Так как точка $\bar{z}$ принадлежит кривой $\bar{w}^u_{\bar{p}_n}$, то имеет место включение $\pi(\bar{z}) \in \Lambda$. Заметим, что из лемм 5.1, 5.3 и нашего предположения, что кривая $\bar{\omega}^s_{\bar{y}}$ не содержит прообразов периодических точек гомеоморфизма P_f, следует, что точка $\bar{z}$ является прообразом s-плотной непериодической точки. Тогда из утверждения 2.13 следует, что граничные точки на абсолюте кривой $\bar{w}^s_{\bar{z}}$ совпадают с точками s^1, s^2. Таким образом, точки $\bar{z}$ и $\pi(\bar{z})$ являются искомыми точками. Лемма доказана.

Лемма 5.9. *Пусть $\bar{x}$ – прообраз непериодической точки x диффеоморфизма f, не являющейся s-плотной. Тогда найдутся единственная точка y, принадлежащая устойчивой сепаратрисе особой периодической точки псевдоаносовского гомеоморфизма P_f, и ее единственный прообраз $\bar{y}$ такие, что $\bar{w}^u_{\bar{x}}, \bar{w}^s_{\bar{x}}$ и $\bar{\omega}^u_{\bar{y}}, \bar{\omega}^s_{\bar{y}}$ имеют одинаковые граничные точки на абсолюте* (см. рис. 21).

Доказательство. Возможны два случая: точка x либо не принадлежит неустойчивому многообразию граничной периодической точки связки степени

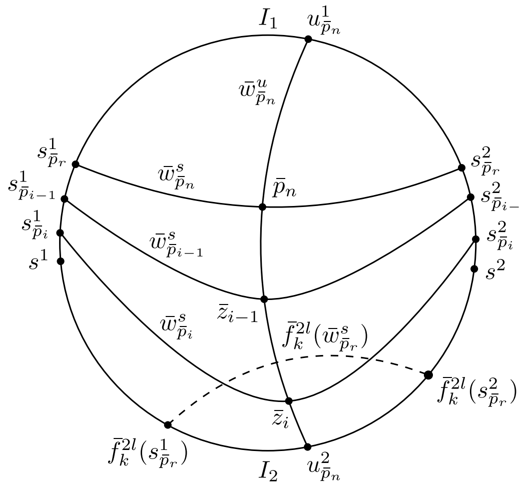

Рис. 20

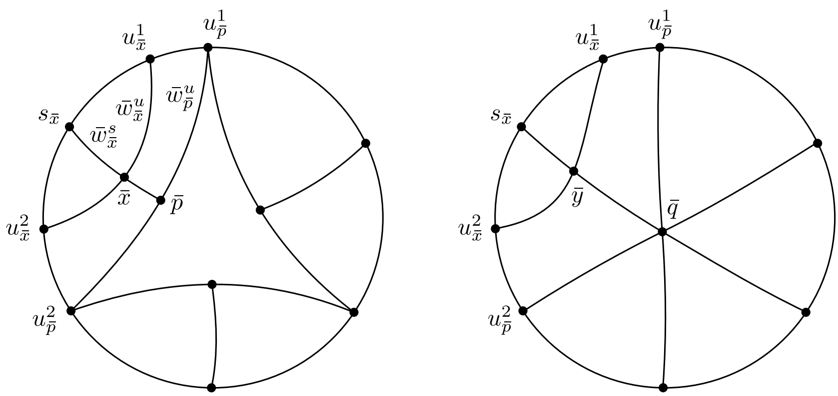

Рис. 21. Соответствие между непериодической точкой диффеоморфизма f, не являющейся s-плотной, и и периодической точкой псевдоаносовского гомеоморфизма P_f

$m \geqslant 3$, либо точка x принадлежит неустойчивому многообразию граничной периодической точки связки степени $m \geqslant 3$. Рассмотрим первый случай.

Пусть $u^1_{\bar x}$, $u^2_{\bar x}$, $s_{\bar x}$ – граничные точки на абсолюте кривых $\bar w^u_{\bar x}$ и $\bar w^s_{\bar x}$ соответственно. Пусть $\bar p$ – прообраз граничной периодической точки p диффеоморфизма f, принадлежащий прообразу устойчивого многообразия $\bar w^s_{\bar x}$. Точка s является граничной точкой на абсолюте кривой $\bar w^s_{\bar p}$. Пусть $u^1_{\bar p}$, $u^2_{\bar p}$ – граничные точки на абсолюте кривой $\bar w^u_{\bar p}$. Из леммы 5.3 следует, что найдется прообраз $\bar q$ особой точки q псевдоаносовского гомеоморфизма P_f такой, что точки $s_{\bar x}$, $u^1_{\bar p}$, $u^2_{\bar p}$ являются граничными точками на абсолюте сепаратрис точки $\bar q$.

Пусть $\bar\omega^s$ – кривая слоения $\overline{\mathcal F}^s$, имеющая своей граничной точкой на абсолюте точку s и содержащая в своем замыкании точку $\bar q$. Покажем, что найдется точка $\bar{z} \in \bar{\omega}^s$, удовлетворяющая условию леммы. Рассмотрим последовательность точек $\bar{x}_i$, являющихся прообразами внутренних периодических точек диффеоморфизма f, сходящуюся к точке $\bar{x}$. Тогда в силу утверждения 2.12 последовательности граничных точек на абсолюте кривых $\bar{w}^u_{\bar{x}_i}$ сходятся к точкам $u^1_{\bar{x}}$, $u^2_{\bar{x}}$. Из леммы 5.1 следует, что найдется последовательность точек $\bar{y}_i$, являющихся прообразами неособых периодических точек гомеоморфизма P, таких, что граничные точки на абсолюте кривых $\bar{w}^u_{\bar{x}_i}$ и $\bar{\omega}^u_{\bar{y}_i}$ совпадают. Для достаточно больших значений индекса i пересечение $\bar{\omega}^s \cap \bar{\omega}^u_{\bar{y}_i}$ непусто и состоит из единственной точки $\bar{z}_i$. Теперь аналогично лемме 5.6 доказывается, что последовательность $\bar{z}_i$ имеет предельную точку $\bar{z}$ такую, что кривая $\bar{\omega}^u_{\bar{z}}$ имеет $u^1_{\bar{x}}$, $u^2_{\bar{x}}$ своими граничными точками на абсолюте.

Единственность следует из пп. 5), 6) предложения 2.17.

Доказательство во втором случае аналогично, и мы его опускаем.

Лемма доказана.

Утверждение 5.10. *Пусть $\bar{w}^s$ – поднятие устойчивого многообразия некоторой точки из Λ диффеоморфизма f, и s – граничная точка кривой $\bar{w}^s$ на абсолюте. Пусть $\bar{w}^u_{\bar{x}_i}$ – последовательность поднятий неустойчивых многообразий диффеоморфизма f такая, что каждое пересечение $\bar{w}^u_{\bar{x}_i} \cap \bar{w}^s$ состоит из единственной точки $\bar{x}_i$ и последовательность $\bar{x}_i$ сходится к точке s. Тогда последовательность граничных точек на абсолюте кривых $\bar{w}^u_{\bar{x}_i}$ также сходится к s (см. рис. 22).*

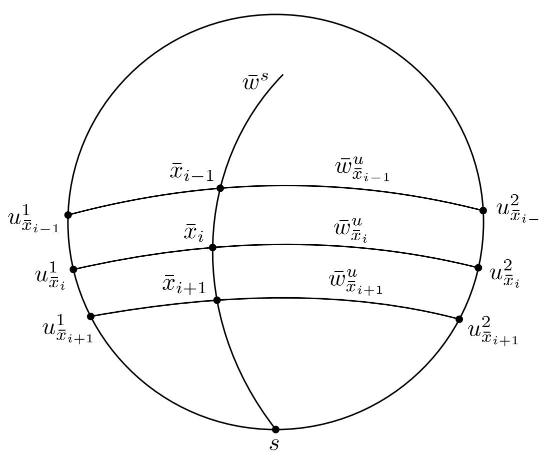

Рис. 22. Последовательность граничных точек на абсолюте поднятий неустойчивых многообразий

Доказательство. Предположим противное. Пусть $u^1_{\bar{x}_i}$ и $u^2_{\bar{x}_i}$ – граничные точки кривой $\bar{w}^u_{\bar{x}_i}$, причем точка $u^1_{\bar{x}_i}$ встречается раньше точки $u^2_{\bar{x}_i}$ при обходе абсолюта в положительном направлении с началом обхода в точке s. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\bar{x}_i$ монотонна на кривой $\bar{w}^s$. Тогда из того, что кривые $\bar{w}^u_{\bar{x}_i}$ не пересекаются следует, что последовательности $u^1_{\bar{x}_i}$ и $u^2_{\bar{x}_i}$ монотонны на абсолюте. Пусть u^1, u^2 – предельные точки этих последовательностей. Тогда в силу нашего предположения, по крайней мере, одна из них отлична от s. Для определенности будем считать, что это точка u^1.

Возможны два случая: либо точка u^2 отлична от s, либо точки u^2 и s совпадают. Рассмотрим первый случай. Покажем, что каждая точка интервала I абсолюта, ограниченного точками u^1 и u^2, является предельной для множества $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{w}^u_{\bar{x}_i}$. Предположим противное, тогда найдется точка $v^1 \in I$ и ее окрестность $\bar{U} \subset \overline{M}^2 \cup \mathbb{E}$ такие, что $\bar{U} \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{w}^u_{\bar{x}_i} = \varnothing$. Рассмотрим кривую $\bar{v}$ на $\overline{M}^2$, имеющую две граничные точки v^1 и v^2 на абсолюте такую, что точка $v^2 \in \mathrm{int}(\mathbb{E} \setminus I)$. Тогда пересечение $\bar{w}^u_{\bar{x}_i} \cap \bar{v}$ непусто, по крайней мере, для достаточно больших значений i. Без ограничения общности можно считать, что оно непусто для любого $i \in \mathbb{N}$. Выберем по точке $\bar{y}_i$ в каждом из пересечений $\bar{w}^u_{\bar{x}_i} \cap \bar{v}$. Тогда последовательность $\bar{y}_i$ содержится в компактном куске кривой $\bar{v}$, и последовательность $\bar{y}_i$ имеет предельную точку $\bar{y} \in \overline{M}^2$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{\bar{y}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ сходится к точке $\bar{y}$. Так как множество $\bar{\Lambda}$ замкнуто, то имеет место включение $\bar{y} \in \bar{\Lambda}$. Из утверждения 2.12 следует, что кривая $\bar{w}^u_{\bar{y}}$ имеет u^1, u^2 своими граничными точками на абсолюте. Так как последовательность $\bar{x}_i$ сходится к точке s, то для достаточно больших i кривые $\bar{w}^u_{\bar{y}}$ и $\bar{w}^u_{\bar{x}_i}$ будут пересекаться. Полученное противоречие доказывает, что каждая точка интервала I является предельной для множества $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{w}^u_{\bar{x}_i}$.

Рассмотрим произвольный элемент $\gamma \in \Gamma$ такой, что точка $\gamma^+ \in I$. Тогда при достаточно большом n граничные точки кривой $\gamma^n(\bar{w}^u_{\bar{x}_1})$ будут принадлежать интервалу I. С другой стороны, из того, что каждая точка интервала I является предельной для множества $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{w}^u_{\bar{x}_i}$, следует, что найдется такое $i \in \mathbb{N}$, что кривые $\bar{w}^u_{\bar{x}_i}$ и $\gamma^n(\bar{w}^u_{\bar{x}_1})$ будут пересекаться. Полученное противоречие завершает разбор первого случая.

Рассмотрим второй случай, когда точки s и u^2 совпадают. Если каждая точка интервала I является предельной для множества $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{w}^u_{\bar{x}_i}$, то противоречие строится так же, как и в первом случае. Если же найдется точка из I, не являющаяся предельной для множества $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{w}^u_{\bar{x}_i}$, то аналогично первому случаю найдется кривая $\bar{w}^u_{\bar{y}}$, имеющая u^1, u^2 своими граничными точками на абсолюте. Тогда точка $u^2 = s$ будет предельной для поднятий устойчивого многообразия $\bar{w}^s$ и неустойчивого многообразия $\bar{w}^u_{\bar{y}}$ одновременно, что противоречит утверждению 2.19. Полученное противоречие завершает доказательство. Утверждение доказано.

Приведем здесь одно свойство коммутативных диаграмм, которое нам понадобится при доказательстве теорем 1.9 и 1.10. Под коммутативной диаграммой мы понимаем ориентированный граф K, вершинами которого являются произвольные множества, а ребрами – отображения между этими множествами. Причем, если X и Y – произвольные вершины графа K, то для любых двух путей $f_{n_1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1 \colon X \to Y$ и $g_{n_2} \circ \dots \circ g_2 \circ g_1 \colon X \to Y$, соединяющих X с Y имеет место равенство $f_{n_1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1(x) = g_{n_2} \circ \dots \circ g_2 \circ g_1(x)$ для любого элемента $x \in X$.

Утверждение 5.11. *Пусть K – коммутативная диаграмма, содержащая поддиаграмму D вида $Z \xleftarrow{s} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{t} W$ такую, что*:

1) *отображение $s\colon X \to Z$ сюръективно*;

2) *существует отображение $g\colon Z \to W$, для которого имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] & Y \arrow[d, "t"] \\ Z \arrow[r, "g"] & W. \end{tikzcd}$$

Тогда диаграмма, полученная из K добавлением стрелки $Z \xrightarrow{g} W$ к поддиаграмме D, также является коммутативной.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого пути из Z в W в диаграмме K соответствующая этому пути композиция отображений совпадает с g. Пусть $h\colon Z \to W$ – отображение, соответствующее некоторому пути из Z в W в диаграмме K. Рассмотрим произвольную точку $z \in Z$. Так как отображение s сюрьективно, то найдется точка $x \in X$ такая, что $z = s(x)$. Из коммутативной диаграммы K следует, что $h(z) = h(s(x)) = t(f(x))$, а из коммутативной диаграммы $t \circ f = g \circ s$ следует, что $g(z) = g(s(x)) = t(f(x))$, таким образом, $h(z) = g(z)$. Утверждение доказано.

Доказательство теоремы 1.9. *Шаг* 1. Определим отображение $\bar h\colon \bar\Lambda^2 \to \overline{M}^2$, удовлетворяющее условиям 1)–6), сформулированным в начале § 5.

Пусть $\bar x \in \bar\Lambda$. Возможны следующие случаи:

1) точка $\bar x$ является прообразом периодической точки диффеоморфизма f;

2) точка $\bar x$ является прообразом непериодической s-плотной точки диффеоморфизма f;

3) точка $\bar x$ является прообразом непериодической точки диффеоморфизма f, не являющейся s-плотной.

Поставим в соответствие точке $\bar x$ точку $\bar y \in \overline{M}^2$ следующим образом.

В первом случае из лемм 5.1, 5.3 следует, что найдется единственный прообраз $\bar y$ периодической точки гомеоморфизма P_f такой, что среди граничных точек на абсолюте сепаратрис точки $\bar y$ содержатся граничные точки кривых $\bar w^u_{\bar x}$ и $\bar w^s_{\bar x}$ (см. рис. 10–12).

Во втором случае из лемм 5.6, 5.7 следует, что найдется единственный прообраз $\bar y$ непериодической точки гомеоморфизма P_f такой, что граничные точки на абсолюте кривых $\bar w^u_{\bar x}$, $\bar w^s_{\bar x}$ и $\bar\omega^u_{\bar y}$, $\bar\omega^s_{\bar y}$ совпадают (см. рис. 14, 16).

В третьем случае из леммы 5.9 следует, что найдется единственный прообраз $\bar y$ непериодической точки гомеоморфизма P_f такой, что граничные точки на абсолюте кривых $\bar w^u_{\bar x}$, $\bar w^s_{\bar x}$ и $\bar\omega^u_{\bar y}$, $\bar\omega^s_{\bar y}$ совпадают (см. рис. 21).

Заметим, что из конструкции $\bar h$ следует, что поднятия неустойчивых многообразий $\bar w^u_{\bar x}$ точек $x \in \Lambda$ переходят на слои слоения $\overline{\mathcal F}^u$. Причем, если точка $\bar x$ не принадлежит поднятию неустойчивого многообразия граничной периодической точки диффеоморфизма f, принадлежащей связке степени $m \geqslant 3$, то $\bar h(\bar w^u_{\bar x})$ содержится ровно в одном слое слоения $\overline{\mathcal F}^u$. Если же точка $\bar x$ принадлежит поднятию неустойчивого многообразия граничной периодической точки диффеоморфизма f, принадлежащей связке степени $m \geqslant 3$, то $\bar{h}(\bar{w}^u_{\bar{x}})$ содержится в объединении прообраза особой периодической точки гомеоморфизма P_f и ровно двух слоев слоения $\overline{\mathcal{F}}^u$, являющимися поднятиями ее сепаратрис. Кроме того, для любой точки $\bar{x} \in \bar{\Lambda}$ множество $\bar{h}(\bar{w}^s_{\bar{x}} \cap \bar{\Lambda})$ содержится ровно в одном слое слоения $\overline{\mathcal{F}}^s$. Из конструкции $\bar{h}$ также следует, что $\bar{h}$ инъективно на множестве $\bar{\Lambda} \setminus \overline{\Gamma}^u$, где $\overline{\Gamma}^u = \pi^{-1}(\Gamma^u)$.

Покажем, что отображение $\bar{h}\colon \bar{\Lambda} \to \overline{M}^2$ непрерывно. Действительно, пусть $\bar{x} \in \bar{\Lambda}$ – произвольная точка. Так как $\bar{\Lambda}$ имеет локальную структуру прямого произведения, то из предложения 1.5 следует, что найдется окрестность $\overline{V}$ точки $\bar{x}$ в множестве $\bar{\Lambda}$ такая, что $\overline{V}$ гомеоморфна прямому произведению $I \times \mathcal{C}$ интервала I на канторовское множество $\mathcal{C}$ посредством некоторого гомеоморфизма $\xi\colon \overline{V} \to I \times \mathcal{C}$. Причем множества вида $\xi^{-1}(\{a\} \times \mathcal{C})$ и $\xi^{-1}(I \times \{b\})$ совпадают с пересечениями поднятий устойчивых и неустойчивых многообразий точек из Λ с окрестностью $\overline{V}$. Кроме того, окрестность $\overline{V}$ выберем настолько малой, чтобы в ней содержалось не более одного прообраза граничной периодической точки диффеоморфизма f. По построению $\bar{h}$ переводит неустойчивые многообразия точек из $\bar{\Lambda}$ на слои неустойчивого слоения $\overline{\mathcal{F}}^u$, а пересечение устойчивых многообразий точек из $\bar{\Lambda}$ с множеством $\bar{\Lambda}$ – на слои устойчивого слоения $\overline{\mathcal{F}}^s$. При этом $\bar{h}$ взаимно однозначно всюду на $\overline{V}$, кроме множества $\xi^{-1}(A \times I)$, где $A \subset \mathcal{C}$ – множество границ смежных интервалов $\mathcal{C}$ (по отношению к отображению $i \circ \xi^{-1}\colon I \times \mathcal{C} \to M^2$, где $i\colon \overline{V} \to \overline{M}^2$ – отображение вложения). По построению $\bar{h}|_{\overline{V}} \circ \xi^{-1}$ склеивает слои из A, являющиеся границами одного и того же смежного интервала. Кроме того, отображение $\bar{h}|_{\overline{V}} \circ \xi^{-1}\colon I \times \mathcal{C} \to \overline{M}^2$ сохраняет порядок слоев прямого произведения $I \times \mathcal{C}$, как вида $\{a\} \times \mathcal{C}$, так и вида $I \times \{b\}$, что следует из того, что любое устойчивое и неустойчивое многообразие любой точки из $\bar{\Lambda}$ имеет, по крайней мере, одну граничную точку на абсолюте, множество устойчивых и неустойчивых многообразий, имеющих две граничные точки на абсолюте содержит подмножество плотное в $\overline{V}$, а $\bar{h}$ имеет тождественное продолжение на абсолют (см., например, [34, гл. 3, теорема 3]). Таким образом, в силу того, что $\overline{V}$ содержит не более одного прообраза граничной периодической точки диффеоморфизма f, множество $\bar{h} \circ \xi^{-1}(I \times \mathcal{C})$ гомеоморфно прямому произведению $I \times I$, а отображение $\bar{h}|_{\overline{V}}$ является непрерывным на $\overline{V}$. Из этого следует, что $\bar{h}$ является непрерывным во всех точках $\bar{\Lambda}$.

Покажем, что $\bar{h}$ сюрьективно. Рассмотрим произвольную точку $\bar{y} \in \overline{M}^2$. Покажем, что найдется точка $\bar{x} \in \Lambda$ такая, что $\bar{h}(\bar{x}) = \bar{y}$. Если $\bar{y}$ является прообразом периодической точки гомеоморфизма P_f, то требуемое утверждение немедленно вытекает из лемм 5.4 и 5.5. Поэтому будем считать, что точка $\bar{y}$ отлична от прообраза периодической точки гомеоморфизма P_f. Тогда возможны три случая:

1) кривая $\bar{\omega}^s_{\bar{y}}$ является поднятием неустойчивой сепаратрисы особой периодической точки гомеоморфизма P_f;

2) кривая $\bar{\omega}^s_{\bar{y}}$ содержит прообраз неособой периодической точки гомеоморфизма P_f;

3) кривая $\bar{\omega}^s_{\bar{y}}$ вместе со своим замыканием не содержат прообразов периодических точек гомеоморфизма P_f.

Рассмотрим первый случай. Пусть $\bar{q}$ – прообраз особой периодической точки с $2m$ сепаратрисам гомеоморфизма P_f, принадлежащий замыканию кривой $\bar{\omega}^s_{\bar{y}}$, и s – единственная граничная точка на абсолюте кривой $\bar{\omega}^s_{\bar{y}}$. Из леммы 5.5 следует, что найдется точка $\bar{p}$, являющаяся прообразом граничной периодической точки, принадлежащей связке степени m, такая, что кривая $\bar{w}^s_{\bar{p}}$ имеет точку s своей граничной точкой на абсолюте. Из конструкции отображения $\bar{h}$ и его непрерывности следует, что выполнено включение $\bar{h}(\bar{w}^s_{\bar{p}} \cap \bar{\Lambda}) \subset \bar{\omega}^s_{\bar{y}} \cup \bar{q}$. Причем образ $\bar{h}(\bar{w}^s_{\bar{p}} \cap \bar{\Lambda})$ является линейно связным и, следовательно, является полуинтервалом на кривой $\bar{\omega}^s_{\bar{y}} \cup \bar{q}$, содержащим точку $\bar{q}$. Покажем, что имеет место равенство $\bar{h}(\bar{w}^s_{\bar{p}} \cap \bar{\Lambda}) = \omega^s_{\bar{y}} \cup \bar{q}$. Предположим противное. Тогда найдется точка $\bar{y}' \in \omega^s_{\bar{y}} \setminus \bar{h}(\bar{w}^s_{\bar{p}} \cap \bar{\Lambda})$ такая, что кривая $\bar{\omega}^u_{\bar{y}'}$ не содержит в своем замыкании прообразов особых периодических точек гомеоморфизма P_f. Пусть u'^1, u'^2 – граничные точки на абсолюте кривой $\bar{\omega}^u_{\bar{y}'}$. Рассмотрим произвольную монотонную последовательность $\{\bar{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ точек из $\bar{\Lambda}$ на кривой $\bar{w}^s_{\bar{p}}$, сходящуюся к точке s. Из утверждения 5.10 следует, что последовательность граничных точек кривых $\{\bar{w}^u_{\bar{x}_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ сходится к точке s. Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ такое, чтобы граничные точки кривой $\bar{w}^u_{\bar{x}_N}$ принадлежали дуге абсолюта, ограниченной точками u'^1, u'^2 и содержащей точку s. Тогда кривые $\bar{\omega}^u_{\bar{y}'}$ и $\bar{\omega}^u_{\bar{h}(\bar{x}_N)}$ обязаны пересечься, что противоречит тому, что слои слоения $\overline{\mathcal{F}}^u$ не пересекаются (см. рис. 23). Полученное противоречие завершает доказательство в первом случае. Второй случай разбирается совершенно аналогичным образом, что и первый.

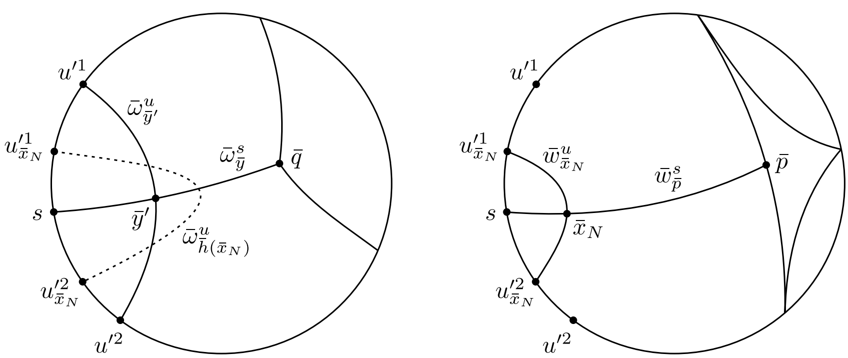

Рис. 23. Сюрьективность отображения $\bar{h}$

Рассмотрим третий случай. Пусть кривая $\bar{\omega}^s_{\bar{y}}$ имеет две граничные точки s^1, s^2 на абсолюте. Из леммы 5.8 следует, что найдется точка $\bar{x} \in \bar{\Lambda}$ такая, что кривая $\bar{w}^s_{\bar{x}}$ имеет s^1, s^2 своими граничными точками на абсолюте. Тогда из конструкции $\bar{h}$ следует, что $\bar{h}(\bar{w}^s_{\bar{x}} \cap \bar{\Lambda}) \subset \bar{\omega}^s_{\bar{y}}$. Далее совершенно аналогично первому случаю устанавливается, что на самом деле имеет место равенство $\bar{h}(\bar{w}^s_{\bar{x}} \cap \bar{\Lambda}) = \bar{\omega}^s_{\bar{y}}$.

Так как отображения f и P_f гомотопны, то из леммы 2.6 следует, что найдется пара поднятий $\bar{f}$ и $\overline{P}_f$, имеющая одинаковое продолжение на абсолют. Из построения, утверждения 2.14, п. 6) предложения 2.17 и того факта, что множества $\bigcup_{\bar{x}\in\bar{\Lambda}} \bar{w}^u_{\bar{x}}$ и $\bigcup_{\bar{x}\in\bar{\Lambda}} \bar{w}^s_{\bar{x}}$ инвариантны относительно $\bar{f}$, а слоения $\overline{\mathcal{F}}^u$ и $\overline{\mathcal{F}}^s$

инвариантны относительно $\overline{P}_f$, следует, что отображение $\bar{h}\colon \bar{\Lambda} \to \overline{M}^2$ полусопрягает отображения $\bar{f}$ и $\overline{P}_f$, т.е. имеет место коммутативная диаграмма $\bar{h} \circ \bar{f}|_{\bar{\Lambda}} = \overline{P}_f \circ \bar{h}|_{\bar{\Lambda}}$. Кроме того, заметим, что из конструкции $\bar{h}$ и инвариантности множеств $\bigcup_{\bar{x}\in\bar{\Lambda}} \bar{w}^u_{\bar{x}}$ и $\bigcup_{\bar{x}\in\bar{\Lambda}} \bar{w}^s_{\bar{x}}$ и слоений $\overline{\mathcal{F}}^u$ и $\overline{\mathcal{F}}^s$ относительно действия элементов группы Γ следует, что для любого элемента $\gamma \in \Gamma$ имеет место равенство $\bar{h} \circ \gamma|_{\bar{\Lambda}} = \gamma \circ \bar{h}|_{\bar{\Lambda}}$.

Шаг 2. Продолжим полусопрягающее отображение $\bar{h}|_{\bar{\Lambda}}$ на множество $\overline{M}^2 \setminus \bar{\Lambda}$. Рассмотрим произвольный диск $\Delta \subset M^2 \setminus \Lambda$ с достижимой изнутри границей C. Пусть $\bar{\Delta} \cup \overline{C}$ – компонента линейной связности полного прообраза $\pi^{-1}(\Delta \cup C)$. На множестве $\overline{C}$ отображение $\bar{h}$ уже определено, определим его на множестве $\bar{\Delta}$. Рассмотрим произвольную точку $\bar{x} \in C$. Тогда для любой точки $\bar{y} \in \bar{\Delta} \cap \bar{w}^s_{\bar{x}}$ положим $\bar{h}(y) = \bar{h}(\bar{x})$. Заметим, что из конструкции $\bar{h}|_{\bar{\Lambda}}$ следует, что такое продолжение корректно определено в том смысле, что оно не зависит от выбора точки $\bar{x} \in \overline{C}$. Рассмотрим теперь произвольную точку $\bar{y} \in \bar{\Delta} \setminus \bigcup_{\bar{x}\in\bar{\Lambda}} \bar{w}^s_{\bar{x}}$ и положим $\bar{h}(\bar{y}) = \bar{h}(\bar{p})$, где $\bar{p} \in \overline{C}$ – прообраз некоторой граничной периодической точки диффеоморфизма f. Определенное таким образом продолжение $\bar{h}$ является непрерывным, что следует из доказанной выше непрерывности $\bar{h}|_{\bar{\Lambda}}$, непрерывной зависимости устойчивых многообразий на компактных множествах и непрерывности слоения $\overline{\mathcal{F}}^s$. Из конструкции продолжения $\bar{h}$ и существования коммутативной диаграммы $\bar{h} \circ \bar{f}|_{\bar{\Lambda}} = \overline{P}_f \circ \bar{h}|_{\bar{\Lambda}}$ также следует, что на всем $\overline{M}^2$ имеет место коммутативная диаграмма $\bar{h} \circ \bar{f} = \overline{P}_f \circ \bar{h}$.

Кроме того, имеют место следующие утверждения:

1) для $\bar{h}|_{\bar{\Lambda}}$ выполнено равенство $\bar{h} \circ \gamma|_{\bar{\Lambda}} = \gamma \circ \bar{h}|_{\bar{\Lambda}}$ для любого элемента $\gamma \in \Gamma$;

2) множества $\bigcup_{\bar{x}\in\bar{\Lambda}} \bar{w}^s_{\bar{x}}$ и $\overline{\mathcal{F}}^s$ инвариантны относительно элементов группы Γ;

3) $\bar{h}$ переводит поднятия устойчивых многообразий точек из Λ на слои слоения $\overline{\mathcal{F}}^s$.

Отсюда следует, что на всем $\overline{M}^2$ имеет место равенство $\bar{h} \circ \gamma = \gamma \circ \bar{h}$ для любого элемента $\gamma \in \Gamma$. Тогда существует отображение $h\colon \Lambda \to M^2$ такое, что имеет место коммутативная диаграмма $\pi \circ \bar{h} = h \circ \pi$, причем из непрерывности $\bar{h}$ следует непрерывность h.

В силу того, что имеют место коммутативные диаграммы $\pi \circ \bar{h} = h \circ \pi$, $\bar{h} \circ \bar{f} = \overline{P}_f \circ \bar{h}$, $\pi \circ \bar{f} = f \circ \pi$ и $\pi \circ \overline{P}_f = P_f \circ \pi$, имеет место коммутативная диаграмма $h \circ f = P_f \circ h$. Действительно, склеивая коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \overline{M}^2 \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{h}"] & \overline{M}^2 \arrow[d, "\bar{h}"] \\ \overline{M}^2 \arrow[r, "\overline{P}_f"] & \overline{M}^2 \end{tikzcd}$$

с двумя копиями коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} \overline{M}^2 \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[d, "\pi"] & \overline{M}^2 \arrow[d, "\pi"] \\ M^2 \arrow[r, "h"] & M^2, \end{tikzcd}$$

получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
M^2 \arrow[d, "h"] & \overline{M}^2 \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{h}"] & \overline{M}^2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\bar{h}"] & M^2 \arrow[d, "h"] \\
M^2 & \overline{M}^2 \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\overline{P}_f"] & \overline{M}^2 \arrow[r, "\pi"] & M^2.
\end{tikzcd} \tag{5.1}$$

Из существования коммутативных диаграмм $\pi \circ \bar{f} = f \circ \pi$ и $\pi \circ \overline{P}_f = P_f \circ \pi$ и утверждения 5.11 следует, что коммутативную диаграмму (5.1) можно достроить до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
M^2 \arrow[rrr, "f"] \arrow[ddd, "h"] & & & M^2 \arrow[ddd, "h"] \\
& \overline{M}^2 \arrow[ul, "\pi"'] \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{h}"] & \overline{M}^2 \arrow[ur, "\pi"] \arrow[d, "\bar{h}"] & \\
& \overline{M}^2 \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[r, "\overline{P}_f"] & \overline{M}^2 \arrow[dr, "\pi"] & \\
M^2 \arrow[rrr, "P_f"] & & & M^2.
\end{tikzcd}$$

Тем самым мы завершаем доказательство теоремы 1.9.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1.10, докажем еще одно свойство отображения $\bar{h}$, которое нам понадобится при доказательстве классификационной теоремы.

Так как ограничение $\bar{h}|_{\bar{\Lambda}\setminus\overline{\Gamma}^u}$ взаимно однозначно, то корректно определено обратное отображение $\bar{h}^{-1}|_{\overline{M}^2\setminus\bar{h}(\overline{\Gamma}^u)}\colon \overline{M}^2 \setminus \bar{h}(\overline{\Gamma}^u) \to \bar{\Lambda} \setminus \overline{\Gamma}^u$. Кроме того, из существования коммутативной диаграммы $\bar{h} \circ \gamma = \gamma \circ \bar{h}$ для любого элемента $\gamma \in \Gamma$ следует, что отображение $h^{-1}|_{M^2\setminus h(\Gamma^u)}$ также корректно определено.

Лемма 5.12. *Отображения* $\bar{h}^{-1}|_{\overline{M}^2\setminus\bar{h}(\overline{\Gamma}^u)}\colon \overline{M}^2\setminus\bar{h}(\overline{\Gamma}^u)\to\bar{\Lambda}\setminus\overline{\Gamma}^u$ *и* $h^{-1}|_{M^2\setminus h(\Gamma^u)}$ *являются непрерывными.*

Доказательство. Сохраним обозначения, использовавшиеся при доказательстве теоремы 1.9. Рассмотрим произвольную точку $\bar{x} \in \bar{\Lambda} \setminus \overline{\Gamma}^u$ и положим $\bar{y} = \bar{h}(\bar{x})$. В силу локальной структуры прямого произведения на $\bar{\Lambda}$ и предложения 1.5 у точки $\bar{x}$ найдется окрестность $\overline{V}$ во множестве $\bar{\Lambda}$, гомеоморфная прямому произведению $I \times \mathcal{C}$ посредством некоторого гомеоморфизма $\xi\colon \overline{V} \to I \times \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ – канторовское множество на отрезке. Так как точка $\bar{x}$ отлична от прообраза граничной периодической точки гомеоморфизма f, то в силу непрерывности $\bar{h}$ без ограничения общности можно считать, что множество $\bar{h}(\overline{V})$ не содержит прообразов особых периодических точек гомеоморфизма P_f, а тогда множество $\bar{h}(\overline{V})$ гомеоморфно прямому произведению $I \times I$ посредством гомеоморфизма $\eta\colon \bar{h}(\overline{V}) \to I \times I$. Далее из того, что точка $\bar{x}$ не принадлежит множеству $\overline{\Gamma}^u$, следует, что точка $\bar{y}$ принадлежит внутренности множества $\bar{h}(\overline{V})$.

Рассмотрим отображение $\xi\circ\bar h^{-1}\circ\eta^{-1}|_{\eta(\bar h(\overline V\setminus\overline\Gamma^u))}$ и покажем, что оно непрерывно. Так как $\xi\circ\bar h^{-1}\circ\eta^{-1}|_{\eta(\bar h(\overline V\setminus\overline\Gamma^u))}$ переводит слои прямого произведения $I\times I$ на слои прямого произведения $I\times\mathcal C$ с сохранением порядка слоев, то без ограничения общности можно считать, что отображение $\xi\circ\bar h^{-1}\circ\eta^{-1}|_{\eta(\bar h(\overline V\setminus\overline\Gamma^u))}$ является тождественным по первой координате. Тогда достаточно показать, что оно является непрерывным по второй координате. Из [34, гл. 4, теорема 25] следует, что для любых нигде не плотных совершенных подмножеств прямой существует гомеоморфизм прямой, преобразующий одно множество в другое. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что множество $\mathcal C$ в прямом произведении $I\times\mathcal C$ является стандартным канторовским множеством. Рассмотрим точку $(x,y)\in\eta(\bar h(\overline V\setminus\overline\Gamma^u))$. Тогда вторая координата y имеет вид

$$y=\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2^2}+\dots+\frac{c_i}{2^i}+\cdots,$$

где $c_i\in\{0,1\}$, причем для любого $k\in\mathbb N$ последовательность $\{c_i\}_{i=k}^{\infty}$ не является стационарной. Тогда

$$\xi\circ\bar h^{-1}\circ\eta^{-1}|_{\eta(\bar h(\overline V\setminus\overline\Gamma^u))}(x,y)=\biggl(x,\frac{2c_1}{3}+\frac{2c_2}{3^2}+\dots+\frac{2c_i}{3^i}+\cdots\biggr).$$

Следовательно, отображение $\xi\circ\bar h^{-1}\circ\eta^{-1}|_{\eta(\bar h(\overline V\setminus\overline\Gamma^u))}$ является непрерывным, что доказывает непрерывность отображения

$$\bar h^{-1}|_{\overline M^2\setminus\bar h(\overline\Gamma^u)}\colon\overline M^2\setminus\bar h(\overline\Gamma^u)\to\bar\Lambda\setminus\overline\Gamma^u,$$

поскольку ξ и η являются гомеоморфизмами.

Непрерывность отображения $h^{-1}|_{M^2\setminus h(\Gamma^u)}$ непосредственно следует из непрерывности $\bar h^{-1}|_{\overline M^2\setminus\bar h(\overline\Gamma^u)}$.

Лемма доказана.

§ 6. Топологическая классификация A-диффеоморфизмов с просторно расположенными совершенными аттракторами

Доказательство теоремы 1.10. *Необходимость.* Пусть существует гомеоморфизм $\varphi\colon M^2\to M^2$ такой, что $f'\circ\varphi=\varphi\circ f$, и $h\colon M^2\to M^2$, $h'\colon M^2\to M^2$ – полусопрягающие отображения, определенные в теореме 1.9.

Определим отображение ψ на множестве $M^2\setminus h(\Gamma^u)$. Из леммы 5.12 следует, что отображение $h^{-1}|_{M^2\setminus h(\Gamma^u)}$ корректно определено и непрерывно. Положим $\psi|_{M^2\setminus h(\Gamma^u)}=h'\circ\varphi\circ h^{-1}|_{M^2\setminus h(\Gamma^u)}$, причем из непрерывности каждого элемента композиции следует, что $\psi|_{M^2\setminus h(\Gamma^u)}$ непрерывно. Продолжим ψ на множество $h(\Gamma^u)$. Рассмотрим произвольную точку $x\in h(\Gamma^u)$. Пусть $y\in\Gamma^u$ – произвольная точка, принадлежащая полному прообразу $h^{-1}(x)$. Из конструкции полусопрягающего отображения h и того факта, что φ переводит пересечение $W^s_z\cap\Lambda$ для любой точки $z\in\Lambda$ в пересечение $W'^s_{z'}\cap\Lambda'$, где $z'=\varphi(z)$, следует, что точка $h'\circ\varphi(y)$ не зависит от выбора точки $y\in h^{-1}(x)$. Положим тогда $\psi(x)=h'\circ\varphi(y)$. Непрерывность $\psi\colon M^2\to M^2$ непосредственно следует из непрерывности ограничения $\psi|_{M^2\setminus\Gamma}$ и того факта, что по построению ψ переводит слои слоения $\mathcal F^s$ на слои слоения $\mathcal F'^s$.

По построению для отображения ψ имеет место коммутативная диаграмма $h' \circ \varphi = \psi \circ h$. Тогда в силу существования коммутативных диаграмм

$$f' \circ \varphi|_\Lambda = \varphi \circ f|_\Lambda, \qquad h \circ f|_\Lambda = P_f \circ h|_\Lambda, \qquad h' \circ f'|_{\Lambda'} = P_{f'} \circ h'|_{\Lambda'}$$

имеет место коммутативная диаграмма $\psi \circ P_f = P_{f'} \circ \psi$. Действительно, склеив коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & \Lambda \arrow[d, "\varphi"] \\ \Lambda' \arrow[r, "f'"] & \Lambda', \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & \Lambda \arrow[d, "h"] \\ M^2 \arrow[r, "P_f"] & M^2, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Lambda' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"] & \Lambda' \arrow[d, "h'"] \\ M^2 \arrow[r, "P_{f'}"] & M^2, \end{tikzcd}$$

получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} M^2 \arrow[d, "P_f"] & \Lambda \arrow[l, "h"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & \Lambda' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f'"] & M^2 \arrow[d, "P_{f'}"] \\ M^2 & \Lambda \arrow[l, "h"'] \arrow[r, "\varphi"] & \Lambda' \arrow[r, "h'"] & M^2. \end{tikzcd} \tag{6.1}$$

Из существования коммутативной диаграммы $h' \circ \varphi = \psi \circ h$ и утверждения 5.11 следует, что коммутативную диаграмму (6.1) можно достроить до следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd} M^2 \arrow[rrr, "\psi"] \arrow[ddd, "P_f"] & & & M^2 \arrow[ddd, "P_{f'}"] \\ & \Lambda \arrow[ul, "h"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & \Lambda' \arrow[ur, "h'"] \arrow[d, "f'"] & \\ & \Lambda \arrow[dl, "h"'] \arrow[r, "\varphi"] & \Lambda' \arrow[dr, "h'"] & \\ M^2 \arrow[rrr, "\psi"] & & & M^2. \end{tikzcd}$$

Достаточность. Пусть существует гомеоморфизм $\psi\colon M^2 \to M^2$ такой, что $\psi(B) = B'$ и $\psi \circ P_f = P_{f'} \circ \psi$. Пусть $\bar\psi\colon \overline{M}^2 \to \overline{M}^2$ – некоторое поднятие гомеоморфизма ψ. Пусть $\bar h\colon \overline{M}^2 \to \overline{M}^2$ и $\bar h'\colon \overline{M}^2 \to \overline{M}^2$ – поднятия полусопрягающих гомеоморфизмов h и h', имеющие тождественное продолжение на абсолют. Построим гомеоморфизм $\bar\varphi\colon \overline{M}^2 \to \overline{M}^2$, накрывающий искомый гомеоморфизм φ и имеющий такое же продолжение на абсолют, что и у гомеоморфизма $\bar\psi$.

Определим $\bar\varphi$ на множестве $\bar\Lambda \setminus \overline{\Gamma}^u$. В силу условия $\psi(B) = B'$ имеют место равенства $\bar\psi(\bar h(\overline{\Gamma}^u)) = \bar h'(\overline{\Gamma}'^u)$, тогда из леммы 5.12 следует, что корректно определена композиция $\bar h'^{-1} \circ \bar\psi \circ \bar h|_{\bar\Lambda \setminus \overline{\Gamma}^u}$, и что она является непрерывной. Положим $\bar\varphi|_{\bar\Lambda \setminus \overline{\Gamma}^u} = \bar h'^{-1} \circ \bar\psi \circ \bar h|_{\bar\Lambda \setminus \overline{\Gamma}^u}$.

Продолжим $\bar\varphi$ на множество $\overline{\Gamma}^u$. Пусть $\bar x$ – точка, принадлежащая поднятию $\bar w^u_{\bar x}$ произвольного неустойчивого многообразия, принадлежащего связке степени $m \geqslant 3$. И пусть u^1, u^2 – его граничные точки на абсолюте, а s^1, s^2 – граничные точки на абсолюте поднятия устойчивого многообразия $\bar{w}^s_{\bar{x}}$ (если $\bar{x}$ принадлежит поднятию устойчивого многообразия граничной периодической точки диффеоморфизма f, то имеется только одна точка $\bar{s}^1$). В силу конструкции $\bar{h}$ и $\bar{h}'$ точки $\bar{\psi}(u^1)$, $\bar{\psi}(u^2)$ являются граничными точками некоторого поднятия $\bar{w}'^u$ неустойчивого многообразия, принадлежащего связке степени m, диффеоморфизма f'. Положим $\bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{x}'$, где $\bar{x}' \in \bar{w}'^u$ – такая точка, что $\bar{w}'^s_{\bar{x}'}$ имеет своими граничными точками на абсолюте s^1, s^2 (s^1, если точка $\bar{x}$ принадлежит поднятию устойчивого многообразия граничной периодической точки диффеоморфизма f).

Пусть теперь $\bar{x}$ – точка, принадлежащая поднятию $\bar{w}^u_{\bar{x}}$ неустойчивого многообразия, принадлежащего связке степени 2, и пусть u^1, u^2 – его граничные точки на абсолюте. По построению отображения $\bar{h}$ найдется точка $\bar{y} \in \bar{\Lambda} \setminus \bar{w}^u_{\bar{x}}$ такая, что кривая $\bar{w}^u_{\bar{y}}$ имеет своими граничными точками на абсолюте u^1, u^2. Пусть, кроме того, s^1, s^2 – граничные точки на абсолюте поднятия устойчивого многообразия $\bar{w}^s_{\bar{x}}$ (если $\bar{x}$ принадлежит поднятию устойчивого многообразия граничной периодической точки диффеоморфизма f, то имеется только одна точка $\bar{s}^1$). Если $\bar{x}$ отлична от прообраза граничной периодической точки, то пересечение $\bar{w}^s_{\bar{x}} \cap \bar{w}^u_{\bar{y}}$ состоит из единственной точки $\bar{z}$. Если точка $\bar{x}$ является прообразом граничной периодической точки, то пересечение $\bar{w}^s_{\bar{x}} \cap \bar{w}^u_{\bar{y}}$ пусто.

В силу конструкции $\bar{h}$ и $\bar{h}'$ и условия $\psi(B) = B'$ найдется ровно два поднятия $\bar{w}'^u_1$, $\bar{w}'^u_2$ неустойчивых многообразий отображения f', имеющих своими граничными точками на абсолюте $\bar{\psi}(u^1)$, $\bar{\psi}(u^2)$. Пусть $\bar{w}'^s$ – поднятие устойчивого многообразия диффеоморфизма f', имеющее $\bar{\psi}(s^1)$ своей граничной точкой на абсолюте. В случае, когда $\bar{x}$ не является прообразом граничной периодической точки, положим $\bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{x}'$, где $\bar{x}'$ – точка, принадлежащая множеству $\bar{w}'^s \cap (\bar{w}'^u_1 \cup \bar{w}'^u_2) = \{\bar{x}', \bar{x}''\}$, такая, что точки $\bar{\psi}(s^1)$, $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ располагаются на кривой $\bar{w}'^s$ в таком же порядке, что и точки s^1, $\bar{x}$, $\bar{w}^s_{\bar{x}} \cap \bar{w}^u_{\bar{y}}$ на кривой $\bar{w}^s_{\bar{x}}$. В случае, когда $\bar{x}$ является прообразом граничной периодической точки, пересечение $\bar{w}'^s \cap (\bar{w}'^u_1 \cup \bar{w}'^u_2)$ в силу конструкции $\bar{h}$ и $\bar{h}'$ состоит ровно из одной точки $\bar{x}'$, тогда положим $\bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{x}'$. Непрерывность $\varphi\colon M^2 \to M^2$ непосредственно следует из непрерывности ограничения $\bar{\varphi}|_{\bar{\Lambda} \setminus \bar{\Gamma}^u}$ и того факта, что по построению φ для любой точки $\bar{x} \in \bar{\Lambda}$ переводит множество $\bar{w}^s_{\bar{x}} \cap \bar{\Lambda}$ на множество $\bar{w}'^s_{\bar{x}'} \cap \bar{\Lambda}'$, где $\bar{x}' = \varphi(\bar{x})$, с сохранением порядка точек на кривой $\bar{w}^s_{\bar{x}}$.

Покажем, что для любого поднятия $\overline{P}_f$ гомеоморфизма P_f найдется поднятие $\overline{P}_{f'}$ гомеоморфизма $P_{f'}$ такое, что верна коммутативная диаграмма $\bar{\psi} \circ \overline{P}_f = \overline{P}_{f'} \circ \bar{\psi}$. Рассмотрим произвольное поднятие $\overline{P}_f$. Так как $\overline{P}_f$ и $\bar{\psi}$ являются гомеоморфизмами, то корректно определена композиция $\bar{\xi} = \bar{\psi} \circ \overline{P}_f \circ \bar{\psi}^{-1}$, причем $\bar{\xi}\colon \overline{M}^2 \to \overline{M}^2$ является гомеоморфизмом. Покажем, что $\bar{\xi}$ является искомым поднятием $P_{f'}$. Действительно, склеивая коммутативные диаграммы

$$
\begin{array}{ccc}
\overline{M}^2 & \xrightarrow{\overline{P}_f} & \overline{M}^2 \\
\downarrow{\scriptstyle \bar{\psi}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\psi}} \\
\overline{M}^2 & \xrightarrow{\bar{\xi}} & \overline{M}^2,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\overline{M}^2 & \xrightarrow{\overline{P}_f} & \overline{M}^2 \\
\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
M^2 & \xrightarrow{P_f} & M^2,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
M^2 & \xrightarrow{P_f} & M^2 \\
\downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\
M^2 & \xrightarrow{P_{f'}} & M^2,
\end{array}
$$

получаем коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
\overline{M}^2 \arrow[d, "\bar{\xi}"] & \overline{M}^2 \arrow[l, "\bar{\psi}"'] \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\overline{P}_f"] & M^2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "P_f"] & M^2 \arrow[d, "P_{f'}"] \\
\overline{M}^2 & \overline{M}^2 \arrow[l, "\bar{\psi}"'] \arrow[r, "\pi"] & M^2 \arrow[r, "\psi"] & M^2.
\end{tikzcd}
\tag{6.2}
$$

Из существования коммутативной диаграммы $\pi \circ \bar{\psi} = \psi \circ \pi$ и утверждения 5.11 следует, что коммутативную диаграмму (6.2) можно достроить до коммутативной диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
\overline{M}^2 \arrow[rrr, "\pi"] \arrow[ddd, "\bar{\xi}"] & & & M^2 \arrow[ddd, "P_{f'}"] \\
& \overline{M}^2 \arrow[ul, "\bar{\psi}"] \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\overline{P}_f"] & M^2 \arrow[ur, "\psi"'] \arrow[d, "P_f"] & \\
& \overline{M}^2 \arrow[dl, "\bar{\psi}"'] \arrow[r, "\pi"] & M^2 \arrow[dr, "\psi"] & \\
\overline{M}^2 \arrow[rrr, "\pi"] & & & M^2.
\end{tikzcd}
\tag{6.3}
$$

Таким образом, из существования коммутативной диаграммы (6.3) следует, что $\bar{\xi}$ является искомым поднятием гомеоморфизма $P_{f'}$. Обозначим $\overline{P}_{f'} = \bar{\xi}$.

Из конструкции отображения $\bar{\varphi}$ следует, что имеет место коммутативная диаграмма $\bar{\psi} \circ \bar{h}|_{\bar{\Lambda}} = \bar{h}' \circ \bar{\varphi}|_{\bar{\Lambda}}$. Покажем, что имеет место коммутативная диаграмма $\bar{\varphi} \circ \bar{f}|_{\bar{\Lambda} \setminus \overline{\Gamma}^u} = \bar{f}' \circ \bar{\varphi}|_{\bar{\Lambda} \setminus \overline{\Gamma}^u}$. Из теоремы 1.9 следует существование коммутативных диаграмм $\bar{h} \circ \bar{f} = \overline{P}_f \circ \bar{h}$ и $\bar{h}' \circ \bar{f}' = \overline{P}_{f'} \circ \bar{h}'$. Склеивая коммутативные диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
\overline{M}^2 \arrow[r, "\overline{P}_f"] \arrow[d, "\bar{\psi}"] & \overline{M}^2 \arrow[d, "\bar{\psi}"] \\
\overline{M}^2 \arrow[r, "\overline{P}_{f'}"] & \overline{M}^2,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bar{\Lambda} \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{h}"] & \bar{\Lambda} \arrow[d, "\bar{h}"] \\
\overline{M}^2 \arrow[r, "\overline{P}_f"] & \overline{M}^2,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bar{\Lambda}' \arrow[r, "\bar{f}'"] \arrow[d, "\bar{h}'"] & \bar{\Lambda}' \arrow[d, "\bar{h}'"] \\
\overline{M}^2 \arrow[r, "\overline{P}_{f'}"] & \overline{M}^2,
\end{tikzcd}
$$

получаем коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
\bar{\Lambda} \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[d, "\bar{f}"] & \overline{M}^2 \arrow[r, "\bar{\psi}"] \arrow[d, "\overline{P}_f"] & \overline{M}^2 \arrow[d, "\overline{P}_{f'}"] & \bar{\Lambda}' \arrow[l, "\bar{h}'"'] \arrow[d, "\bar{f}'"] \\
\bar{\Lambda} \arrow[r, "\bar{h}"] & \overline{M}^2 \arrow[r, "\bar{\psi}"] & \overline{M}^2 & \bar{\Lambda}'. \arrow[l, "\bar{h}'"']
\end{tikzcd}
\tag{6.4}
$$

Так как ограничения $\bar{h}|_{\bar{\Lambda}\setminus\Gamma^u}$ и $\bar{h}'|_{\bar{\Lambda}'\setminus\Gamma'^u}$ являются взаимно однозначными отображениями, то из существования коммутативной диаграммы $\bar{\psi}\circ\bar{h}|_{\bar{\Lambda}} = \bar{h}'\circ\bar{\varphi}|_{\bar{\Lambda}}$ и утверждения 5.11 следует, что коммутативную диаграмму (6.4) можно достроить до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\bar{\Lambda}\setminus\overline{\Gamma}^u \arrow[rrr, "\bar{\varphi}"] \arrow[dr, "\bar{h}"] \arrow[ddd, "\bar{f}"'] & & & \bar{\Lambda}'\setminus\overline{\Gamma}'^u \arrow[dl, "\bar{h}'"'] \arrow[ddd, "\bar{f}'"] \\
& \overline{M}^2\setminus\bar{h}(\overline{\Gamma}^u) \arrow[r, "\bar{\psi}"] \arrow[d, "\overline{P}_f"] & \overline{M}^2\setminus\bar{h}'(\overline{\Gamma}'^u) \arrow[d, "\overline{P}_{f'}"] & \\
& \overline{M}^2\setminus\bar{h}(\overline{\Gamma}^u) \arrow[r, "\bar{\psi}"] & \overline{M}^2\setminus\bar{h}'(\overline{\Gamma}'^u) & \\
\bar{\Lambda}\setminus\overline{\Gamma}^u \arrow[rrr, "\bar{\varphi}"] \arrow[ur, "\bar{h}"] & & & \bar{\Lambda}'\setminus\overline{\Gamma}'^u. \arrow[ul, "\bar{h}'"']
\end{tikzcd}$$

Покажем, что имеет место коммутативная диаграмма $\bar{\varphi}\circ\bar{f}|_{\overline{\Gamma}^u} = \bar{f}'\circ\bar{\varphi}|_{\overline{\Gamma}^u}$. Из коммутативных диаграмм (6.4) и $\bar{\psi}\circ\bar{h}|_{\bar{\Lambda}} = \bar{h}'\circ\bar{\varphi}|_{\bar{\Lambda}}$ с учетом равенства $\psi(B) = B'$ следует, что точки $\bar{\varphi}(\bar{f}(x))$ и $\bar{f}'(\bar{\varphi}(x))$ принадлежат одному и тому же прообразу $\overline{C}'$, являющемуся границей идеального криволинейного многоугольника $\bar{\Delta}'$, некоторой связки C' диффеоморфизма f'. Тогда равенство $\bar{\varphi}(\bar{f}(x)) = \bar{f}'(\bar{\varphi}(x))$ немедленно вытекает из того факта, что $\bar{\varphi}$ по построению переводит множество $\bar{w}^s_{\bar{x}}\cap\bar{\Lambda}$ на множество $\bar{w}'^s_{\bar{x}'}\bar{\cap}\Lambda'$, где $\bar{x}' = \varphi(x)$, с сохранением порядка точек на кривой $\bar{w}^s_{\bar{x}}$.

Теперь аналогично шагу 2 теоремы 1.9 можно показать, что найдется непрерывное отображение $\varphi\colon \Lambda\to\Lambda'$, для которого верны коммутативные диаграммы $\pi\circ\bar{\varphi} = \varphi\circ\pi$ и $\varphi\circ f_\Lambda = f'\circ\varphi|_\Lambda$.

Продолжим φ на множество $M^2\setminus\Lambda$. Для диффеоморфизмов f и f' построим на M^2 пару трансверсальных слоений W^s, W^u и W'^s, W'^u с конечным числом общих особенностей. Проведем построения для диффеоморфизма f, для f' конструкция аналогична. Построим W^s. Пусть U – окрестность Λ, определенная в предложении 5.2. В U положим $W^s = \bigcup_{x\in\Lambda} W^s_x$. Из свойства 2) предложения 5.2 следует, что на множестве U слоение W^s является слоением без особенностей.

Продолжим слоение W^s внутрь диска D_i, ограниченного кривой L_i. Зафиксируем произвольную точку $x_i\in D_i$. Для каждой граничной периодической точки $p_j\in C_i$ найдется единственная кривая $\ell_j\subset L_i$ такая, что пересечение $W^s_{p_j}\cap\ell_j$ не пусто, положим $y_j = W^s_{p_j}\cap\ell_j$. Для любой точки $z_1\in\ell_j$, $z_1\neq y_j$ найдется еще ровно одна точка $z_2\in\ell_k$ $(k\neq j)$ такая, что $z_1, z_2\in W^s_y$ для некоторой точки $y\in C_i$. Продолжим теперь W^s в D_i до слоения с одной седловой особенностью x_i с r_{C_i} сепаратрисами таким образом, чтобы любая пара точек z_1, z_2 лежала на одном слое, а сепаратрисы седла x_i содержали точки y_j (см. рис. 24).

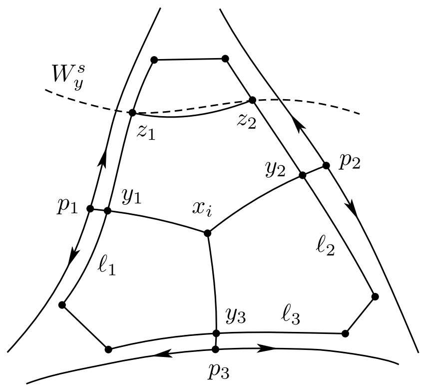

Рис. 24. Построение слоения W^s

Построим теперь слоение W^u. На множестве Λ положим W^u равным $\bigcup_{x\in\Lambda} W^u_x$. Продолжим W^u внутрь диска Δ, являющегося компонентой связности множества $M^2 \setminus \Lambda$. Пусть $\bar{\Delta}$ – произвольная компонента связности полного прообраза $\pi^{-1}(\Delta)$, содержащая точку $\bar{x}_i$. Как следует из п. 8) предложения 2.11 множество $\bar{\Delta}$ представляет собой внутренность идеального криволинейного многоугольника. Построим слоение $\overline{W}^u$ в многоугольнике $\mathrm{cl}(\bar{\Delta})$ таким образом, чтобы его стороны являлись слоями слоения $\overline{W}^u$, точка $\bar{x}_i$ была седловой особенностью с r_{C_i} сепаратрисами, а все слои были трансверсальны поднятиям слоев слоения W^s. Тогда положим $W^u = \pi(\overline{W}^u)$.

Пусть C – достижимая изнутри граница диска Δ. Зададим непрерывную функцию $\eta\colon \Delta \cup C \to [0,1]$ со следующими свойствами:

1) $\eta(x_1) = \eta(x_2)$, если x_1, x_2 принадлежат одному слою слоения W^u;

2) $\eta(x) = 1$ для любой точки $x \in C$;

3) $\eta(y) = 0$, и $\eta(x) = 0$ для любой точки x, принадлежащей сепаратрисе точки y слоения W^u;

4) ограничение η на любую сепаратрису точки y слоения W^s является строго монотонной функцией.

Аналогичным образом зададим функцию $\eta'\colon \Delta' \cup C' \to [0,1]$, где Δ' – диск, являющийся компонентой связности множества $M^2 \setminus \Lambda'$, с достижимой изнутри границей $C' = \varphi(C)$.

Продолжим теперь отображение φ внутрь диска Δ. Положим $\varphi(x_i) = x'_i$, где $x_i = \pi(\bar{x}_i)$ и $x'_i = \pi(\bar{x}'_i)$ соответственно. Рассмотрим произвольную точку $x \in \Delta$, $x \neq x_i$. Для нее найдется единственная точка z такая, что $z \in C$, и точки z и x можно соединить отрезком слоя слоения W^s, внутренность которого содержится в Δ и не пересекается с сепаратрисами седла x_i слоения W^u. Обозначим $z' = \varphi(z)$. Пусть $[z', t']$ – отрезок слоя слоения W'^s такой, что $[z', t'] \subset \Delta' \cup C'$, и $\eta'(t') = 0$. Положим тогда $\varphi(x) = x'$, где точка $x' \in [z', t']^s$ такая, что $\eta(x) = \eta'(x')$.

Непрерывность φ теперь следует из непрерывности ограничения $\varphi|_\Lambda$, непрерывности функций η и η' и непрерывности слоений W^s, W^u, W'^s, W'^u.

Теорема доказана.

Доказательство следствия 1.11. Для доказательства следствия достаточно построить отображение $\varphi\colon M^2 \to M^2$ так же, как и при доказательстве теоремы 1.10. Единственное отличие состоит в том, что необходимо уточнить выбор слоений W^s и W^u, с помощью которых отображение φ продолжается в диски дополнения $M^2 \setminus \Lambda$.

Положим $W^s = \bigcup_{x\in\Lambda} W^s_x$ и заметим, что W^s является инвариантным слоением относительно диффеоморфизма f.

Рассмотрим произвольную периодическую орбиту $\{q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}\} \subset M^2 \setminus \Lambda$ периода k $(f(q_j) = q_{j+1},\ q_k = q_0)$. Пусть $\Delta_0, \Delta_0, \ldots, \Delta_{k-1}$ – открытые диски дополнения $M^2 \setminus \Lambda$, содержащие точки $q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}$ соответственно.

Зададим теперь слоение W^u в диске Δ_0. Пусть достижимая изнутри граница C_0 диска Δ_0 является связкой степени m, и $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – граничные периодические точки на C_0.

Рассмотрим множество $\Delta_0 \setminus q_0$ и обозначим через $\widehat{V}$ пространство орбит отображения $f^k|_{\Delta_0\setminus q_0}$, а через $\nu\colon \Delta_0 \setminus q_0 \to \widehat{V}$ – естественную проекцию. Так как q_0 является гиперболической неподвижной источниковой точкой отображения f^k, а отображение $f^k|\Delta_0$ является сохраняющим ориентацию, то пространство $\widehat{V}$ гомеоморфно двумерному тору. Так как слоение W^s является f-инвариантным, то его образ $\widehat{W^s} = \nu(W^s|_{\Delta_0})$ в $\widehat{V}$ является слоением без особенностей.

Так как $f^k|_{\Delta_0\cup C_0}$ является сохраняющим ориентацию отображением, то все граничные периодические точки $p_1, p_2, \ldots, p_m$ имеют одинаковый период lk, где l – некоторое целое число $1 \leqslant l \leqslant m$, являющееся делителем m. Тогда слоение $\widehat{W^s}$ является слоением, имеющим ровно m/l слоев, являющихся замкнутыми кривыми, дополнение до которых гомеоморфно m/l цилиндрам, в каждом из которых слоение $\widehat{W^s}$ представляет собой слоение Риба. Зададим тогда на $\widehat{V}$ слоение $\widehat{W^u}$, трансверсальное слоению $\widehat{W^s}$, имеющее ровно m/l замкнутых кривых, дополнение до которых гомеоморфно m/l цилиндрам, в каждом из которых слоение $\widehat{W^s}$ представляет собой слоение Риба (см. рис. 25).

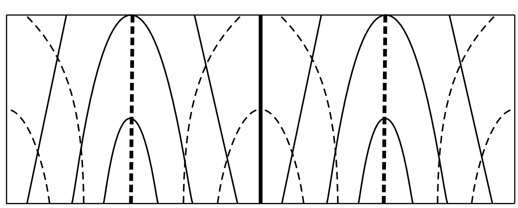

Рис. 25. Построение трансверсального слоения

Положим $W^u|_{\Delta_0} = \nu^{-1}(\widehat{W^u})$. Тогда из конструкции $\widehat{W^u}$ следует, что слоение $W^u|_{\Delta_0}$ является f^k инвариантным слоением в Δ_0, трансверсальным W^s и имеющим одну седловую особенность q_0 с m сепаратрисами.

Так же как и при доказательстве теоремы 1.10, зададим функцию $\eta\colon \Delta_0 \to [0,1]$, удовлетворяющую тем же свойствам 1)–4), и, кроме того, удовлетворяющую свойству

5) $[\eta(x)]^2 = \eta(f^k(x))$ для любого $x \in \Delta_0 \cup C_0$.

Пусть $\widetilde{\varphi}\colon M^2 \to M^2$ – гомеоморфизм, построенный в теореме 1.10, сопрягающий ограничения диффеоморфизмов $f|_\Lambda$ и $f'|_{\Lambda'}$. Обозначим $\Delta'_j = \widetilde{\varphi}(\Delta_j)$, $j = 0, \dots, k-1$. Пусть q'_0 – периодическая точка диффеоморфизма f' периода k, принадлежащая диску Δ'_0.

Аналогичным образом определим слоения W'^s, $W'^u|_{\Delta'_0}$ и функцию $\eta'\colon \Delta'_0 \cup C'_0 \to [0,1]$.

Построим искомое отображение $\varphi\colon M^2 \to M^2$. Положим $\varphi|_\Lambda = \widetilde{\varphi}|_\Lambda$. Продолжим гомеоморфизм φ в диск Δ_0 так же, как и в теореме 1.10. Тогда из инвариантности слоений W^s, W^u, W'^s, W'^u относительно отображений f^k, f'^k и конструкции функций η, η' следует, что имеет место коммутативная диаграмма $f'^k \circ \varphi|_{\Delta_0} = \varphi \circ f^k|_{\Delta'_0}$.

Продолжим отображение φ в диски $\Delta_1, \dots, \Delta_{k-1}$. Для произвольной точки $x \in \Delta_j$ положим $\varphi(x) = f'^j(\varphi(f^{-j}(x)))$. Тогда из существования коммутативной диаграммы $f'^k \circ \varphi|_{\Delta_0} = \varphi \circ f^k|_{\Delta'_0}$ следует наличие коммутативной диаграммы

$$f' \circ \varphi|_{\Delta_0 \cup \dots \cup \Delta_{k-1}} = \varphi \circ f|_{\Delta_0 \cup \dots \cup \Delta_{k-1}},$$

а из непрерывности отображения $\varphi|_{\Delta_0 \cup C_0}$ следует непрерывность отображения $\varphi|_{\Delta_0 \cup C_0 \cup \dots \cup \Delta_{k-1} \cup C_{k-1}}$.

Таким образом, при указанном способе продолжения отображения φ на множество $M^2 \setminus \Lambda$, на всем M^2 будет выполняться коммутативная диаграмма $f' \circ \varphi = \varphi \circ f$.

Следствие доказано.

Список литературы

1. С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, *УМН*, **25**:1(151) (1970), 113–185; пер. с англ.: S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
2. В. З. Гринес, Е. Д. Куренков, “Классификация одномерных аттракторов диффеоморфизмов поверхностей посредством псевдоаносовских гомеоморфизмов”, *Докл. РАН*, **485**:2 (2019), 135–138; англ. пер.: V. Z. Grines, E. D. Kurenkov, “Classification of one-dimensional attractors of diffeomorphisms of surfaces by means of pseudo-Anosov homeomorphisms”, *Dokl. Math.*, **99**:2 (2019), 137–139.
3. Р. В. Плыкин, “Источники и стоки A-диффеоморфизмов поверхностей”, *Матем. сб.*, **94(136)**:2(6) (1974), 243–264; англ. пер.: R. V. Plykin, “Sources and sinks of A-diffeomorphisms of surfaces”, *Math. USSR-Sb.*, **23**:2 (1974), 233–253.
4. А. Ю. Жиров, Р. В. Плыкин, “Соответствие между одномерными гиперболическими аттракторами диффеоморфизмов поверхностей и обобщенными псевдоаносовскими диффеоморфизмами”, *Матем. заметки*, **58**:1 (1995), 149–152; англ. пер.: A. Yu. Zhirov, R. V. Plykin, “On the relationship between one-dimensional hyperbolic attractors of surface diffeomorphisms and generalized pseudo-Anosov diffeomorphisms”, *Math. Notes*, **58**:1 (1995), 779–781.
5. C. Bonatti, R. Langevin, *Difféomorphismes de Smale des surfaces*, Astérisque, **250**, Soc. Math. France, Paris, 1998, viii+235 pp.
6. A. A. G. Ruas, *Atratores hiperbolicos de codimensao um e classes de isotopia em superficies*, Tese de Doutoramento, IMPA, Rio de Janeiro, 1982.

7. M. Barge, B. F. Martensen, “Classification of expansive attractors on surfaces”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **31**:6 (2011), 1619–1639.
8. В. З. Гринес, “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах II”, Тр. ММО, **34**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1977, 243–252; англ. пер.: V. Z. Grines, “On the topological conjugacy of diffeomorphisms of a two-dimensional manifold on one-dimensional orientable basic sets. II”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **34** (1978), 237–245.
9. V. Z. Grines, R. V. Plykin, “Topological classification of amply situated attractors of A-diffeomorphisms of surfaces”, *Methods of qualitative theory of differential equations and related topics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **200**, Adv. Math. Sci., 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 135–148.
10. А. Ю. Жиров, *Топологическая сопряжённость псевдоаносовских гомеоморфизмов*, МЦНМО, М., 2013, 368 с.
11. В. З. Гринес, “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах I”, Тр. ММО, **32**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1975, 35–60; англ. пер.: V. Z. Grines, “On topological conjugacy of diffeomorphisms of a two-dimensional manifold onto one-dimensional orientable basic sets. I”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **32** (1977), 31–56.
12. Р. В. Плыкин, “О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов”, *УМН*, **39**:6(240) (1984), 75–113; англ. пер.: R. V. Plykin, “On the geometry of hyperbolic attractors of smooth cascades”, *Russian Math. Surveys*, **39**:6 (1984), 85–131.
13. В. З. Гринес, Х. Х. Калай, “О топологической эквивалентности диффеоморфизмов с нетривиальными базисными множествами на двумерных многообразиях”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений*, Межвуз. темат. сб. науч. тр., ред. Е. А. Леонтович-Андронова, Из-во Горьк. гос. ун-т, Горький, 1988, 40–49.
14. С. Х. Арансон, В. З. Гринес, “Топологическая классификация каскадов на замкнутых двумерных многообразиях”, *УМН*, **45**:1(271) (1990), 3–32; англ. пер.: S. Kh. Aranson, V. Z. Grines, “The topological classification of cascades on closed two-dimensional manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **45**:1 (1990), 1–35.
15. V. Z. Grines, “Topological classification of one-dimensional attractors and repellers of A-diffeomorphisms of surfaces by means of automorphisms of fundamental groups of supports”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **95**:5 (1999), 2523–2545.
16. V. Z. Grines, “On topological classification of A-diffeomorphisms of surfaces”, *J. Dynam. Control Systems*, **6**:1 (2000), 97–126.
17. А. Ю. Жиров, “Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 3–50; англ. пер.: A. Yu. Zhirov, “Hyperbolic attractors of diffeomorphisms of orientable surfaces”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **82**:1 (1995), 135–174.
18. А. Ю. Жиров, “Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей”, *Матем. сб.*, **185**:9 (1994), 29–80; англ. пер.: A. Yu. Zhirov, “Hyperbolic attractors of diffeomorphisms of orientable surfaces”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **83**:1 (1995), 23–65.
19. А. Ю. Жиров, “Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей. Часть 3. Алгоритм классификации”, *Матем. сб.*, **186**:2 (1995), 59–82; англ. пер.: A. Yu. Zhirov, “Hyperbolic attractors of diffeomorphisms of orientable surfaces. Part 3. Classification algorithm”, *Sb. Math.*, **186**:2 (1995), 221–244.
20. В. З. Гринес, Х. Х. Калай, “Диффеоморфизмы двумерных многообразий с просторно расположенными базисными множествами”, *УМН*, **40**:1(241) (1985),

189–190; англ. пер.: V. Z. Grines, Kh. Kh. Kalai, “Diffeomorphisms of two-dimensional manifolds with spatially situated basic sets”, *Russian Math. Surveys*, **40**:1 (1985), 221–222.

21. В. З. Гринес, “О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами”, *Матем. сб.*, **188**:4 (1997), 57–94; англ. пер.: V. Z. Grines, “On the topological classification of structurally stable diffeomorphisms of surfaces with one-dimensional attractors and repellers”, *Sb. Math.*, **188**:4 (1997), 537–569.
22. J. Nielsen, “Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen”, *Acta Math.*, **50**:1 (1927), 189–358.
23. С. Х. Арансон, В. З. Гринес, “О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных систем)”, *Матем. сб.*, **90(132)**:3 (1973), 372–402; англ. пер.: S. H. Aranson, V. Z. Grines, “On some invariants of dynamical systems on two-dimensional manifolds (necessary and sufficient conditions for the topological equivalence of transitive dynamical systems)”, *Math. USSR-Sb.*, **19**:3 (1973), 365–393.
24. Р. В. Плыкин, “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла”, *Матем. сб.*, **84(126)**:2 (1971), 301–312; англ. пер.: R. V. Plykin, “The topology of basis sets for Smale diffeomorphisms”, *Math. USSR-Sb.*, **13**:2 (1971), 297–307.
25. Э. Кэссон, С. Блейлер, *Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Терстону*, Фазис, М., 1998, 111 с.; пер. с англ.: A. J. Casson, S. A. Bleiler, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, London Math. Soc. Stud. Texts, **9**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988, iv+105 pp.
26. A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poénaru, *Thurston's work on surfaces*, Transl. from the French, Math. Notes, **48**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2012, xvi+254 pp.
27. R. Bowen, “Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **154** (1971), 377–397.
28. Д. В. Аносов, “Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем”, *Труды V международной конференции по нелинейным колебаниям*, т. 2: *Качественные методы*, Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1970, 39–45.
29. В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2011, 424 с.
30. D. B. A. Epstein, “Curves on 2-manifolds and isotopies”, *Acta Math.*, **115**:1 (1966), 83–107.
31. С. Х. Арансон, В. З. Гринес, “О представлении минимальных множеств потоков на двумерных многообразиях геодезическими линиями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:1 (1978), 104–129; англ. пер.: S. H. Aranson, V. Z. Grines, “On the representation of minimal sets of currents on two-dimensional manifolds by geodesics”, *Math. USSR-Izv.*, **12**:1 (1978), 103–124.
32. Д. В. Аносов, С. Х. Арансон, В. З. Гринес, Р. В. Плыкин, Е. А. Сатаев, А. В. Сафонов, В. В. Солодов, А. Н. Старков, А. М. Степин, С. В. Шлячков, “Динамические системы с гиперболическим поведением”, *Динамические системы* – 9, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **66**, ВИНИТИ, М., 1991, 5–242; англ. пер.: D. V. Anosov, S. Kh. Aranson, V. Z. Grines, R. V. Plykin, E. A. Sataev, A. V. Safonov, V. V. Solodov, A. N. Starkov, A. M. Stepin, S. V. Shlyachkov, *Dynamical systems IX. Dynamical systems with hyperbolic behavior*, Encyclopaedia Math. Sci., **66**, Springer, Berlin, 1995, vi+235 pp.
33. Д. В. Аносов, Е. В. Жужома, “Нелокальное асимптотическое поведение кривых и слоев ламинаций на универсальных накрывающих”, Тр. МИАН, **249**, Наука, М., 2005, 3–239; англ. пер.: D. V. Anosov, E. V. Zhuzhoma, “Nonlocal asymptotic

behavior of curves and leaves of laminations on universal coverings", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **249** (2005), 1–221.

34. П. С. Александров, *Введение в теорию множеств и общую топологию*, Наука, М., 1977, 367 с.; нем. пер.: P. S. Alexandroff, *Einführung in die Mengenlehre und in die allgemeine Topologie*, Hochschulbücher für Math., **85**, Deutscher Verlag Wissensch., Berlin, 1984, 336 pp.

Вячеслав Зигмундович Гринес
(Vyacheslav Z. Grines)
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
E-mail: vgrines@hse.ru

Поступило в редакцию
02.04.2019

Евгений Дмитриевич Куренков
(Evgeny D. Kurenkov)
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
E-mail: ekurenkov@hse.ru