

О решении 33-й проблемы Палиса–Пью для градиентно-подобных диффеоморфизмов двумерной сферы

Е. В. Ноздринова, О. В. Починка

Проблема существования дуги с не более чем счетным (конечным) числом бифуркаций, соединяющей структурно устойчивые системы (системы Морса–Смейла) на многообразиях, вошла в список пятидесяти проблем Палиса–Пью [1] под номером 33. В настоящем сообщении мы изложим решение этой проблемы для градиентно-подобных диффеоморфизмов двумерной сферы.

Напомним, что диффеоморфизм f , заданный на 2-сфере S^2 , называется *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа гиперболических периодических точек и инвариантные многообразия различных седловых точек не пересекаются. Обозначим через G множество таких сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов.

Диффеоморфизмы $f_0, f_1 \in G$ гладко изотопны тождественному отображению 2-сферы и, следовательно, могут быть соединены некоторой дугой $\{f_t: S^2 \rightarrow S^2, t \in [0, 1]\}$. Однако *устойчивость* такой дуги с конечным числом бифуркационных значений $0 < b_1 < \dots < b_k < 1$ характеризуется тем, что 1) диффеоморфизм $\varphi_{b_i}, i \in \{1, \dots, m\}$, не имеет циклов и имеет ровно одну негиперболическую периодическую орбиту, а именно флип или некритический седло-узел, при этом дуга проходит через бифуркационное значение типично; 2) диффеоморфизм $\varphi_t, t \in [0, 1]$, имеет конечное предельное множество и все инвариантные многообразия его периодических точек пересекаются трансверсально [2].

Будем говорить, что диффеоморфизмы $f_0, f_1 \in G$ принадлежат одному и тому же классу *устойчивой изотопической связанности*, если в пространстве диффеоморфизмов они могут быть соединены дугой с описанными выше свойствами.

Классификация с точки зрения введенного отношения эквивалентности нетривиальна уже на окружности S^1 , где появляется счетное множество таких классов, каждый из которых однозначно определяется числом вращения грубого преобразования окружности [3], которое равно k/m , где $k \in \mathbb{N} \cup 0, m \in \mathbb{N}, k < m, (k, m) = 1$.

Рассмотрим S^1 как экватор сферы S^2 . Тогда диффеоморфизм окружности в точности с двумя периодическими орбитами периода m и числом вращения k/m может быть продолжен до диффеоморфизма $F_{k/m}: S^2 \rightarrow S^2$, имеющего два неподвижных источника в северном и южном полюсах. Обозначим через $F_0: S^2 \rightarrow S^2$ диффеоморфизм “источник–сток”.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Любой диффеоморфизм $f \in G$ соединяется устойчивой дугой в точности с одним из диффеоморфизмов $F_0, F_{k/m}, F_{k/m}^{-1}, m \geq 3, k < m/2$.*

Заметим, что принадлежность разным классам устойчивой изотопической связанности диффеоморфизмов $F_{k/m}, F_{k'/m'}$ для $m = 2^r q, m' = 2^{r'} q', q \neq q'$ при целых $r, r' \geq 0$ и натуральных $q \neq q'$ следует из работы П. Бланшара [4], где получены необходимые условия соединения диффеоморфизмов Морса–Смейла на поверхности устойчивой дугой. Однако вопрос о достаточных условиях в [4] не рассматривался.

В основе доказательства теоремы 1 лежит идея представления динамики диффеоморфизма $f \in G$ в виде “источник–сток”, где роль стока играет аттрактор A_f ,

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931, и, в части лемм 3.1 и 3.2, Фонда развития теоретической физики и математики “Базис”, договор № 19-7-1-15-1.

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9913>

являющийся объединением стоков с неустойчивыми многообразиями части (возможно, пустой) седловых орбит, а репеллер R_f дуален к A_f . При этом (с точностью до рассмотрения диффеоморфизма f^{-1}) аттрактор A_f состоит из одной орбиты периода m , а репеллер R_f является связным. В случаях, когда $m < 3$, диффеоморфизм f удастся соединить устойчивой дугой с диффеоморфизмом F_0 . В противном случае диффеоморфизм f обладает инвариантной окружностью C , составленной из замыканий неустойчивых многообразий седловых точек, такой, что гомеоморфизм $f|_C$ имеет число вращения k/m , вследствие чего f соединяется устойчивой дугой с диффеоморфизмом $F_{k/m}$, лежащим в одном классе устойчивой изотопической связности с диффеоморфизмом $F_{(m-k)/m}$.

Полученный результат тесно переплетается с теорией Нильсена–Тёрстона гомеоморфизмов поверхностей, в частности с классификацией периодических гомеоморфизмов двумерной сферы, полученной Б. Керекьярто [5]. Класс топологической сопряженности периодического преобразования 2-сферы периода m также полностью определяется числом вращения k/m вокруг оси “северный полюс–южный полюс”. Поскольку любой диффеоморфизм $f \in G$ топологически сопряжен композиции периодического гомеоморфизма со сдвигом на единицу времени градиентно-подобного потока [6], [7], то возникает естественный вопрос о связи числа вращения периодического гомеоморфизма с инвариантом устойчивой связности. В действительности инварианты совпадают в случае, когда период аттрактора диффеоморфизма f больше двух. В противном случае период периодического гомеоморфизма в разложении f может быть сколь угодно большим, тогда как сам диффеоморфизм устойчиво изотопен преобразованию F_0 .

Однако, даже при наличии очевидной аналогии с периодическими гомеоморфизмами, построение устойчивой дуги между диффеоморфизмами является самостоятельной задачей, непосредственно не следующей из топологической классификации диффеоморфизмов. В подтверждение тому достаточно заметить, что все сохраняющие ориентацию системы “источник–сток” на n -мерной сфере попарно топологически сопряжены при фиксированном n , однако в общем случае, например в размерности $n = 7$, они не соединяются устойчивой дугой [8]. Для $n = 2, 3$ нетривиальный факт существования пути без бифуркаций между двумя системами “источник–сток” установлен в работах [9], [8].

Список литературы

- [1] J. Palis, C. C. Pugh, *Lecture Notes in Math.*, **468**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1975, 345–353. [2] S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **57** (1983), 5–71. [3] E. V. Nozdrinova, *Нелинейная динам.*, **14:4** (2018), 543–551. [4] P. R. Blanchard, *Duke Math. J.*, **47:1** (1980), 33–46. [5] B. von Kerékjártó, *Math. Ann.*, **80:1** (1919), 36–38. [6] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, *Дифференциальные и интегральные уравнения*, Сб. науч. тр., Изд-во Горьковск. ун-та, Горький, 1985, 33–37. [7] V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds*, Springer, Cham, 2016, xxvi+295 pp. [8] X. Бонатти, В. З. Гринес, В. С. Медведев, О. В. Починка, Тр. МИАН, **256**, Наука, М., 2007, 54–69. [9] E. V. Nozdrinova, O. V. Pochinka, *J. Phys. Conf. Ser.*, **990** (2018), 012010, 7 pp.

Е. В. Ноздринова (E. V. Nozdrinova)
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
E-mail: maati@mail.ru

Представлено Д. В. Трещевым
Принято редколлегией
24.09.2019

О. В. Починка (O. V. Pochinka)
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
E-mail: opochinka@hse.ru