

От нетранзитивности спермы к нетранзитивным композитам

Александр Поддьяков,

докт. психол. наук, проф. НИУ ВШЭ, гл. науч. сотр. ИП РАН

Отношения по принципу известной игры «камень, ножницы, бумага» (когда, казалось бы, вопреки формальной логике, первое бьет второе, второе бьет третье, но третье бьет первое) настойчиво проявляют себя в самых разных областях реальности. Этому феномену нетранзитивности доминирования посвящают целые монографии [1], не говоря уже о статьях. Его исследования проводятся часто параллельно и независимо в различных научных дисциплинах — на их «родном» материале, но результаты могут красиво подтверждать и дополнять друг друга. Ниже я представлю несколько областей, где вплотную походят к изучению его механизмов не в метафорическом смысле (типа «психологических механизмов нетранзитивности предпочтений человека»), а в смысле, близком к буквальному. Это механизмы взаимодействия от биохимического до физического уровня. Рассматриваемые области: нетранзитивность спермы, математика парадоксального отношения «чаще оказываться тверже» и физика простых механизмов. Эти области кажутся малосвязанными — и, может быть, такими навсегда и останутся, но возможно, что их развитие, а также развитие соседних и отдаленных областей позволит ответить на вопрос: каков минимальный уровень сложности материи, на котором уже осуществимы отношения нетранзитивности доминирования «камень, ножницы, бумага»?

Отношения «камень, ножницы, бумага» — от этиологии к биохимии

В последние четверть века в биологии активно обсуждается нетранзитивная конкуренция — конкурентные отношения по принципу «камень, ножницы, бумага», формирующиеся между видами, представителями разных морф внутри одного вида, поведенческими стратегиями особей и др. (см., например, [2, 3]). В 2018 году вышел спецвыпуск журнала *Journal of Ecology* с инициирующей статьей «Всё, что вы хотели узнать о нетранзитивной конкуренции, но боялись спросить» [4]. Нетранзитивная конкуренция считается одним из важных условий биоразнообразия. Огрубленное объяснение таково: если бы в биологическом мире конкурентные отношения не обрзовывали множественные циклы и там царили бы линейные иерархии, то всё это продолжалось бы очень недолго. Появившийся сверхдоминант («царь горы») вышиб бы всех остальных, а затем либо помер бы от голода, либо остался бы заниматься в одиночестве медленным фотосинтезом, поскольку кушать больше некого.

Интересны биохимические и физические взаимодействия, обеспечивающие механизмы нетранзитивной конкуренции на микроуровне, например при спаривании особей. Яркий пример — нетранзитивность конкурентоспособности спермы у дрозофил и других живых существ, чьи устойчивые поведенческие стратегии характеризуются тем, что самки спариваются со многими самцами в течение короткого промежутка времени. У таких видов в организме самок начинается конкуренция спермы самцов по принципу «камень, ножницы, бумага», причем выигрывает тот, чья сперма имеет большую скорость [5, 6]. Исследования здесь часто строятся так: самок искусственно осеменяют спермой различных самцов (каждую самку — спермой нескольких самцов по сложной схеме) и затем анализируют генотипы образовавшихся эмбрионов. Сам факт нетранзитивности спермы считается установленным, но ее биохимические и физические механизмы, похоже, пока не выяснены. Но, будем надеяться, дело движется к тому.

Параллельные исследования в математике

В статье в ТрВ-Наука [7] я писал, что исследования в биологии шли параллельно исследованиям нетранзитивности в математике. Изначально тему нетранзитивных отношений превосходства (доминирования) поднял польский математик Станислав Трыбула [8]. Он рассмотрел в качестве модельного примера то, что понятно и хорошо формализуемо, — наборы брусков (стандартными по прочности), но изготавливаемых на трех разных и не идеальных фабриках.

Трыбула доказал, что может быть так: бруски с фабрики А чаще прочнее брусков с фабрики В, бруски с фабрики В чаще прочнее брусков с фабрики С, а бруски с фабрики С — чаще прочнее брусков с фабрики А (причем речь не об ошибках измерения). Тем, кто слышит про такую возможность впервые, она может показаться бессмыслицей — недаром в книгах и статьях описанное явление проходит по разряду «математические парадоксы». Тем не менее, это математическая истина.

Про результаты польского математика знали в основном лишь некоторые математики. Дело пошло веселее, когда Мартин Гарднер в 1970-х стал публиковать в своих математических колонках в *Scientific American* заметки о парадоксальных математических объектах. В том числе о нетранзитивных игровых кубиках, которые с тех пор стали неформальным символом всего нетранзитивного в математике (см. его книги «Крестики-нолики» и «Путешествие во времени», из современных научно-популярных текстов нужно упомянуть [9], а из продвинутых книг для старшеклассников — [10]).

Показать нетранзитивность превосходства, исследуемую в математике, проще всего на наборах из трех карандашей. Есть три набора из трех карандашей разной длины (рис. 1). Сравним по длине каждый карандаш из каждого набора с карандашами из других наборов. Получаем, что красные карандаши оказываются длиннее зеленых 5 раз из 9 их попарных сравнений («схваток»), зеленые длиннее синих — 5 раз из 9 попарных сравнений, а синие длиннее красных 5 раз из 9 попарных сравнений. Отталкиваясь от этого, можно выстроить много всего про нетранзитивность. Самое простое — теперь всё понятнее с нетранзитивными брусками. Представим, что числа, описывающие длину карандашей, теперь показывают прочность того или иного бруска. Получим, что бруски с первой фабрики были чаще прочнее брусков со второй, те — брусков с третьей, а бруски с третьей — чаще прочнее брусков с первой.

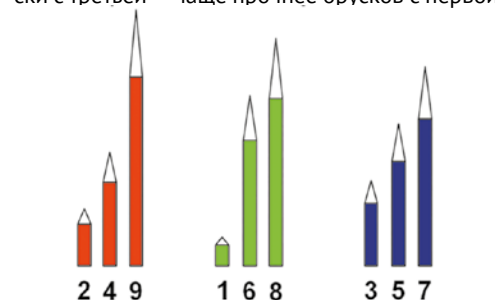


Рис. 1. Наборы карандашей, нетранзитивные по длине (числа взяты из магического квадрата, описанного М. Гарднером)

За уровнем научной популяризации идет серьезная математика — достаточно сказать, что в 2017 году к разработке темы нетранзитивных игровых кубиков, позволяющей развить понимание теории вероятностей, подключился филдсовский медалист Тимоти Гауэрс [11, 12]. Но всё это — пока игра с кубиками. В свою очередь, Алексей Викторович Лебедев поставил вопрос о возможности нетранзитивности не дискретных (как числа на кубиках), а непрерывных случайных величин и показал, при каких статистических распределениях она невозможна, а при каких возможна [13]. Он подчеркивает, что «игровая» обертка задач про нетранзитивные кубики побуждает воспринимать проблемы нетранзитивности как несерьезные — и напрасно. И в природном мире, и в мире объектов, созданных человеком, нетранзитивность статистических распределений может быть весьма значимым фактором.

Из наиболее интересных выводов, обоснованных практически одновременно и в математике, и в биологии, можно назвать следующее заключение. Чем сложнее система, т.е. чем больше участников входит во взаимодействия (чем больше игровых кубиков в наборах, чем больше биологических видов в рассматриваемой нише) и чем большим числом параметров характеризуются эти участники (растущее число граней нетранзитивных многогранников, расту-

щее число характеристик, описывающих биологические виды), тем вероятнее в такой системе встретится всё более множественные нетранзитивные циклы [14, 15].

Нетранзитивные машины на основе простых механизмов

На недавней конференции «Психология и технологии в математическом образовании» [16, 17] я представил комплекс различных нетранзитивных геометрических и механических объектов на основе простых механизмов (рычагов, шестерен, блоков, клиньев и др.). Они реализуют принцип «камень, ножницы, бумага» и могут быть использованы в обучении физике и математике при объяснении многофакторных взаимодействий.

Предварительно замечу, что после публикации моей статьи в ТрВ-Наука некий специалист по зубчатым передачам разразился гневной тирадой: мол, нетранзитивные шестерни и нетранзитивные блоки невозможны. В худшем случае они нарушают законы сохранения и не могут работать по этой фундаментальной причине, в лучшем случае — не будут работать, потому что их просто заклинит. Вот, скажем, нетранзитивные блоки (рис. 3). Там при попарных соединениях груз А перевешивает груз В, груз В перевешивает груз С, а С перевешивает А. Правда же, я пытаюсь протолкнуть модель вечного двигателя?

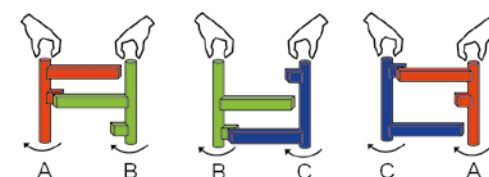


Рис. 2. Нетранзитивные двойные рычаги: при равном усилии соревнующихся участников, приложенном к валам, красный рычаг «пересиливает» зеленый, зеленый «пересиливает» синий, а синий «пересиливает» красный

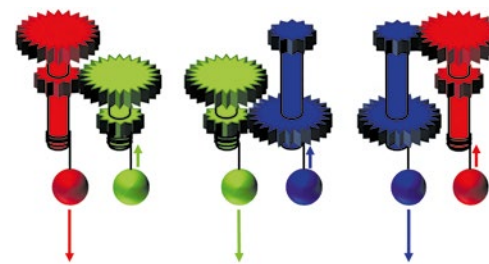


Рис. 3. Нетранзитивные блоки (расширенная версия нетранзитивных рычагов). Валы расположены горизонтально в вертикальной опоре, массы грузов одинаковы. При попарных соединениях красный груз, опускаясь, поднимет зеленый; зеленый, опускаясь, поднимет синий; а синий, опускаясь, поднимет красный. Стрелками обозначены скорости грузов

Ответ: законы сохранения выполняются здесь в лучшем виде. Выигрыши в силе в каждой паре сопровождаются соответствующими проигрышами в расстановках: подъем груза в каждой паре на определенную высоту сопровождается опусканием другого груза на большую глубину, и потенциальная энергия системы уменьшается. При многократном повторении процедуры последовательно во всех парах все грузы окажутся в нижней точке — скажем, на полу (как гири механических часов) [18]. Такой пример можно разбирать на уроках физики.

Нельзя сказать, что его так уж трудно понять, и со специалистом по зубчатым передачам все-таки поспорили другие участники обсуждения. А также пришла поддержка с неожиданной стороны. Голландский изобретатель головоломок Оскар ван Девентер, сославшись на мою статью в ТрВ-Наука, придумал еще более парадоксальную штуку — игрушку с шестернями, храповыми колесами и рукоятками (рис. 4). Какой бы элемент (шестерню или рукоятку) ни выбрал один участник, второй всегда может выбрать такой элемент из оставшихся, который «победит» элемент, выбранный первым участником, т.е. будет вращаться быстрее него. Абсолютного победителя нет, а есть нетранзитивный цикл. Поэкспериментировав с этой игрушкой, я обнаружил еще одну возможность — нетранзитивной игры не вдвоем, а втроем. А именно, если два первых участника игры выберут каждый по элементу, третий участник всегда может выбрать такой элемент из оставшихся и такое направление его вращения (по часовой стрелке или против), что этот третий элемент «победит» первые два — будет вращаться быстрее них. Более того, в 75% случаев третий игрок, выбирая тот или иной элемент и направление его вращения, может управлять распределением мест между первым и вторым участником — кто из них станет проигравшим (выбранный им элемент будет самым медленным), а кто займет

второе место (выбранный им элемент не будет ни самым быстрым, ни самым медленным).



Рис. 4. Нетранзитивный комплекс «шестерни — храповые колеса» О. ван Девентера — i.materialise.com/forum/t/non-transitive-gears-by-oskar/1167

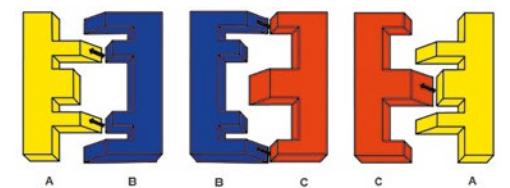


Рис. 5. Материал для изучения темы «Наклонные плоскости (клины)» — нетранзитивные «гребенки» с профилированными зубьями. При фронтальном «наезде» гребенка А своим профилем зубьев поднимает гребенку В (она «сильнее»), В поднимает С, С поднимает А

Пределы нетранзитивности — оценка снизу

Нетранзитивность доминирования — свойство сложных, многофакторных систем [19]. В простых системах ее нет. Не надо опасаться, что при измерении просто трех карандашей обнаружится их нетранзитивность по длине. А вот в трех наборах по три карандаша она уже обнаруживается. Здесь возникает вопрос: какова минимальная сложность физической (механической) системы, в которой нетранзитивность уже возможна?

Вернемся к прочности физических материалов. Вопрос специалистам по материалам: возможны ли искусственные композитные сплошные блоки или слои, пленки, нетранзитивные по истираемости (износостойкости, прочности), проявляющие это свое свойство при попарных непосредственных физических взаимодействиях в силу самого дизайна композитной конструкции (а не в силу неидеальности изготовления)? Практической нужды в них сейчас никакой не просматривается, но сама возможность любопытна — в плане определения границ. Паллиативные забавные решения возможны — например, нетранзитивные по истираемости щетки с «композитной щетиной» (вспомним то, что мы иногда видим в фильмах: мальчишки — уличные чистильщики обуви — заливка и многократно проходятся щетиной одной щетки по щетине другой). Предположительно, могли бы дать искомый нетранзитивный результат наборы щетинок по истираемости, тщательно собранные по шаблону магических квадратов Мартина Гарднера. (Так были собраны наборы карандашей, нетранзитивные по длине — тоже вещь, если и очевидная, то лишь задним числом.) И мы бы имели три нетранзитивные щетки. Как минимум, это материал к какой-нибудь первоапрельской задаче для учеников физического или математического класса.

1. Fisher L. Rock, Paper, Scissors: Game Theory in Everyday Life. New York: Basic books, 2008
2. elementy.ru/novosti_nauki/430582/Vidy_mogut_konkurirovat_po_printsipu_kamen_nozhnitsy_bumaga
3. trv-science.ru/kamen-nozhnitsy-bumaga
4. besjournals.onlinelibrary.wiley.com/toc/13652745/2018/106/3
5. onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/mec.12113
6. ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3813331/
7. trv-science.ru/netranzitivnost-kladez/
8. eudml.org/doc/264121
9. Шейнерман Э. Путеводитель для влюбленных в математику. — М.: Альпина нон-фикшн, 2018
10. mathnet.ru/links/a0585673f693244cc54dd424a43cce1f/mp346.pdf
11. gowers.wordpress.com/a-potential-new-polymath
12. gowers.files.wordpress.com/2017/07/polymath131.pdf
13. mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=21644
14. doi.org/10.4169/math.mag.89.2.133
15. doi.org/10.1073/pnas.1014428108
16. researchgate.net/publication/331865943_education.yandex.ru/pme/
17. trv-science.ru/mozg-lyubit-trudnye-zadachi/
18. arxiv.org/abs/1809.03869
19. psy-journal.hse.ru/data/2011/04/26/1210581923/88-111.pdf