

Е. В. Ноздринова

Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»
Нижний Новгород, Россия
maati@mail.ru

О. В. Починка

Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»
Нижний Новгород, Россия
olga-pochinka@yandex.ru

О КЛАССЕ УСТОЙЧИВОЙ СВЯЗАННОСТИ ДИФФЕОМОРФИЗМА ИСТОЧНИК-СТОК НА ДВУМЕРНОЙ СФЕРЕ

Рассмотрен класс градиентно-подобных диффеоморфизмов, обладающих аттрактором и репеллером, разделенными окружностью на 2-сфере. Для любого диффеоморфизма данного класса построена устойчивая дуга, соединяющая его с системой источник–сток. Библиография: 14 назв.

1. Введение

В [1] введено понятие устойчивой дуги, соединяющей две структурно устойчивые системы на многообразии. Такая дуга не меняет своих качественных свойств при малом шевелении. В [2] доказано существование простой дуги (содержащей лишь элементарные бифуркации) между любыми двумя потоками Морса — Смейла. Из [3] вытекает, что такую простую дугу всегда можно заменить устойчивой. Для диффеоморфизмов Морса — Смейла, заданных на многообразиях любой размерности, известны примеры систем, которые не могут быть соединены устойчивой дугой. В связи с этим естественно возникает вопрос о нахождении инварианта, однозначно определяющего класс эквивалентности диффеоморфизма Морса — Смейла относительно отношения связанности устойчивой дугой (компонента устойчивой связанности).

Окружность является единственным замкнутым многообразием, для которого эта задача полностью решена. Показано [4], что для сохраняющих ориентацию грубых преобразований окружности компонента устойчивой связанности определяется числом вращения Пуанкаре k/m , $(k, m) = 1$, в то время как все меняющие ориентацию диффеоморфизмы окружности лежат в одной компоненте устойчивой связанности.

Для диффеоморфизмов Морса — Смейла на двумерной сфере установлены [5] необходимые условия существования соединяющей их устойчивой дуги, однако вопрос о достаточных условиях в [5] не рассматривался. Из условий, найденных в [5], следует, что даже на двумерной сфере компонент устойчивой связанности бесконечно много. Чтобы пояснить этот факт, рассмотрим

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект No. 17-11-01041), за исключением построения устойчивой дуги, которое выполнено в рамках программы Центра фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2019 г.

© Е. В. Ноздринова, О. В. Починка, 2020

$\mathbb{S}^1$ как экватор сферы $\mathbb{S}^2$. Тогда диффеоморфизм окружности в точности с двумя периодическими орбитами периода m и числом вращения k/m может быть продолжен до диффеоморфизма $F_{k/m} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, имеющего два неподвижных источника в северном и южном полюсах. При этом диффеоморфизмы $F_{k/m}$ и $F_{k'/m'}$ для $m = 2^r \cdot q$ и $m' = 2^{r'} \cdot q'$, целых $r, r' \geq 0$ и натуральных $q \neq q'$ не соединяются устойчивой дугой (см. рис. 1, где приведены фазовые портреты диффеоморфизмов 2-сферы $F_{1/2}$ и $F_{1/3}$).

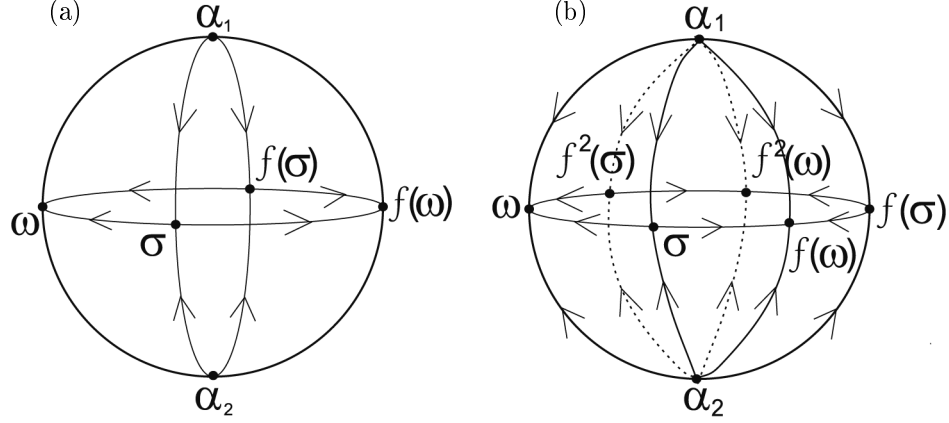


Рис. 1. Фазовые портреты диффеоморфизмов 2-сферы: (a) $F_{1/2}$, (b) $F_{1/3}$.

Простейшим структурно устойчивым двумерным диффеоморфизмом является система источник-сток на 2-сфере. Все такие системы попарно топологически сопряжены, однако факт существования устойчивого пути между двумя системами источник-сток доказывается весьма нетривиально [6] (более того, он не верен в общем случае для систем источник-сток источник-сток на n -сфере [7]). В силу результатов [5] класс устойчивой связности диффеоморфизма источник-сток на 2-сфере не содержит диффеоморфизмов $F_{k/m}$ для нечетных $m > 1$.

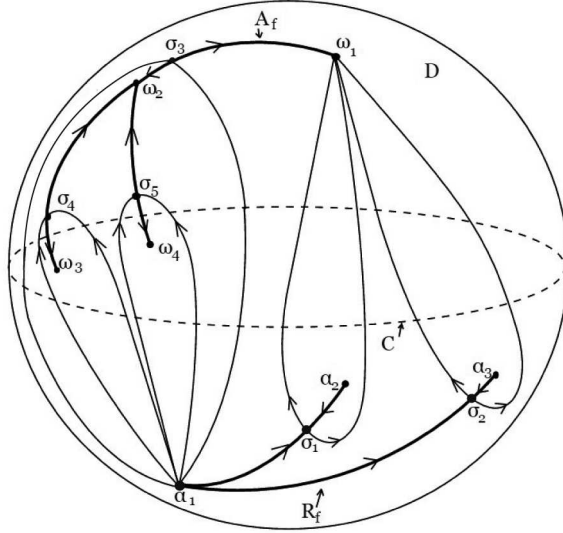


Рис. 2. Пример фазового портрета диффеоморфизма $f \in G$.

В настоящей работе установлены достаточные условия принадлежности градиентно-подобного диффеоморфизма 2-сферы компоненте устойчивой связности диффеоморфизма источник-сток. Именно, мы рассматриваем сохраняющие ориентацию градиентно-подобные диффеоморфизмы $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Обозначим через Ω^0 , Ω^1 , Ω^2 множество стоков, седел, источников диффеоморфизма f соответственно. Пусть $\Sigma \subset \Omega^1$ — некоторое подмножество (возможно, пустое)

седловых орбит. С каждым таким подмножеством Σ связана дуальная пара аттрактор–репеллер A_Σ, R_Σ , определенная следующим образом:

$$A_\Sigma = \Omega^0 \cup W_\Sigma^u, \quad R_\Sigma = \Omega^2 \cup W_{\Omega^1 \setminus \Sigma}^s.$$

Будем говорить, что диффеоморфизм f принадлежит классу G , если существуют множество Σ и окружность $C \subset \mathbb{S}^2$ такие, что A_Σ и R_Σ принадлежат разным компонентам связности множества $\mathbb{S}^2 \setminus C$. В дальнейшем будем обозначать через A_f и R_f аттрактор и репеллер с описанными свойствами для диффеоморфизма $f \in G$ (см. рис. 2). Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Любой диффеоморфизм $f \in G$ соединяется устойчивой дугой с диффеоморфизмом источник–сток.*

2. Необходимые сведения и факты

2.1. Диффеоморфизмы Морса — Смейла. Пусть диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ задан на гладком замкнутом (компактном без края) n -многообразии ($n \geq 1$) M^n с метрикой d .

Точка $x \in M^n$ называется *блуждающей* для f , если существует открытая окрестность U_x точки x , такая что $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В противном случае точка x называется *неблуждающей*. Множество неблуждающих точек f называется *неблуждающим множеством* и обозначается Ω_f .

Например, неблуждающими являются все предельные точки диффеоморфизма. Напомним, что точка $y \in M^n$ называется ω -предельной точкой для точки $x \in M^n$, если существует последовательность $t_k \rightarrow +\infty, t_k \in \mathbb{Z}$ такая, что $\lim_{t_k \rightarrow +\infty} d(f^{t_k}(x), y) = 0$. Множество $\omega(x)$ всех ω -предельных точек для точки x называется ее ω -предельным множеством. Заменой $+\infty$ на $-\infty$ определяется α -предельное множество $\alpha(x)$ точки x . Множество $L_f = cl(\bigcup_{x \in M^n} \omega(x) \cup \alpha(x))$ называется *предельным множеством* диффеоморфизма f .

Если множество Ω_f конечно, то каждая точка $p \in \Omega_f$ является периодической. Обозначим через $m_p \in \mathbb{N}$ период периодической точки p . С любой периодической точкой p связаны *устойчивое* и *неустойчивое* многообразия, определяемые следующим образом:

$$W_p^s = \{x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{km_p}(x), p) = 0\},$$

$$W_p^u = \{x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{-km_p}(x), p) = 0\}.$$

Устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*. Говорят, что периодические орбиты $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k$ образуют *цикл*, если $W_{\mathcal{O}_i}^s \cap W_{\mathcal{O}_{i+1}}^u \neq \emptyset$ для $i \in \{1, \dots, k\}$ и $\mathcal{O}_{k+1} = \mathcal{O}_1$.

Периодическая точка $p \in \Omega_f$ называется *гиперболической*, если все собственные значения матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{m_p}}{\partial x}\right)|_p$ не равны по модулю единице. Если собственные значения по модулю меньше (больше), чем 1, то p называют *стоковой точкой* (*источниковой точкой*). Стоковые и источниковые точки называются *узловыми*. Если гиперболическая периодическая точка не является узловой, то она называется *седловой точкой*.

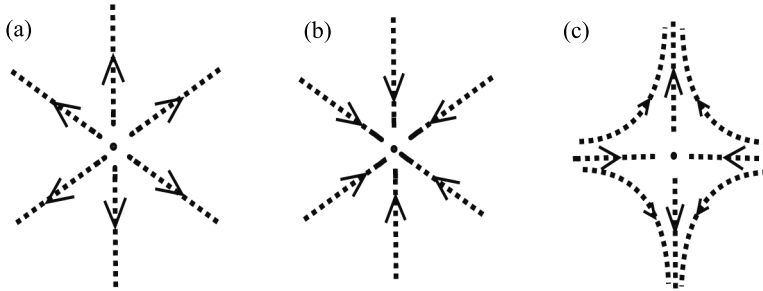


Рис. 3. (a) источник, (b) сток, (c) седло.

Из гиперболической структуры периодической точки p следует, что ее устойчивое W_p^u и неустойчивое W_p^s многообразия являются инъективными иммерсиями пространств $\mathbb{R}^{q_p}$ и $\mathbb{R}^{n-q_p}$, где q_p — число собственных значений матрицы Якоби, по модулю больших единицы. Число ν_p , равное $+1(-1)$, если отображение $f^{m_p}|_{W_p^u}$ сохраняет (меняет) ориентацию W_p^u называется *типом ориентации* точки p . Компонента линейной связности множества $W_p^u \setminus p$ ($W_p^s \setminus p$) называется *неустойчивой (устойчивой) сепаратрисой* точки p .

Замкнутое f -инвариантное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором* дискретной динамической системы f , если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset \text{int } U_A$ и $A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется *захватывающей* или *изолирующей*.

Репеллер определяется как аттрактор для f^{-1} . Дополнением до захватывающей окрестности аттрактора является захватывающая окрестность дуального репеллера.

Диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ называется *диффеоморфизмом Морса — Смейла*, если

- 1) неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа гиперболических орбит,
- 2) многообразия W_p^s, W_q^u пересекаются трансверсально для любых неблуждающих точек p и q .

Диффеоморфизм Морса — Смейла называется *градиентно-подобным*, если из условия $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$ для различных точек $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_f$ следует, что $\dim W_{\sigma_1}^u < \dim W_{\sigma_2}^u$.

Аналогичным образом определяется *поток Морса — Смейла* на многообразии M^n , который называется *градиентно-подобным* в случае отсутствия периодических траекторий.

В случае $n = 2$ динамика градиентно-подобных диффеоморфизмов тесно переплетается с динамикой периодических гомеоморфизмов. Напомним, что гомеоморфизм $\varphi : M^2 \rightarrow M^2$ называется *периодическим порядка $t \in \mathbb{N}$* , если $\varphi^t = \text{id}$ и $\varphi^\mu \neq \text{id}$ для любого натурального $\mu < t$.

Предложение 2.1 (см. [8] и [9, теорема 3.3]). *Любой сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм $f : M^2 \rightarrow M^2$ топологически сопряжен композиции периодического гомеоморфизма со сдвигом на единицу времени градиентно-подобного потока.*

Согласно классификации [10], сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода t двумерной сферы имеет периодические точки только двух периодов 1 и t , при этом множество его неподвижных точек непусто. Откуда получаем следующее утверждение, вытекающее из предложения 2.1.

Предложение 2.2. *Любой сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм 2-сферы имеет периодические точки только двух периодов 1 и t (возможно, $t = 1$), при этом множество его неподвижных точек непусто.*

Кроме того, для любого сохраняющего ориентацию градиентно-подобного диффеоморфизма $f : M^2 \rightarrow M^2$ имеет место следующий факт.

Предложение 2.3 (см. [9, леммы 3.1, 3.3]). *Пусть $f : M^2 \rightarrow M^2$ — сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм и m_f — наименьшее натуральное число, для которого $\Omega_{f^{m_f}}$ состоит из неподвижных точек с положительным типом ориентации. Тогда период любой седловой сепаратрисы диффеоморфизма f равен m_f .*

Суммируя результаты предложений 2.2 и 2.3, получаем следующий факт о структуре периодических данных градиентно-подобных диффеоморфизмов 2-сферы.

Предложение 2.4. *Для любого сохраняющего ориентацию градиентно-подобного диффеоморфизма 2-сферы*

- 1) $m_f = t$,
- 2) любая седловая точка с отрицательным типом ориентации является неподвижной,
- 3) любая седловая точка с положительным типом ориентации имеет период t .

2.2. Устойчивые дуги в пространстве диффеоморфизмов. Рассмотрим однопараметрическое семейство диффеоморфизмов (дугу) $\varphi_t : M^n \rightarrow M^n$, $t \in [0, 1]$. Обозначим через $\mathcal{Q}$

множество дуг $\{\varphi_t\}$, которые начинаются и заканчиваются в диффеоморфизмах Морса — Смейла и обладают следующими свойствами:

- 1) φ_t имеет конечное предельное множество для всех $t \in [0, 1]$;
- 2) $\{\varphi_t\}$ содержит конечное множество бифуркационных диффеоморфизмов $b_1, \dots, b_m \in (0, 1)$.

Согласно [11] дуга $\{\varphi_t\}$ называется *устойчивой*, если она является внутренней точкой класса эквивалентности относительно следующего отношения: дуги $\{\varphi_t\}, \{\varphi'_t\} \in \mathcal{Q}$ называются *сопряженными*, если существуют гомеоморфизмы $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ и $H_t : M^n \rightarrow M^n$ такие, что $h(b_i) = b'_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $H_t \varphi_t = \varphi'_{h(t)} H_t$, $t \in [0, 1]$ и H_t непрерывно зависит от t .

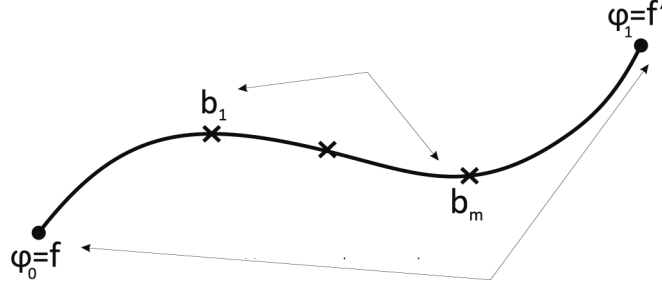


Рис. 4. Дуга из множества $\mathcal{Q}$.

В [11] также установлено, что дуга $\{\varphi_t\} \in \mathcal{Q}$ является устойчивой тогда и только тогда, когда она обладает следующими свойствами:

1) диффеоморфизм φ_{b_i} , $i \in \{1, \dots, m\}$, не имеет циклов и имеет ровно одну негиперболическую периодическую орбиту, а именно флип или некритический седло-узел, при этом дуга проходит через бифуркационное значение типично,

2) устойчивые и неустойчивые многообразия любых периодических точек диффеоморфизма φ_t , $t \in [0, 1]$, пересекаются трансверсально (см. рис. 4).

Говорят, что дуга $\{\varphi_t\} \in \mathcal{Q}$ *проходит типично через седло-узловую бифуркацию* φ_{b_i} (см. рис. 5 и 6), если в некоторой окрестности негиперболической точки (p, b_i) дуга φ_t сопряжена дуге

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{t}}(x_1, x_2, \dots, x_{1+n_u}, x_{2+n_u}, \dots, x_n) = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_1^2 + \tilde{t}, \pm 2x_2, \dots, \pm 2x_{1+n_u}, \frac{\pm x_{2+n_u}}{2}, \dots, \frac{\pm x_n}{2} \right),$$

где $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x_i| < 1/2$, $|\tilde{t}| < 1/10$.

Говорят, что дуга $\{\varphi_t\} \in \mathcal{Q}$ *проходит типично через бифуркацию удвоения периода (флип)* φ_{b_i} (см. рис. 7 и 8), если в некоторой окрестности негиперболической точки (p, b_i) дуга φ_t сопряжена дуге

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{t}}(x_1, x_2, \dots, x_{1+n_u}, x_{2+n_u}, \dots, x_n) = \left(-x_1(1 \pm \tilde{t}) + x_1^3, \pm 2x_2, \dots, \pm 2x_{1+n_u}, \frac{\pm x_{2+n_u}}{2}, \dots, \frac{\pm x_n}{2} \right),$$

где $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x_i| < 1/2$, $|\tilde{t}| < 1/10$.

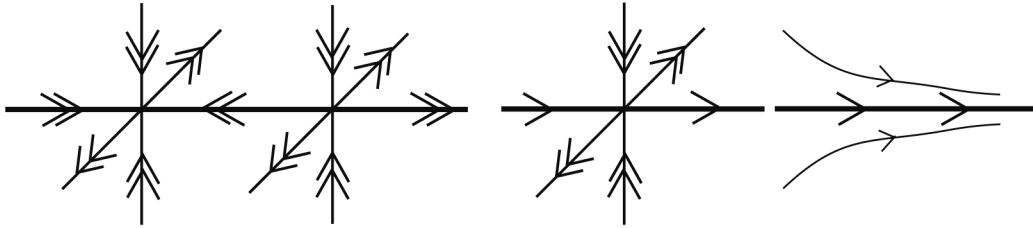


Рис. 5. Седло-узловая бифуркация.

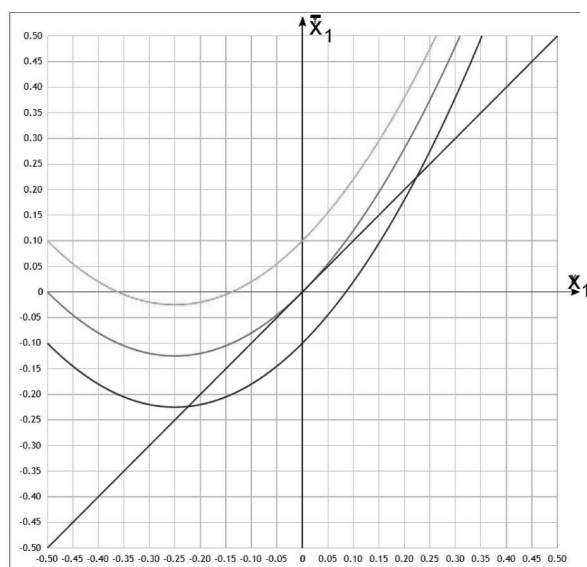


Рис. 6. График отображения первой координаты седло-узловой бифуркации.

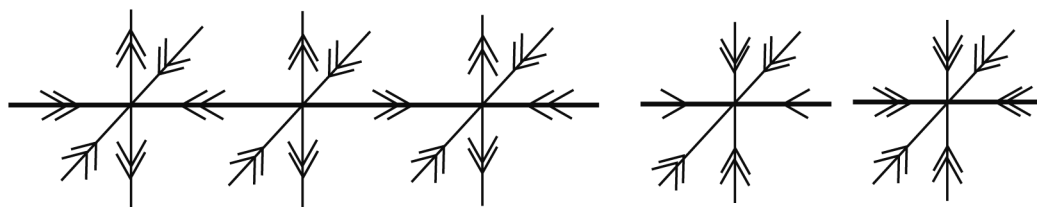


Рис. 7. Бифуркация удвоения периода (флип).

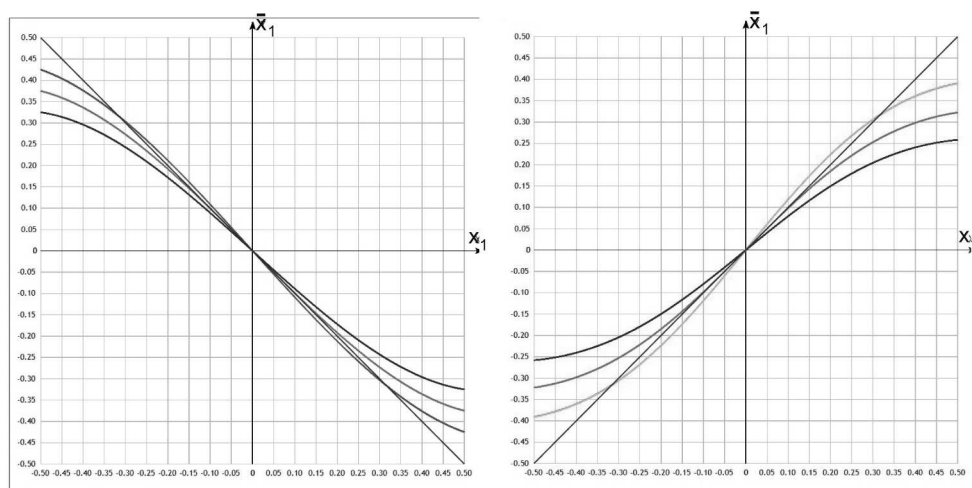


Рис. 8. График отображения первой координаты и квадрата этого отображения для бифуркации удвоения периода (флипа).

3. Динамика диффеоморфизмов класса G

Лемма 3.1. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ аттрактор A_f либо состоит из одной стоковой точки, либо является связным одномерным комплексом без циклов.*

Доказательство. Обозначим через D компоненту связности множества $\mathbb{S}^2 \setminus C$, содержащую A_f . Поскольку A_f является аттрактором и диск D лежит в его бассейне притяжения, существует натуральное число l такое, что $f^l(\text{cl } D) \subset \text{int } D$. Тогда $A_f = \bigcap_{k \geq 0} f^{kl}(\text{cl } D)$, откуда следует связность аттрактора A_f (см., например, [9, предложение 10.1]). Покажем, что A_f не содержит циклов.

Предположим противное: A_f содержит цикл, образованный замыканиями неустойчивых многообразий седловых точек $\sigma_1, \dots, \sigma_r$. Тогда замкнутая кривая $R = \bigcup_{i=1}^r \text{cl } W_i^u$ ограничивает диск $d \subset D$, откуда следует, что одна из устойчивых сепаратрис каждого седла σ_i лежит в диске d , а, следовательно, в диске d лежит и замыкание этой сепаратрисы. Таким образом, $R_f \cap d \neq \emptyset$, что противоречит условиям, наложенным на класс G .

Таким образом получаем, что A_f не содержит циклов. $\square$

Лемма 3.2. Если аттрактор A_f диффеоморфизма $f \in G$ отличен от стока, то справедливо в точности одно из следующих утверждений:

- 1) $A_f = \text{cl } W_\sigma^u$, где $q_\sigma = m_\sigma = 1, \nu_\sigma = -1$,
- 2) существуют точки $\sigma, \omega \in A_f$ такие, что $m_\sigma = m_\omega, q_\omega = 0, q_\sigma = \nu_\sigma = 1, \omega \in \text{cl } W_\sigma^u$ и пересечение $W_\omega^s \cap A_f$ состоит в точности из одной неустойчивой сепаратрисы седла σ и стока ω .

Доказательство. Пусть аттрактор A_f диффеоморфизма $f \in G$ отличен от стока. В силу леммы 3.1 в этом случае одномерный комплекс A_f является деревом и, следовательно, имеет, так называемую висячую вершину, т.е. существуют точки $\sigma, \omega \in A_f$ такие, что $q_\omega = 0, q_\sigma = 1, \omega \in \text{cl } W_\sigma^u$ и пересечение $W_\omega^s \cap A_f$ состоит в точности из одной неустойчивой сепаратрисы седла σ и стока ω . Возможны два случая: 1) $\nu_\sigma = -1$, 2) $\nu_\sigma = 1$ (см. рис. 9).

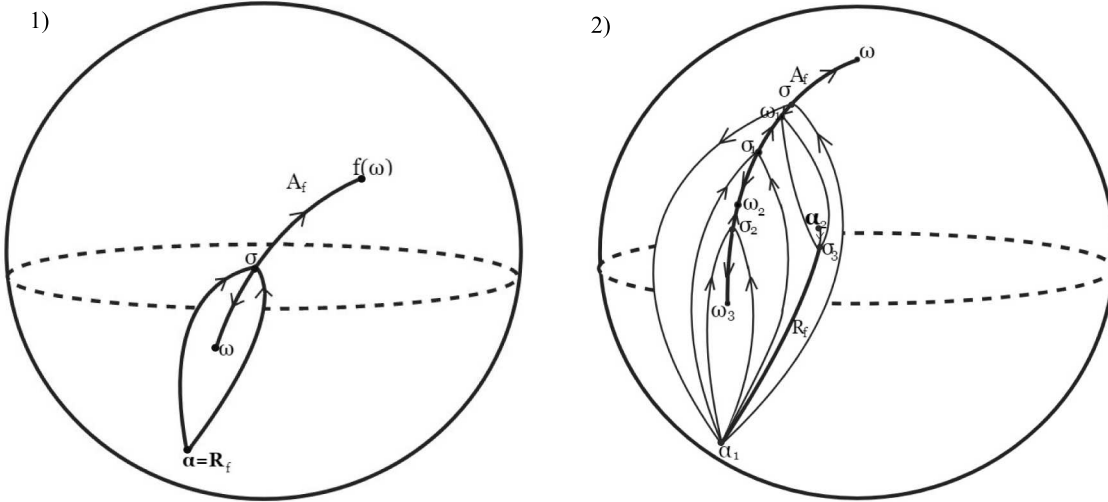


Рис. 9. Иллюстрация к лемме 3.2.

В случае 1) согласно предложению 2.4 $m_\sigma = 1$ и период сепаратрисы седла σ равен 2. Поскольку A_f не имеет циклов, $\omega \neq f(\omega)$ и, следовательно, $m_\omega = 2$. Тогда пересечение $W_{f(\omega)}^s \cap A_f$ состоит в точности из одной неустойчивой сепаратрисы седла σ и стока $f(\omega)$. Откуда следует, что $A_f = \omega \cup W_\sigma^u \cup f(\omega)$.

В случае 2) согласно предложению 2.4 $m_\sigma = m$, период сепаратрисы седла σ равен m , а для стока ω существуют две возможности 2а) $m_\omega = m$ и 2б) $m_\omega = 1$. В случае 2а) мы в точности получаем утверждение леммы. В случае 2б) все m неустойчивых сепаратрис седла σ лежат в бассейне стока ω . Поскольку пересечение $W_\omega^s \cap A_f$ состоит в точности из одной неустойчивой сепаратрисы седла σ и стока ω , получаем $m = 1$ и утверждение леммы верно. $\square$

4. Построение устойчивой дуги

Разобьем класс G на попарно не пересекающиеся подмножества $G_{\lambda,\mu}$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ число стоков, источников, принадлежащих аттрактору A_f , репеллеру R_f соответственно. Заметим, что класс $G_{1,1}$ состоит из диффеоморфизмов источник–сток. Тогда для доказательства теоремы 1.1 достаточно построить устойчивую дугу $\Gamma_{f_{\lambda,\mu}, f_{\lambda-1,\mu}}$, $\lambda > 1$, соединяющую диффеоморфизм $f_{\lambda,\mu} \in G_{\lambda,\mu}$ с диффеоморфизмом $f_{\lambda-1,\mu} \in G_{\lambda-1,\mu}$ (что мы и делаем в лемме 4.2 ниже). Действительно, тогда устойчивая дуга

$$\Gamma_{f_{\lambda,\mu}, f_{1,\mu}} = \Gamma_{f_{\lambda,\mu}, f_{\lambda-1,\mu}} * \cdots * \Gamma_{f_{2,\mu}, f_{1,\mu}}$$

соединяет диффеоморфизм $f_{\lambda,\mu}$ с диффеоморфизмом $f_{1,\mu}$. Если c_1 и c_2 — пути в топологическом пространстве X , причем $c_1(1) = c_2(0)$, то под *произведением путей* c_1 и c_2 мы понимаем путь $c_1 * c_2$, определенный формулой

$$(c_1 * c_2)(t) = \begin{cases} c_1(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ c_2(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Поскольку диффеоморфизм $f_{1,\mu}^{-1}$ принадлежит классу $G_{\mu,1}$, устойчивая дуга

$$\Gamma_{f_{1,\mu}, f_{1,1}}^{-1} = \Gamma_{f_{2,\mu}, f_{1,\mu}}^{-1} * \cdots * \Gamma_{f_{1,\mu}, f_{1,\mu-1}}^{-1} = \{\gamma_t\}$$

соединяет диффеоморфизм $f_{1,\mu}^{-1}$ с диффеоморфизмом $f_{1,1}^{-1}$. Тогда устойчивая дуга

$$\tilde{\Gamma}_{f_{1,\mu}, f_{1,1}} = \{\gamma_t^{-1}\}$$

соединяет диффеоморфизм $f_{1,\mu}$ с диффеоморфизмом $f_{1,1}$. Таким образом, искомая дуга, соединяющая диффеоморфизм $f_{\lambda,\mu} \in G_{\lambda,\mu}$ с некоторым диффеоморфизмом источник–сток будет иметь вид (см. рис. 10)

$$\tilde{\Gamma}_{f_{1,\mu}, f_{1,1}} * \Gamma_{f_{\lambda,\mu}, f_{1,\mu}}.$$

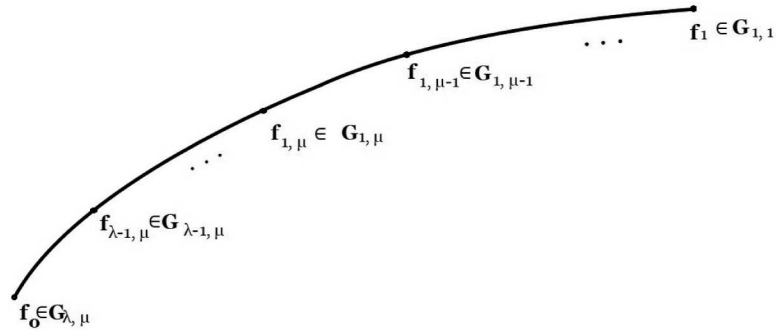


Рис. 10. Схема построения дуги.

Уменьшение числа седловых точек на аттракторе A_f достигается путем построения дуги, проходящей типично через бифуркацию седло–узел или флип. Для реализации такого сценария необходимо привести к каноническому виду объекты слияния. Именно в лемме **???? В оригинале номер не указан** мы приводим динамику в окрестности стока к каноническому сжатию, а в лемме 4.1 укладываем неустойчивую седловую сепаратрису в бассейне канонического стока на гладкую дугу. Важным техническим инструментом всех построений является следующий классический факт.

Предложение 4.1 (теорема Тома о продолжении изотопии [12, теорема 5.8]). Пусть Y — гладкое многообразие без границы, X — гладкое компактное подмногообразие Y и $\{f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]\}$ — гладкая изотопия такая, что f_0 — отображение включения X в Y . Тогда для любого компактного множества $A \subset Y$, содержащего носитель изотопии $\text{supp } \{f_t\}$ существует гладкая изотопия $\{g_t \in \text{Diff}(Y), t \in [0, 1]\}$ такая, что $g_0 = \text{id}$, $g_t|_X = f_t|_X$ для любого $t \in [0, 1]$ и $\text{supp } \{g_t\}$ принадлежит A .

Носителем $\text{supp}\{f_t\}$ изотопии $\{f_t\}$ называется замыкание множества $\{x \in X : f_t(x) \neq f_0(x) \text{ для некоторого } t \in [0, 1]\}$.

Предложение 4.2 (лемма Фрэнкса [13, лемма 1.1]). Пусть θ — конечное множество точек многообразия M^n , $\varphi : M^n \rightarrow M^n$ — диффеоморфизм,

$$T = \bigcup_{x \in \theta} TM_x^n, \quad T' = \bigcup_{x \in \theta} TM_{\varphi(x)}^n.$$

Тогда существует окрестность $U(\theta) \supset \theta$ и число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого изоморфизма $G : T \rightarrow T'$ такого, что $\|G - D\varphi\| < \varepsilon/10$ существует диффеоморфизм $\psi : M^n \rightarrow M^n$, ε -близкий к φ в C^1 топологии, для которого $D\psi = G$ на T и $\psi = f$ вне $U(\theta)$.

В силу того, что между любыми гиперболическими автоморфизмами одинакового индекса (число собственных значений по модулю больших 1) существует путь из гиперболических автоморфизмов, лемма Фрэнкса допускает следующее обобщение.

Предложение 4.3. Пусть диффеоморфизм $\varphi_0 : M^n \rightarrow M^n$ имеет гиперболическую точку r_0 периода m_0 , и пусть (U_0, h) — локальная карта многообразия M^n такая, что $r_0 \in U_0$, $h(r_0) = O$. Тогда для любого гиперболического автоморфизма G , имеющего такой же индекс, что и автоморфизм $(D\varphi_0^{m_0})_{r_0}$, существуют окрестности U_1 и U_2 точки r_0 , $U_2 \subset U_1 \subset U_0$, и дуга $\varphi_t : M^n \rightarrow M^n, t \in [0, 1]$ без бифуркаций такие, что

- 1) диффеоморфизм $\varphi_t, t \in [0, 1]$, совпадает с диффеоморфизмом φ_0 вне множества

$$\bigcup_{k=0}^{m-1} \varphi_0^k(U_1), \quad \bigcup_{k=0}^{m-1} \varphi_0^k(r_0)$$

— гиперболическая орбита периода m_0 для каждого φ_t ,

- 2) диффеоморфизм $h\varphi_1^m h^{-1}$ совпадает с диффеоморфизмом G на множестве $h(U_2)$.

Перейдем к деталям построения.

Обозначим через $O(0, 0)$ начало координат в плоскости $\mathbb{R}^2$. Для любого $r > 0$ положим $B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$. Обозначим через $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ диффеоморфизм, заданный формулой $g(x, y) = (x/2, y/2)$.

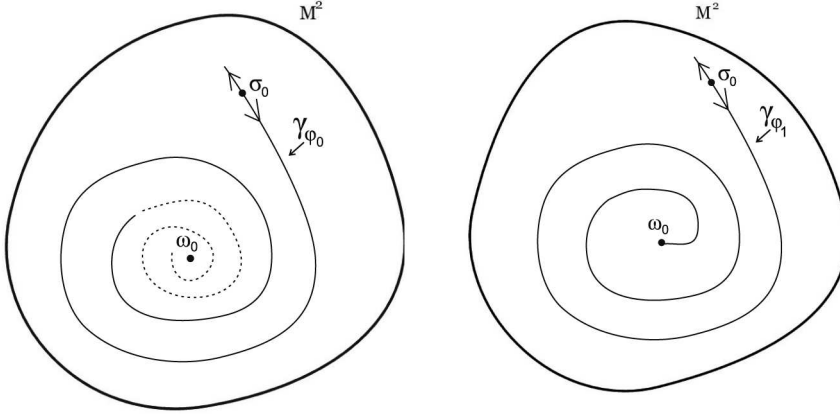


Рис. 11. Выпрямление сепаратрисы.

Лемма 4.1. Пусть диффеоморфизм $\varphi_0 : M^2 \rightarrow M^2$ имеет гиперболический сток ω_0 и гиперболическое седло σ_0 такие, что неустойчивая сепаратриса γ_{φ_0} седла σ_0 лежит в бассейне стока $W_{\omega_0}^s$ и имеет тот же период m , что и сток ω_0 . Пусть (U_0, ψ_0) — локальная карта многообразия M^2 такая, что $\omega_0 \in U_0$, $\psi_0(\omega_0) = O$ и $\varphi_0^m(U_0) \subset U_0$. Тогда существуют окрестности V_1, V_2 точки ω_0 такие, что $V_2 \subset V_1 \subset U_0$ и дуга $\varphi_t : M^2 \rightarrow M^2, t \in [0, 1]$ без бифуркаций со следующими свойствами:

- 1) диффеоморфизм $\varphi_t, t \in [0, 1]$ совпадает с диффеоморфизмом φ_0 вне множества $\bigcup_{k=0}^{m-1} \varphi_0^k(V_1)$ и $\bigcup_{k=0}^{m-1} \varphi_0^k(\omega_0)$ является гиперболической стоковой орбитой периода m для всех φ_t ,
- 2) $\psi_0(\gamma_{\varphi_1} \cap V_2) \subset OX_1$, где γ_{φ_1} — неустойчивая сепаратриса седла σ_0 относительно диффеоморфизма φ_1 (см. рис. 11).

Доказательство. Пусть $\varphi_0 = \varphi_0^m, \bar{\varphi}_0 = \psi_0 \varphi_0 \psi_0^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. В силу предложения 4.3 не уменьшая общности можно считать, что $\bar{\varphi}_0 = g$ на диске B_{2r_0} для некоторого $r_0 > 0$. Положим $K_0 = B_{2r_0} \setminus B_{r_0}$ и $\gamma_{\bar{\varphi}_0} = \psi_0(\gamma_{\varphi_0})$.

Обозначим через E_g множество сжатий $\bar{\varphi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, совпадающих с $\bar{\varphi}_0$ вне B_{2r_0} и с g на $B_{r_{\bar{\varphi}}}$, где $r_{\bar{\varphi}} \leq 2r_0$. Для любого $\bar{\varphi} \in E_g$ положим

$$\gamma_{\bar{\varphi}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\varphi}^k(\gamma_{\bar{\varphi}_0} \cap K_0).$$

По построению $\bar{\varphi}$ -инвариантная кривая $\gamma_{\bar{\varphi}}$ совпадает с $\bar{\varphi}_0$ -инвариантной кривой $\gamma_{\bar{\varphi}_0}$ вне диска B_{r_0} . Тогда достаточно построить дугу из сжатий $\bar{\varphi}_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, t \in [0, 1]$ такую, что

- 1) диффеоморфизм $\bar{\varphi}_t, t \in [0, 1]$ совпадает с диффеоморфизмом $\bar{\varphi}_0$ вне множества B_{r_0} ,
- 2) $(\gamma_{\bar{\varphi}_1} \cap B_{r_{\bar{\varphi}_1}}) \subset OX_1$.

Тогда дуга $\varphi_t : M^2 \rightarrow M^2$ получается из дуги $\bar{\varphi}_t$ следующим образом. Пусть $V_1 = h^{-1}(B_{r_0})$, $V_2 = h^{-1}(B_{r_{\bar{\varphi}_1}})$ и $\varphi_t = h^{-1} \bar{\varphi}_t h$ на V_1 . Тогда φ_t для каждого $t \in [0, 1]$ совпадает с φ_0 вне $\bigcup_{k=0}^{m-1} \varphi_0^k(V_1)$, $\varphi_t(z) = \varphi_0(z)$ для $z \in \varphi_0^k(V_2)$, $k \in \{0, \dots, m-2\}$ и $\varphi_t(z) = \varphi_t(\varphi_0^{1-m}(z))$ для $z \in \varphi_0^{m-1}(V_2)$.

Для построения дуги $\bar{\varphi}_t$ введем следующие обозначения для любого диффеоморфизма $\bar{\varphi} \in E_g$.

Представим двумерный тор $\mathbb{T}^2$ как пространство орбит действия диффеоморфизма g на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus O$ и обозначим через $p : \mathbb{R}^2 \setminus O \rightarrow \mathbb{T}^2$ естественную проекцию. Зафиксируем на торе $\mathbb{T}^2$ образующие $\hat{a} = p(OX_1)$ и $\hat{b} = p(S^1)$. Положим $K_{\bar{\varphi}} = B_{r_{\bar{\varphi}}} \setminus B_{r_{\bar{\varphi}}/2}$ и $\hat{\gamma}_{\bar{\varphi}} = p(\gamma_{\bar{\varphi}} \cap K_{\bar{\varphi}})$. Тогда кривая $\hat{\gamma}_{\bar{\varphi}}$ является узлом на торе $\mathbb{T}^2$, имеющим разложение $\langle 1, -n_{\bar{\varphi}} \rangle$, $n_{\bar{\varphi}} \in \mathbb{Z}$ по базису $\hat{a}, \hat{b}$ (см., например, [9]).

Дуга $\bar{\varphi}_t$ будет гладким произведением дуг η_t и ζ_t , где

I) дуга $\eta_t, t \in [0, 1]$, состоит из сжатий, совпадающих с диффеоморфизмом $\bar{\varphi}_0$ вне множества B_{r_0} и соединяет диффеоморфизм $\eta_0 = \bar{\varphi}_0$ с некоторым диффеоморфизмом $\eta_1 \in E_g$ таким, что узел $\hat{\gamma}_{\eta_1}$ имеет разложение $\langle 1, 0 \rangle$ по базису $\hat{a}, \hat{b}$.

II) дуга $\zeta_t \in E_g, t \in [0, 1]$ соединяет диффеоморфизм $\zeta_0 = \eta_1$ с диффеоморфизмом ζ_1 таким, что $\hat{\gamma}_{\zeta_1} = \hat{a}$.

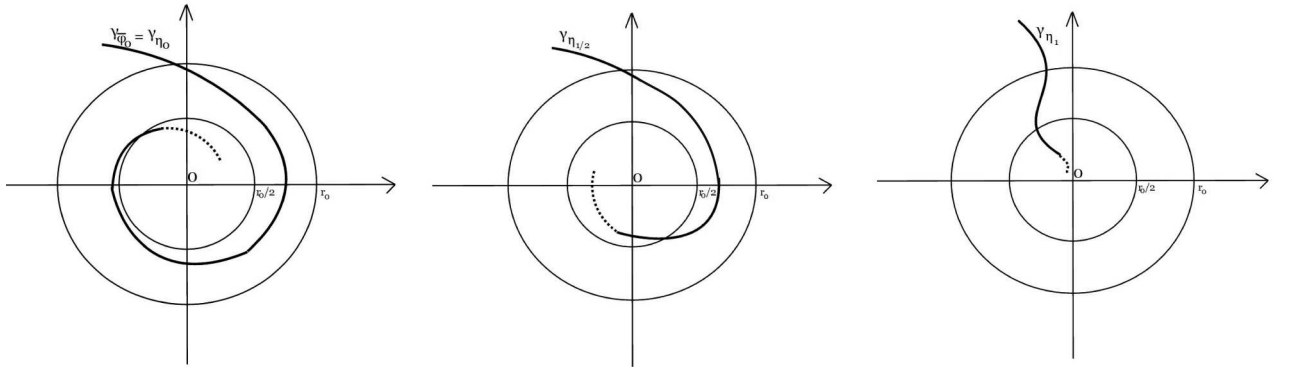


Рис. 12. Иллюстрация к лемме 4.1, часть I.

I) Если $n_{\bar{\varphi}} = 0$, то положим $\eta_t = \bar{\varphi}_0$ для всех $t \in [0, 1]$. В противном случае определим диффеоморфизм $\theta_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \in [0, 1]$, так, что $\theta_t(O) = O$ и

$$\theta_t(\rho e^{i\varphi}) = \begin{cases} \rho e^{i\varphi}, & \rho > r_0, \\ \rho e^{i(\varphi + 4n_{\bar{\varphi}}\pi t(1-\rho/r_0))}, & r_0/2 \leq \rho \leq r_0, \\ \rho e^{i(\varphi + 2n_{\bar{\varphi}}\pi t)}, & \rho < r_0/2. \end{cases}$$

Тогда $\eta_t = \theta_t \bar{\varphi}_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — искомая дуга (см. рис. 12).

II) По построению $\eta_1 \in E_g$ и узел $\hat{\gamma}_{\eta_1}$ имеет разложение $\langle 1, 0 \rangle$ по базису $\hat{a}, \hat{b}$. Существует гладко изотопный тождественному диффеоморфизм $\hat{h} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ такой, что $\hat{h}(\hat{\gamma}_{\eta_1}) = \hat{a}$. Для $r > 0$ положим $K_r = B_r \setminus B_{r/2}$. Выберем открытое покрытие $D = \{D_1, \dots, D_q\}$ тора $\mathbb{T}^2$ такое, что компонента связности $\bar{D}_i$ множества $p^{-1}(D_i)$ является подмножеством K_{r_i} для некоторых $r_i < r_{i-1}/2$ и $r_1 \leq r_0/2$. Согласно [14] существуют гладко изотопные тождественному диффеоморфизмы $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_q : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ со следующими свойствами:

i) для каждого $i \in \{1, \dots, q\}$ существует гладкая изотопия $\{\hat{w}_{i,t}\}$, тождественная вне D_i и соединяющая тождественное отображение и $\hat{w}_i$,

ii) $\hat{h} = \hat{w}_1 \dots \hat{w}_q$.

Пусть $w_{i,t} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — диффеоморфизм, который совпадает с $(p|_{K_{r_i}})^{-1} \hat{w}_{i,t} p$ на K_{r_i} и совпадает с тождественным отображением вне K_{r_i} (см. рис. 13). Тогда искомая дуга определяется формулой

$$\zeta_t = w_{1,t} \dots w_{q,t}.$$

Лемма доказана. □

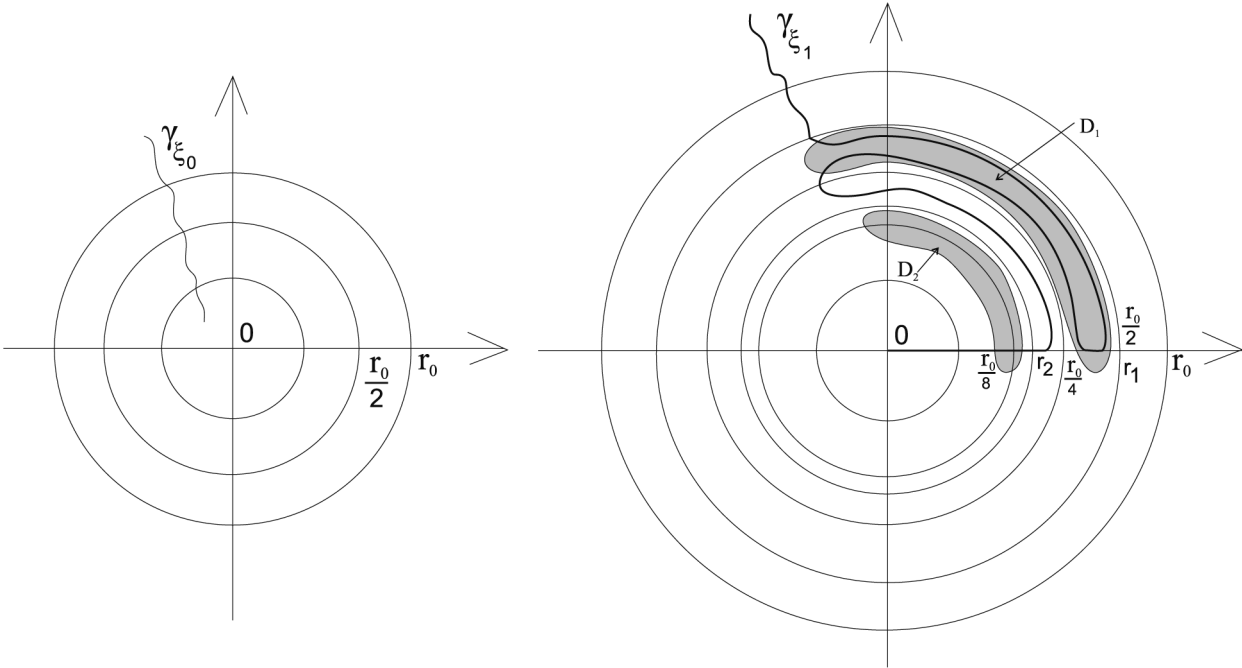


Рис. 13. Иллюстрация к лемме 4.1, часть II.

Лемма 4.2. Для любых диффеоморфизмов $f_{\lambda,\mu} \in G_{\lambda,\mu}$, $\lambda > 1$, $f_{\lambda-1,\mu} \in G_{\lambda-1,\mu}$ существует соединяющая их устойчивая дуга $H_{f_{\lambda,\mu}, f_{\lambda-1,\mu}, t}$.

Доказательство. Пусть $f = f_{\lambda,\mu}$. В силу леммы 3.2 существуют точки $\sigma, \omega \in A_f$ такие, что $q_\omega = 0$, $q_\sigma = 1$, $\omega \in \text{cl } W_\sigma^u$ и пересечение $W_\omega^s \cap A_f$ состоит в точности из одной неустойчивой сепаратрисы γ седла σ и стока ω , при этом период этой сепаратрисы совпадает с периодом стока t . Предложение 4.3 и лемма 4.1 позволяют предположить, что существует локальная карта

(U, ψ) многообразия $\mathbb{S}^2$ такая, что $\omega \in U$, $\psi(\omega) = O$, $f^m(U) \subset U$ и $\psi(\gamma \cap U) \subset OX_1$. Согласно лемме 3.2 для диффеоморфизма f возможны два случая 1) $\nu_\sigma = -1$ и 2) $\nu_\sigma = 1$. Проведем построение искомой дуги отдельно для каждого случая.

1) В этом случае $A_f = W_\sigma^u \cup \omega \cup f(\omega)$ и $m = 2$. Положим $l = W_\sigma^u \cup \psi^{-1}(OX_1) \cup f(\psi^{-1}(OX_1))$. Тогда l — гладкая кривая, содержащая A_f и для которой точки $\omega, f(\omega)$ являются внутренними, при этом $f(l) \subset l$. Положим $\Pi_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_i| < 1/2\}$. Определим на отрезке $[-1/2; 1/2] \subset OX_1$ семейство диффеоморфизмов $\varphi_t : [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ формулой

$$\varphi_t(x_1) = \left(-x_1 \left(1 + \frac{1}{10}(1-2t) \right) + x_1^3 \right).$$

Определим диффеоморфизм $\tilde{\varphi}_t : \tilde{\Pi}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ формулой

$$\tilde{\varphi}_t(x_1, x_2) = (\varphi_t(x_1), -x_2/2).$$

По построению диффеоморфизм $\tilde{\varphi}_0$ имеет три периодические точки периода, а именно 2 стока $P_1(-1/\sqrt{10}, 0)$, $P_2(1/\sqrt{10}, 0)$ периода два и неподвижную источниковую точку $P_3(0, 0)$. Для $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ положим

$$J_\varepsilon = \left[-\frac{1}{\sqrt{10}} - \varepsilon, \frac{1}{\sqrt{10}} + \varepsilon \right] \subset OX_1,$$

$$V_{\varepsilon, \delta} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1/\sqrt{10} + \varepsilon, |x_2| < \delta\}.$$

Выберем окрестность Π_1 дуги A_f и диффеоморфизм $\beta : \Pi_1 \rightarrow \tilde{\Pi}_1$ так, что $\beta(\omega) = P_1$, $\beta(f(\omega)) = P_2$, $\beta(\sigma) = P_3$ и $\beta(l \cap \Pi_1) = OX_1 \cap \tilde{\Pi}_1$. Тогда в некоторой окрестности $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ корректно определен диффеоморфизм $\tilde{f} = \beta f \beta^{-1}$. В силу предложения 4.3 можно считать, что в окрестностях

$$V_{P_1} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 + 1/\sqrt{10}| < \varepsilon_1, |x_2| < \delta_1\},$$

$$V_{P_2} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - 1/\sqrt{10}| < \varepsilon_1, |x_2| < \delta_1\},$$

$$V_{P_3} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_i| < \delta_1\}$$

точек P_1, P_2, P_3 диффеоморфизм $\tilde{f}$ совпадает с $(D\tilde{\varphi}_0)_{P_1}, (D\tilde{\varphi}_0)_{P_2}, (D\tilde{\varphi}_0)_{P_3}$ соответственно. Обозначим через φ ограничение диффеоморфизма $\tilde{f}$ на отрезок J_{ε_1} . Определим на цилиндре $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ диффеоморфизм $\tilde{\varphi}$ формулой $\tilde{\varphi}(x_1, x_2) = (\varphi(x_1), -x_2/2)$. Для $\delta > 0$ определим бамп-функцию $\rho_\delta(r), r \geq 0$, равную 1 для $r \in [0, \delta]$ и 0 для $r \geq 2\delta$. Для $\delta_2 = \delta_1/2$ определим на цилиндре $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ семейство диффеоморфизмов $\tilde{a}_t, t \in [0, 1]$, формулой

$$\tilde{a}_t(x_1, x_2) = t\rho_{\delta_2}(|x_2|)\tilde{\varphi}(x_1, x_2) + (1 - t\rho_{\delta_2}(|x_2|))\tilde{f}(x_1, x_2).$$

По построению $\tilde{a}_t, t \in [0, 1]$, совпадает с $\tilde{f}$ на $\partial V_{\varepsilon_1, \delta_1}$, $\tilde{a}_0 = \tilde{f}$ на $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ и $\tilde{a}_1 = \tilde{\varphi}$ на $V_{\varepsilon_1, \delta_2}$. Поскольку диффеоморфизмы $\tilde{f}$ и $\tilde{\varphi}$ совпадают на отрезке J_{ε_1} и прямоугольниках $V_{P_1}, V_{P_2}, V_{P_3}$, не уменьшая общности можно считать, что значение δ_2 выбрано таким образом, что диффеоморфизм $\tilde{a}_t$ не имеет неблуждающих точек, отличных от P_1, P_2, P_3 .

Для $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/4$ и $t \in [0, 1]$ положим

$$v_t(x_1) = \rho_{\varepsilon_2}(|x_1|)\varphi_t(x_1) + (1 - \rho_{\varepsilon_2}(|x_1|))\varphi(x_1), \quad x_1 \in J_{\varepsilon_1}.$$

По построению диффеоморфизм v_t совпадает с φ_t на J_{ε_2} и φ на $J_{\varepsilon_1} \setminus J_{2\varepsilon_2}$. Для $t \in [0, 1]$ положим $\nu_t(x_1) = tv_0(x_1) + (1 - t)\varphi(x_1)$. По построению ν_0 совпадает с φ и ν_1 совпадает с v_0 . Положим $w_t = \nu_t * v_t$ и $\tilde{w}_t(x_1, x_2) = (w_t(x_1), -x_2/2)$ для $(x_1, x_2) \in V_{\varepsilon_1, \delta_1}$.

Для $\delta_3 = \delta_2/2$ определим на цилиндре $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ семейство диффеоморфизмов $\tilde{b}_t, t \in [0, 1]$, формулой

$$\tilde{b}_t(x_1, x_2) = \rho_{\delta_3}(|x_2|)\tilde{w}_t(x_1, x_2) + (1 - \rho_{\delta_3}(|x_2|))\tilde{a}_1(x_1, x_2).$$

По построению $\tilde{b}_t, t \in [0, 1]$, совпадает с $\tilde{f}$ на $\partial V_{\varepsilon_1, \delta_1}$, $\tilde{b}_0 = \tilde{a}_1$ на $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$, $\tilde{b}_t = \tilde{w}_t$ на $V_{\varepsilon_1, \delta_3}$ и $\tilde{b}_1 = \tilde{v}_1$ на $V_{\varepsilon_1, \delta_3}$.

Положим $\tilde{c}_t = \tilde{a}_t * \tilde{b}_t$ и $U_2 = \beta^{-1}(V_{\varepsilon_1, \delta_1})$. Тогда искомая дуга $\Gamma_{f_\mu, f_{\mu-1}}$ совпадает с f вне $\bigcup_{k=0}^{m-1} f^k(U_2)$, $f_t(z) = f(z)$ для $z \in f^k(U_2)$, $k \in \{0, \dots, m-2\}$, и $f_t(z) = \beta^{-1}(\tilde{c}_t(\beta(f^{1-m}(z))))$ для $z \in f^{m-1}(U_2)$.

2) В этом случае седло σ и сток ω имеют одинаковый период m . Положим $l = W_\sigma^u \cup \psi^{-1}(OX_1)$. Тогда l — гладкая кривая, содержащая γ и для которой точки ω, σ являются внутренними. Положим $\Pi_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_i| < 1/2\}$. Определим на отрезке $[-1/2; 1/2] \subset OX_1$ семейство диффеоморфизмов $\varphi_t : [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ формулой

$$\varphi_t(x_1) = x_1 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{1}{10}(2t-1).$$

Определим диффеоморфизм $\tilde{\varphi}_t : \tilde{\Pi}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ формулой $\tilde{\varphi}_t(x_1, x_2) = (\varphi_t(x_1), x_2/2)$. По построению диффеоморфизм $\tilde{\varphi}_0$ имеет стоковую точку $P_1(-1/\sqrt{5}, 0)$ и седловую точку $P_2(1/\sqrt{5}, 0)$. Для $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ положим $I_\varepsilon = [-1/\sqrt{5} - \varepsilon, 1/\sqrt{5} + \varepsilon] \subset OX_1$ и

$$V_{\varepsilon, \delta} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1/\sqrt{5} + \varepsilon, |x_2| < \delta\}.$$

Выберем окрестность Π_1 дуги γ и диффеоморфизм $\beta : \Pi_1 \rightarrow \tilde{\Pi}_1$ так, что $\beta(\omega) = P_1, \beta(\sigma) = P_2$ и $\beta(l \cap \Pi_1) = OX_1 \cap \tilde{\Pi}_1$. Тогда в некоторой окрестности $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ корректно определен диффеоморфизм $\tilde{f} = \beta f^m \beta^{-1}$. В силу предложения 4.3 можно считать, что в окрестностях

$$V_{P_1} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 + 1/\sqrt{5}| < \varepsilon_1, |x_2| < \delta_1\},$$

$$V_{P_2} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - 1/\sqrt{5}| < \varepsilon_1, |x_2| < \delta_1\}$$

точек P_1, P_2 диффеоморфизм $\tilde{f}$ совпадает с $(D\tilde{\varphi}_0)_{P_1}, (D\tilde{\varphi}_0)_{P_2}$ соответственно. Обозначим через φ ограничение диффеоморфизма $\tilde{f}$ на отрезок I_{ε_1} . Определим на цилиндре $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ диффеоморфизм $\tilde{\varphi}$ формулой $\tilde{\varphi}(x_1, x_2) = (\varphi(x_1), x_2/2)$. Для $\delta > 0$ определим бамп-функцию $\rho_\delta(r), r \geq 0$, равную 1 для $r \in [0, \delta]$ и 0 для $r \geq 2\delta$. Для $\delta_2 = \delta_1/2$ определим на цилиндре $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ семейство диффеоморфизмов $\tilde{a}_t, t \in [0, 1]$, формулой

$$\tilde{a}_t(x_1, x_2) = t\rho_{\delta_2}(|x_2|)\tilde{\varphi}(x_1, x_2) + (1 - t\rho_{\delta_2}(|x_2|))\tilde{f}(x_1, x_2).$$

По построению $\tilde{a}_t, t \in [0, 1]$ совпадает с $\tilde{f}$ на $\partial V_{\varepsilon_1, \delta_1}$, $\tilde{a}_0 = \tilde{f}$ на $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ и $\tilde{a}_1 = \tilde{\varphi}$ на $V_{\varepsilon_1, \delta_2}$. Поскольку диффеоморфизмы $\tilde{f}$ и $\tilde{\varphi}$ совпадают на отрезке I_{ε_1} и прямоугольниках V_{P_1}, V_{P_2} , не уменьшая общности можно считать, что значение δ_2 выбрано таким образом, что диффеоморфизм $\tilde{a}_t$ не имеет неблуждающих точек, отличных от P_1 и P_2 .

Для $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/4$ и $t \in [0, 1]$ положим

$$v_t(x_1) = \rho_{\varepsilon_2}(|x_1|)\varphi_t(x_1) + (1 - \rho_{\varepsilon_2}(|x_1|))\varphi(x_1), x_1 \in I_{\varepsilon_1}.$$

По построению диффеоморфизм v_t совпадает с φ_t на I_{ε_2} и φ на $I_{\varepsilon_1} \setminus I_{2\varepsilon_2}$. Для $t \in [0, 1]$ положим $\nu_t(x_1) = tv_0(x_1) + (1-t)\varphi(x_1)$. По построению ν_0 совпадает с φ и ν_1 совпадает с v_0 . Положим $w_t = \nu_t * v_t$ и $\tilde{w}_t(x_1, x_2) = (w_t(x_1), x_2/2)$ для $(x_1, x_2) \in V_{\varepsilon_1, \delta_1}$.

Для $\delta_3 = \delta_2/2$ определим на цилиндре $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$ семейство диффеоморфизмов $\tilde{b}_t, t \in [0, 1]$, формулой

$$\tilde{b}_t(x_1, x_2) = \rho_{\delta_3}(|x_2|)\tilde{w}_t(x_1, x_2) + (1 - \rho_{\delta_3}(|x_2|))\tilde{a}_1(x_1, x_2).$$

По построению $\tilde{b}_t, t \in [0, 1]$ совпадает с $\tilde{f}$ на $\partial V_{\varepsilon_1, \delta_1}$, $\tilde{b}_0 = \tilde{a}_1$ на $V_{\varepsilon_1, \delta_1}$, $\tilde{b}_t = \tilde{w}_t$ на $V_{\varepsilon_1, \delta_3}$ и $\tilde{b}_1 = \tilde{\nu}_1$ на $V_{\varepsilon_1, \delta_3}$.

Положим $\tilde{c}_t = \tilde{a}_t * \tilde{b}_t$ и $U_2 = \beta^{-1}(V_{\varepsilon_1, \delta_1})$. Тогда искомая дуга $\Gamma_{f_\mu, f_{\mu-1}}$ совпадает с f вне $\bigcup_{k=0}^{m-1} f^k(U_2)$, $f_t(z) = f(z)$ для $z \in f^k(U_2), k \in \{0, \dots, m-2\}$ и $f_t(z) = \beta^{-1}(\tilde{c}_t(\beta(f^{1-m}(z))))$ для $z \in f^{m-1}(U_2)$. $\square$

Литература

1. S. Newhouse, J. Palis, and F. Takens, “Stable arcs of diffeomorphisms”, *Bull. Am. Math. Soc.*, **82**, 499–502 (1976).
2. S. Newhouse, M. M. Peixoto, “There is a simple arc joining any two Morse–Smale flows”, *Astérisque* **31**, 15–41 (1976).
3. G. Fleitas, “Replacing tangencies by saddle-nodes”, *Bol. Soc. Bras. Mat.* **8**, 47–51 (1977).
4. E. V. Nozdrinova, “Rotation number as a complete topological invariant of a simple isotopic class of rough transformations of a circle”, *Nelinein. Din.* **14**, No. 4, 543–551 (2018).
5. P. R. Blanchard, “Invariants of the NPT isotopy classes of Morse–Smale diffeomorphisms of surfaces”, *Duke Math. J.* **47**, 33–46, (1980).
6. E. V. Nozdrinova, O. V. Pochinka, “On existence of a smooth arc without bifurcations joining source-sink diffeomorphisms on 2-sphere”, *J. Phys., Conf. Ser.* **990**, 012010 (2018).
7. Хр. Бонатти, В. З. Гринес, В. С. Медведев, О. В. Починка, “Бифуркации диффеоморфизмов Морса — Смейла с дико вложенными сепаратрисами”, *Тр. МИАН* **256**, 54–69, (2007).
8. А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, “Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий. Дифференциальные и интегральные уравнения”, В: *Дифференциальные и интегральные уравнения*, с. 33–37, ГГУ, Горький (1985).
9. V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer, Cham (2016).
10. B. von Kerekjarto, “Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche”, *Math. Ann.* **80**, 36–38 (1919).
11. S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, “Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms”, *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.* **57**, 5–71 (1983).
12. J. Milnor, *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1965).
13. J. Franks, “Necessary conditions for stability of diffeomorphisms”, *Trans. Am. Math. Soc.* **158** 301–308 (1971).
14. A. Banyaga, “On the structure of the group of equivariant diffeomorphism”, *Topology* **16**, 279–283, (1977).

Статья поступила в редакцию 7 ноября 2019 г.