

УДК 512.74

И. В. Аржанцев

Стягивания аффинных сферических многообразий

В работе описан класс G -многообразий, которые могут быть получены как тотальные пространства относительно известной в теории инвариантов конструкции стягивания, примененной к аффинному сферическому G -многообразию. Такие многообразия являются локальными моделями для произвольных аффинных G -многообразий сложности один с одномерным категорным фактором. В качестве примеров рассмотрены редуктивные алгебраические полугруппы, а также случай $G = \mathrm{SL}_2$.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Пусть G есть связная редуктивная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем K нулевой характеристики, а Y – нормальное аффинное алгебраическое многообразие, на котором группа G действует регулярными автоморфизмами. В работе [1] была определена конструкция стягивания действия $G : Y$ по G -инвариантной фильтрации Φ на алгебре $K[Y]$. Такой фильтрации можно сопоставить G -многообразие $Z = \mathrm{Spec} \, \mathrm{gr}_{\Phi} K[Y]$, которое во многих интересных случаях имеет ряд общих свойств с G -многообразием Y , но устроено несколько проще. При этом конструкция использует некоторое $(G \times K^*)$ -многообразие X (тотальное пространство стягивания), которое расслоено над прямой $\mathbb{A}^1$ так, что

- 1) слои над ненулевыми точками G -эquivariantно изоморфны Y ;
- 2) прообраз $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ есть прямое произведение $(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times Y$;
- 3) прообраз точки нуль есть Z .

В настоящей работе $(G \times K^*)$ -многообразие X со свойствами 1) и 2) мы будем называть $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразием. В п. 3 показано, что каждое $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразие реализуется как тотальное пространство стягивания по некоторой G -инвариантной фильтрации на алгебре $K[Y]$. Тем самым $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразия могут быть охарактеризованы во внутренних для многообразия Y терминах. Для дальнейшего хотелось бы иметь какой-либо явный способ задания G -инвариантных фильтраций на алгебре $K[Y]$. В п. 4 показано, что отображение $\varphi: \Xi(Y) \rightarrow \mathbb{Z}$, где $\Xi(Y)$ – спектр G -многообразия Y , удовлетворяющее определенным условиям, задает G -инвариантную фильтрацию. Этим способом получается не каждая фильтрация (соответствующий пример рассмотрен в п. 10). Однако если предположить, что действие $G : Y$ есть действие с простым спектром, то этот способ описания G -инвариантных фильтраций оказывается универсальным. Если дополнительно

Работа выполнена при финансовой поддержке CRDF (грант № RM1-206) и ISSEP (грант № a98-2196).

потребовать, чтобы $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразие X было нормальным, то указанное отображение φ может быть весьма конструктивно задано с помощью определенного выпуклого конуса (в работе названного конусом стягивания) в пространстве, натянутом на полугруппу весов $\Xi(Y) \oplus \mathbb{Z}$.

Напомним, что действие $G : Y$ (а также G -многообразие Y) называется *сферическим*, если Y нормально и индуцированное действие борелевской подгруппы $B \subset G$ имеет плотную орбиту. Для аффинных G -многообразий сферичность эквивалентна простоте спектра алгебры регулярных функций $K[Y]$ как G -модуля.

Описание $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразий для сферического Y полезно, в частности, потому, что они являются локальными моделями для произвольных нормальных аффинных G -многообразий с однопараметрическим семейством сферических орбит максимальной размерности и одномерным категорным фактором. Пусть X есть нормальное G -многообразие такое, что если $\pi : X \rightarrow X//G$ – морфизм факторизации, то $X//G \cong C$ – кривая и имеется непустое открытое подмножество $C_0 \subset C$ такое, что $\pi^{-1}(c) \cong_G Y$ для всякой точки $c \in C_0$. Многообразие X в работе [2] названо *qs1-многообразием* с типичным слоем Y . Будем говорить, что X является *бirationально тривиальным*, если $\pi^{-1}(C_0) \cong_G Y \times C_0$. В работе [2] показано, что каждое qs1-многообразие может быть получено из бирационально тривиального qs1-многообразия факторизацией по конечной группе G -эквивариантных автоморфизмов.

Бирационально тривиальное qs1-многообразие является $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразием, если $C \cong \mathbb{A}^1$, $C_0 \cong \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ и естественное действие одномерного тора на прямой $\mathbb{A}^1$ продолжается до сферического действия группы $G \times K^*$ на этом многообразии.

В [2] показано, что всякое бирационально тривиальное qs1-многообразие может быть получено из $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразий взятием обратных прообразов относительно этальных морфизмов факторов и последующей их склейкой по изоморфным открытым подмножествам. Поэтому изучение qs1-многообразий во многих случаях может быть сведено к изучению $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразий. Последние являются сферическими относительно действия группы $G \times K^*$ и допускают описание в терминах теории сферических вложений Луны–Вуста [3]. Используемый в настоящей работе способ описания является в известном смысле двойственным по отношению к теории Луны–Вуста. Этот способ ранее применялся в работах [4]–[6] и др. и представляется более естественным в аффинной ситуации.

Пусть $\Xi_+(G)$ – полугруппа доминантных весов группы G . В работе [1] рассматривалось стягивание по фильтрации, определенной гомоморфизмом $h : \Xi_+(G) \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Такую фильтрацию мы будем называть *линейной*. Стягивания по линейным фильтрациям интересны тем, что выполнение ряда свойств для типичного слоя Y равносильно их выполнению для особого слоя Z . К таким свойствам, например, относятся целозамкнутость, отсутствие нильпотентов, целостность и рациональность особенностей. Как показывают примеры, для $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразий на отсутствие нильпотентов и на неприводимость особого слоя Z рассчитывать не приходится. Поэтому класс линейных фильтратий слишком узок для построения произвольных $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразий.

Мы рассматриваем более широкий класс G -инвариантных фильтратий, которые называем *нормальными*. Эти фильтратии описываются при помощи конусов

стягивания, см. п. 6. Основной результат статьи (теорема 1) утверждает, что нормальные $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразия для сферического G -многообразия Y с точностью до $(G \times K^*)$ -эквивариантного изоморфизма находятся в естественном биективном соответствии с нормальными фильтрациями на алгебре $K[Y]$. Вопрос о G -изоморфизме $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразий представляется более тонким, см. п. 12.

В терминах конуса стягивания дан критерий приведенности особого слоя (следствие 1). Соответствующие фильтрации на $K[Y]$ естественно называть *кусочно-линейными*. В этих же терминах охарактеризованы неприводимые компоненты особого слоя.

В следующем пункте кратко описано, как полученные результаты переносятся на стягивания над многомерной базой $\mathbb{A}^n$.

В п. 11 в качестве Y мы рассматриваем связную полупростую группу G_0 , которая есть сферическое многообразие относительно двухстороннего $(G_0 \times G_0)$ -действия. Можно показать, что $(G_0 \times G_0, G_0, \mathbb{A}^1)$ -многообразие имеет структуру редуктивной алгебраической полугруппы. Обратно, редуктивная алгебраическая полугруппа с группой обратимых элементов $G_0 \times K^*$ (кроме самой группы $G_0 \times K^*$) является $(G_0 \times G_0, G_0, \mathbb{A}^1)$ -многообразием. Таким образом, этот класс редуктивных полугрупп биективно соответствует нормальным $(G_0 \times G_0)$ -инвариантным фильтрациям на алгебре $K[G_0]$.

В последнем пункте мы описываем все возможные нормальные $(\mathrm{SL}_2, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразия для сферического SL_2 -многообразия Y .

Когда первоначальный вариант статьи был уже написан, Э. Б. Винберг обратил внимание автора на работу [6], где использовались аналогичные методы. После этого текст был несколько переработан с учетом результатов из [6].

Я благодарен профессору Э. Б. Винбергу за внимание к работе и помощь в оформлении текста.

2. Зафиксируем используемые обозначения.

Основное поле K предполагается алгебраически замкнутым и $\mathrm{char} K = 0$;

$\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел;

$\mathbb{Z}_n$ – циклическая группа порядка n ;

$\mathbb{A}^n$ – n -мерное аффинное пространство над K ;

K^* – мультипликативная группа поля K или, другими словами, одномерный тор;

$K[X]$ – алгебра регулярных функций на многообразии X ;

$\mathrm{Spec} A$ – аффинная схема, отвечающая алгебре A ;

A^R – подалгебра инвариантных функций алгебры A с заданным действием алгебраической группы R ;

G – связная редуктивная группа над K ;

$T \subset B$ – максимальный тор и борелевская подгруппа в G ;

U – максимальная унитарная подгруппа в G ;

$\Xi(G)$ – решетка весов группы G относительно тора T ;

$\Xi(G)_+$ – полугруппа доминантных весов;

$C_W(G)$ – положительная камера Вейля для группы G относительно фиксированной системы простых корней;

V_λ – конечномерный неприводимый G -модуль со старшим весом $\lambda \in \Xi(G)_+$.

Для аффинного многообразия X с регулярным действием группы G (далее просто G -многообразие) рассмотрим разложение алгебры $K[X]$ в прямую сумму G -подмодулей

$$K[X] = \bigoplus_{\lambda \in \Xi(X)} W_\lambda,$$

где W_λ — сумма всех неприводимых подмодулей из $K[X]$, изоморфных V_λ . Это разложение называется *изотипным*. Будем включать в $\Xi(X)$ только те веса λ , для которых $W_\lambda \neq \{0\}$. Множество весов $\Xi(X)$ есть конечно порожденная подполугруппа в полугруппе $\Xi(G)_+$.

Для подполугруппы Γ в свободной абелевой группе обозначим через $\mathbb{Z}(\Gamma)$ минимальную подгруппу, содержащую Γ .

3. Пусть Y есть аффинное G -многообразие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Аффинное $(G \times K^*)$ -многообразие X будем называть $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразием, если имеется сюръективный K^* -эквивариантный морфизм $\pi: X \rightarrow \mathbb{A}^1$ для эффективного действия $K^*: \mathbb{A}^1$ такой, что для каждого $a \neq 0$ имеем $\pi^{-1}(a) \cong_G Y$ и $\pi^{-1}(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \cong_{(G \times K^*)} (Y \times (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}))$.

Напомним конструкцию стягивания действия из работы [1]. Пусть A есть конечно порожденная G -алгебра. Предположим, что на A задана какая-либо G -инвариантная фильтрация Φ типа $\mathbb{N}$:

$$1 \in A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots; \quad A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \quad A_n A_m \subset A_{n+m}.$$

Удобно положить также $A_{-1} = 0$. Обозначим через $\text{gr}_\Phi A$ ассоциированную с Φ градуированную алгебру, $\text{gr}_\Phi A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n / A_{n-1}$. Она является рациональной G -алгеброй относительно естественного действия группы G .

Рассмотрим теперь алгебру $A[t]$ многочленов от переменной t и в ней подмножество

$$D(\Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n.$$

Из определения фильтрации следует, что $D(\Phi)$ является подалгеброй в $A[t]$, содержащей $K[t]$. Мы продолжим действие G на A до действия (K -автоморфизмами) G на $A[t]$, считая, что $t \in A[t]^G$. Также на алгебре $D(\Phi)$ определено действие K^* , соответствующее градуировке по степеням t . Алгебра $D(\Phi)$ не является, вообще говоря, конечно порожденной.

ПРИМЕР 1 (см. рис. 1). Пусть $G = K^*$, $A = K[x]$ и G действует на A гомотетиями. Положим $A_0 = K, A_1 = A_2 = A_3 = \cdots = xK[x]$. В этом случае алгебра $D(\Phi)$ не конечно порождена.

Пусть теперь фильтрация Φ такова, что алгебра $D(\Phi)$ конечно порождена. Тогда имеется G -многообразие $\text{Spec } D(\Phi)$. Морфизм $\pi: \text{Spec } D(\Phi) \rightarrow \text{Spec } K[t]$ является плоским, все слои этого морфизма, кроме слоя $\pi^{-1}(0)$, G -эквивариантно изоморфны $\text{Spec } A$, и говорят, что действие $G: \text{Spec } A$ *стягивается* к действию

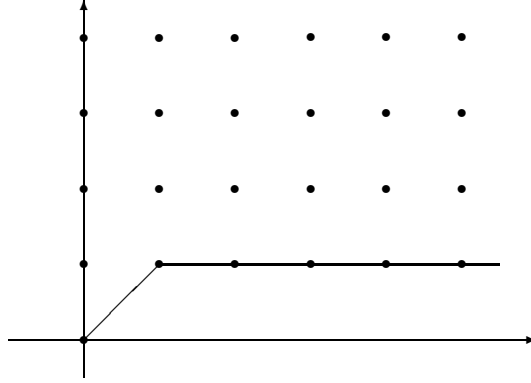


Рис. 1

$G : \pi^{-1}(0)$, а многообразие $\text{Spes } D(\Phi)$ называют *тотальным пространством стягивания*.

Из предложения 9 работы [1] следует, что $\text{Spes } D(\Phi)$ является $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразием, где $Y = \text{Spes } A$. Для особого слоя $Z = \pi^{-1}(0)$ имеем $K[Z] \cong \text{gr}_{\Phi} A$. Заметим, что указанная конструкция переносится на фильтрации типа $\mathbb{Z}$ с заменой алгебры $A[t]$ на алгебру $A[t, t^{-1}]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть X есть $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразие. Тогда на алгебре $K[Y]$ имеется G -инвариантная фильтрация Φ такая, что многообразие X $(G \times K^*)$ -изоморфно тотальному пространству стягивания действия $G : Y$ по фильтрации Φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим изотипное разложение

$$K[Y] = \bigoplus_{\lambda \in \Xi(Y)} W_{\lambda}.$$

Имеет место изоморфизм $K[\pi^{-1}(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})] \cong K[Y] \otimes_K K[t, t^{-1}]$, где t — координата на прямой $\mathbb{A}^1$. Здесь изотипными компонентами относительно действия группы $G \times K^*$ являются подпространства $W_{\lambda} \otimes_K Kt^i$, $i \in \mathbb{Z}$. Включение $K[X] \subset K[\pi^{-1}(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})]$ показывает, что если

$$K[X] = \bigoplus_{(\lambda, i) \in \Xi(Y) \oplus \mathbb{Z}} U_{(\lambda, i)}$$

есть $(G \times K^*)$ -изотипное разложение алгебры $K[X]$, то $U_{(\lambda, i)} \subset W_{\lambda} \otimes_K Kt^i$, и потому $U_{(\lambda, i)}$ может быть отождествлено с подпространством в W_{λ} . Обозначим это подпространство через $U'_{(\lambda, i)}$. Тогда $U'_{(\lambda, i)} \subset U'_{(\lambda, i+1)}$ и W_{λ} совпадает с объединением подпространств $U'_{(\lambda, i)}$.

Определим G -инвариантную фильтрацию на $K[Y]$

$$\cdots \subset K[Y]_{-i} \subset \cdots \subset K[Y]_0 \subset K[Y]_1 \subset \cdots \subset K[Y]_i \subset \cdots$$

по формуле $K[Y]_i = \bigoplus_{\lambda} U'_{(\lambda, i)}$.

Очевидно, что свойство $K[Y] = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} K[Y]_i$ здесь выполнено. Остается проверить, что $K[Y]_i K[Y]_j \subset K[Y]_{i+j}$. Это следует из того, что $U_{(\lambda_1, i)} U_{(\lambda_2, j)} \subset \sum_{\lambda} U_{(\lambda, i+j)}$.

4. Следуя В. Л. Попову, можно задать G -инвариантную фильтрацию $\Phi(\varphi)$ на алгебре $K[Y]$ отображением $\varphi: \Xi(Y) \rightarrow \mathbb{Z}$, положив $K[Y]_i = \bigoplus_{\lambda \in \Xi(Y), \varphi(\lambda) \leq i} W_{\lambda}$.

При этом на отображение φ нужно наложить определенные ограничения. Умножение в алгебре $K[Y]$ позволяет рассматривать произведение $W_{\lambda} W_{\mu}$ как подмодуль в $K[Y]$ для любых $\lambda, \mu \in \Xi(Y)$. Определим набор $T_Y(\lambda, \mu)$ как множество тех весов $\varepsilon \in \Xi(Y)$, для которых $W_{\lambda} W_{\mu}$ пересекается с W_{ε} по ненулевому подпространству. Известно, что множество $T_Y(\lambda, \mu)$ конечно, содержит вес $\lambda + \mu$ и все прочие веса этого множества получаются из $\lambda + \mu$ вычитанием некоторой линейной комбинации простых корней с целыми неотрицательными коэффициентами.

Условие $K[Y]_i K[Y]_j \subset K[Y]_{i+j}$ из определения фильтрации равносильно условию

$$(A) \quad \varphi(\varepsilon) \leq \varphi(\lambda) + \varphi(\mu) \text{ для всех } \lambda, \mu \in \Xi(Y) \text{ и всех } \varepsilon \in T_Y(\lambda, \mu).$$

Остальные требования из определения фильтрации выполнены автоматически. В работе [1] в качестве отображения φ рассматривалось ограничение на $\Xi(Y)$ аддитивного гомоморфизма $h: \Xi_+(G) \rightarrow \mathbb{Z}_+$ такого, что после продолжения его до линейной формы на $\Xi(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ значения этой формы на простых корнях положительны (существование такого гомоморфизма несложно установить). Для этого отображения условие (A) выполнено. Фильтрацию, определенную таким гомоморфизмом, будем называть *линейной*.

Если каждый из G -модулей W_{λ} является неприводимым (алгебра $K[Y]$ имеет простой спектр), то для любого λ и для любой G -инвариантной фильтрации Φ найдется такой номер i , что $W_{\lambda} \cap K[Y]_{i-1} = \{0\}$ и $W_{\lambda} \subset K[Y]_i$. Поэтому здесь любая G -инвариантная фильтрация на $K[Y]$ задается некоторым отображением $\varphi: \Xi(Y) \rightarrow \mathbb{Z}$, а именно

$$\varphi(\lambda) = \min_{W_{\lambda} \subset K[Y]_i} i. \quad (*)$$

Для произвольной G -алгебры это не так, соответствующий пример рассмотрен в п. 10.

5. Напомним в этом разделе некоторые известные факты из теории инвариантов. Пусть X есть неприводимое аффинное G -многообразие. Нормальность многообразия X по определению означает, что алгебра $K[X]$ целозамкнута в своем поле частных.

КРИТЕРИЙ ЛУНЫ–ВУСТА (см., например, [7; гл. 3]). *Аффинное G -многообразие X нормально тогда и только тогда, когда алгебра $K[X]^U$ целозамкнута.*

Говорят, что действие $G: X$ есть *действие с простым спектром*, если каждая изотипная компонента W_{λ} алгебры $K[X]$ является неприводимым G -модулем. Если G -многообразие X к тому же нормально, оно называется *сферическим*. Для действий с простым спектром алгебра $K[X]^U$ имеет простой спектр относительно действия максимального тора, и потому $X_U = \text{Spec } K[X]^U$ есть торическое многообразие. Из теории торических многообразий известно, что нормальность X_U

эквивалентна условию насыщенности полугруппы весов $\Xi(X_U)$ тора T , т.е. если $\varepsilon \in \mathbb{Z}(\Xi(X_U))$ и $n\varepsilon \in \Xi(X_U)$ для некоторого $n > 0$, то $\varepsilon \in \Xi(X_U)$. Насыщенные полугруппы – это в точности полугруппы, совпадающие с пересечением решетки $\mathbb{Z}(\Xi(X_U))$ и некоторого выпуклого конуса в пространстве $\mathbb{Z}(\Xi(X_U)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Полугруппа $\Xi(X_U)$ естественно отождествляется с полугруппой $\Xi(X)$. Окончательно получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Аффинное G -многообразие X с простым спектром нормально тогда и только тогда, когда полугруппа $\Xi(X)$ совпадает с пересечением решетки $\mathbb{Z}(\Xi(X))$ и некоторого выпуклого конуса в пространстве $\mathbb{Z}(\Xi(X)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.*

Этим предложением мы будем неоднократно пользоваться. Заметим также, что полугруппа из предложения 2 конечно порождена по лемме Гордана, см., например, [8].

6. Пусть Y есть сферическое G -многообразие, а X есть $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразие, которое всюду далее будет предполагаться нормальным. Алгебра регулярных функций $K[X]$ естественно вкладывается в алгебру $K[Y] \otimes_K K[\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}]$. Последняя алгебра имеет простой спектр относительно действия группы $G \times K^*$, и потому $\Xi(X) \subset \Xi(Y) \oplus \mathbb{Z}$.

Обозначим $N = \mathbb{Z}(\Xi(Y) \oplus \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ и $W = \mathbb{Z}(\Xi(Y)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ – гиперплоскость в N .

ЛЕММА 1. а) *Полугруппа $\Xi(X)$ совпадает с пересечением некоторого выпуклого конуса $C(X)$ максимальной размерности в пространстве N и полугруппы $\Xi(Y) \oplus \mathbb{Z}$.*

б) *Конус $C(X)$ содержит луч $V = (0, a) \in N$, $a \geq 0$, и не содержит луч $-V$.*

с) *При проекции на W параллельно лучу V образ конуса $C(X)$ совпадает с выпуклой оболочкой $\Xi(Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Следует из предложения 2.

б) Из сферичности действия $G : Y$ вытекает наличие в Y плотной G -орбиты. Согласно определению $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразия алгебра $K[X]^G$ есть алгебра многочленов от одной переменной и ее образующая имеет вес $(0, 1)$.

Для морфизма $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}^1$ прообраз ненулевой точки прямой $\mathbb{A}^1$ G -изоморфен многообразию Y . Отсюда следует утверждение с).

Рассмотрим функцию $\varphi_X : \Xi(Y) \rightarrow \mathbb{Z}$, заданную формулой

$$\varphi_X(\lambda) = \min_{(\lambda, a) \in \Xi(X)} a.$$

Если $\varepsilon \in T_Y(\lambda, \mu)$ и $(\lambda, a) \in \Xi(X)$, $(\mu, b) \in \Xi(X)$, то $(\varepsilon, a + b) \in \Xi(X)$. Отсюда

$$\varphi_X(\varepsilon) \leq \varphi_X(\lambda) + \varphi_X(\mu) \quad \text{для каждого } \varepsilon \in T_Y(\lambda, \mu). \quad (**)$$

Для выпуклого конуса C в пространстве N , удовлетворяющего условиям б) и с) предыдущей леммы, определим функцию $\varphi_C : \Xi(Y) \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$\varphi_C(\lambda) = \min_{(\lambda, a) \in C, a \in \mathbb{Z}} a.$$

Ясно, что функции φ_X и $\varphi_{C(X)}$ совпадают.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем выпуклый конус C в пространстве N *конусом стягивания*, если выполнены следующие условия:

- 1) конус C содержит луч V и не содержит луч $-V$;
- 2) при проекции на гиперплоскость W параллельно лучу V образ конуса C совпадает с выпуклой оболочкой $\Xi(Y)$;
- 3) $\varphi_C(\varepsilon) \leq \varphi_C(\lambda) + \varphi_C(\mu)$ для каждого $\varepsilon \in T_Y(\lambda, \mu)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Нормальные $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразия с точностью до $(G \times K^*)$ -изоморфизма биективно соответствуют конусам стягивания в пространстве N .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразию X сопоставляется конус стягивания $C(X)$. Обратно, для конуса стягивания C рассмотрим подпространство $L(C)$ в алгебре $K[Y] \otimes_K K[\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}]$, состоящее из тех неприводимых $(G \times K^*)$ -модулей, старшие веса которых принадлежат конусу C . Умножение в алгебре $K[Y] \otimes_K K[\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}]$ индуцирует на этом подпространстве структуру подалгебры, что обеспечивается условием 3). Известно, что для произвольной рациональной G -алгебры A конечная порожденность A эквивалентна конечной порожденности A^U , см. [1]. Для алгебры $L(C)$ конечная порожденность $L(C)^U$ следует из леммы Гордана. Поэтому алгебра $L(C)$ конечно порождена. Из условий 1) и 2) следует, что $L(C)^G$ есть алгебра многочленов от одной переменной, и для морфизма факторизации $\pi: \text{Spec } L(C) \rightarrow \mathbb{A}^1$ мы имеем $\pi^{-1}(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \cong Y \times (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$. Следовательно, $\text{Spec } L(C)$ есть $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразие. В силу различия $(G \times K^*)$ -модульной структуры в алгебре регулярных функций различным конусам отвечают различные $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразия.

Хотелось бы выяснить, для каких конусов C в пространстве N с условиями 1) и 2) из определения 2 выполнено также условие 3). Это условие есть условие “отрицательности” на простых корнях группы G . Заметим, что пространство N можно рассматривать как подпространство в $N(G) = \mathbb{Z}(\Xi(G) \oplus \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Поэтому несложно проверить, что для выполнения условия 3) достаточно выполнения следующего условия:

- (В) найдется выпуклый конус $\hat{C}$ в пространстве $N(G)$ такой, что $N \cap \hat{C} \cap C_W(G \times K^*) = C$ и отрицательные корни группы G принадлежат $\hat{C}$.

Если ранг решетки $\Xi(X)$ совпадает с рангом решетки $\Xi(G)$, то в качестве $\hat{C}$ можно рассматривать максимальный конус в $N(G)$, пересечение которого с $C_W(G \times K^*)$ совпадает с C (см. [6; теорема 2]).

Будем говорить, что сферическое G -многообразие Y есть многообразие типа I, если для каждого конуса стягивания условие (В) выполнено. В противном случае G -многообразие соответствует типу II. Для выяснения типа G -многообразия необходимо иметь некоторую информацию о множествах $T_Y(\lambda, \mu)$. К типу I относятся группа G как однородное $(G \times G)$ -пространство относительно двухстороннего действия, см. [6] или п. 11, и однородные пространства SL_2/N и SL_2/T , см. п. 12. К типу II относятся все торические и, более общо, все S -многообразия в терминологии работы [4], т.е. G -многообразия, стабилизатор каждой точки на которых содержит некоторую максимальную унипотентную подгруппу U группы G . В этой

ситуации условие 3) выполнено для любого конуса, так как S -многообразия характеризуются условием

$$(C) \quad T_Y(\lambda, \mu) = \{\lambda + \mu\} \text{ для всех } \lambda, \mu \in \Xi(Y).$$

В самом деле, нормальное сферическое G -многообразие Y является S -многообразием тогда и только тогда, когда алгебра регулярных функций $K[Y]$ реализуется как левоинвариантная подалгебра алгебры S регулярных функций на группе G , правоинвариантных относительно максимальной унипотентной подгруппы, см. [4]. Из теоремы 5 работы [1] следует, что последнее условие эквивалентно условию (C).

7. Вернемся к описанию G -инвариантных фильтратий на алгебре $K[Y]$ в случае, когда Y есть сферическое G -многообразие. Потребуем, чтобы соответствующая фильтратии Φ алгебра $D(\Phi)$ была конечно порождена и целозамкнута. Оказывается, что при этих ограничениях все такие фильтратии могут быть эффективно описаны при помощи конусов стягивания. Действительно, мы имеем нормальное $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразие $X = \text{Spec } D(\Phi)$, и соответствующая ему функция φ_X определяет некоторую G -инвариантную фильтратию на $K[Y]$ (ср. условие (A) и свойство (**)). Из равенства $\varphi_X = \varphi_{C(X)}$ следует, что получаемые так фильтратии характеризуются следующим определением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. G -инвариантная фильтратия Φ на алгебре $K[Y]$ называется *нормальной*, если найдется конечный набор линейных функций $f_i: \mathbb{Z}(\Xi(Y)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ такой, что $\varphi_{\Phi}(\lambda) = \min a$, где $a \in \mathbb{Z}$ и $a \geq f_i(\lambda)$ для всех значений i .

Из формулы (*) и определения функции φ_X следует, что функция φ_X задает именно исходную фильтратию Φ . Обратно, каждому нормальному $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразию отвечает G -инвариантная фильтратия Φ (предложение 1), эта фильтратия определяется функцией $\varphi_{C(X)}$ и потому является нормальной. Используя предложение 3, окончательно получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Y есть аффинное сферическое G -многообразие. Тогда нормальные $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразия биективно соответствуют нормальным фильтратиям на алгебре $K[Y]$.

8. Далее мы изучим некоторые свойства особого слоя $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразия X в терминах конуса стягивания $C = C(X)$. Для этого нам понадобятся следующие обозначения. Пусть ∂C есть граница конуса C , т.е. объединение всех его собственных граней. Положим $\Xi(Y)_{\partial C} = \{\lambda \in \Xi(Y) : (\lambda, \varphi_C(\lambda)) \in \partial C\}$. Для каждой алгебры A пусть A_{red} есть факторалгебра A по максимальному нильпотентному идеалу и $(\text{Spec } A)_{\text{red}} = \text{Spec } A_{\text{red}}$. Согласно [9; предложение 3.26] G -модульная структура $K[\pi^{-1}(0)]$ совпадает с G -модульной структурой $K[Y]$.

ЛЕММА 2. Имеем G -модульное разложение

$$K[\pi^{-1}(0)]_{\text{red}} = \bigoplus_{\lambda \in \Xi(Y)_{\partial C}} V_{\lambda}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно понять, что следующие условия эквивалентны:

- 1) старший вектор неприводимого G -модуля V_λ является нильпотентом при сужении на особый слой;
- 2) некоторая степень старшего вектора модуля $V_\lambda \subset K[\pi^{-1}(0)]$ делится в алгебре $D(\Phi)$ на переменную t (см. определение стягивания);
- 3) существует $n > 0$ такое, что $\varphi_C(n\lambda) < n \varphi_C(\lambda)$;
- 4) $\lambda \notin \Xi(Y)_{\partial C}$.

Назовем конус стягивания C *целочисленным*, если $\Xi(Y) = \Xi(Y)_{\partial C}$. Это условие равносильно тому, что линейные функции f_i из определения 3 принимают целые значения на элементах полугруппы $\Xi(Y)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Особый слой тотального пространства стягивания приведен тогда и только тогда, когда конус стягивания целочислен.*

Перейдем к рассмотрению неприводимых компонент особого слоя.

Собственную грань максимальной размерности конуса стягивания назовем *m -гранью*, если она не содержит луч V . Будем говорить, что вес $\lambda \in \Xi(Y)$ принадлежит m -границ F конуса стягивания C и условно записывать $\lambda \in F$, если $(\lambda, \varphi_C(\lambda)) \in F$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Имеется естественное биективное соответствие между неприводимыми компонентами особого слоя $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразия X и m -гранями конуса стягивания $C(X)$. В частности, особый слой неприводим тогда и только тогда, когда m -грань единственна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C_1, C_2, \dots, C_k$ – неприводимые компоненты особого слоя и $I(C_1), I(C_2), \dots, I(C_k)$ – соответствующие простые идеалы в алгебре $K[\pi^{-1}(0)]_{\text{red}}$. Тогда для любого i имеется однозначно определенное G -модульное разложение $K[\pi^{-1}(0)] = I(C_i) \oplus P(C_i)$. Пространство $P(C_i)$ G -изоморфно $K[C_i]_{\text{red}}$. Пусть

$$P(C_i) = \bigoplus_{\lambda \in \Xi(C_i)} V_\lambda.$$

Если веса $\lambda', \lambda'' \in \partial C$ не принадлежат одной собственной грани максимальной размерности конуса C , то $\lambda' + \lambda'' \notin \partial C$ и для соответствующих старших векторов имеем $f_{\lambda'} f_{\lambda''} = 0$ в алгебре $K[\pi^{-1}(0)]_{\text{red}}$. Это показывает, что все веса полугруппы $\Xi(C_i)$ лежат на одной m -границ.

Предположим, что m -границ F соответствуют несколько компонент $C_{i_1}, \dots, C_{i_l}$. Тогда для каждого i_p найдется такой вес $\lambda(i_p)$, что $\lambda(i_p) \in F \setminus \Xi(C_{i_p})$ и потому старший вектор $f_{\lambda(i_p)}$ принадлежит $I(C_{i_p})$. Произведение старших векторов $f_{\lambda(i_1)} f_{\lambda(i_2)} \cdots f_{\lambda(i_k)}$ равно нулю на каждой компоненте особого слоя, тогда как $\lambda(i_1) + \lambda(i_2) + \cdots + \lambda(i_k) \in F$. Полученное противоречие завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. У конуса стягивания, отвечающего линейной фильтрации, есть только одна m -грань – это график гомоморфизма.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\lambda_1 \in \partial C \setminus F$ и $\lambda_2 \in \partial C$, то $\mu \notin F$ для каждого $\mu \in T_Y(\lambda_1, \lambda_2)$.

Доказательство следует из того факта, что для компоненты C_F , отвечающей m -границе F ,

$$I(C_F) = \bigoplus_{\lambda \in \partial C \setminus F} V_\lambda$$

является идеалом.

СЛЕДСТВИЕ 3. Имеет место равенство

$$T_{C_F}(\lambda_1, \lambda_2) = T_Y(\lambda_1, \lambda_2) \cap F.$$

Из [10], [11] следует, что каждая компонента особого слоя является нормальным сферическим G -многообразием. Из условия (C) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. Компонента C_F особого слоя на $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразии является S -многообразием тогда и только тогда, когда $T_Y(\lambda_1, \lambda_2) \cap F = \{\lambda_1 + \lambda_2\}$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in F$.

Для выполнения этого условия достаточно, чтобы существовала линейная форма на $\Xi(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, отрицательная на простых корнях, график которой над W содержал бы грань F . Так для линейных стягиваний особый слой является нормальным S -многообразием.

Теорему 7 из работы [1] можно дополнить следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть A – рациональная конечно порожденная G -алгебра с простым спектром. Для линейных фильтраций следующие условия эквивалентны:

- 1) алгебра A целозамкнута;
- 2) алгебра $\mathrm{gr}_\Phi A$ целозамкнута;
- 3) алгебра $D(\Phi)$ целозамкнута.

В этой ситуации многообразия $\mathrm{Spec} A$, $\mathrm{Spec} \mathrm{gr}_\Phi A$ и $\mathrm{Spec} D(\Phi)$ имеют рациональные особенности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность 1) и 2) доказана в [1].

Если A конечно порождена и целозамкнута, то из предложения 2 и леммы Гордана следует конечная порожденность и целозамкнутость $D(\Phi)$.

Пусть верно 3). Тогда в силу линейности фильтрации $\mathrm{Spec} \mathrm{gr}_\Phi A$ неприводимо и нормально, см. [11].

Наконец, особенности сферических многообразий рациональны [1], а $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразие сферично относительно действия группы $G \times K^*$.

9. Можно рассматривать многообразия, аналогичные многообразиям из определения 1, над многомерной базой. Большинство полученных выше результатов распространяется и на эту ситуацию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Аффинное $(G \times (K^*)^n)$ -многообразие X будем называть $(G, Y, \mathbb{A}^n)$ -многообразием, если имеется сюръективный $(K^*)^n$ -эквивариантный морфизм $\pi: X \rightarrow \mathbb{A}^n$ для естественного эффективного действия $(K^*)^n: \mathbb{A}^n$ такой, что для каждого $a \in (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})^n$ имеем

$$\pi^{-1}(a) \cong_G Y \text{ и } \pi^{-1}((\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})^n) \cong_{(G \times (K^*)^n)} (Y \times ((\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})^n)).$$

Если Y – сферическое G -многообразие, то $\Xi(X) \subset \Xi(Y) \oplus \mathbb{Z}^n$ и полугруппа $\Xi(X)$ получается пересечением в пространстве $W \oplus \mathbb{Q}^n$ некоторого выпуклого конуса $C(X)$, содержащего координатные лучи $V_1, \dots, V_n$ и не содержащего $-V_1, \dots, -V_n$, и полугруппы $\Xi(Y) \oplus \mathbb{Z}^n$.

Конус $C(X)$ можно считать конусом многомерного стягивания. Условие 3) из определения 2 будет иметь вид: если $(\lambda, u) \in \Xi(Y) \oplus \mathbb{Z}^n$ и $(\mu, w) \in \Xi(Y) \oplus \mathbb{Z}^n$ лежат в конусе $C(X)$, то и $(\varepsilon, u + w) \in C(X)$ для каждого $\varepsilon \in T_Y(\lambda, \mu)$.

В алгебре $K[Y][t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}]$ можно задать подалгебру D , порожденную элементами

$$f t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n}, \quad f \in K[Y]_\lambda, \quad (\lambda, i_1, \dots, i_n) \in C(X),$$

и тогда $X = \text{Spec } D$.

Определим понятие фильтрации типа $\mathbb{Z}^n$ на алгебре $K[Y]$. Зафиксируем следующие обозначения. Для двух элементов $s = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n$ и $s' = (i'_1, \dots, i'_n) \in \mathbb{Z}^n$ будем говорить, что $s \leq s'$, если $i_k \leq i'_k$ для любого k , и что $s < s'$, если хотя бы одно из этих неравенств является строгим. Назовем G -инвариантной фильтрацией на G -алгебре A такой набор G -инвариантных подпространств A_s , $s \in \mathbb{Z}^n$, что

- 1) $A_s \subset A_{s'}$ для любых $s \leq s'$;
- 2) $A = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}^n} A_s$;
- 3) $A_s A_{s'} \subset A_{s+s'}$ для любых $s, s' \in \mathbb{Z}^n$.

В случае произвольного аффинного G -многообразия Y для каждого $(G, Y, \mathbb{A}^n)$ -многообразия X можно определить G -инвариантную $\mathbb{Z}^n$ -фильтрацию на алгебре $K[Y]$ и доказать аналог предложения 1. В случае, когда многообразие Y сферично, определяемые конусами многомерного стягивания $\mathbb{Z}^n$ -фильтрации будем, как и выше, называть *нормальными*, и также получаем взаимно однозначное соответствие между $(G, Y, \mathbb{A}^n)$ -многообразиями (с точностью до $(G \times (K^*)^n)$ -изоморфизма) и нормальными $\mathbb{Z}^n$ -фильтрациями на алгебре $K[Y]$.

Например, для $G = \text{SL}_2$, $n = 2$ будем откладывать точки из $\Xi(Y)$ по оси Ox и рассмотрим конус многомерного стягивания в $\mathbb{Q}^3$, натянутый на лучи Oy , Oz , $\{z = 0, x = y\}$ и $\{y = 0, x = z\}$. Сечение этого конуса плоскостью $\{x = 1\}$ изображено на рис. 2.

Пусть ε – фундаментальный вес группы SL_2 . Рис. 2 показывает, что изотипная компонента W_ε алгебры $K[Y]$ принадлежит как $K[Y]_{(1,0)}$, так и $K[Y]_{(0,1)}$.

Для $(G, Y, \mathbb{A}^n)$ -многообразия X алгебра регулярных функций на слое Z над точкой $0 \in \mathbb{A}^n$ описывается формулой

$$K[Z] = \text{gr } K[Y] = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}^n} K[Y]_s / K[Y]'_s,$$

где $K[Y]'_s = \bigoplus_{s' < s} K[Y]_{s'}$.

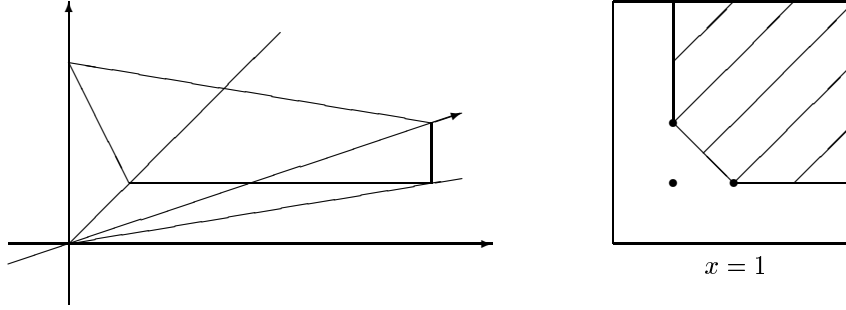


Рис. 2

10. Если не предполагать, что Y является сферическим G -многообразием, то не каждая G -инвариантная $\mathbb{Z}$ -фильтрация на алгебре $K[Y]$ задается некоторым отображением $\varphi: \Xi(Y) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Приведем конкретный пример. Предположим, что многообразие Y и $(G, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразие X нормальны и соответствующая X фильтрация определяется отображением $\varphi: \Xi(Y) \rightarrow \mathbb{Z}$. Тогда из критерия Луны–Вуста следует, что полугруппа $\Xi(X) = \{(\lambda, i) : \varphi(\lambda) \leq i\}$ в пространстве $N = \mathbb{Z}(\Xi(Y) \oplus \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ совпадает с пересечением некоторого выпуклого конуса C и решетки $\mathbb{Z}(\Xi(X))$. При этом конус C удовлетворяет условиям 1)–3) определения 2.

Пусть $G = \mathrm{SL}_2$. Тогда $\mathrm{rk} G = 1$ и у конуса C имеется всего одна m -грань. Алгебра U -инвариантов на особом слое получается факторизацией алгебры U -инвариантов на Y по конечной циклической группе и потому сохраняет целозамкнутость. Таким образом, особый слой нормален.

Пусть $Y = \mathrm{SL}_2 / \mathbb{Z}_3$, где $\mathbb{Z}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} : \alpha \in K, \alpha^3 = 1 \right\}$. Рассмотрим естественное действие группы SL_2 в пространстве бинарных форм степени три $V_3 = \{ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3\}$. Образующая F алгебры инвариантов для такого действия – дискриминант формы – есть многочлен степени четыре (его явный вид указан в [4; п. 012]). Рассмотрим SL_2 -модуль $V_3 \oplus \mathbb{A}^1$ с тривиальным SL_2 -действием на втором множителе и в нем подмногообразие

$$X = \{(\psi, z) : \psi \in V_3, z \in \mathbb{A}^1, z^4 = F(\psi)\}.$$

ЛЕММА 3. Многообразие X есть $(\mathrm{SL}_2, \mathrm{SL}_2 / \mathbb{Z}_3, \mathbb{A}^1)$ -многообразие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Орбита бинарной формы третьей степени с ненулевым дискриминантом пересекает прямую $\langle x^3 + y^3 \rangle$. Поэтому орбита общего положения на V_3 (и на X) замкнута и изоморфна $\mathrm{SL}_2 / \mathbb{Z}_3$. Многообразие X есть гиперповерхность в $\mathbb{A}^5$, заданная уравнением $z^4 = F(\psi)$. Множество особенностей этой гиперповерхности есть собственное подмногообразие в множестве $\{z = 0\}$. Следовательно, X неособо в коразмерности один, а для гиперповерхности это эквивалентно нормальности. Алгебра инвариантов $K[X]^{\mathrm{SL}_2}$ есть $K[z]$. Остается проверить условие $X \setminus \{z = 0\} \cong \mathrm{SL}_2 / \mathbb{Z}_3 \times K^*$ или $K[X]_{(z)} \cong K[\mathrm{SL}_2 / \mathbb{Z}_3] \otimes_K K[z, z^{-1}]$,

а это следует из

$$K[X]_{(z)} \cong K \left[\frac{a}{z}, \frac{b}{z}, \frac{c}{z}, \frac{d}{z} \right] \otimes_K K[z, z^{-1}].$$

Особый слой многообразия X изоморфен нуль-конусу в V_3 . Этот нуль-конус неприводим, содержит плотную орбиту $SL_2(x^2y)$ и двумерную орбиту $SL_2(x^3)$. Несложно проверить, что точки последней орбиты особы в нуль-конусе, и потому нуль-конус не нормален. Это доказывает, что многообразие X не может быть получено как тотальное пространство стягивания относительно некоторой фильтрации на алгебре $K[SL_2/\mathbb{Z}_3]$, определенной отображением $\varphi: \Xi(Y) \rightarrow \mathbb{Z}$.

11. В этом разделе будут рассмотрены редуктивные алгебраические полугруппы. Мы кратко опишем, как теорема 1 согласуется с результатами работы [6].

Напомним, что *аффинная алгебраическая полугруппа* — это аффинное алгебраическое многообразие с ассоциативным умножением

$$\sigma: S \times S \rightarrow S,$$

которое есть морфизм алгебраических многообразий.

Пусть $\text{End } V$ — кольцо эндоморфизмов конечномерного векторного пространства V . Можно показать, что каждая алгебраическая полугруппа изоморфна замкнутой подполугруппе в $\text{End } V$ при подходящем выборе V . Более того, если полугруппа S обладает единицей, то можно считать, что она (единица) переходит в единицу $\text{End } V$. В этой ситуации элемент из S обратим тогда и только тогда, когда он принадлежит $GL(V)$. Поэтому группа обратимых элементов $G(S)$ открыта в S и является алгебраической группой. Полугруппа S называется *редуктивной*, если группа $G(S)$ редуктивна. Известно, что если группа $G(S)$ полупроста, то $S = G(S)$. Полугруппа S называется *нормальной*, если S нормально как алгебраическое многообразие.

В работе [6] Э. Б. Винберг классифицировал нормальные редуктивные алгебраические полугруппы в терминах выпуклых конусов в пространстве $\Xi(G(S)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Заметим, что редуктивная группа G есть однородное сферическое пространство относительно двухстороннего действия группы $G \times G$. Алгебра регулярных функций $K[G]$ как $(G \times G)$ -модуль разлагается в прямую сумму подмодулей $V_{\lambda} \otimes V_{\lambda'}$, где первый сомножитель есть неприводимый G -модуль со старшим весом λ относительно левого действия, а второй множитель — сопряженный неприводимый модуль относительно правого G -действия. Веса λ пробегают всю полугруппу $\Xi_+(G)$. Это позволяет строить соответствующие конусы в пространстве $\Xi(G(S)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, а не в пространстве $\Xi(G(S) \times G(S)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Тот факт, что G как однородное $(G \times G)$ -пространство относится к типу I (см. п. 6), вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 4 [6; п. 1]. *Пусть $\lambda \in \Xi_+(G)$ и α — простой корень такой, что $(\lambda, \alpha) > 0$. Тогда $2\lambda - \alpha \in T_G(\lambda, \lambda)$.*

Тем самым задача построения конусов стягивания здесь решается вполне механически.

Отметим, что редуктивную алгебраическую полугруппу S можно рассматривать как многопараметрическую деформацию максимальной полупростой подгруппы G_0 группы $G(S)$, см. [6; теорема 3] (число параметров равно размерности центра $G(S)$). Поэтому конусы из работы [6] суть конусы многомерного стягивания.

Известно, что изотипную компоненту W_λ в алгебре $K[G]$ можно реализовать как векторное пространство, порожденное матричными элементами неприводимого представления группы G со старшим весом λ . Умножению в G соответствует коумножение в $K[G]$:

$$K[G] \rightarrow K[G] \otimes K[G], \quad f_{i,j}^\lambda \rightarrow \sum_k f_{i,k}^\lambda \otimes f_{k,j}^\lambda.$$

Для каждого $(G \times G)$ -многообразия с открытой орбитой, изоморфной G , алгебра регулярных функций есть $(G \times G)$ -инвариантная подалгебра в $K[G]$. Поэтому каждое такое многообразие имеет естественную структуру редуктивной алгебраической полугруппы с группой обратимых элементов G . В частности, $(G \times G, G, \mathbb{A}^1)$ -многообразие есть редуктивная алгебраическая полугруппа с группой обратимых элементов $G \times K^*$.

Обратно, если G_0 есть связная полупростая группа, то каждая нормальная полугруппа S с $G(S) = G_0 \times K^*$ есть $(G_0 \times G_0, G_0, \mathbb{A}^1)$ -многообразие (см. [6; теорема 3]).

Итак, в однопараметрическом случае имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть G_0 — связная полупростая группа. Тогда нормальные редуктивные алгебраические полугруппы с группой обратимых элементов $G_0 \times K^*$ (кроме самой группы $G_0 \times K^*$) находятся в биективном соответствии с нормальными $(G_0 \times G_0)$ -инвариантными фильтрациями на алгебре $K[G_0]$.*

12. Проиллюстрируем понятие конуса стягивания на примере аффинных трехмерных SL_2 -многообразий.

Зафиксируем следующие обозначения. Пусть T есть максимальный тор в группе SL_2 , N обозначает нормализатор максимального тора T и

$$U_d = \left\{ \begin{pmatrix} \xi & a \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix} : a, \xi \in K, \xi^d = 1 \right\}, \quad d = 1, 2, 3, \dots,$$

есть конечное расширение максимальной унипотентной подгруппы U . Пусть ε есть фундаментальный вес группы SL_2 и $V_d = \mathrm{SL}_2$ -модуль бинарных форм степени d .

Аффинное сферическое многообразие группы SL_2 изоморфно либо замыканию орбиты старшего вектора в неприводимом представлении SL_2 в пространстве V_d (открытая орбита в таком замыкании есть SL_2/U_d), либо одному из однородных пространств SL_2/N или SL_2/T . Соответствующие этим сферическим многообразиям $(\mathrm{SL}_2, Y, \mathbb{A}^1)$ -многообразия будем называть *простыми* (S, U) -, (S, N) - и (S, T) -многообразиями соответственно, см. [10].

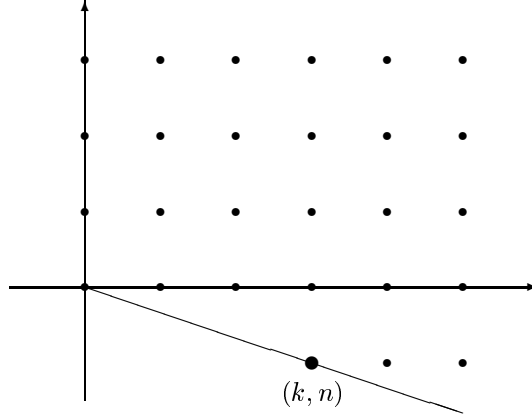


Рис. 3

(1) *Простые (S, U) -многообразия.* Если Y есть вложение однородного пространства SL_2 / U_d , то $\Xi(Y) = \{0, d\varepsilon, 2d\varepsilon, \dots\}$. Здесь Y является S -многообразием, поэтому выполнено условие (C). В качестве конуса стягивания C подходит любой конус того же вида, что и на рис. 3, где k и n — взаимно простые целые числа и $k > 0$ (координате k на горизонтальной оси отвечает вес $kd\varepsilon$).

Задача о построении простого (S, U) -многообразия $X_n^k(U)$ сводится к задаче о построении двумерного аффинного торического многообразия P_n^k , веса которого лежат в том же конусе, поскольку

$$X_n^k(U) = (\mathbb{A}^2 \times P_n^k) // K^*, \quad (***)$$

где группа SL_2 действует только на первом множителе, а тор K^* действует на $\mathbb{A}^2$ скалярно и на алгебре $K[P_n^k]$ с весами, соответствующими горизонтальной оси.

Рассмотрим два примера.

1) Целочисленные стягивания отвечают $k = 1$. При $d = 1$ мы получаем единственное с точностью до SL_2 -изоморфизма гладкое простое (S, U) -многообразие — это аффинное пространство $\mathbb{A}^3 = V_0 \oplus V_1$ (n можно выбирать произвольно). При $d > 1$ соответствующее многообразие изоморфно $\mathbb{A}^3 / \mathbb{Z}_d$.

2) Пусть $d = 1, k = 2, n = -1$. Тогда образующие алгебры $K[P_{-1}^2]$ обозначим через $x(0, 1)$, $y(1, 0)$ и $z(2, -1)$. Они связаны соотношением $y^2 = xz$. Данное торическое многообразие есть конус в $\mathbb{A}^3$. Обозначим через u и v стандартные координаты на $\mathbb{A}^2$. Для простого (S, U) -многообразия получаем $K[X_{-1}^2(U)] = K[x, y, z, u, v]^{K^*} = K[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$, где $x_1 = x$, $x_2 = yu$, $x_3 = yv$, $x_4 = zu^2$, $x_5 = zuv$, $x_6 = zv^2$ и выполнены соотношения $x_2^2 = x_1x_4$, $x_3^2 = x_1x_6$, $x_2x_3 = x_1x_5$, $x_4x_6 = x_5^2$. Это многообразие естественно вложено в пространство $\mathbb{A}^6 = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$, не является там полным пересечением и имеет единственную особенность в нуле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. При фиксированном d простые (S, U) -многообразия $X_n^k(U)$ и $X_{n'}^{k'}(U)$ SL_2 -эквивариантно изоморфны тогда и только тогда, когда $k = k'$ и $n \equiv n' \pmod{k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что наличие SL_2 -эквивариантного изоморфизма между $X_n^k(U)$ и $X_{n'}^{k'}(U)$ эквивалентно наличию K^* -эквивариантного изоморфизма между P_n^k и $P_{n'}^{k'}$, где K^* – одномерный тор, веса которого мы откладываем по горизонтальной оси. Это вытекает из формулы (***) и того факта, что $\mathrm{Spec} K[X_n^k(U)]^U \cong P_n^k$. Поэтому доказательство сводится к рассмотрению двумерных торических многообразий.

Достаточность. Реализуем алгебру $K[P_n^k]$ как подалгебру в алгебре многочленов $K[X, Y]$ с действием тора K^* по формуле $X \rightarrow tX, Y \rightarrow Y$:

$$K[P_n^k] = \langle X^i Y^j : (i, j) \in C \rangle.$$

Пусть $n - n' = mk$. Тогда требуемый изоморфизм задается формулой $X^i Y^j \rightarrow X^i Y^{j+mi}$.

Необходимость. Равенство $k = k'$ следует из того, что плотная орбита в особом слое изоморфна SL_2 / U_{dk} . Предположим теперь, что $n, n' \in [0, k - 1]$. Соединим ломаной точки с целыми координатами в конусе C , отвечающие таким регулярным функциям, которые при сужении на особый слой становятся ненулевыми нильпотентами весов $1, 2, \dots, k - 1$, см. рис. 4.

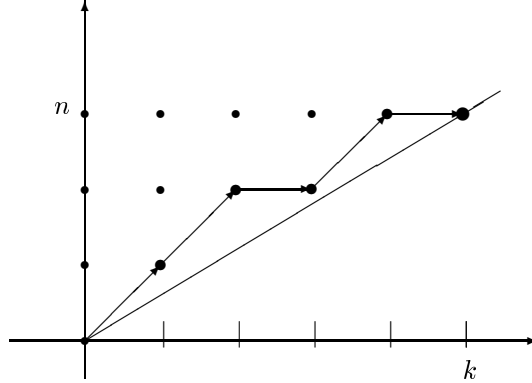


Рис. 4

Горизонтальное звено такой ломаной $(l, m) \rightarrow (l + 1, m)$ соответствует тому, что произведение нильпотентов веса 1 и l равно нулю, а звено $(l, m) \rightarrow (l + 1, m + 1)$ означает, что это произведение есть ненулевой нильпотент. Поэтому если ломанные различны, то многообразия неизоморфны. Но при $n \neq n'$ ломанные не могут совпадать, так как их высоты равны n и n' соответственно.

(2) *Простые (S, N) -многообразия.* Здесь $Y = \mathrm{SL}_2 / N, \Xi(Y) = \{0, 4\varepsilon, 8\varepsilon, \dots\}$ и

$$T_Y(4a\varepsilon, 4b\varepsilon) = \{4(a + b)\varepsilon, 4(a + b - 1)\varepsilon, \dots, 4(a - b)\varepsilon \text{ при } a \geq b\}.$$

Условие 3) из определения конуса стягивания означает, что в качестве конуса стягивания здесь подходит любой конус того же вида, что и на рис. 5, где k и n – взаимно простые целые числа и $k > 0, n \geq 0$.

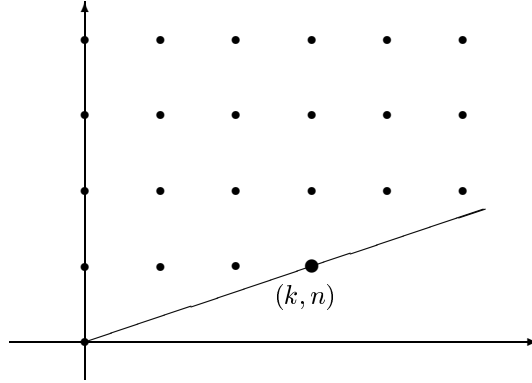


Рис. 5

Приведем с некоторыми усовершенствованиями конструкцию из работы [10], реализующую простые (S, N) -многообразия для всех значений k и n . Пусть a, b, c – стандартные координаты в пространстве квадратичных бинарных форм $V_2 = \{ax^2 + bxy + cy^2\}$. Рассмотрим фактормногообразие $X^k = V_2/\mathbb{Z}_{2k}$, где циклическая группа $\mathbb{Z}_{2k}$ действует на векторном пространстве V_2 скалярно умножениями на корни степени $2k$ из единицы, и пусть $X_n^k(N)$ есть SL_2 -многообразие, заданное в многообразии $X^k \times \mathbb{A}^1$ уравнением $z^n = (b^2 - 4ac)^k$ (предполагается, что координата z инвариантна при действии группы SL_2). При действии тора K^* переменная z имеет вес 1, а каждый моном от переменных a, b, c степени $2k$ имеет вес n .

Многообразие $X_n^k(N)$ нормально только при $n = 1$ или $k = 1$, см. [10]. В любом случае его нормализация $\mathrm{Norm} X_n^k(N)$ является простым (S, N) -многообразием, соответствующим паре (k, n) . Опишем явно эту нормализацию. Будем обозначать через M_d множество всех мономов степени d от переменных a, b, c . Пусть u и v – такие натуральные числа, что $nv - ku = 1$. Обозначим через $\Pi(k, n)$ параллелограмм в $\mathbb{A}^2$ с вершиной в нуле, натянутый на векторы (k, n) и $(0, 1)$. Множество целых точек этого параллелограмма есть множество образующих полугруппы целых точек конуса стягивания. Отсюда следует, что

$$K[\mathrm{Norm} X_n^k(N)] = K[X_n^k(N)] \left[\frac{M_{2k_1}(b^2 - 4ac)^{(kn_1 - nk_1)v}}{z^{(kn_1 - nk_1)u}} \right],$$

где пары (k_1, n_1) пробегают координаты целых точек внутренности параллелограмма $\Pi(k, n)$.

В работе [10] доказано, что морфизм нормализации $\mathrm{Norm} X_n^k(N) \rightarrow X_n^k(N)$ биективен и простые (S, N) -многообразия, соответствующие различным парам (k, n) , не являются SL_2 -изоморфными.

(3) *Простые (S, T) -многообразия.* Здесь $Y = \mathrm{SL}_2/T$, $\Xi(Y) = \{0, 2\varepsilon, 4\varepsilon, \dots\}$ и

$$T_Y(2a\varepsilon, 2b\varepsilon) = \{2(a+b)\varepsilon, 2(a+b-1)\varepsilon, \dots, 2(a-b)\varepsilon \text{ при } a \geq b\}.$$

Условие 3) из определения конуса стягивания означает, что в качестве конуса стягивания здесь подходит любой конус того же вида, что и на рис. 5.

Однородное пространство SL_2/T допускает единственный нетривиальный эквивариантный автоморфизм (порядка два), фактор по которому есть SL_2/N . Несложно показать, что действие этого автоморфизма продолжается до действия на всяком простом (S, T) -многообразии, соответствующем паре (k, n) , и в качестве фактора получается простое (S, N) -многообразие, отвечающее паре $(k/2, n)$ для четного k и паре $(k, 2n)$ для нечетного k . Отображение факторизации есть двулистное накрытие, разветвленное над особым слоем в первом случае и над одной точкой во втором. Отсюда следует, что простые (S, T) -многообразия, отвечающие различным парам (k, n) , не являются SL_2 -изоморфными.

В случае нечетного k можно построить простое (S, T) -многообразие так же, как и простое (S, N) -многообразие. Рассмотрим фактормногообразие $X^k = V_2/\mathbb{Z}_k$, и пусть $X_n^k(T)$ есть SL_2 -многообразие, заданное в многообразии $X^k \times \mathbb{A}^1$ уравнением $z^{2n} = (b^2 - 4ac)^k$. При действии тора K^* переменная z имеет вес 1, а каждый моном от переменных a, b, c степени k имеет вес n .

Пусть u и v — такие натуральные числа, что $2nv - ku = 1$. Тогда

$$K[\text{Norm } X_n^k(T)] = K[X_n^k(T)] \left[\frac{M_{k_1}(b^2 - 4ac)^{(kn_1 - nk_1)v}}{z^{(kn_1 - nk_1)u}} \right],$$

где пары (k_1, n_1) пробегают координаты целых точек внутренности параллелограмма $\Pi(k, n)$.

Целочисленным стягиваниям здесь отвечают гиперповерхности в четырехмерном пространстве.

Для четных значений k такую реализацию получить нельзя. В этом случае (как и в случае нечетного k) простое (S, T) -многообразие можно реализовать либо как двулистное накрытие соответствующего простого (S, N) -многообразия, либо следующим образом. Рассмотрим многообразие $X_n^1(T)$ с координатами (z, a, b, c) и многообразие X^k , соответствующее координатам (z', a', b', c') . Тогда искомое $\text{Norm } X_n^k(T)$ получается нормализацией подмногообразия в $X_n^1(T) \times X^k$, заданного уравнениями $z = z'$, $w(a, b, c) = z^{n(k-1)}w(a', b', c')$ для каждого монома $w \in M_k$.

Список литературы

1. Попов В. Л. Стягивание действий редуктивных алгебраических групп // Матем. сб. 1986. Т. 130 (172). № 3 (7). С. 310–334.
2. Аржанцев И. В. О действиях редуктивных групп с однопараметрическим семейством сферических орбит // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 5. С. 3–20.
3. Luna D., Vust Th. Plongements d'espaces homogènes // Comment. Math. Helv. 1983. V. 58. P. 186–245.
4. Винберг Э. Б., Попов В. Л. Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 4. С. 749–764.
5. Попов В. Л. Квазиоднородные аффинные алгебраические многообразия группы $SL(2)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. № 4. С. 792–832.
6. Vinberg E. B. On reductive algebraic semigroups // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1995. V. 169. P. 145–182.
7. Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов. М.: Мир, 1987.
8. Данилов В. И. Геометрия торических многообразий // УМН. 1978. Т. 32. № 2. С. 85–134.

9. Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–314.
10. Аржанцев И. В. О действиях сложности одной группы SL_2 // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 4. С. 3–18.
11. Аржанцев И. В. О нормальности замыканий сферических орбит // Функц. анализ и его прилож. 1997. Т. 31. № 4. С. 66–69.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: arjantse@mccme.ru

Поступила в редакцию
06.08.1998