с соответствующими кратностями $m_1, m_2, \ldots, m_\gamma$, *тогда*

$$|S(p^n)| \le c_1(k) p^{n\left(1-\frac{1}{m+1}\right)},$$

где $m = \max(m_1, m_2, \ldots, m_\gamma)$, $c_1(k)$ *– положительная постоянная, зависящая от* k, $c_1(k) \le k^{\gamma_1}$; *при этом* $0 \le \gamma_1 \le 2$, *если* $p > k$; $0 < \gamma_1 \le 2,5$, *если* $p \le k$, $\tau_0 = 0$ *и* $0 < \gamma_1 \le 3$, *если* $p \le k$, $\tau_0 > 0$.

Лемма 2. [5]. *При* $x \ge 2$ *и* $q \ge 1$ *имеет место оценка*

$$\sum_{\chi mod\, q} \max_{y \le x} |\psi(x,\chi)| \ll x(\ln xq)^3 + x^{4/5} q^{1/2} (\ln xq)^{34} + x^{1/2} q (\ln xq)^{34}.$$

Литература

1. Hardy G.H., Wright E.M. An introduction to theory of numbers // Oxford at the clarendon press, 1954.
2. Бабаев Г.Б. Замечание к работе Дэвенпорта и Хейлброна // УМН, 1958, т. 13, т. 84, в. 6, с. 63–64.
3. Рахмонов З.Х. Распределение чисел Харди Литтвлуда в арифметических прогрессиях // Изв. АН СССР. Сер. матем, 1989, т. 53, с. 211–224.
4. Рахмонов З.Х. Средние значения функции Чебышева // Докл. АН России, 1993, т. 331(3), с. 281–282.
5. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Известия РАН. Сер. матем., 1993, т. 57, № 4, с. 55–71.
6. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Труды МИРАН, 1994, т. 207, с. 286–296.
7. Исмоилов Д. Оценки полных сумм характеров от многочленов // Труды МИАН СССР, 1991, т. 200, с. 171–184.

О проблеме замыкания пространственных моментов в модели стационарных биологических сообществ

Никитин А.А.

МГУ имени М.В. Ломоносова

Факультет ВМиК, кафедра Общей математики

Рассматривается популяция стационарных биологических сообществ [1], [2], обитающих в некоторой области $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^n$. Все индивиды являются материальными точками и ничем не отличаются друг от друга, кроме

положения в пространстве. Время в модели непрерывно, и в каждый момент с любым из индивидов могут произойти два события: рождение и смерть. Не вдаваясь в подробности, будем считать, что за эти события отвечают заданные моделью функции и параметры: $m(x)$ — ядро рассеивания; $\omega(x)$ — ядро конкуренции; b — темп рождаемости; d — темп смертности; d' — сила конкуренции.

Рассмотрение динамики данной модели приводит к системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}N = (b-d)N - d'\int_{R^n} w(\xi)C(\xi)d\xi \\ \frac{\partial}{\partial t}C(\xi) = Nbm(\xi) + b\int_{R^n} m(\xi')C(\xi+\xi')d\xi' - dC(\xi) - d'w(\xi)C(\xi) - \\ -\frac{d'}{N}\displaystyle\int\limits_{R^n} w(\xi')T(N,C,\xi,\xi')d\xi'. \end{cases}$$

Заметим, что уравнение динамики первого пространственного момента использует второй момент, уравнение динамики второго момента — третий. У равнение динамики третьего пространственного момента будет использовать четвертый момент и так далее. Поэтому количество неизвестных функций (пространственных моментов) всегда будет превышать число уравнений. Для того чтобы избавиться от подобных зависимостей, было предложено “замкнуть” уравнения динамики, исходя из биологических ограничений на исследуемые функции. В настоящей работе мы использовали так называемое “параметрическое семейство замыканий” третьего момента, предложен- ное в [3]:

$$T(\xi,\xi') = \frac{\alpha}{2}\left[\frac{C(\xi)C(\xi')}{N} + \frac{C(\xi)C(\xi'-\xi)}{N} + \frac{C(\xi')C(\xi'-\xi)}{N} - N^3\right] + \\ +(1-\alpha)\frac{C(\xi)C(\xi')}{N}.$$

Данное замыкание, после алгебраических преобразований, приводит к нелинейному интегральному уравнению:

$$\left(\widehat{\omega}+b-\frac{\alpha}{2}\left(b-d-\frac{d'(b-d)}{\mathbf{Y}}\right)\right)\overline{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{Y}\widehat{m}}{b-d} - \widehat{\omega} + [\widehat{m}*\overline{\mathbf{Q}}] - \\ -\alpha\frac{(b-d)}{2\mathbf{Y}}\left((\overline{\mathbf{Q}}+2)[\widehat{\omega}*\overline{\mathbf{Q}}] + [\widehat{\omega}\overline{\mathbf{Q}}*\overline{\mathbf{Q}}]\right),$$

где $\mathbf{Y} = \langle\widehat{\omega}, \overline{\mathbf{Q}}+1\rangle$. Будем называть последнее соотношение уравнением равновесия. Линейные интегральные уравнения, получаю- щиеся в данной модели, рассматривались в работах [4] – [6].

В нашей работе доказана теорема, что если уравнение равновесия имеет какое-либо решение, то оно имеет и радиально-симметричное решение. Используя радиально-симметричность, проводится ускорение численного решения, изучаемого нелинейного уравнения в двумерном и трчхмерном случаях. С помощью интегральных преобразований Фурье и Ханкеля, а также перехода к полярной и сферической системам координат, сложность взятия многомерной нелинейной свчртки, сводится к сложности одномерной.

И в двумерном, и в трёхмерном случаях получается сложность вычислений $O(N \ln N)$.

Работа выполнена в ходе проведения исследования (18-05-0011), "Математические модели. Дифференциальные уравнения и большие массивы информации. Аналитические и вычислительные методы" в рамках Программы "Научный фонд НИУ ВШЭ" в 2018 - 2019 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100".

Литература

1. Law R., Dieckmann U. Moment approximations of individual-based models. The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity. Cambridge:Cambridge University Press, 2000. P. 252-270.
2. Dieckmann U., Law R. Relaxation projections and the method of moments // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press, 2000. P. 412–455.
3. Murrell D. J., Dieckmann U., Law R. On moment closures for population dynamics in continuous space // Journal of Theoretical Biology, 2004. Vol. 229. Pp. 421-432.
4. Бодров А.Г., Никитин А.А. Качественный и численный анализ интегрального уравнения, возникающего в модели стационарных сообществ // Доклады академии наук, том 455, **5**, с. 507-511, 2014г.
5. Бодров А.Г., Никитин А.А. Исследование уравнения равновесной плотности биологического вида в пространствах различных размерностей // Вестник Московского университета, серия 15 Вычислительная математика и кибернетика, 2015, **4**, с. 7-13
6. Данченко В.И., Давыдов А.А., Никитин А.А. Об интегральном уравнении для стационарных распределений биологических сообществ. // Проблемы динамического управления. Вып. 3. М. Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ. 2009. С. 15–29.