УДК 512.74

И. В. Аржанцев

О действиях редуктивных групп с однопараметрическим семейством сферических орбит

Данная работа посвящена изучению действий редуктивных групп на нормальных аффинных алгебраических многообразиях с однопараметрическим семейством сферических орбит максимальной размерности при условии, что категорный фактор для такого действия одномерен. В качестве приложения полученных результатов мы завершаем классификацию действий группы SL_2 на нормальных трехмерных аффинных многообразиях. Основное поле K предполагается алгебраически замкнутым и нулевой характеристики.

Библиография: 15 названий.

1. Введение

Сложностью $c(X,G)$ действия $G : X$ линейной алгебраической группы G на алгебраическом многообразии X называют коразмерность орбиты общего положения для индуцированного действия борелевской подгруппы $B : X$ или, эквивалентно,

$$c(X,G) = \operatorname{tr.deg} K(X)^B.$$

Подробнее с понятием сложности можно познакомиться по работе [1].

Действия сложности нуль называют *сферическими*.

Для действий сложности один имеются две принципиально различные возможности:

1) на X имеется открытая орбита группы G, имеющая сложность 1;
2) группа G действует на X с однопараметрическим семейством сферических орбит максимальной размерности (будем в этом случае говорить, что X является qs-многообразием (quasi-spherical variety) относительно действия группы G).

В этой работе мы будем рассматривать только вторую возможность.

Далее, если не оговорено противное, будем считать, что G – связная редуктивная группа, регулярно действующая на неприводимом *нормальном* аффинном многообразии X.

Предположим, что орбита общего положения для такого действия сферична. Тогда и все орбиты группы G на многообразии X сферичны (см. [2]). Здесь мы покажем, что в этой ситуации при условии существования стабилизатора общего положения почти все замыкания типичной орбиты изоморфны, т.е. определено “замыкание общего положения”.

Работа выполнена при поддержке Международной соросовской программы образования в области точных наук, подпрограмма “Соросовские аспиранты” (грант № a96-423).

Затем мы переходим к случаю действий сложности один со сферическими орбитами. Примерами таких действий служат вложения однородного пространства $K^* \times G/H$, где H – алгебраическая сферическая подгруппа группы G (однородное пространство $K^* \times G/H$ сферично по отношению к группе $K^* \times G$ и имеет сложность 1 при естественном действии группы G). Такие вложения могут быть классифицированы в рамках общей теории Луны–Вуста.

Будем называть нормальное аффинное qs-многообразие с условием $\dim X//G = 1$ $qs1$-многообразием. Если действие $G : X$ стабильно, в частности, если H содержит максимальный тор группы G, условие $\dim X//G = 1$ выполняется автоматически. Мы покажем, что всякое бирационально тривиальное $qs1$-многообразие X можно получить с помощью определяемой ниже операции склейки из сферических вложений однородного пространства $K^* \times G/H$. Под бирациональной тривиальностью здесь подразумевается наличие в X открытого G-инвариантного подмножества, изоморфного $G/H \times U$, где U – гладкая аффинная кривая с тождественным действием группы G. Если группа эквивариантных автоморфизмов однородного пространства G/H, изоморфная $N_G(H)/H$, конечна, то склейка производится однозначно, и поэтому изучение такого класса действий сводится к хорошо разработанной теории сферических вложений. Для бирационально нетривиального действия доказывается, что оно может быть получено как фактор по действию конечной группы из бирационально тривиального действия с той же G-орбитой общего положения. Отсюда, в частности, вытекает рациональность особенностей $qs1$-многообразий. Далее рассматривается класс G-многообразий, полученных с помощью операции склейки, но уже не обязательно над аффинной, а над любой гладкой алгебраической кривой. Оказывается, этот класс G-многообразий характеризуется наличием "хорошего фактора" для действия группы G в смысле работ Д. Мамфорда.

Затем изучаются свойства слоев морфизма факторизации для $qs1$-многообразий.

Полученные результаты позволят нам завершить классификацию действий группы SL_2 на нормальных неприводимых трехмерных аффинных алгебраических многообразиях. Напомним необходимые для этого сведения.

Лемма 1.1 (см., например, [3, п. 4.1, лемма 2]). *Любая алгебраическая подгруппа в SL_2 сопряжена одной из следующих подгрупп:*

1) *конечная подгруппа;*
2) *борелевская подгруппа B;*
3) *максимальный тор T;*
4) *нормализатор максимального тора N;*
5) *конечное расширение максимальной унипотентной подгруппы*

$$U_n = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \middle|\, a, \varepsilon \in K,\ \varepsilon^n = 1 \right\}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots .$$

Лемма 1.2. *Для всякого действия SL_2 существует стабилизатор общего положения (с.о.п.).*

Пусть имеется действие $SL_2 : X$ и многообразие X трехмерно. Если с.о.п. такого действия есть конечная подгруппа, то X содержит плотную орбиту группы SL_2.

Такие действия классифицированы в работе [4], см. также [3]. Там показано, что локально транзитивное действие группы SL_2 на трехмерном нормальном аффинном многообразии есть либо транзитивное действие, либо определяется парой чисел из $\mathbb{N}\times(0,\frac{1}{2}]_{\mathbb{Q}}$. Первое из этих чисел определяет порядок стабилизатора общего положения, который в этой ситуации является циклической подгруппой. Второе число называется *высотой* и характеризует алгебру U-инвариантов.

Остаются еще три возможности:

1) с.о.п. $= U_n$ – назовем такие SL_2-многообразия (S,U)-многообразиями;
2) с.о.п. $= N$ – назовем такие SL_2-многообразия (S,N)-многообразиями;
3) с.о.п. $= T$ – назовем такие SL_2-многообразия (S,T)-многообразиями.

Замечание. Случай с.о.п. $= B$ невозможен, так как SL_2/B есть проективная прямая.

Всякое (S,U)-многообразие однозначно восстанавливается по спектру алгебры U-инвариантов, который представляет собой нормальную поверхность с естественным действием максимального тора группы SL_2. Более точно, справедлива

Теорема 1 [2]. *(S,U)-многообразия взаимно однозначно соответствуют нормальным аффинным поверхностям Y с фиксированной нетривиальной $\mathbb{Z}_+$-градуировкой на алгебре регулярных функций $K[Y]$. Эта градуировка задает действие одномерного тора T на Y и соответствующее (S,U)-многообразие изоморфно многообразию*

$$X = (Y\times K^2)//T.$$

При этом $K[X]^{SL_2}\cong K[Y]^T$.

Эта теорема сводит классификацию (S,U)-многообразий к классификации действий одномерного тора на нормальных поверхностях. По поводу последней см. [5].

Рассмотрим случай (S,N)-многообразий. Всякое такое многообразие бирационально тривиально. Вложение сферического однородного пространства $K^*\times SL_2/N$ задается парой взаимно простых натуральных чисел и склейка таких вложений производится над гладкой аффинной кривой однозначно. Поэтому для задания (S,N)-многообразия необходимо задать гладкую неприводимую аффинную кривую и в конечном множестве ее точек расставить отметки – пары взаимно простых натуральных чисел, см. теорему 3 ниже. В работе [2] этот результат был получен топологическими методами над полем комплексных чисел без использования теории Луны–Вуста.

Бирационально тривиальные (S,T)-многообразия описываются абсолютно аналогично (S,N)-многообразиям. Остается разобрать случай бирационально нетривиальных (S,T)-многообразий. Каждое такое многообразие может быть получено как фактор по действию группы $\mathbb{Z}_2$ из бирационально тривиального (S,T)-многообразия. Поэтому бирационально нетривиальное многообразие определяется гладкой неприводимой аффинной кривой с фиксированным нетождественным действием группы $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_2$-инвариантной системой отметок, см. теорему 4.

Тем самым все нетождественные действия группы SL_2 на нормальных аффинных трехмерных алгебраических многообразиях описаны.

Гладкие (S,N)- и (S,T)-многообразия описаны в работе [2].

Автору хотелось бы выразить искреннюю признательность своему научному руководителю профессору Э. Б. Винбергу за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Много фактов, использованных при написании данной работы, я узнал в беседах с М. Брионом и Ф. Кнопом во время конференции "Algebraic group actions", проходившей в Польской Республике в июне 1996 г.

В недавно написанной работе [6] разработан подход к классификации действий сложности один в терминах теории Луны–Вуста. Сопоставление этих результатов с результатами данной работы позволило исправить ряд неточностей в последней. Автор благодарит Д. А. Тимашева за критичное прочтение предварительной версии этого текста.

2. Действия со сферической орбитой общего положения

В следующем предложении условие нормальности X несущественно.

Предложение 1. *Пусть X есть G-многообразие, все G-орбиты на X сферичны и существует стабилизатор общего положения* с.о.п.$(G : X) = H$. *Тогда почти все замыкания орбит типа G/H (для открытого плотного множества орбит G/H) изоморфны некоторому вложению Y сферического однородного пространства G/H.*

Доказательство. Пусть $\Gamma(X)$ есть полугруппа старших весов G, соответствующих неприводимым G-модулям, встречающимся в разложении алгебры $K[X]$ на неприводимые G-модули. Эта полугруппа конечно порождена по теореме Хаджиева (см. [7]). Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ – базис в $\Gamma(X)$. Зафиксируем некоторые старшие векторы $F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_k}$ G-модуля $K[X]$ весов $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, соответственно, и рассмотрим множество точек X, где ни одна из функций $F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_k}$ не обращается в нуль. Это множество открыто по Зарисскому. Отсюда следует, что замыкание орбиты общего положения есть аффинное многообразие с простым спектром (так как G/H сферично) и спектр этот есть $\Gamma(X)$. Остается показать, что умножение в алгебрах регулярных функций на таких замыканиях устроено одинаково. Это следует из того, что алгебра регулярных функций на замыкании орбиты типа G/H есть G-инвариантная подалгебра в $K[G/H]$. Последняя алгебра имеет простой спектр и потому мультипликативная структура на подалгебре с заданным разложением на неприводимые G-модули определена однозначно. Предложение доказано.

Замечания. 1) Имеется гипотеза, согласно которой сферические подгруппы в редуктивной группе не допускают непрерывных деформаций, и потому если есть действие со сферической орбитой общего положения, то с.о.п. существует автоматически. Поэтому наше условие о существовании с.о.п. по-видимому не является ограничительным.

2) Даже при условии нормальности X многообразие Y может быть не нормальным. Например, рассмотрим действие одномерного тора на двумерной плоскости

$$(x, y) \to (t^2 x, t^3 y).$$

Здесь Y – полукубическая парабола. Ниже мы покажем, что если $\dim X//G = 1$, то многообразие Y нормально и совпадает со слоем общего положения для морфизма факторизации $\pi \colon X \to X//G$.

Следующий пример, предложенный Ф.Кнопом, показывает, что если орбита общего положения G/H не сферична, то замыкания общего положения может не существовать.

Рассмотрим действие группы SL_2 на трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ как на проективизации пространства матриц $M_{2\times 2}$, на котором SL_2 действует левыми умножениями. В $\mathbb{P}^3$ есть открытая орбита типа PSL_2 и однопараметрическое семейство орбит $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, где группа SL_2 действует только на первом сомножителе.

Пусть Γ – некоммутативная конечная подгруппа в SL_2. Профакторизуем пространство $\mathbb{P}^3$ по действию Γ, индуцированному действием группы Γ на $M_{2\times 2}$ умножениями справа. В $\mathbb{P}^3/\Gamma$ по-прежнему имеется однопараметрическое семейство SL_2-орбит $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Рассмотрим произведение $(\mathbb{P}^3/\Gamma) \times \mathbb{P}^1$ с тривиальным действием SL_2 на втором сомножителе. Произведем раздутие подмногообразия $\mathbb{P}^1 \times \Delta \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3/\Gamma \times \mathbb{P}^1$, где Δ – диагональ в произведении второго и третьего сомножителей и группа SL_2 действует лишь на первом экземпляре $\mathbb{P}^1$.

На полученном многообразии вложения однородного пространства SL_2/Γ соответствуют раздутиям различных орбит типа SL_2/B и не могут быть почти все изоморфны в силу конечности группы эквивариантных автоморфизмов пространства SL_2/Γ.

Вложению полученного после раздутия проективного многообразия P в проективное пространство соответствует некоторое очень обильное расслоение на P. Рассматривая достаточно высокую тензорную степень этого расслоения, можно добиться того, чтобы аффинный конус над P был нормальным аффинным многообразием. Этот конус и является примером многообразия с орбитой общего положения типа $(K^* \times SL_2)/\Gamma$, где отсутствует замыкание общего положения.

Представляется интересным вопрос, для каких классов квазиаффинных однородных пространств замыкание общего положения существует.

3. Основная конструкция

Пусть S – нормальное аффинное вложение сферического однородного пространства $K^* \times G/H$ группы $K^* \times G$ такое, что $S//G \cong A^1$. Возникает естественное действие K^* на факторе A^1, единственную неподвижную точку которого будем считать нулем на прямой A^1. Прообраз в S всякой ненулевой точки прямой A^1 есть сферическое G-многообразие Y. Назовем Y *типичным слоем* для S.

Опишем некоторые операции, позволяющие получать новые $qs1$-многообразия из уже имеющихся.

1. *Операция перехода к расслоенному произведению.*

Пусть U есть гладкая аффинная кривая и задан этальный морфизм $\varphi\colon U \to A^1$ такой, что $\varphi^{-1}(0) = \{u\}$. Рассмотрим расслоенное произведение $X = S \times_{A^1} U$

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\varphi} & A^1 \end{array}$$

определенное условием $K[X] = K[U] \otimes_{K[A^1]} K[S]$. Многообразие X нормально (следует из этальности φ) и является $qs1$-многообразием с типичным слоем Y.

2. *Операция склейки.*

Пусть гладкая аффинная кривая C покрыта конечным числом аффинных открытых по Зарисскому множеств U_j так, что никакие два из них не совпадают, пересечение всех этих множеств есть открытое множество U и $U_j = U \cup \{c_j\}$, $c_j \in C$ для любого j.

Пусть имеется набор аффинных многообразий $\{L_j\}$ и морфизмов $\{L_j \to U_j\}$ таких, что прообразы множества U во всех многообразиях L_j изоморфны друг другу, причем изоморфизмы согласованы с данными морфизмами. Тогда отождествим многообразия L_j по этому изоморфному открытому множеству. Получим некоторое предмногообразие L и согласно аффинному критерию из [8, с. 44] заданные морфизмы "склеиваются" в морфизм $L \to C$.

Изоморфизмы открытых кусков определены не канонически, поэтому результат склейки определен не однозначно. Будем говорить, что L получено из многообразий L_j операцией склейки, если L получено с помощью описанной выше конструкции при некотором выборе изоморфизмов изоморфных открытых подмножеств.

В нашей ситуации пусть $\{S_j\}$ есть набор сферических вложений для $K^* \times G/H$ с одним и тем же типичным слоем Y. Если для всякого U_j задан этальный морфизм, использованный в операции перехода к расслоенному произведению, над каждым U_j можно построить соответствующее расслоенное произведение X_j и затем отождествить ("склеить") их по изоморфному куску $U \times Y$. Получим некоторое предмногообразие X.

Лемма 3.1. *Предмногообразие X отделимо, т.е. является алгебраическим многообразием.*

Доказательство. Известно (см. [8, с. 50], что отделимость предмногообразия X эквивалентна следующему свойству: для любых двух морфизмов $\varphi, \psi\colon Y \to X$ (Y – любое предмногообразие) множество $\{y \in Y \mid \varphi(y) = \psi(y)\}$ замкнуто в Y. Там же показано, что если любые две точки из X лежат в одном открытом аффинном подмножестве, то X отделимо. Пусть для некоторых морфизмов $\varphi, \psi\colon Y \to X$ множество $Z = \{y \in Y \mid \varphi(y) = \psi(y)\}$ и $z \in \overline{Z} \setminus Z$. Точки $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ не могут лежать в одном из склеиваемых аффинных многообразий, поскольку это противоречит отделимости этого аффинного многообразия. Поэтому можно считать, что $\varphi(z) \in \pi^{-1}(c_{j_1})$ и $\psi(z) \in \pi^{-1}(c_{j_2})$, $j_1 \neq j_2$. Рассмотрим композиции морфизмов $\pi \circ \varphi$, $\pi \circ \psi\colon Y \to C$. Поскольку C есть отделимое многообразие, множество $Z' = \{y \in Y \mid (\pi \circ \varphi)(y) = (\pi \circ \psi)(y)\}$ замкнуто в Y и $z \notin Z'$. С другой стороны ясно, что $Z \subset Z'$. Полученное противоречие доказывает лемму 3.1.

Аффинность многообразия X вытекает из следующей леммы.

Лемма об аффинном морфизме (см. [9]). *Пусть $f\colon X \to Y$ – морфизм алгебраических многообразий такой, что существует открытое покрытие $\{V_i\}$ многообразия Y и $f^{-1}(V_i)$ аффинно для каждого i. Тогда для любого аффинного открытого множества $V \hookrightarrow Y$ $f^{-1}(V)$ – аффинно.*

Предложение 2. *Если группа $\mathrm{Aut}_G Y$ конечна, то склейка определена однозначно.*

Для доказательства нам потребуется

Лемма 3.2. *Всякий G-автоморфизм многообразия Y однозначно продолжается до G-автоморфизма многообразия S, тождественного на факторе $S//G$.*

Доказательство. Поскольку $K[Y]$ есть G-модуль с простым спектром, всякий G-автоморфизм действует на каждом его неприводимом подмодуле умножением на некоторую константу. Этот автоморфизм естественным образом продолжается на $K[(A^1 \setminus \{0\}) \times Y]$, а затем и на $K[S]$ как на G-инвариантную подалгебру. Лемма 3.2 доказана.

В силу конечности группы $\mathrm{Aut}_G Y$ отождествление по изоморфному открытому подмножеству многообразий S_{j_1} и S_{j_2} задается одним элементом группы $\mathrm{Aut}_G Y$ и потому единственно с точностью до изоморфизмов склеиваемых многообразий. Предложение 2 доказано.

Замечание. Если группа $\mathrm{Aut}_G Y$ бесконечна, склейка может быть осуществлена многими способами. Так если G – одномерный тор, вопрос о числе способов отождествления есть вопрос о числе локально тривиальных в топологии Зарисского линейных расслоений над гладкой аффинной кривой.

Покажем, что предложенная конструкция склейки является в некотором смысле универсальной.

Определение. Назовем $qs1$-многообразие X *простым*, если выполнены следующие условия:

(1) существует с.о.п.$(G : X) = H$;
(2) многообразие X имеет тривиальный бирациональный тип, т.е. содержит открытое G-инвариантное подмножество X_0, изоморфное $G/H \times U$ для некоторой гладкой кривой U.

Условие (2) эквивалентно тривиальности некоторого класса когомологий Галуа. Если G есть тор, то это условие выполнено для любого действия. Можно показать, что условие (2) выполнено, если группа $N_G(H)/H$ связна, см. [7, п. 2.7].

Следующее предложение показывает, что каждое $qs1$-многообразие можно получить из простого $qs1$-многообразия факторизацией по конечной группе.

Предложение 3. *Для любого $qs1$-многообразия X со стабилизатором общего положения H найдется простое $qs1$-многообразие $\widetilde{X}$ с тем же стабилизатором общего положения и конечная группа F, действующая на $\widetilde{X}$ регулярными G-эквивариантными автоморфизмами так, что*

$$X \cong \widetilde{X}//F.$$

Доказательство. Пусть $X_1 \subset X$ – открытое подмножество, состоящее из точек, стабилизаторы которых сопряжены H, и $X_1^H \subset X_1$ – множество H-неподвижных точек. Рассмотрим произвольную кривую в X_1^H, пересекающую $N_G(H)$-орбиты общего положения в X_1^H трансверсально. Эта кривая определяет квазисечение для действия $G : X$. Имеется естественный доминантный морфизм $G/H \times U \to X$. Рассмотрим расширение $K(X//G) \subset K(U)$ и продолжим его до расширения Галуа $K(X//G) \subset K(U) \subset K(\widetilde{U})$ с группой Галуа F.

Пусть $\widetilde{K[X]}$ есть целое замыкание $K[X]$ в $K(G/H \times \widetilde{U})$ и $\widetilde{X} = \operatorname{Spec} \widetilde{K[X]}$. Из конечности морфизма $\widetilde{X} \to X$ вытекает его сюръективность. Учитывая нормальность X, мы получаем $X \cong \widetilde{X}//F$. Наконец тот факт, что $\widetilde{X}$ бирационально изоморфно $G/H \times \widetilde{U}$, вытекает из следующей стандартной леммы.

Лемма 3.3. *Пусть A – конечно порожденная целостная алгебра над полем K и $F_1 = QA$ – ее поле частных. Если $F_1 \subset F_2$ – конечное расширение полей и B - целое замыкание A в поле F_2, то $QB = F_2$.*

Вернемся к простым $qs1$-многообразиям. Обозначим через Y замыкание орбиты G/H общего положения, которое существует согласно предложению 1. Алгебра регулярных функций на X_0 есть $K[U] \bigotimes_K K[G/H]$ и алгебра $K[G/H]$ имеет простой спектр. Уменьшив если нужно U, можно считать, что в X есть открытое G-инвариантное подмножество, изоморфное $U \times Y$. Далее через X_0 будем обозначать это подмножество.

Обозначим через $C = X//G$ гладкую аффинную кривую $\operatorname{Spec} K[X]^G$ (гладкость следует из нормальности X). Для морфизма факторизации $\pi\colon X \to C$ все компоненты слоев имеют коразмерность 1 в X. Следующее предложение показывает, что кривую U можно рассматривать как подмножество в C и $\pi^{-1}(U) = X_0 \cong U \times Y$.

Предложение 4. *Пусть $f\colon X \to X_1$ есть доминантный морфизм неприводимых нормальных аффинных многообразий и слои общего положения этого морфизма связны (для морфизма факторизации по связной редуктивной группе последнее условие выполнено). Тогда слои общего положения неприводимы.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{K(X_1)}$ – алгебраическое замыкание поля $K(X_1)$ в $K(X)$. Если $\widetilde{K(X_1)} \neq K(X_1)$, то по лемме 3.3 и $\widetilde{K[X_1]} \neq K[X_1]$, где $\widetilde{K[X_1]}$ - целое замыкание $K[X_1]$ в $K(X)$. Из нормальности X вытекает включение $\widetilde{K[X_1]} \subset K[X]$ и потому имеются регулярные морфизмы $X \to \widetilde{X}_1 \to X_1$, где последний морфизм конечен и небирационален. Это противоречит условию связности слоев.

В случае $\widetilde{K(X_1)} = K(X_1)$ см. [10, с. 172]. Предложение доказано.

Замечание. Без условия нормальности X утверждение предложения неверно – можно рассмотреть поверхность $x^2 = y^2 z$ и проекцию на прямую с координатой z.

Пусть $K[Y] = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ – изотипное разложение. Тогда $K[X_0] = \bigoplus (K[U] \otimes_K V_\lambda)$ и потому в силу G-инвариантности $K[X] = \bigoplus (T_\lambda \otimes_K V_\lambda)$, где $T_\lambda \subset K[U]$.

Алгебра $K[X]$ конечно порождена и можно считать ее порожденной элементами вида $c_{\lambda_i} v_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, s$, $v_{\lambda_i} \in V_{\lambda_i}$, $c_\lambda \in K[U]$. Уменьшая множество U, мы можем считать, что $c_{\lambda_i} \in K[U]^*$.

Пусть $C \setminus U = \{y_1, \ldots, y_t\}$. Можно считать, вновь (если нужно) уменьшая U, что:

1) $U_j = U \bigcup \{y_j\}$ аффинно;
2) существует $\pi_j \in R_j$ такое, что $\pi_j = \varrho_j^*$, $\varrho_j\colon U_j \to A^1$ – этально и $\varrho_j^{-1}(0) = \{y_j\}$ (здесь $R_j = K[U_j]$).

Обозначим через R кольцо $K[U]$. Тогда $\pi_j R_j =$ идеал y_j и $R^* = R_j^* \times \{\pi_j^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Пусть $X_j = \pi^{-1}(U_j)$. Тогда

$$K[X_j] = R_j[\dots, \pi_j^{r_l} V_{\lambda_l}, \dots]$$

для некоторого конечного набора пар $P_j = \{(r_l, \lambda_l) \in \mathbb{Z} \times \Gamma(X)\}$.

Рассмотрим многообразие

$$S_j = \operatorname{Spec} K[t, \dots, t^{r_l} V_{\lambda_l}, \dots], \qquad K[t, \dots, t^{r_l} V_{\lambda_l}, \dots] \subset K[t] \otimes K[Y].$$

На S_j определено естественное действие одномерного тора (на переменной t) и потому S_j становится сферическим многообразием для группы $K^* \times G$.

Имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc}
X_j & \xrightarrow{q} & U_j \times_{A_t^1} S_j & \xrightarrow{p_2} & S_j \\
\bigcup & & \bigcup & & \bigcup \\
U \times Y & \xrightarrow{\cong} & U_j \times_{A_t^1} (Y \times K^*) & \longrightarrow & Y \times K^*
\end{array}$$

и отображение q есть изоморфизм. Поскольку $\varrho_j \colon U_j \to A^1$ этально, проекция p_2 также этальна. В частности, S_j нормально.

Итак, многообразие X получается переходом к расслоенным произведениям от сферических многообразий S_j к X_j и последующей склейкой X_j. В наших рассуждениях мы следовали работе [5], где подобные рассмотрения проводятся в торическом случае. Нами доказана:

Теорема 2.1. *Всякое простое $qs1$-многообразие со стабилизатором общего положения H может быть получено операцией склейки из нормальных сферических вложений S_j однородного пространства $K^* \times G/H$ с одним и тем же типичным слоем Y и условием $S_j//G = A^1$.*

Замечание. В духе работы [5] можно сказать, что простые $qs1$-многообразия *сфероидальны.*

Следствие. *Особенности $qs1$-многообразия рациональны.*

Действительно, для сферических многообразий рациональность особенностей показана в [11] и следствие вытекает из этальности построенных морфизмов и предложения 4, так как рациональность особенностей сохраняется при факторизации по конечной (и вообще редуктивной) группе, см. [7, п. 3.9].

Далее предполагается, что читатель знаком с понятием цветного конуса. С этим понятием можно познакомиться по работе [12].

Пусть задан конечный набор цветных конусов C_j, определяющих вложения S_j однородного пространства $K^* \times G/H$. Склейка этих вложений над некоторой кривой в одно простое $qs1$-многообразие возможна тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: (а) $S_j//G = A^1$; (б) типичный слой у всех вложений S_j изоморфен некоторому G/H-вложению Y для всех j; (в) S_j аффинны.

Определение. Назовем qs-многообразие X *жестким*, если для стабилизатора общего положения H выполнено условие $N_G(H) = H$.

Если сферическое однородное пространство G/H квазиаффинно и группа $N_G(H)/H$ конечна, то из результатов М. Бриона и Ф. Кнопа вытекает, что подгруппа H редуктивна, см., например, [13, cor. 7.6]. Согласно критерию Луны замкнутости орбит однородное пространство G/H в этом случае допускает лишь одно аффинное вложение, состоящее из единственной орбиты G/H. Поэтому G-орбиты общего положения на X замкнуты и всякое жесткое qs-многообразие является $qs1$-многообразием. Всякое жесткое qs-многообразие бирационально тривиально.

Для жестких qs-многообразий теорема 2.1 с учетом предложения 2 может быть переформулирована следующим образом:

Теорема 2.2. *Всякое жесткое qs-многообразие X со стабилизатором общего положения H однозначно определяется следующим набором данных*:

1) *гладкая аффинная кривая C (которая есть фактор $X//G$)*;
2) *конечный набор P попарно различных точек кривой C (возможно, пустой)*;
3) *каждой точке множества P поставлен в соответствие цветной конус для однородного пространства $K^* \times G/H$, не лежащий в подпространстве, соответствующем G/H и задающий аффинное вложение пространства $K^* \times G/H$.*

Обратно, всякий такой набор данных определяет жесткое qs-многообразие группы G.

Замечание. В работе [12] указан критерий, позволяющий легко выяснять, аффинно ли вложение, отвечающее данному цветному конусу.

Следствие. *Если в условиях теоремы 2.2 дополнительно известно, что ранг однородного пространства G/H равен единице, то с каждой точкой множества P вместо цветного конуса достаточно связывать пару взаимно простых натуральных чисел. В этом случае все слои морфизма факторизации $\pi\colon X \to C$ неприводимы.*

Доказательство. Известно (см. [12]), что размерность конуса инвариантных нормирований $\Upsilon_{G/H}$ равна рангу соответствующего однородного пространства и при условии конечности группы $N_G(H)/H$ конус $\Upsilon_{G/H}$ строго выпуклый. Можно отождествить $\Upsilon_{G/H}$ с отрицательным лучом координатной прямой и потому конус $\Upsilon_{K^* \times G/H}$ совпадет с левым полупространством (рис. 1).

Множество красок у пространства G/H непусто, иначе G/H допускает как минимум два аффинных вложения $(0, \varnothing)$ и $(\Upsilon_{G/H}, \varnothing)$. Не все краски расположены слева, иначе имелся бы аффинный конус $(\Upsilon_{G/H}, \rho(D))$. Однородное пространство G/H аффинно, поэтому все его краски лежат справа. Применяя автоморфизм тора $K^*\colon t \to t^{-1}$, можно считать, что наш цветной конус расположен в верхней полуплоскости. Он должен содержать все краски пространства G/H и потому для его задания необходимо и достаточно задать один луч в левом верхнем квадранте. Поскольку объемлющее пространство задано над полем рациональных чисел, такой

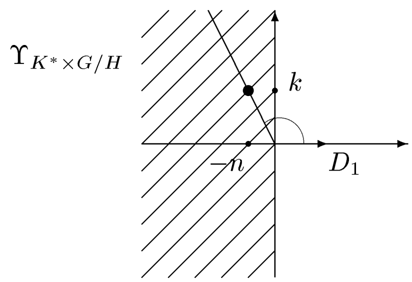

Рис. 1

луч однозначно определяется парой взаимно простых натуральных чисел. Заданный луч отвечает неприводимому дивизору, который есть слой морфизма факторизации над особой точкой, и поэтому все слои неприводимы. Следствие доказано.

Ясно, что склейка аффинных вложений S_j возможна не только над аффинной, но и над произвольной гладкой алгебраической кривой. Выясним, какой класс G-многообразий сложности один так получается.

В геометрической теории инвариантов Д. Мамфорда было введено понятие "хорошего фактора" (в англоязычной литературе – "good quotient").

Определение. Пусть X – алгебраическое G-многообразие. Морфизм $\pi\colon X \to C$, где C – алгебраическое пространство, называется "*хорошим фактором*", если

а) морфизм π G-эквивариантен относительно данного действия G на X и тождественного действия G на C;
б) π есть аффинный морфизм;
в) $\pi_*(O_X^G) \cong O_C$.

Условие б) означает, что на C найдется конечное аффинное покрытие такое, что его прообраз есть аффинное покрытие X. "Хороший фактор" является категорным фактором и потому определен однозначно с точностью до канонического изоморфизма. Существование такого фактора для произвольных действий на алгебраических многообразиях – явление редкое. Для этого необходимо, в частности, чтобы у каждой точки из X существовала открытая аффинная инвариантная окрестность. В случае, когда X аффинно, "хороший фактор" $\pi\colon X \to \mathrm{Spec}(K[X]^G)$ существует всегда.

Известно, что "хороший фактор" получается из фактора Мамфорда для множества полустабильных точек при некотором вложении X в проективное пространство тогда и только тогда, когда C есть квазипроективное многообразие. В более общей ситуации "хороший фактор" изучался в работах А. Бялыницкого-Бирули и Й. Свецицкой, см. [14] и библиографию там же. В этих работах рассматривалась проблема описания всех открытых инвариантных подмножеств алгебраического G-многообразия, обладающих "хорошим фактором".

Мы можем достаточно конструктивно описать некоторый класс G-многообразий, обладающих "хорошим фактором", безотносительно к какому-либо вложению.

Теорема 2.3. *Нормальное алгебраическое бирационально тривиальное G-многообразие X сложности один со стабилизатором общего положения H допускает "хороший фактор" на гладкую алгебраическую кривую C тогда и только тогда, когда оно может быть получено склейкой над кривой C нормальных аффинных сферических вложений S_j однородного пространства $K^* \times G/H$ с одним и тем же типичным слоем Y и условием $S_j//G = A^1$.*

Для доказательства теоремы 2.3 достаточно выбрать покрытие кривой C, как при проведении основной конструкции, и воспользоваться леммой об аффинном морфизме.

Поскольку всякая алгебраическая кривая квазипроективна, данный фактор можно получить с помощью конструкции Мамфорда при подходящем вложении в проективное пространство.

Следствие. *Всякое многообразие из теоремы 2.3 квазипроективно.*

4. Свойства слоев морфизма факторизации

Теорема 2.1 сводит изучение многих геометрических вопросов о многообразиях сложности 1 с однопараметрическим семейством сферических орбит к вопросам о сферических многообразиях, которые хорошо изучены. Рассмотрим вопрос о нормальности и неприводимости слоев морфизма факторизации для простых $qs1$-многообразий.

Обозначим через ω операцию перехода от G-алгебры к подалгебре ее U-инвариантов, где U есть максимальная унипотентная подгруппа в G, т.е. $\omega\colon K[X] \to K[X]^U$. Той же буквой будем обозначать аналогичный переход на уровне G-многообразий: $\omega\colon X \to \operatorname{Spec} K[X]^U$. Если X есть $qs1$-многообразие для группы G, $\operatorname{Spec} K[X]^U$ есть $qs1$-многообразие для максимального тора T группы G, причем операция ω коммутирует с переходом к алгебре регулярных функций на некотором слое морфизма факторизации. Учитывая что целозамкнутость и целостность алгебры есть устойчивые свойства в терминах работы [11], неприводимость и нормальность слоев для X эквивалентны неприводимости и нормальности слоев для T-многообразия $\operatorname{Spec} K[X]^U$. Поэтому можно ограничиться действиями торов и в силу теоремы 2.1 достаточно изучить случай, когда X есть торическое многообразие для $(n+1)$-мерного тора, где $n = \operatorname{rk} G$.

Торическое многообразие однозначно задается выпуклым конусом C в $\mathbb{Q}^{n+1}$, линейная оболочка которого совпадает со всем $\mathbb{Q}^{n+1}$ и который порожден векторами, координаты которых соответствуют всевозможным весам тора $(K^*)^{n+1}$, встречающимся в весовом разложении алгебры $K[X]$. Такой конус является двойственным по отношению к конусу, который обычно рассматривается в теории торических многообразий. Условие $X//T = A^1$ соответствует тому, что C содержит положительный луч последней координатной оси в $\mathbb{Q}^{n+1}$ и не содержит отрицательного луча (мы предполагаем, что $T \subset (K^*)^{n+1}$ по первым n координатам).

Определение. Будем говорить, что действие $T : X$ есть *fp-действие* (fixed-point action), если проекция C_0 конуса C на $\mathbb{Q}^n$ (первые n координат) лежит в некотором замкнутом полупространстве. В противном случае будем говорить о *nfp-действии.*

Если группа G полупроста, то индуцированное действие $T : \mathrm{Spec}(K[X]^U)$ является fp-действием.

Лемма 4.1. *Все слои морфизма факторизации $\pi\colon X \to X//T = A^1$, кроме слоя над нулем, являются торическими многообразиями относительно тора T, соответствующими конусу C_0.*

Доказательство. Имеем $K[X] = K[t, \dots, t^{r_l}\chi^{\lambda_l}, \dots]$. Тогда

$$K[\pi^{-1}(A^1 \setminus \{0\})] = K[X][t^{-1}] = K[t, t^{-1}] \otimes_K K[\dots, \chi^{\lambda_l}, \dots] = K[t, t^{-1}] \bigotimes_K K[Y].$$

Из леммы 4.1 следует, что nfp-действия характеризуются тем, что слой общего положения для морфизма $\pi\colon X \to X//T$ есть сам тор T.

Замечание. Если у нас имеется конечный набор конусов в $\mathbb{Q}^{n+1}$, содержащих только положительный луч последней координатной оси и проекции которых на $\mathbb{Q}^n$ совпадают, то соответствующие этим конусам торические многообразия можно склеить в одно многообразие X (неоднозначно!) и всякое нормальное аффинное $(n+1)$-мерное многообразие с эффективным действием n-мерного тора и с одномерным фактором может быть получено так.

Остается рассмотреть слой Y_0 морфизма π над нулем. На алгебре $K[Y]$ имеется корректно определенная $\mathbb{Z}$-фильтрация: сопоставим каждому весу $(q_1, \dots, q_n)$, $q_i \in \mathbb{Z}$, из C_0 минимальное из чисел $q_{n+1} \in \mathbb{Z}$ такое, что $(q_1, \dots, q_n, q_{n+1}) \in C$.

Переход от алгебры $K[X]$ к алгебре $K[Y_0]$ заключается в факторизации по идеалу (t), что можно интерпретировать как переход от $K[Y]$ к присоединенной алгебре $\mathrm{gr}\, K[Y]$ относительно введенной выше фильтрации с последующей факторизацией по максимальному нильпотентному идеалу. После этого в $K[Y]$ останутся лишь те веса, которые являются проекциями целочисленных точек, лежащих на собственных гранях конуса C. Произведение собственных относительно тора функций, отвечающих точкам, лежащим на различных гранях конуса C, будет отвечать точке, лежащей внутри конуса C, и потому после сужения на нулевой слой станет нильпотентной функцией.

Отсюда легко видеть, что число неприводимых компонент слоя Y_0 равно числу проекций максимальной размерности граней конуса C на $\mathbb{Q}^n$. Они определяют разбиение конуса C_0 на конусы той же размерности.

Предложение 5. 1) *Для nfp-действий число неприводимых компонент слоя над нулевой точкой равно числу граней конуса C.*

2) *Для fp-действий число неприводимых компонент слоя над нулевой точкой меньше или равно числу граней конуса C минус n.*

Следствие 1. *При действии полупростой группы ранга 1 или при fp-действии одномерного тора все слои морфизма факторизации неприводимы.*

Тем самым получено еще одно доказательство предложения 5 работы [2].

Следствие 2. *Для nfp действия n-мерного тора на $(n+1)$-мерном нормальном аффинном многообразии следующие условия эквивалентны*:

1) *все слои морфизма факторизации неприводимы*;
2) *все слои морфизма факторизации изоморфны самому n-мерному тору.*

В случае fp-действий неприводимость всех слоев означает, что соответствующий конус симплициален.

Заметим также, что при действии n-мерного тора на $(n+1)$-мерном многообразии доопределить это действие до локально-транзитивного действия $(n+1)$-мерного тора можно, как правило, неединственным способом, однако число граней получающегося конуса постоянно.

Рассмотрим некоторую проекцию максимальной размерности $C_{0,i}$ некоторой грани C_i конуса C, $C_{0,i} \subset C_0$. Пусть грань C_i выделена на конусе C условием $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} = 0$. Тогда проекции целочисленных точек грани C_i выделяются среди всех точек с целыми координатами, попавшими в $C_{0,i}$, условием $\dfrac{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n}{a_{n+1}} \in \mathbb{Z}$, т.е. принадлежат подрешетке конечного индекса. Потому неприводимая компонента нулевого слоя, соответствующая грани $C_{0,i}$, есть торическое многообразие, но уже не для самого тора T, а для его фактора по конечной подгруппе, определенной указанной подрешеткой. Отсюда следует

Предложение 6. *Пусть имеется простое $qs1$-действие редуктивной группы G. Тогда все неприводимые компоненты каждого из слоев морфизма факторизации нормальны.*

Перейдем теперь к случаю $G = SL_2$.

5. Классификация (S, N)-многообразий

Рассмотрим классификацию аффинных нормальных вложений однородного пространства $K^* \times SL_2/N$ в рамках теории Луны–Вуста.

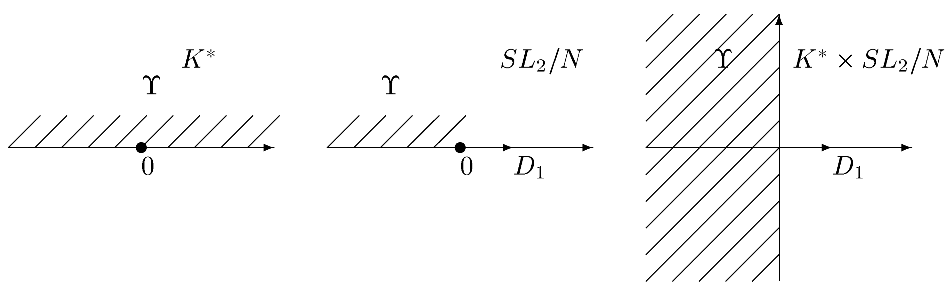

Рис. 2

На рис. 2 изображены конус инвариантных нормирований Υ и "краски" для однородных пространств K^*, SL_2/N, $K^* \times SL_2/N$, соответственно. Необходимые определения см. в [12]. Критерий аффинности из [12] показывает, что все нормальные аффинные вложения однородного пространства $K^* \times SL_2/N$ задаются цветными конусами одного из типов, изображенных на рис. 3.

Первые два вложения есть $SL_2/N \times K^*$ и $SL_2/N \times K$, соответственно. Для задания конуса типа 3) достаточно задать прямую в верхнем левом квадранте, определенную над полем рациональных чисел. Задание такой прямой эквивалентно заданию пары взаимно простых натуральных чисел (n, k).

Вложения, соответствующие конусам типа $2')$ и $3')$, получаются из вложений для конусов 2) и 3) действием автоморфизма $t \to t^{-1}$ на торе K^*.

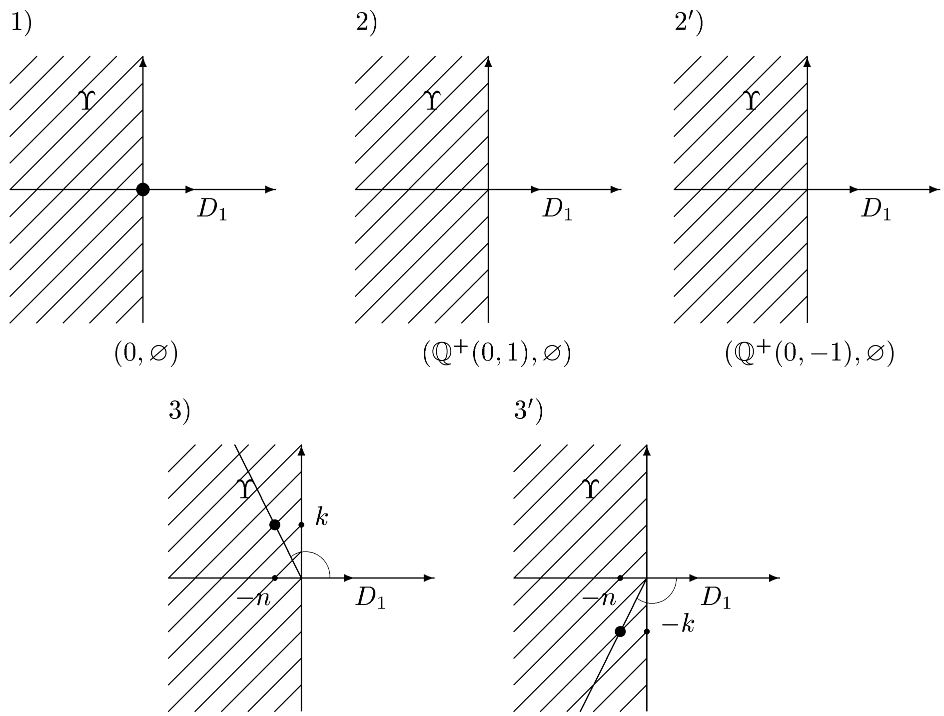

Рис. 3

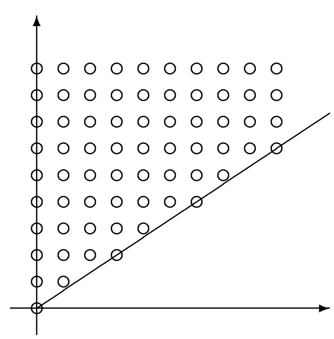

Рис. 4

Явно алгебру регулярных функций на многообразии, отвечающем вложению, заданному парой (n, k), можно описать так, как показано на рис. 4.

Рассмотрим конус C в $\mathbb{Q}^2$, заключенный между положительным лучем оси Oy и лучем, исходящим из начала координат и проходящим через точку с координатами (k, n) (напомним, что мы предполагаем $k > 0, n > 0$). Тогда

$$K[X] = \left\{t^{r_2} V_{4r_1} \mid (r_1, r_2) \in C,\ r_1, r_2 \in \mathbb{Z}\right\} \subset K[A^1] \otimes K[SL_2/N], \tag{1}$$

где через V_{4r_1} обозначен $(4r_1 + 1)$-мерный неприводимый SL_2-модуль. Нормальность полученного многообразия X вытекает из того, что по построению $\operatorname{Spec} k[X]^U$ есть торическое многообразие.

Воспользовавшись склейкой и предложением 2, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *(S,N)-многообразия находятся во взаимно однозначном соответствии со следующим набором данных*:

1) *C – гладкая неприводимая аффинная кривая*;
2) *W – конечный набор из m точек на этой кривой (возможно, $m=0$)*;
3) *набор пар взаимно простых натуральных чисел (k_1,n_1), ..., (k_m,n_m), поставленных по одной паре у каждой точки из множества W и называемых отметками этих точек.*

Утверждение теоремы 3 является частным случаем для следствия из теоремы 2.2, однако здесь можно предъявить геометрическую реализацию многообразия, отвечающего паре чисел (n,k). Соответствующее многообразие построено в работе [2], где оно обозначено $\mathrm{Norm}\, X_n^k$. Напомним необходимые сведения из работы [2]. Пусть V_2 – модуль присоединенного представления для группы SL_2, а X^k есть фактор пространства V_2 по группе $\mathbb{Z}_{2k}$, действующей скалярно умножениями на корни степени $2k$ из единицы. Если обозначить стандартные координаты на V_2 как a,b,c, то $K[X^k]=K[a^ib^jc^l \mid i+j+l=2k]$. Рассмотрим многообразие X_n^k, являющееся спектром алгебры $K[a^ib^jc^l(i+j+l=2k),\ z \mid z^n=(b^2-4ac)^k]$. Действие группы SL_2 естественным образом индуцируется с модуля V_2 на все построенные многообразия, элемент z является инвариантным. Морфизм нормализации $\mathrm{Norm}\, X_n^k \to X_n^k$ биективен. Выясним, какой конус соответствует вложению $\mathrm{Norm}\, X_n^k$.

Обозначим через ϵ фундаментальный вес тора K^*, а через λ фундаментальный вес максимального тора группы SL_2. Поскольку B-инвариантный дивизор однородного пространства $K^*\times SL_2/N$ содержит в своем замыкании единственную SL_2-неподвижную точку многообразия $\mathrm{Norm}\, X_n^k$, “краска” D_1 в данный конус входит. На многообразии $\mathrm{Norm}\, X_n^k$ имеется ровно один дивизор F, инвариантный относительно группы $K^*\times SL_2$, – это слой морфизма факторизации для группы SL_2, содержащий неподвижную точку. Функция z является SL_2-инвариантной и собственной веса ϵ для тора K^*.

Пусть q – порядок нуля функции z на дивизоре F. Функция $\dfrac{a^{2k}}{(b^2-4ac)^k}$ является K^*-инвариантной и полуинвариантной веса $4k\lambda$ для SL_2. На дивизоре F эта функция имеет полюс порядка qn. Итак, дивизору F соответствует нормирование, заданное в наших обозначениях координатами $(-qn/k,q)$. Соответствующий конус задается парой (n,k).

Многообразие X_n^k получается из многообразия X^k переходом к расслоенному произведению относительно морфизма факторов $z\to z^n$. Поэтому число k отвечает за порядок стабилизатора точки из незамкнутой орбиты особого слоя многообразия X_n^k, а число n есть своего рода “индекс вращения” многообразия вокруг особого слоя. Нечто подобное возникает в теории действий компактных групп на трехмерных многообразиях. А именно, в классификации Реймонда эффективных и гладких действий окружности на гладких замкнутых связных 3-многообразиях из таких же соображений вводятся ориентированные инварианты Зейферта, см., например, [15].

6. Классификация (S,T)-многообразий

Аналогично (S,N)-многообразиям классифицируются (S,T)-многообразия бирационально тривиального типа. Единственное изменение, которое необходимо внести, – это в строке (1) заменить V_{4r_1} на V_{2r_1}. Теорема 3 справедлива и в этом случае.

Отсюда следует, что на бирационально тривиальных (S,T)-многообразиях не может быть орбиты типа SL_2/N. Это можно получить и из теории этального слайса – если бы X^T было приводимо, то и слайс в окрестности замкнутой орбиты типа SL_2/N был бы приводим и связен, и потому не нормален, а нормальность точки на слайсе эквивалентна нормальности точки на многообразии.

Однородное пространство SL_2/T допускает ровно один нетривиальный SL_2-эквивариантный автоморфизм, который согласно леммы 3.2 можно продолжить на всякое (S,T)-многообразие. После факторизации по такому действию группы $\mathbb{Z}_2$ получается (S,N)-многообразие.

Предложение 7. *Всякое (S,N)-многообразие может быть двулистно накрыто указанным выше способом ровно одним (S,T)-многообразием бирационально тривиального типа. При этом отметка (k_i,n_i) на (S,N)-многообразии перейдет в отметку $(2k_i,n_i)$ при нечетном n_i и в отметку $(k_i,n_i/2)$ при четном n_i. В первом случае неподвижная точка является изолированной точкой ветвления, а во втором случае имеется дивизор ветвления.*

Доказательство вытекает из того факта, что действие $\mathbb{Z}_2$ коммутирует с операциями перехода к расслоенному произведению и склейки.

Рассмотрим бирационально нетривиальное (S,T)-многообразие X. Условие нетривиальности эквивалентно неприводимости кривой X^T. Согласно предложению 3 данное многообразие X можно двулистно накрыть бирационально тривиальным (S,T)-многообразием $\widetilde{X}$, причем накрывающий морфизм будет морфизмом факторизации по группе $\mathbb{Z}_2$ (двулистное накрытие всегда является накрытием Галуа). Такое накрытие определено однозначно, так как алгебра регулярных функций на $\widetilde{X}$ совпадает с целым замыкание алгебры $K[X]$ в канонически определенном расширении степени 2 поля $k(X)$.

Пример. Трехмерное пространство присоединенного представления группы SL_2 является бирационально нетривиальным (S,T)-многообразием. Двулистно накрывающее его бирационально тривиальное (S,T)-многообразие есть гиперповерхность в четырехмерном пространстве, заданная уравнением $z^2 = b^2 - 4ac$. В терминах нашей классификации бирационально тривиальных (S,T)-многообразий этой гиперповерхности отвечает прямая с единственной отметкой $(1,1)$ в точке 0.

SL_2-эквивариантное действие группы $\mathbb{Z}_2$ на $\widetilde{X}$ индуцирует нетождественное действие $\mathbb{Z}_2$ на факторе $\widetilde{X}//SL_2 = C$. Из классификации бирационально тривиальных (S,T)-многообразий вытекает, что для того чтобы задать бирационально тривиальное (S,T)-многообразие с требуемым действием группы $\mathbb{Z}_2$ необходимо и достаточно задать неприводимую гладкую аффинную кривую с нетождественным действием группы $\mathbb{Z}_2$, а также расставить на ней отметки с единственным ограничением – точки, лежащие на одной $\mathbb{Z}_2$-орбите должны быть либо обе не отмеченными, либо отмечены одной и той же парой чисел (в частности, на отметки в $\mathbb{Z}_2$-неподвижных точках никаких ограничений не накладывается). Будем называть такую систему отметок $\mathbb{Z}_2$-*инвариантной*.

ТЕОРЕМА 4. *Бирационально нетривиальные* (S,T)*-многообразия находятся во взаимно однозначном соответствии со следующим набором данных*:

1) C *– гладкая неприводимая аффинная кривая с заданным на ней нетождественным действием группы* $\mathbb{Z}_2$;
2) $\mathbb{Z}_2$*-инвариантная система отметок на кривой* C (*возможно, пустая*).

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Неотмеченные $\mathbb{Z}_2$-неподвижные точки кривой C отвечают слоям типа SL_2/N на многообразии X.

2) Для бирационально нетривиального (S,T)-многообразия X неприводимая кривая X^T не обязательно является гладкой. В частности, она заведомо особа, если отметки на кривой C расставлены не только в $\mathbb{Z}_2$-неподвижных точках.

Список литературы

1. *Винберг Э. Б.* Сложность действий редуктивных групп // Функ. анализ и его прил. 1986. Т. 20. №1. С. 1–13.
2. *Аржанцев И. В.* О действиях сложности один группы SL_2 // Изв. РАН. Сер. матем. 1997 (в печати).
3. *Крафт Х.* Геометрические методы в теории инвариантов. М.: Мир, 1987.
4. *Попов В. Л.* Квазиоднородные аффинные алгебраические многообразия группы $SL(2)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. №4. С. 792–832.
5. *Kempf G., Knudson F., Mumford D., Saint-Donat B.* Toroidal embeddings // Lecture Notes in Math. 1973. V. 337.
6. *Тимашев Д. А.* G-многообразия сложности один // УМН. 1996. Т. 51. №3. С. 213–214.
7. *Винберг Э. Б., Попов В. Л.* Теория инвариантов // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 55. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 137–314.
8. *Хамфри Дж.* Линейные алгебраические группы. М.: Наука, 1980.
9. *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.
10. *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1988.
11. *Попов В. Л.* Стягивание действий редуктивных алгебраических групп // Матем. сб. 1986. Т. 130 (172). №3 (7). С. 310–334.
12. *Knop F.* The Luna–Vust Theory of Spherical Embeddings // Proc. of the Hyderabad Conf. on Algebraic Groups. Madras: Manoj Prakashan, 1991. P. 225–249.
13. *Knop F.* The Asymptotic behavior of the invariant collective motion // Invent. Math. 1994. V. 116. P. 309–328.
14. *Bialynicki-Birula A., Swiecicka J.* Good Quotients for Actions of $SL(2)$ // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 1988. V. 36. P. 375–381.
15. *Orlik P.* Seifert manifolds // Lecture Notes in Math. 1972. V. 291.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: arjantse@nw.math.msu.su

Поступила в редакцию
01.10.1996