УДК 512.74

О нормальности замыканий сферических орбит*

© 1997. И. В. Аржанцев

Пусть X — нормальное алгебраическое многообразие, G — редуктивная группа, действующая на X регулярными автоморфизмами, и B — борелевская подгруппа в G. Основное поле k считаем алгебраически замкнутым и $\operatorname{char}(k) = 0$. Сложностью действия $G:X$ называют коразмерность B-орбиты общего положения на X или, что эквивалентно, степень трансцендентности поля рациональных B-инвариантов $k(X)^B$. Действия сложности нуль называют сферическими. Примером сферического действия служит действие алгебраического тора, у которого имеется открытая орбита. Такие действия называются торическими. Известно [1], что на торическом многообразии замыкание всякой орбиты нормально. Аналогичный результат известен и для произвольного сферического многообразия. В этой работе мы докажем нормальность замыканий орбит для некоторого класса действий сложности один.

Теорема. *Пусть связная редуктивная группа G действует на нормальном аффинном многообразии X со стабилизатором общего положения H, сложность этого действия равна единице и категорный фактор $X//G$ одномерен. Тогда замыкание всякой G-орбиты в X нормально.*

Замечания. 1) Теорема справедлива и для неаффинных алгебраических многообразий, если условие $\dim X//G = 1$ заменить на условие существования одномерного хорошего в смысле Мамфорда фактора.

2) Покажем, что условия теоремы ослабить нельзя. В случае однопараметрического семейства орбит сложности один рассмотрим действие группы SL_2 в бинарных формах степени три. Здесь орбита общего положения изоморфна SL_2/Z_3, фактором является прямая, нуль-конус есть замыкание орбиты формы x^2y и это замыкание не является нормальным. Для вложения однородного пространства сложности один подходит предыдущий пример, если рассматривать действие группы GL_2. В случае однопараметрического семейства сферических орбит при условии, что $\dim X//G = 0$, рассмотрим действие одномерного тора на плоскости, заданное формулой $(x, y) \to (t^2x, t^3y)$. Для двухпараметрического семейства сферических орбит с двумерным фактором можно рассмотреть действие одномерного тора в трехмерном пространстве $(x, y, z) \to (t^{-1}x, t^2y, t^3z)$.

3) Для линейного представления связной полупростой группы с одномерным фактором алгебра инвариантов есть кольцо многочленов от одной переменной, и порождающий эту алгебру многочлен неприводим. Последнее означает неприводимость нуль-конуса такого представления. Поэтому из теории этального слайса следует, что если в условиях теоремы группа G полупроста, а многообразие X неособо, то всякий слой морфизма факторизации, содержащий неподвижную точку, нормален.

* Работа выполнена при финансовой поддержке ISSEP, грант a96-423, и CRDF, грант RM1-206.

Доказательство теоремы. 1. Предположим, что на X имеется открытое G-инвариантное подмножество, изоморфное $U \times G/H$, где U — гладкая кривая с тривиальным действием группы G. Такие действия $G{:}X$ мы называем бирационально тривиальными. В работе [3] показано, что в этом случае найдется такое открытое аффинное покрытие $\{U_i\}$ кривой $C = X//G$, что для всякого i имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\phi} & S_i \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ U_i & \xrightarrow{\phi_1} & A^1 \end{array}$$

причем морфизмы ϕ и ϕ_1 этальны и $\pi^{-1}(U_i)$ есть обратный образ S_i. Здесь S_i — вложение однородного сферического пространства $k^* \times G/H$ группы $k^* \times G$, а π и π_1 — морфизмы факторизации по группе G. Таким образом, замыкание всякой G-орбиты на X изоморфно замыканию соответствующей G-орбиты на некотором S_i. Всякая неприводимая компонента слоя морфизма факторизации для X (и для S_i) содержит плотную сферическую орбиту [2]. Покажем, что каждая такая компонента нормальна. Слой $\pi_1^{-1}(a)$, $a \neq 0$, нормален и неприводим как слой общего положения, см. [3]. Если K — компонента слоя $\pi_1^{-1}(0)$, то K является замыканием некоторой $k^* \times G$-орбиты на сферическом многообразии и потому нормальна. Итак, всякая компонента есть сферическое G-многообразие, откуда следует утверждение теоремы. В частности, теорема доказана для действия тора, так как известно, что всякое действие тора бирационально тривиально.

2. Для произвольного действия $G{:}X$ рассмотрим многообразие $Y = \mathrm{Spec}(k[X]^U)$, где U — максимальная унипотентная подгруппа в G. Имеется естественное действие максимального тора T группы G на Y, причем $X//G \cong C \cong Y//T$. Согласно критерию нормальности Луны–Вуста, нормальность многообразия X эквивалентна нормальности многообразия Y. Действие $T:Y$ удовлетворяет условиям теоремы, и поэтому достаточно доказать, что алгебра U-инвариантов на неприводимой компоненте Z_i слоя Z морфизма $\pi\colon X \to C$ T-изоморфна алгебре регулярных функций на некоторой неприводимой компоненте $\widetilde{Z}_i$ слоя $\widetilde{Z}$ морфизма $\tilde{\pi}\colon Y \to C$. Пусть $k[Z]$ — приведенная алгебра функций на слое. Ясно, что $k[Z]^U$ есть приведенная алгебра функций на соответствующем слое $\widetilde{Z}$. Разложению на неприводимые компоненты соответствует задание в алгебре $k[Z]$ набора минимальных простых идеалов $I_1, \ldots, I_k$, удовлетворяющего условию $I_1 \cap \cdots \cap I_k = \{0\}$. Переходя к алгебре U-инвариантов, получаем $I_1^U \cap \cdots \cap I_k^U = \{0\}$. Несложно проверить, что $I_1^U, \ldots, I_k^U$ — минимальные простые идеалы алгебры $k[Z]^U$ и что $(k[Z]/I_j)^U = k[Z]^U/I_j^U$. Теорема доказана.

Пусть редуктивная группа G действует на аффинном многообразии X. Множество X^{sp} точек, орбиты которых сферичны, замкнуто в X [2]. Пусть замыкание некоторой орбиты из X^{sp} не является нормальным. Если включить эту орбиту в однопараметрическое семейство орбит той же размерности в X^{sp} и если замыкание этого семейства содержит более одной замкнутой орбиты, то из теоремы следует, что это замыкание также не нормально.

Пример 1. Пусть V_d — пространство бинарных форм степени d с естественным действием группы SL_2. Рассмотрим SL_2-модуль $V = A_1 \oplus \cdots \oplus A_l \oplus V_{2d_1} \oplus \cdots \oplus V_{2d_k}$, где A_i — одномерные тривиальные SL_2-модули. Заметим, что для всякого действия группы SL_2 стабилизатор общего положения существует. Рассмотрим множество $L = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_l, \alpha_{l+1}x^{d_1}y^{d_1}, \dots, \alpha_{l+k}x^{d_k}y^{d_k})\}$, где $(\alpha_1, \dots, \alpha_{l+k})$ принадлежат некоторой кривой C в $(l+k)$-мерном пространстве. Пусть $X = \overline{SL_2L}$. Так реализуется всякое трехмерное аффинное многообразие со стабильным нетранзитивным SL_2-действием. Пусть имеется неподвижная точка $x = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_l^0, 0, \dots, 0)$ на X. Если кривая C задана явно, можно найти орбиту, содержащую x в своем замыкании. Она имеет вид $SL_2(\alpha_1^0, \dots, \alpha_l^0, \alpha_{l+1}^0 x^{2d_1}, \dots, \alpha_{l+p}^0 x^{2d_p}, 0, \dots, 0)$ после подходящей перенумерации координат. Если $d_i > \text{НОД}(d_1, \dots, d_p)$ для всех $i = 1, \dots, p$, то замыкание этой орбиты не нормально и потому не нормально все многообразие X.

Пример 2. В работе Р. Ричардсона [6, Sec. 10] исследовалась нормальность замыкания G-орбиты прямой из максимального тора в пространстве присоединенного представления простой группы G. Предложение 10.2 этой работы утверждает, что в случае $G = SO_n$, $n = 2k+1$, для прямой общего положения такое замыкание нормально. Приведем пример прямой L в соответствующей алгебре, для которой $\overline{GL}$ не нормально. Пусть $L = \langle h_{\varepsilon_k} \rangle$ — прямая, натянутая на полупростой элемент h_{ε_k}, см. [7, с. 158], и предположим, что $k = 2l+1$. Тогда в замыкании орбиты этой прямой лежит орбита нильпотентного элемента, соответствующего жордановым блокам размеров $(3, 2, \dots, 2)$. Орбита такого элемента сферична [8, th. 4.4] и потому сферичны все орбиты ее пласта. Замыкание этой орбиты не нормально [9, Sec. 3.4, 16.2]. Поэтому не нормально и замыкание орбиты прямой L. Заметим, что, согласно [6, prop. 10.3], конус $\pi^{-1}(\pi(L))$, где π — морфизм факторизации для присоединенного представления, нормален и является многообразием Коэна–Маколея. В частности, для $\overline{GL}$ выполнено необходимое условие нормальности Ричардсона [6] и поэтому методами этой работы ненормальность замыкания орбиты прямой L установить нельзя.

К сожалению, нашим методом не удается доказывать нормальность однопараметрических семейств сферических орбит.

Пример 3. Пусть одномерный тор действует на поверхности $x^2 = yz^3$ по формуле $(x, y, z) \to (tx, t^2y, z)$. Тогда все слои морфизма факторизации и фактор нормальны и суть аффинные прямые, однако сама поверхность не нормальна.

В заключение перечислим все линейные группы из двух указанных ниже классов, удовлетворяющих условию теоремы.

Неприводимые представления полупростых групп: SO_n, S^2SL_n, Λ^2SL_{2k}, $Spin_7$, $Spin_9$, G_2, E_6, $SL_n \otimes SL_n$, $SL_2 \otimes Sp_n$, $SL_4 \otimes Sp_4$.

Приводимые представления простых групп: $SL_n \oplus SL_n'$, $SL_n \oplus \Lambda^2SL_n$, $SL_{2k}' \oplus \Lambda^2SL_{2k}$, где $'$ означает сопряженное представление.

Можно также проверить, что приводимое представление простой группы не может быть сферическим. Список неприводимых действий получается из теоремы 3 работы [4], а нужные нам приводимые представления простых групп можно найти, используя таблицы Элашвили [5].

Автор благодарит Э. Б. Винберга и Д. И. Панюшева за внимание к работе и полезные замечания.

Литература

1. *Kempf G., Knudson F., Mumford D., Saint-Donat B.* Toroidal Embeddings. Lect. Notes in Math., Vol. 339, Springer-Verlag, 1973. **2.** *Аржанцев И. В.* Известия РАН, сер. матем., **61**, № 4, 3–18 (1997). **3.** *Аржанцев И. В.* Матем. сб., **188**, № 5, 3–20 (1997). **4.** *Кас V. G.* J. Algebra, **64**, 190–213 (1980). **5.** *Элашвили А. Г.* Функц. анализ и его прил., **6**, вып. 1, 51–62 (1972). **6.** *Richardson R. W.* In: Lect. Notes in Math., Vol. 1271, 1987, p. 243–264. **7.** *Винберг Э. Б., Онищик А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. Наука, М., 1988. **8.** *Panyushev D. I.* Manuscripta Math., **83**, 223–237 (1994). **9.** *Kraft H., Procesi C.* Comment. Math. Helvetici, **57**, 539–602 (1982).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
17 марта 1997 г.

УДК 517.956.227

О сходимости следа степени оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на сфере S^n ⋆

© 1997. А. Н. Бобров, В. Е. Подольский

Рассмотрим оператор Лапласа–Бельтрами Δ_0 на сфере S^n из R^{n+1}. Обозначим через $\Delta = \Delta_0 + (n-1)^2/4$ нормализованный оператор Лапласа–Бельтрами, а через q оператор умножения на комплекснозначную бесконечно дифференцируемую функцию на S^n. Пусть $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ — собственные числа операторов $-\Delta$ и $-\Delta+q$ соответственно, занумерованные с учетом кратности в порядке возрастания их действительных частей. Спектр оператора $-\Delta$ на S^n хорошо известен [1]: это точки $\lambda_{ki} = (k+(n-1)/2)^2$, $k=0,1,\dots$, $i=1,\dots,N_k$, где $N_k \sim ck^{n-1}$. Для собственных чисел оператора $-\Delta+q$ мы будем также использовать двойную нумерацию μ_{ki}, согласованную с нумерацией λ_{ki}.

В работах [2–5] В. Гийемин детально изучил спектр оператора $-\Delta+q$ на M, где M — симметрическое пространство ранга 1 (см., например [1]) и $q \in C^\infty(M)$, и показал, в частности, что оценка $|\mu_{ki}-\lambda_{ki}| = O(1)$, $i=1,\dots,N_k$, получаемая методами теории возмущений [6, с. 271], не может быть улучшена при вещественнозначных $q \neq \mathrm{const}$ ни для каких M, кроме сферы S^n. Более того, в [3] показано, что множество предельных точек последовательности $\mu_{ki}-\lambda_{ki}$, $k=0,1,\dots$, $i=1,\dots,N_k$, есть отрезок $[a,b]$ вещественной оси, и для a и b предъявлены формулы, выражающие их через q. Кроме того, в [4] для всех $n\neq 2$, а в [7] для $n=2$ показано, что для сферы S^n эта оценка может быть улучшена лишь для нечетных функций q до $|\mu_{ki}-\lambda_{ki}| = O(k^{-2})$, $i=1,\dots,N_k$, и O можно заменить на o только для $q\equiv 0$.

⋆ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 96-15-96049).