Д. С. Талецкий, Д. С. Малышев, Деревья без листьев-дубликатов с наименьшим количеством максимальных независимых множеств, *Дискрет. матем.*, 2018, том 30, выпуск 4, 115–133

DOI: https://doi.org/10.4213/dm1515

Дискретная математика

том 30 выпуск 4 * 2018

УДК 519.172.1 DOI https://doi.org/10.4213/dm1515

Деревья без листьев-дубликатов с наименьшим количеством максимальных независимых множеств

© 2018 г. Д. С. Талецкий*, Д. С. Малышев**

Для любого n в множестве n-вершинных деревьев, в которых любые два листа не имеют общей смежной вершины, полностью описаны деревья с наименьшим количеством максимальных независимых множеств.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 18-31-20001-мол-а-вед.

Ключевые слова: экстремальная комбинаторика, дерево, максимальное независимое множество

1. Введение

Независимым множеством в графе называется произвольное подмножество его попарно несмежных вершин. Независимое множество графа называется *максимальным*, если оно максимально по включению. Для обозначения независимого множества (максимального независимого множества) графа мы будем использовать сокращение «н.м.» («м.н.м.»). Количество максимальных независимых множеств графа G принято обозначать через $mi(G)$.

Перечислению н.м. и м.н.м. в различных классах графов посвящена обширная литература. Корпус соответствующей литературы постоянно пополняется. В известной работе Д. Муна и Л. Мозера [7] было найдено значение максимально возможного количества м.н.м. в графах с n вершинами и описаны все соответствующие экстремальные графы. Они оказались несвязными. В [3] был получен аналогичный результат для связных графов. В [4–6, 8] были найдены максимально возможные количества м.н.м. в графах без треугольников, в унициклических графах, в двудольных графах, в деревьях с n вершинами соответственно.

Нижняя оценка количества н.м. в классе всех n-вершинных деревьев общеизвестна и достигается на n-пути. На сегодняшний день известны некоторые нижние

*Место работы: Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, e-mail: dmitalmail@gmail.com

**Место работы: Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

оценки количества н.м. в деревьях фиксированного диаметра. Так, в [2] получена точная нижняя оценка количества н.м. в деревьях диаметра не более пяти. В [1] приведены асимптотически достижимые нижние оценки количества н.м. в деревьях диаметров 6 и 7.

Точная нижняя оценка количества м.н.м. в классе всех n-вершинных деревьев является константой 2 и достигается на $(n-1)$-звезде. А. Б. Дайняк получил точные верхние и нижние оценки числа м.н.м. в деревьях фиксированного диаметра [1], при этом приведенная им нижняя оценка также является константой, зависящей только от диаметра дерева. Отметим, что в [1] представлен обширный обзор результатов, касающихся перечисления независимых множеств в графах, а также некоторых смежных вопросов.

Два листа дерева называются *листьями-дубликатами*, если они имеют общего соседа. Исключение из рассмотрения деревьев с листьями-дубликатами обусловлено тем, что добавление/удаление из дерева таких листьев не меняет количество м.н.м.; задача описания экстремальных деревьев заданного размера с допустимыми листьями-дубликатами оказывается существенно проще. Поэтому далее рассматриваются деревья без листьев-дубликатов. *Минимальным* назовем n-вершинное дерево T без листьев-дубликатов, содержащее наименьшее число м.н.м. среди всех таких деревьев. В настоящей работе приводится полное описание всех минимальных n-вершинных деревьев для любого n.

2. Определения, обозначения и преобразования графов

2.1. Стандартные определения и обозначения. Вершина, смежная с листом леса, называется *предлистовой* или *предлистом*. Для двухвершинного дерева предлистовыми считаются обе вершины дерева.

Через P_n обозначается простой путь на n вершинах.

Для графа G и его вершины v через $mi_+(G,v)$ мы обозначаем количество м.н.м. графа G, которые содержат вершину v. Для графа G и его вершины v через $mi_-(G,v)$ мы обозначаем количество м.н.м. графа G, которые не содержат вершину v.

2.2. Преобразования деревьев и их свойства. *Соединением* деревьев T_1 и T_2 назовем дерево, полученное из дизъюнктного объединения деревьев T_1 и T_2 добавлением новой вершины степени два, смежной с предлистом дерева T_1 и предлистом дерева T_2. Множество всевозможных соединений деревьев T_1 и T_2 будем обозначать через $u(T_1,T_2)$.

Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если в дереве T предлистовая вершина v смежна с листом v', то $mi(T) = mi_+(T,v) + mi_+(T,v')$.*

Лемма 2. *Для любого дерева $T \in u(T_1,T_2)$ выполнено равенство*

$$mi(T) = mi(T_1) \cdot mi(T_2).$$

Доказательство. Предположим, что T получается из T_1 и T_2 добавлением вершины w, смежной с предлистом v_1 дерева T_1 и с предлистом u_1 дерева T_2. Обозначим через v_1' лист дерева T_1, смежный с вершиной v_1. Аналогичный лист в дереве T_2 обозначим через u_1'. Тогда справедливы соотношения:

$$mi(T_1) \cdot mi(T_2) = (mi_+(T_1, v_1) + mi_+(T_1, v_1')) \cdot (mi_+(T_2, u_1) + mi_+(T_2, u_1')),$$

$$mi(T) = mi_-(T, w) + mi_+(T, w) = mi_-(T, w) + mi_+(T_1, v_1') \cdot mi_+(T_2, u_1').$$

Каждое из м.н.м. дерева T, которое не содержит вершину w, обязательно содержит хотя бы одну из вершин v и u. Поэтому

$$mi_-(T, w) = mi_+(T_1, v_1) \cdot mi_+(T_2, u_1) + mi_+(T_1, v_1) \cdot mi_-(T_2, u_1)$$

$$+ mi_-(T_1, v_1) \cdot mi_+(T_2, u_1)$$

$$= mi_+(T_1, v_1) \cdot mi_+(T_2, u_1) + mi_+(T_1, v_1) \cdot mi_+(T_2, u_1') + mi_+(T_1, v_1') \cdot mi_+(T_2, u_1).$$

Поэтому $mi(T) = mi(T_1) \cdot mi(T_2)$.

Предположим, что F — лес с s компонентами связности, содержащий $a_0 \geqslant 2$ м.н.м. Рассмотрим лес F_k, полученный добавлением k-пути с концом x к лесу F и $s' \leqslant s$ ребер, причем для любого $i \in \overline{1, s}$ имеется не более одного ребра, инцидентного x и вершинам i-й компоненты связности. Обозначим через a_k число м.н.м. леса F_k, через a_{-1} переобозначим $mi_+(F_1, x)$, а через a_{-2} переобозначим $mi_-(F_1, x)$. Постоянным предполагается не только лес F, но и вершины компонент этого леса, к которым присоединяется x. Если к F присоединены пути P_r и P_q произвольно и последовательно по одному и был получен лес, то обозначим через $a_{r,q}$ число м.н.м. в полученном графе. Обозначения $a_{-1,k}, a_{k,-1}, a_{-1,-1}$ имеют тот же смысл, что и a_{-1}.

Лемма 3. *Имеют место следующие утверждения.*

I) Для любого $n \geqslant 1$ верно двойное неравенство $a_n < a_{n+1} < 2 \cdot a_n$.

II) Для любого $n \geqslant 0$ верно неравенство $a_{n+2} \leqslant 2 \cdot a_n$.

III) Если F — дерево, то $a_2 \geqslant \frac{3}{2} \cdot a_0$.

IV) Если каждая компонента связности леса F содержит не менее двух вершин, то $2 \cdot a_0 > a_1$. Если F — дерево и сосед $y \in V(F)$ вершины x не является предлистом, то $a_1 > a_0$.

Доказательство. I) По лемме 1 имеем $a_{n+1} = a_{n-1} + a_{n-2}, a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$, причем из нее же и неравенства $a_0 \geqslant 2$ следует, что $a_n > a_{n-2}, a_{n-1} > a_{n-3}$, откуда $a_n < a_{n+1}$. Поскольку $a_{n-1} \leqslant a_n$, то $a_{n+1} < 2 \cdot a_n$.

II) По лемме 1 имеем $a_{n+2} = a_n + a_{n-1}$. Поскольку $a_n \geqslant a_{n-1}$ для любого n, то $a_{n+2} \leqslant 2 \cdot a_n$ при $n \geqslant 0$.

III) Обозначим через y соседа вершины x в дереве F. По лемме 1 имеем $a_2 = a_0 + a_{-1}$ и $a_0 = mi_-(F, y) + mi_+(F, y)$, причем $a_{-1} = mi(F \setminus \{y\}) \geqslant \max(mi_+(F, y), mi_-(F, y))$. Отсюда следует, что $a_{-1} \geqslant \frac{a_0}{2}$ и что $a_2 \geqslant 1.5 \cdot a_0$.

IV) Поскольку $a_1 = a_{-1} + a_{-2}$ и $a_{-2} \leqslant a_0, a_{-1} \leqslant a_0$, то $2 \cdot a_0 \geqslant a_1$. Равенство возможно только при $a_0 = a_{-1} = a_{-2}$. Через $T_1, \ldots, T_s$ обозначим все компоненты связности леса F, а через z_i обозначим соседа вершины x в дереве T_i. Очевидно, что

$a_0 = \prod\limits_{i=1}^{s} mi(T_i)$ и что $a_{-2} = \prod\limits_{i=1}^{s} mi(T_i) - \prod\limits_{i=1}^{s} mi_-(T_i, z_i)$. Поэтому равенство $a_{-2} = a_0$ возможно только тогда, когда $\prod\limits_{i=1}^{s} mi_-(T_i, z_i) = 0$, т.е. когда одна из компонент связности леса F содержит ровно одну вершину. Поэтому $2 \cdot a_0 > a_1$.

Предположим, что F — дерево и сосед $y \in V(F)$ вершины x не является предлистом. Обозначим через $T'_1, \ldots, T'_p$ все компоненты связности леса $F \setminus \{y\}$, а через z'_i обозначим соседа вершины y в дереве T'_i. Тогда

$$a_1 = a_{-1} + a_{-2} = mi(F \setminus \{y\}) + mi_+(F, y) = \prod_{i=1}^{p} mi(T'_i) + mi_+(F, y),$$

$$a_0 = mi_-(F, y) + mi_+(F, y) = \prod_{i=1}^{p} mi(T'_i) - \prod_{i=1}^{p} mi_-(T'_i, z'_i) + mi_+(F, y).$$

Ясно, что $|V(T'_i)| \geqslant 2$ и $mi_-(T'_i, z_i) > 0$ для любого i, так как y не является предлистом дерева F. Поэтому $a_1 > a_0$.

2.3. Некоторые определения и обозначения. Через R_n мы обозначаем граф, полученный из пути P_n добавлением n пронумерованных вершин и n пронумерованных ребер, причем для любого $i \in \overline{1, n}$ ребро с номером i соединяет i-ю добавленную вершину и i-ю вершину пути, считая от одного из концов пути.

Через R'_3 мы переобозначаем граф P_6. Через R'_4 мы обозначаем граф, полученный соединением конца 4-пути с вершиной степени два другого 4-пути. Очевидно, что $mi(R_3) = mi(R'_3) = 5$ и $mi(R_4) = mi(R'_4) = 8$.

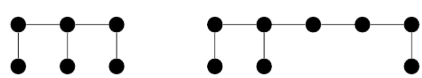

Рис. 1. Графы R_3 и R'_4

Через $R_{a,b}$ обозначим дерево, получаемое из R_a и R_b добавлением вершины, смежной с вершиной степени два дерева R_a и с вершиной степени два дерева R_b. Аналогично, через $R_{k_1,k_2,\ldots,k_s}$ определим дерево, состоящее из поддеревьев $R_{k_1,k_2,\ldots,k_{s-1}}$ и R_{k_s}, соединенных аналогичным образом.

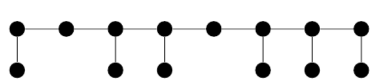

Рис. 2. Дерево $R_{1,2,3}$

Назовем поддерево T' дерева T *крайним*, если ровно одна вершина поддерева T' смежна с вершинами из $V(T) \setminus V(T')$. Эту вершину поддерева T' назовем *контактной.* Поддерево $R_{k_1,k_2,\dots,k_s}$ будем называть *крайним*, если среди его вершин только вершина степени два его поддерева R_{k_s} (если $s = 1$ и $k_1 = 1$, то степени один) соединена с одной или несколькими вершинами исходного дерева. Путь P_l назовем *крайним*, если один из его концов имеет степень один, а все остальные вершины имеют степень два в исходном дереве. Отметим, что понятие крайнего дерева применять к пути не предполагается и поэтому мы пользуемся более ограничительным определением крайнего пути.

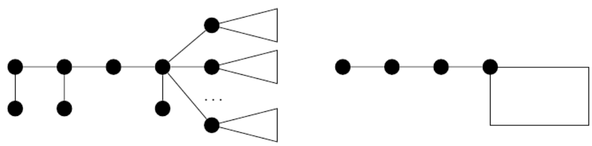

Рис. 3. Крайнее поддерево $R_{2,1}$ и крайний 3-путь

Будем говорить, что крайнее поддерево T' дерева T *смежно с l-путем* $(x_1,\dots,x_l)$, если $x_1,\dots,x_l \in V(T) \setminus V(T')$, вершина x_1 смежна с контактной вершиной поддерева T' и степени всех вершин $x_1,\dots,x_l$ в дереве T равны двум. При этом мы предполагаем, что контактная вершина подграфа T' имеет в множестве $V(T) \setminus V(T')$ единственного соседа — конец l-пути.

Пусть T — дерево, а T' — его крайнее поддерево, x — контактная вершина. Пусть T'' — некоторое дерево с выбранной вершиной y. *Замена T' на T'' в дереве T* состоит в удалении из T всех элементов множества $V(T')$, последующем добавлении T'' и всех ребер вида yz, где $z \in V(T) \setminus V(T')$ и $xz \in E(T)$. Далее мы будем применять данные замены для некоторых пар (T', T''), где T'' — простой путь или дерево вида $R_{k_1,\dots,k_s}$, а в качестве контактной вершины y выбирается либо конец пути, либо предлистовая вершина степени два (степени один, если $s = 1$ и $k_1 = 1$) дерева $R_{k_1,\dots,k_s}$. При этом мы будем так применять замены к деревьям без листьев-дубликатов, чтобы сохранялись количество вершин, отсутствие листьев-дубликатов и уменьшалось количество м.н.м.

Дерево T назовем *T^*-отделимым*, если T является соединением двух его крайних поддеревьев, одно из которых изоморфно T^*. Назовем дерево *$R_1 \bigvee R_2$-отделимым*, если оно является или R_1-отделимым, или R_2-отделимым. Основная идея этой работы — показать, что все нетривиальные минимальные деревья являются $R_1 \bigvee R_2$-отделимыми, что позволяет их охарактеризовать.

Для дерева T построим дерево $Z(T)$ следующим образом. Множество вершин $Z(T)$ — множество вершин T степени не менее чем три. Две вершины дерева $Z(T)$ соединены ребром, если они либо смежны в T, либо путь между ними в T состоит из нескольких вершин степени два.

Назовем вершину v дерева T степени не менее чем три *крайней*, если она в дереве $Z(T)$ является листом. Если при этом v еще является и концом одного из путей наибольшей длины в $Z(T)$, то назовем ее *концевой*. Очевидно, что каждая крайняя вершина смежна хотя бы с двумя крайними путями.

Замена крайней вершины x поддеревом $\hat{T}$ с выбранной вершиной y в дереве T состоит в удалении некоторых крайних путей, смежных с x, причем их выбор будет ясен из контекста, а также вершины x и всех смежных с ней листьев. После этого в дерево добавляется поддерево $\hat{T}$ и, его выбранная вершина соединяется со всеми вершинами, которые изначально были смежны с вершиной x и не были удалены из дерева в результате преобразования. Ограничения на $(\hat{T}, y)$ точно такие же, как и на (T'', y). Это преобразование будет применяться таким образом, чтобы оно сохраняло количество вершин и отсутствие листьев-дубликатов, но уменьшало число м.н.м.

3. Структура минимальных деревьев

В следующих двух подразделах доказано несколько структурных лемм об отсутствии специального вида фрагментов в минимальных деревьях.

3.1. Некоторые ограничения для крайних подграфов.

Лемма 4. *Минимальное дерево не может содержать подграф, имеющий один из следующих типов*:

1) *крайний 5-путь*,

2 *крайний 4-путь, не смежный с предлистом.*

Доказательство. Под лесом F мы понимаем результат удаления всех вершин рассматриваемого крайнего подграфа. Предположим, что в некотором минимальном дереве существует крайний 5-путь. Заменим его начальный 4-подпуть подграфом R_2. Очевидно, что результат преобразования не содержит листьев-дубликатов. По лемме 1 в исходном дереве было $a_3 + a_2$ м.н.м., а в полученном стало $a_3 + a_1$ м.н.м. (в силу леммы 1, примененной к листу поддерева R_2, не смежному с его контактной вершиной), причем $a_2 > a_1$ по лемме 3, п. I.

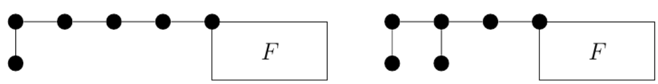

Рис. 4. Локальное преобразование 5-пути

Докажем второе утверждение леммы. Предположим, что некоторое минимальное дерево содержит крайний 4-путь, смежная с которым вершина не является предлистовой. Заменим его подграфом R_2. Ясно, что результат преобразования не содержит листьев-дубликатов. В исходном графе по лемме 1 было $a_4 = a_2 + a_1$ м.н.м., а в полученном стало $a_2 + a_0$ м.н.м. (по лемме 1, примененной к листу поддерева R_2, смежному с соседом его контактной вершины). По лемме 3 (п. IV) $a_1 > a_0$.

Лемма 5. *Минимальное дерево не может одновременно содержать*:

1) *два крайних 4-пути*,

2) *два крайних подграфа R_3*,

3) *два крайних подграфа R_k и R_s, где $k, s \in \{2, 3, 4\}$, каждый из которых смежен с 2-путем.*

Доказательство. Под лесом F мы понимаем результат удаления всех вершин обоих рассматриваемых крайних подграфов, а также, в третьем случае, четырех вершин обоих смежных с ними 2-путей. Докажем первое утверждение. Пусть в минимальном дереве имеются два крайних 4-пути (эти пути, вообще говоря, могут быть смежны с одной и той же вершиной). По лемме 4 (п. 2) каждый из этих путей смежен с предлистовой вершиной. Заменим начальный 3-подпуть первого пути подграфом R_2, а начальный 3-подпуть второго пути подграфом R_1. Ясно, что результат преобразования не содержит листьев-дубликатов. Тогда в исходном графе было $a_{4,4}$ м.н.м., а в полученном стало $mi(R_1) \cdot mi(R_2) \cdot a_{0,0} = 6 \cdot a_{0,0}$ м.н.м. по лемме 2.

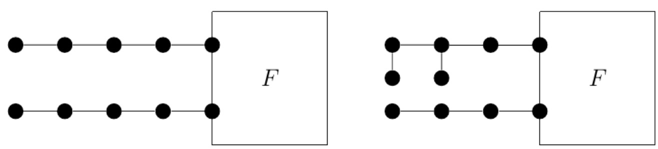

Рис. 5. Локальное преобразование двух 4-путей

При этом по лемме 1 и п. III леммы 3

$$a_{4,4} = a_{2,2} + a_{2,1} + a_{1,2} + a_{1,1} \geqslant 1.5 \cdot a_{2,0} + 1.5 \cdot a_{0,1} + 1.5 \cdot a_{1,0} + a_{1,1} \geqslant$$

$$\geqslant 2.25 \cdot a_{0,0} + 1.5 \cdot a_{0,0} + 1.5 \cdot a_{0,0} + a_{0,0} > 6 \cdot a_{0,0},$$

поэтому количество м.н.м. уменьшилось.

Докажем второе утверждение. Предположим противное. Заменим крайние подграфы подграфами $R_{1,1}$ и $R_{2,1}$. Ясно, что результат не содержит листьев-дубликатов, так как исходное дерево их не содержало. В исходном графе имелось $4 \cdot a_{2,2} + 2 \cdot a_{0,2} + 2 \cdot a_{2,0} + a_{0,0}$ м.н.м. (применили лемму 1 к «средним» листьям подграфов R_3), а по лемме 2 в новом графе $mi(R_1) \cdot mi(R_2) \cdot a_{2,2} = 6 \cdot a_{2,2}$ м.н.м. Поскольку по лемме 3 (п. II)

$$2 \cdot a_{0,2} + 2 \cdot a_{2,0} \geqslant a_{2,2} + a_{2,2} = 2 \cdot a_{2,2} \geqslant a_{2,2},$$

то общее число м.н.м. уменьшилось.

Докажем третье утверждение. Предположим противное: существуют крайние подграфы R_k и R_s, где $k, s \in \{2, 3, 4\}$, каждый из которых смежен с 2-путем. Мы можем считать, что $k = 2$, поскольку иначе существуют два крайних подграфа R_3.

Случай $s = 2$. Не умаляя общности, можно считать, что $a_{2,1} \leqslant a_{1,2}$. Заменим первый из крайних подграфов R_2 подграфом $R_{1,1,1}$, а все вершины другого крайнего подграфа R_2 удалим. Ясно, что результат не содержит листьев-дубликатов. В исходном графе было $4 \cdot a_{2,2} + 2 \cdot a_{2,1} + 2 \cdot a_{1,2} + a_{1,1}$ м.н.м., где для подсчета мы применили лемму 1 к листьям, смежным с контактными вершинами рассматриваемых крайних подграфов. В полученном графе по лемме 2 и лемме 1, примененной к листу $R_{1,1,1}$, смежному с контактной вершиной, стало $mi(R_{1,1}) \cdot (a_{2,2} + a_{2,1}) = 4 \cdot (a_{2,2} + a_{2,1})$ м.н.м. Количество м.н.м. уменьшилось.

Случай $s = 3$. Заменим крайний подграф R_3 подграфом $R_{2,1,1}$, а все вершины крайнего подграфа R_2 удалим. Ясно, что результат не содержит листьев-дубликатов. В исходном графе было $6 \cdot a_{2,2} + 4 \cdot a_{2,1} + 3 \cdot a_{1,2} + 2 \cdot a_{1,1}$ м.н.м., где для подсчета мы применили лемму 1 к листьям, смежным с контактными вершинами подграфов R_2 и R_3. В полученном графе по лемме 2 и лемме 1, примененной к листу $R_{2,1,1}$, смежному с контактной вершиной, стало $mi(R_{2,1}) \cdot (a_{2,2} + a_{2,1}) = 6 \cdot (a_{2,2} + a_{2,1})$ м.н.м. По лемме 3 (п. I) имеем $2 \cdot a_{1,2} > 2 \cdot a_{1,1} > a_{2,1}$ и поэтому общее количество м.н.м. уменьшилось.

Случай $s = 4$. Заменим крайний подграф R_4 подграфом $R_{2,2,1}$, а все вершины второго подграфа удалим. Ясно, что результат не содержит листьев-дубликатов. В исходном графе было $10 \cdot a_{2,2} + 5 \cdot a_{1,2} + 6 \cdot a_{2,1} + 3 \cdot a_{1,1}$ м.н.м., где для подсчета мы применили лемму 1 к листьям, смежным с контактными вершинами подграфов R_2 и R_4. В полученном графе по лемме 2 и лемме 1, примененной к листу $R_{2,2,2}$, смежному с контактной вершиной, стало $mi(R_{2,2}) \cdot (a_{2,2} + a_{2,1}) = 9 \cdot (a_{2,2} + a_{2,1})$ м.н.м. Ясно, что общее количество м.н.м. уменьшилось.

Лемма 6. *Минимальное дерево не может одновременно содержать*:

1) *крайний подграф R_3 и крайний подграф R_2, смежный с 2-путем,*
2) *крайний подграф R_2, смежный с 2-путем, и крайний 4-путь.*

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Предположим противное. Под лесом F мы понимаем результат удаления всех вершин крайних подграфов R_3 и R_2, а также обеих вершин 2-пути, смежного с крайним подграфом R_2.

Предположим, что $a_{0,2} \leqslant a_{2,0}$. Заменим подграф R_3 подграфом $R_{1,1,2}$, а подграф R_2 удалим из графа. Понятно, что результат не содержит листьев-дубликатов. По лемме 1 в исходном графе было $4 \cdot a_{2,2} + 2 \cdot a_{2,1} + 2 \cdot a_{0,2} + a_{0,1}$ м.н.м., где для подсчета применили лемму к листу, смежному с контактной вершиной крайнего подграфа R_2, и к листу, смежному с соседом контактной вершины крайнего подграфа R_3. По леммам 2 и 1 в полученном графе стало $mi(R_{1,1}) \cdot (a_{2,2} + a_{0,2}) = 4 \cdot (a_{2,2} + a_{0,2})$ м.н.м., где для подсчета применили лемму 1 к листу, смежному с соседом контактной вершины крайнего подграфа $R_{1,1,2}$. Число м.н.м. уменьшилось.

Теперь предположим, что $a_{0,2} > a_{2,0}$. Выполним симметричные преобразования: заменим R_3 на 2-путь, удалим R_2 и смежный с ним 2-путь (a, b), а также добавим граф $R_{1,1,2}$ и ребро xy, где $x \neq a$ — сосед вершины b, а y — предлист степени два, принадлежащий подграфу R_2 графа $R_{1,1,2}$. По леммам 2 и 1 в полученном дереве стало $mi(R_{1,1}) \cdot (a_{2,2} + a_{2,0}) = 4 \cdot (a_{2,2} + a_{2,0})$ м.н.м. Число м.н.м. уменьшилось.

Докажем второе утверждение леммы. Под лесом F мы понимаем результат удаления всех вершин крайнего подграфа R_2, а также обеих вершин 2-пути, смежного с крайним подграфом R_2. Заметим, что один из концов крайнего 4-пути смежен с предлистом по лемме 4 (п. 2). Удалим подграф R_2 из графа, а три крайние вершины 4-пути заменим подграфом $R_{2,1}$. Изначально в графе было $2 \cdot a_{2,4} + a_{1,4}$ м.н.м. по лемме 1, которую мы применили к листу-соседу контактной вершины крайнего подграфа R_2. По лемме 2 в получившемся графе станет $mi(R_{2,1}) \cdot a_{2,0} = 6 \cdot a_{2,0}$ м.н.м. Поскольку по леммам 1 и 3 (пп. II и III)

$$2 \cdot a_{2,4} = 2 \cdot a_{2,2} + 2 \cdot a_{2,1} \geqslant 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot a_{2,0} + 2 \cdot a_{2,0} = 5 \cdot a_{2,0},$$

$$a_{1,4} = a_{1,2} + a_{1,1} > 2 \cdot a_{0,0} \geqslant a_{2,0},$$

то число м.н.м. уменьшилось.

3.2. Некоторые ограничения для крайних вершин.

Лемма 7. *В минимальном дереве каждая вершина, одновременно смежная с двумя крайними путями P_k и P_l, где $k \geqslant l \geqslant 2$, смежна с листом.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует некоторая вершина v, смежная с крайними путями P_l и P_k и не смежная с листом. По лемме 4 имеем $k \leqslant 3$ и $l \leqslant 3$. Через F обозначим результат удаления из дерева вершины v, а также всех вершин крайних k-пути и l-пути.

Случай $k = l = 2$. Удалим все вершины обоих крайних 2-путей, добавим подграф R_2 и ребро, инцидентное v и вершине степени два графа R_2. Так как v не смежна с листом, то результат преобразования не содержит листьев-дубликатов. В исходном графе по лемме 1 было $a_1 + 3 \cdot a_0$ м.н.м., а в полученном стало $2 \cdot a_1 + a_0$ м.н.м. (применили лемму к концам крайних 2-путей и к листу, смежному с контактной вершиной подграфа R_2). По лемме 3 (п. IV) имеем $2 \cdot a_0 > a_1$.

Случай $k = 3, l = 2$. Заменим 6-путь с контактной вершиной v, составленный из вершин крайних 3- и 2-путей, подграфом R_3. Так как v не смежна с листом, то результат преобразования не содержит листьев-дубликатов. По лемме 1 в исходном графе было $a_4 + 2 \cdot a_0 = a_2 + a_1 + 2 \cdot a_0$ м.н.м., а в полученном стало $2 \cdot a_2 + a_0 = a_2 + 2 \cdot a_0 + a_{-1}$ м.н.м. (применили лемму к концу крайнего 2-пути и к листу, смежному с соседом с контактной вершины подграфа R_2). Поскольку $a_0 \geqslant 2$, то $a_1 > a_{-1}$.

Случай $k = l = 3$. Заменим 7-путь с контактной вершиной v, составленный из вершин крайних 3-путей, подграфом $R_{2,1}$. Так как v не смежна с листом, то результат преобразования не содержит листьев-дубликатов. По лемме 1 (последовательно применили ее к концам крайних 3-путей) в исходном графе было $3 \cdot a_2 + a_1$ м.н.м., а в полученном по лемме 2 стало $mi(R_2) \cdot a_2 = 3 \cdot a_2$ м.н.м.

В предположении о существовании вершины, одновременно смежной с двумя крайними путями и не смежной с листом, во всех случаях показано, что количество м.н.м. можно уменьшить.

Лемма 8. *В минимальном дереве, которое не является R_1-отделимым, каждая крайняя вершина имеет степень не больше четырех.*

Доказательство. Предположим, что минимальное дерево содержит крайнюю вершину v степени не менее пяти. Тогда она смежна с тремя крайними путями P_a, P_b, P_c, где $2 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 4$ (см. лемму 4, п. 1), а также смежна с листом по лемме 7. Так как дерево не является R_1-отделимым, то v не смежна с крайним 3-путем. Кроме того, v смежна не более чем с одним крайним 4-путем по лемме 5 (п. 1). Значит, возможны лишь случаи $a = b = c = 2$ и $a = b = 2, c = 4$. Здесь под F мы понимаем результат удаления v, смежного с ней листа, а также всех вершин путей P_a, P_b, P_c.

Случай $a = b = c = 2$. Заменим вершину v крайним подграфом R_4. Так как v была смежна с листом, то результат преобразования не содержит листьев-дубликатов. По лемме 1 в исходном графе было $a_2 + 7 \cdot a_0$ м.н.м. (последовательно применили лемму к листьям-концам трех крайних 2-путей), а в полученном стало $3 \cdot a_2 + 2 \cdot a_0$ м.н.м. (применили лемму 1 к листу, смежному с соседом контактной вершины поддерева R_4). Напомним, что по лемме 3 (п. II) выполнено неравенство $a_2 \leqslant 2 \cdot a_0$. Поэтому количество м.н.м. уменьшилось.

Случай $a = 2, b = 2, c = 4$. Заменим вершину v крайним подграфом $R_{1,1,2}$. Так как v была смежна с листом, то результат преобразования не содержит листьев-дубликатов. По лемме 1 в исходном графе было $2 \cdot a_2 + 10 \cdot a_0$ м.н.м. (последовательно применили лемму к листьям-концам двух крайних 2-путей, а затем дважды к вершинам крайнего 4-пути), а в полученном по леммам 2 и 1 стало $mi(R_{1,1}) \cdot (a_2 + a_0) = 4 \cdot (a_2 + a_0)$ м.н.м. Поэтому количество м.н.м. уменьшилось.

В предположении о существовании крайней вершины степени не менее пяти во всех рассмотренных случаях количество м.н.м. можно уменьшить.

Лемма 9. *В минимальном дереве, которое не является R_1-отделимым, существует не более одной крайней вершины степени четыре.*

Доказательство. Предположим, что в минимальном дереве существуют две крайние вершины степени четыре. По лемме 7 каждая из них смежна с листом и двумя крайними путями на не менее чем двух вершинах каждый. Обозначим соответствующие крайние пути через P_a, P_b и $P_{a'}, P_{b'}$. Из соображений симметрии можно считать, что $a \leqslant b, a' \leqslant b'$ и $a \leqslant a'$. Тогда в силу лемм 4 (п. 1) и 5 (п. 1) можно считать, что $a = b = a' = b' = 2$ и $a = b = a' = 2, b' = 4$. Под F мы понимаем результат удаления обеих крайних вершин, смежных с ними листьев, а также всех вершин крайних путей $P_a, P_{a'}, P_b, P_{b'}$.

Случай $b' = 2$. Заменим одну из крайних вершин подграфом $R_{2,1,1}$, а другую — 2-путем. Так как они были смежны с листьями, то результат преобразования не содержит листьев-дубликатов. В исходном графе было $9 \cdot a_{0,0} + 3 \cdot a_{2,0} + 3 \cdot a_{0,2} + a_{2,2}$ м.н.м. (лемма 1 последовательно применяется к листьям-концам четырех крайних 2-путей), а по лемме 2 в полученном графе стало $mi(R_{2,1}) \cdot a_{2,2} = 6 \cdot a_{2,2}$ м.н.м. По лемме 3 (п. II) имеем

$$9 \cdot a_{0,0} + 3 \cdot a_{2,0} + 3 \cdot a_{0,2} + a_{2,2} > 4 \cdot a_{0,0} + 4 \cdot a_{0,0} + 3 \cdot a_{2,0} + 3 \cdot a_{0,2} + a_{2,2}$$

$$\geqslant 2 \cdot a_{2,0} + 2 \cdot a_{0,2} + 3 \cdot a_{2,0} + 3 \cdot a_{0,2} + a_{2,2} = 5 \cdot a_{2,0} + 5 \cdot a_{0,2} + a_{2,2} \geqslant \frac{5}{2} \cdot a_{2,2} + \frac{5}{2} \cdot a_{2,2} + a_{2,2}$$

$$= 6 \cdot a_{2,2}.$$

Случай $b' = 4$. Заменим одну из крайних вершин подграфом $R_{2,2,1}$, а другую — 2-путем. Так как они были смежны с листьями, то результат преобразования не содержит листьев-дубликатов. В исходном графе было $12 \cdot a_{0,0} + 6 \cdot a_{2,0} + 4 \cdot a_{0,2} + 2 \cdot a_{2,2}$ м.н.м. (лемма 1 сначала применяется к листу-концу крайнего 4-пути), а по лемме 2 в полученном стало $mi(R_{2,2}) \cdot a_{2,2} = 9 \cdot a_{2,2}$ м.н.м. Количество м.н.м. уменьшилось.

В предположении о существовании двух крайних вершин степени 4 во всех рассмотренных случаях количество м.н.м. можно уменьшить.

Лемма 10. *Минимальное дерево, содержащее крайнюю вершину степени четыре, не может содержать следующие поддеревья:*

1) *крайний 4-путь, не смежный с данной крайней вершиной,*

2) *крайний подграф* R_3,
3) *крайний подграф* R_2*, смежный с 2-путем.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное минимальное дерево и его крайнюю вершину степени четыре. Она обязательно смежна с крайними путями P_a и P_2, где $a \in \{2, 4\}$, и листом по леммам 4 (п. 1), 5 (п. 1) и 7. Под F мы понимаем результат удаления крайней вершины степени четыре и смежного с ней листа, всех вершин крайних путей P_2, P_a и соответствующего крайнего подграфа, а также (для третьего случая) вершин 2-пути, смежного с крайним подграфом R_2.

Докажем первое утверждение леммы. Случай $a = 4$ невозможен по лемме 5 (п. 1). Рассмотрим случай, когда $a = 2$. Будем считать, что некоторый крайний 4-путь смежен с вершиной v, которая не является крайней. Тогда v является предлистовой по лемме 4 (п. 2).

Удалим все вершины крайнего 4-пути и заменим крайнюю вершину степени четыре подграфом $R_{1,2,1}$. Так как исходное дерево не содержало листьев-дубликатов, то результат также их не содержит. Таким образом, по лемме 2 после преобразования в графе стало $mi(R_{1,2}) \cdot a_{2,0} = 6 \cdot a_{2,0}$ м.н.м., а по лемме 1 было $3 \cdot a_{0,4} + a_{2,4}$ м.н.м., где для подсчета мы применили лемму к листовым концам крайних 2-путей. По леммам 1 и 3 (пп. II и III)

$$3 \cdot a_{0,4} + a_{2,4} = 3 \cdot a_{0,2} + 3 \cdot a_{0,1} + a_{2,2} + a_{2,1} \geqslant 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot a_{0,0} + 3 \cdot a_{0,0} + \frac{3}{2} \cdot a_{2,0} + a_{2,0}$$

$$= 7.5 \cdot a_{0,0} + 2.5 \cdot a_{2,0} > 3.5 \cdot a_{2,0} + 2.5 \cdot a_{2,0} = 6 \cdot a_{2,0},$$

т. е. число м.н.м. в результате преобразования уменьшилось.

Докажем второе утверждение леммы.

Случай $a = 2$. Заменим крайний подграф R_3 крайним подграфом R_2, а крайнюю вершину степени четыре заменим крайним подграфом R_4. Так как исходное дерево не содержало листьев-дубликатов, то результат также их не содержит. В исходном графе было $6 \cdot a_{0,2} + 2 \cdot a_{2,2} + 3 \cdot a_{0,0} + a_{2,0}$ м.н.м. (применяем лемму 1 к «среднему» листу подграфа R_3, а также к листам-концам 2-путей), а в полученном стало $3 \cdot a_{2,2} + 2 \cdot a_{0,2} + 3 \cdot a_{2,0} + 2 \cdot a_{0,0}$ (применяем лемму 1 к листам, смежным с контактными вершинами подграфов R_2 и R_4). По лемме 3 (пп. II–IV)

$$4 \cdot a_{0,2} + a_{0,0} > a_{2,2} + 2 \cdot a_{0,2} + a_{0,0} \geqslant a_{2,2} + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot a_{0,0} + a_{0,0} = a_{2,2} + 4 \cdot a_{0,0}$$

$$\geqslant a_{2,2} + 2 \cdot a_{2,0}.$$

Случай $a = 4$. Заменим крайнюю вершину подграфом $R_{1,2}$. Заменим крайний подграф R_3 подграфом $R_{1,2}$. Так как исходное дерево не содержало листьев-дубликатов, то результат также их не содержит. В исходном графе было $8 \cdot a_{0,2} + 4 \cdot a_{2,2} + 4 \cdot a_{0,0} + 2 \cdot a_{2,0}$ м.н.м. (сначала применяем лемму 1 к листовому концу крайнего 4-пути), а в полученном по лемме 2 стало $mi(R_2) \cdot mi(R_2) \cdot a_{2,2} = 9 \cdot a_{2,2}$ м.н.м. По лемме 3 (п. II)

$$8 \cdot a_{0,2} + 4 \cdot a_{2,2} + 4 \cdot a_{0,0} + 2 \cdot a_{2,0} \geqslant 4 \cdot a_{2,2} + 4 \cdot a_{2,2} + a_{2,2} + a_{2,2} = 10 \cdot a_{2,2},$$

т. е. число м.н.м. в результате преобразования уменьшилось.

Докажем третье утверждение леммы.

Случай $a = 2$. Заменим крайнюю вершину подграфом $R_{1,2,1}$, а все вершины крайнего подграфа R_2 удалим. Так как исходное дерево не содержало листьев-дубликатов, то результат также их не содержит. В исходном графе было $2 \cdot a_{2,2} + 3 \cdot a_{0,1} + 6 \cdot a_{0,2} + a_{2,1}$ м.н.м. (применяем лемму 1 к листовым вершинам обоих крайних 2-путей и листу подграфа R_2, не смежному с его контактной вершиной), а по лемме 2 в полученном стало $mi(R_{1,2}) \cdot a_{2,2} = 6 \cdot a_{2,2}$ м.н.м. По лемме 3 (п. II)

$$2 \cdot a_{2,2} + 3 \cdot a_{0,1} + 6 \cdot a_{0,2} + a_{2,1} > 2 \cdot a_{2,2} + a_{2,1} + 3 \cdot a_{2,2} + a_{2,1} > 6 \cdot a_{2,2}.$$

Поэтому количество м.н.м. уменьшилось.

Случай $a = 4$. Заменим крайнюю вершину подграфом $R_{2,2,1}$, а все вершины крайнего подграфа R_2 удалим. Так как исходное дерево не содержало листьев-дубликатов, то результат также их не содержит. По лемме 1 (которую сначала применяем к листовому концу крайнего 4-пути) в исходном графе было $4 \cdot a_{2,2} + 4 \cdot a_{0,1} + 8 \cdot a_{0,2} + 2 \cdot a_{2,1}$, а в полученном стало $mi(R_{2,2}) \cdot a_{2,2} = 9 \cdot a_{2,2}$ м.н.м. По лемме 3 (п. II)

$$4 \cdot a_{2,2} + 4 \cdot a_{0,1} + 8 \cdot a_{0,2} + 2 \cdot a_{2,1} > 4 \cdot a_{2,2} + 4 \cdot a_{2,2} + a_{2,2} = 9 \cdot a_{2,2},$$

т. е. количество м.н.м. уменьшилось.

3.3. Отделимость минимальных деревьев.

Лемма 11. *В минимальном дереве никакой крайний подграф R_k при $k \in \{2, 3, 4\}$ не может быть смежен с путем P_l, где $l \geqslant 3$.*

Доказательство. Предположим противное. Под F мы будем понимать результат удаления всех вершин крайнего подграфа R_k и смежного с ним 3-подпути пути P_l. Заменим крайний подграф R_k и две первые вершины l-пути подграфом R_{k+1}. Ясно, что результат не содержит листьев-дубликатов. По лемме 1, примененной в изначальном графе к листу, смежному с контактной вершиной подграфа R_k, количество его м.н.м. равно $mi(R_{k-1}) \cdot a_3 + mi(R_{k-2}) \cdot a_2$. По лемме 1, примененной в полученном графе к листу, смежному с соседом контактной вершины подграфа R_{k+1}, количество его м.н.м. равно $mi(R_{k-1}) \cdot a_3 + mi(R_{k-2}) \cdot a_1$. Количество м.н.м. уменьшилось, так как по лемме 3 (п. I) справедливо неравенство $a_2 > a_1$.

Лемма 12. *Если T'_s — дерево, получаемое соединением ребром вершины степени два подграфа R_2 и конца x пути с $s + 1$ вершинами, где $s \in \{2, 3, 4\}$, то любое минимальное дерево не содержит крайнего подграфа T'_s с непредлистовой контактной вершиной x.*

Доказательство. Под F мы будем понимать результат удаления всех вершин поддерева T'_s из минимального дерева.

Случай $s = 2$. Заменим T'_2 подграфом $R_{2,1}$. Результат преобразования не содержит листьев-дубликатов, так как x не является предлистовой. В исходном графе было $2 \cdot a_3 + 2 \cdot a_0$ м.н.м. (применили лемму 1 к листу, смежному с контактной вершиной поддерева R_2), а в полученном графе по лемме 2 стало $mi(R_2) \cdot a_2 = 3 \cdot a_2$

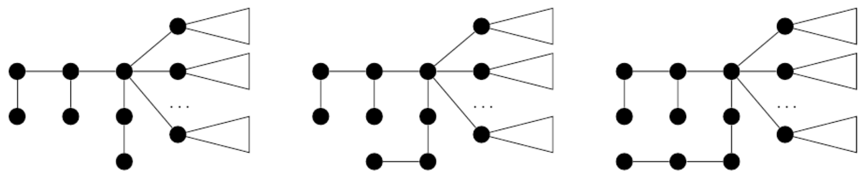

Рис. 6. Деревья T_2', T_3' и T_4'

м.н.м. Тогда по лемме 3 (пп. I и II) имеем $2 \cdot a_3 + 2 \cdot a_0 > 2 \cdot a_2 + 2 \cdot a_0 \geqslant 3 \cdot a_2$, т.е. число м.н.м. уменьшилось.

Случай $s = 3$. Заменим T_3' подграфом R_4. Результат преобразования не содержит листьев-дубликатов, так как x не является предлистовой. В исходном графе было $2 \cdot a_4 + 2 \cdot a_0$ м.н.м. (применили лемму 1 к листу, смежному с контактной вершиной поддерева R_2), а в полученном стало $3 \cdot a_2 + 2 \cdot a_0$ м.н.м. (применяем лемму 1 к листу подграфа R_4, смежному с соседом контактной вершины). Тогда по леммам 1 и 3 (п. I) $2 \cdot a_4 + 2 \cdot a_0 = 2 \cdot a_2 + 2 \cdot a_1 + 2 \cdot a_0 > 3 \cdot a_2 + 2 \cdot a_0$.

Случай $s = 4$. Заменим T_4' подграфом $R_{2,2}$. Результат преобразования не содержит листьев-дубликатов, так как x не является предлистовой. В исходном графе было $2 \cdot a_5 + 3 \cdot a_0$ м.н.м. (применили лемму 1 к листу, смежному с контактной вершиной поддерева R_2), а по лемме 2 в полученном графе стало $mi(R_2) \cdot (a_2 + a_0) = 3 \cdot (a_2 + a_0)$ м.н.м. (применяем лемму 1 к листу подграфа $R_{2,2}$, смежному с соседом контактной вершины этого подграфа). Тогда по леммам 1 и 3 (п. I) $2 \cdot a_5 = 2 \cdot a_3 + 2 \cdot a_2 > 3 \cdot a_2$ т.е. число м.н.м. уменьшилось.

Во всех случаях получаем, что количество м.н.м. можно уменьшить. Значит, предположение было неверным.

Лемма 13. *Если T_s'' — дерево, получаемое отождествлением одного конца 3-пути с вершиной степени два подграфа R_2 и отождествлением другого конца 3-пути с концом x пути с $s+1$ вершинами, где $s \in \{2, 3, 4\}$, то каждое минимальное дерево, не являющееся R_2-отделимым, не содержит крайнего подграфа T_s'' с контактной вершиной x.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда x не является предлистовой ввиду того, что дерево не является R_2-отделимым. Обозначим через F результат удаления всех вершин поддерева T_s'' из дерева. Рассмотрим каждый из трех возможных случаев.

Случай $s = 2$. Заменим T_2'' подграфом R_4. Результат преобразования не содержит листьев-дубликатов, так как x не является предлистовой. В исходном графе было $a_3 + 2 \cdot a_2 + 2 \cdot a_0$ м.н.м. (применяем лемму 1 к листу подграфа R_2, смежному с вершиной степени три), а в полученном графе стало $3 \cdot a_2 + 2 \cdot a_0$ м.н.м. (применяем лемму 1 к листу подграфа R_4, смежному с соседом контактной вершины). По лемме 3 (п. I) $a_3 > a_2$, поэтому количество м.н.м. уменьшилось.

Случай $s = 3$. Заменим T_3'' подграфом $R_{2,2}$. Результат преобразования не содержит листьев-дубликатов, так как x не является предлистовой. В исходном графе было $a_4 + 4 \cdot a_2$ м.н.м. (применяем лемму 1 к листу подграфа R_2, смежному с вершиной степени три), а по лемме 2 в полученном графе стало $mi(R_2) \cdot (a_2 + a_0) = 3 \cdot (a_2 + a_0)$ м.н.м. (применяем лемму 1 к листу подграфа $R_{2,2}$, смежному с соседом контактной вершины этого подграфа). Количество м.н.м. уменьшилось, так как согласно леммам 1 и 3 (п. I) $a_4 + a_2 = 2 \cdot a_2 + a_1 > 3 \cdot a_0$.

Случай $s = 4$. Заменим T''_4 подграфом $R_{1,1,2}$. Результат преобразования не содержит листьев-дубликатов, так как x не является предлистовой. В исходном графе было $a_5 + 4 \cdot a_2 + 2 \cdot a_0$ м.н.м. (применяем лемму 1 к листовой вершине графа R_2, смежной с вершиной степени три), а в полученном графе стало $mi(R_{1,1}) \cdot (a_2 + a_0) = 4 \cdot a_2 + 4 \cdot a_0$ м.н.м. (применяем лемму 1 к листу подграфа $R_{1,1,2}$, смежному с соседом контактной вершины этого подграфа). По леммам 1 и 3 (п. I) $a_5 = a_3 + a_2 > 2 \cdot a_0$, поэтому количество м.н.м. уменьшилось.

Во всех случаях получаем, что количество м.н.м. можно уменьшить. Значит, предположение было неверным.

Лемма 14. *Если T'''_s — дерево, получаемое отождествлением концов $(s+2)$-пути с вершинами степени два в двух копиях графа R_2, где $1 \leqslant s \leqslant 4$, а x — произвольная внутренняя вершина $(s+2)$-пути, то каждое минимальное дерево, не являющееся R_2-отделимым, не может содержать крайний подграф T'''_s с контактной вершиной x.*

Доказательство. Предположим противное. Обозначим через F результат удаления всех вершин поддерева T'''_s из дерева.

Случай $s = 1$. Удалим все вершины леса $T'''_1 \setminus \{x\}$, добавим подграф R_4 и ребро, инцидентное x и вершине степени два подграфа R_4. В исходном графе было $4 \cdot a_1 + 5 \cdot a_0$ м.н.м. (здесь и далее применяем лемму 1 к листьям подграфов R_2, ближайшим к вершине x), а в полученном графе стало $5 \cdot a_1 + 3 \cdot a_0$ м.н.м. (лемму 1 применили к листу, смежному с контактной вершиной поддерева R_4). Очевидно, что в результате преобразования в дереве не появились листья-дубликаты. По лемме 3 (пп. I и II) имеем $2 \cdot a_0 \geqslant a_2 > a_1$, т.е. количество м.н.м. уменьшилось.

Случай $s = 2$. Удалим все вершины леса $T'''_2 \setminus \{x\}$, добавим граф $R_{2,2}$ и ребро, инцидентное вершине степени два графа $R_{2,2}$ и вершине x. В исходном графе было $4 \cdot a_2 + 2 \cdot a_1 + 3 \cdot a_0$ м.н.м., а в полученном графе по лемме 2 стало $mi(R_2) \cdot (2 \cdot a_1 + a_0) = 6 \cdot a_1 + 3 \cdot a_0$ м.н.м. (применили также лемму 1 к листу графа $R_{2,2}$, смежному с его контактной вершиной). Очевидно, что в результате преобразования в дереве не появятся листья-дубликаты. По лемме 3 (п. I) имеем $a_2 > a_1$, поэтому количество м.н.м. уменьшилось.

Случай $s = 3$, когда вершина x находится посередине между подграфами R_2. Заменим T'''_s на $R_{4,1}$. В исходном графе было $8 \cdot a_2 + a_1$ м.н.м., а в полученном графе по лемме 2 стало $mi(R_4) \cdot a_2 = 8 \cdot a_2$ м.н.м. Количество м.н.м. уменьшилось. Заметим, что в этом случае вершина x не может быть предлистовой, так как это приведет к R_2-отделимости дерева, поэтому в результате указанного преобразования в дереве не появятся листья-дубликаты.

Случай $s = 3$, когда вершина x не находится посередине между подграфами R_2. Исходный граф содержит $4 \cdot a_3 + 2 \cdot a_2 + 5 \cdot a_0$ м.н.м. Удалим все вершины леса $T'''_3 \setminus \{x\}$, добавим $R_{1,1,2}$ и ребро, инцидентное вершине степени два подграфа R_2 графа $R_{1,1,2}$ и вершине x. В результате получили дерево без листьев-дубликатов.

По лемме 2 в полученном графе стало $mi(R_{1,1}) \cdot (2 \cdot a_1 + a_0) = 8 \cdot a_1 + 4 \cdot a_0$ м.н.м. (применили лемму 1 к листу, смежному с контактной вершиной поддерева $R_{1,1,2}$). По леммам 1 и 3 (пп. I и II)

$$4 \cdot a_3 + 2 \cdot a_2 + 5 \cdot a_0 = 4 \cdot a_1 + 5 \cdot a_0 + 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_0 \geqslant$$

$$\geqslant 4 \cdot a_1 + 2.5 \cdot a_2 + 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_0 = 4.5 \cdot a_2 + 4 \cdot a_1 + 4 \cdot a_0 > 8 \cdot a_1 + 4 \cdot a_0,$$

т.е. количество м.н.м. уменьшилось.

Случай $s = 4$. Тогда x не смежна с контактными вершинами крайних подграфов R_2 по лемме 11. Удалим все вершины леса $T_4'' \setminus \{x\}$, добавим подграф $R_{2,3}$ и ребро, инцидентное x и вершине степени два подграфа R_3 графа $R_{2,3}$. Ясно, что в результирующем графе нет листьев-дубликатов. В исходном графе было $2 \cdot a_3 + 7 \cdot a_2 + 4 \cdot a_0$ м.н.м., а по лемме 2 стало $mi(R_2) \cdot (3 \cdot a_1 + 2 \cdot a_0) = 9 \cdot a_1 + 6 \cdot a_0$ м.н.м. (применили лемму 1 к листу, смежному с контактной вершиной подграфа $R_{2,3}$). Согласно леммам 1 и 3 (п. I)

$$2 \cdot a_3 + 7 \cdot a_2 + 4 \cdot a_0 = 7 \cdot a_2 + 2 \cdot a_1 + 6 \cdot a_0 > 9 \cdot a_1 + 6 \cdot a_0,$$

поэтому количество м.н.м. уменьшилось.

Во всех случаях получаем, что количество м.н.м. можно уменьшить. Значит, предположение было неверным.

Теорема 1. *Минимальное дерево T является $R_1 \bigvee R_2$-отделимым, если дерево $Z(T)$ содержит хотя бы четыре вершины.*

Доказательство. Предположим, что дерево $Z(T)$ является звездой. Тогда эта звезда имеет хотя бы три листа, по леммам 4 (п. 1), 5 (п. 1), 8, 9, 10 (п. 1) по крайней мере два из них имеют в T степень три и не смежны с 4-путем. По лемме 7 эти вершины смежны с листом. Обозначим через x и y соответствующие листья звезды $Z(T)$. Ввиду отсутствия R_1-отделимости (так как $Z(T)$ является звездой) и по лемме 4 (п. 1) вторые крайние пути имеют по две вершины каждый. Рассмотрим путь в дереве T между вершинами x и y. По лемме 5 (п. 2) и лемме 11 длина этого пути не превосходит пяти и ровно одна вершина в нем имеет степень больше двух. Тогда по лемме 14 дерево T является R_2-отделимым.

Теперь предположим, что дерево $Z(T)$ не является звездой. Тогда в дереве $Z(T)$ существуют хотя бы два предлиста, каждый из которых смежен со своим множеством M_i, где $i = 1, 2$, *концевых* листьев. По леммам 4 (п. 1), 5 (п. 1), 7-9, 10 (п. 1), не уменьшая общности, можно считать, что каждый элемент множества M_1 имеет в T степень три и смежен с крайним 2-путем и листом. По лемме 11 он расположен на расстоянии не более чем три от ближайшей вершины степени более чем два. Если в M_1 есть хотя бы два элемента, то рассмотрим соединяющий их путь и применим рассуждения из предыдущего случая, откуда будет следовать R_2-отделимость.

Остается случай, когда $M_1 = \{x\}$, и x расположена в T на расстоянии $dist \leqslant 3$ от ближайшей вершины y степени больше двух. Тогда y — предлист дерева $Z(T)$, смежный с его листом x. Поскольку $|M_1| = 1$ и x является концевой, то в дереве T все крайние подграфы, смежные с y и не содержащие x, являются простыми путями. Пусть P_l — один из крайних путей такого рода. По лемме 4 (п. 1) выполнено неравенство $l \leqslant 4$. Если $dist = 1$, то по лемме 12 вершина y является предлистом. Если $dist = 2$, то y не является предлистом и $l \neq 1$, иначе T будет R_2-отделимым. Но тогда T будет R_2-отделимым по лемме 13.

Осталось рассмотреть случай $dist = 3$, т. е. когда x находится в крайнем подграфе R_2, смежном с 2-путем. Если M_2 содержит элемент, степень которого в T равна четырем, то получаем противоречие с леммой 10 (п. 3). Предположим, что все элементы M_2 имеют в T степень три. По лемме 6 (п. 2) и лемме 7 все они смежны с листом и 2-путем. Тогда можно рассматривать только случай, когда $M_2 = \{x'\}$. Обозначим через $dist'$ расстояние от x' до ближайшей вершины степени больше двух. Если $dist' = 2$, то по леммам 12 и 13 дерево T будет R_2-отделимым. Если $dist' = 1$, то получаем противоречие по леммам 12 и 6 (п. 1). Если $dist' = 3$, то по лемме 5 (п. 3) получаем противоречие и в этом случае.

Во всех случаях получаем, что количество м.н.м. можно уменьшить. Значит, предположение было неверным.

Теорема 2. *При $n \geqslant 9$ каждое минимальное n-вершинное дерево является $R_1 \bigvee R_2$-отделимым.*

Доказательство. По теореме 1 для доказательства утверждения достаточно показать, что все минимальные деревья T с девятью или более вершинами, для которых дерево $Z(T)$ содержит не более трех вершин, являются $R_1 \bigvee R_2$-отделимыми.

Предположим, что дерево $Z(T)$ состоит из единственной вершины x. По леммам 7 и 8 в исходном дереве T эта вершина смежна ровно с одним листом и хотя бы с двумя путями P_a и P_b, где $a \geqslant b \geqslant 2$. По леммам 4 (п. 1) и 5 (п. 1) выполнено неравенство $a \leqslant 4$, причем $(a, b) \neq (4, 4)$. Если $a = 3$ или $b = 3$, то T является R_1-отделимым. Если $a = 4, b = 2$, то в силу лемм 5 (п. 1), 8 и условия $n \geqslant 9$ вершина x смежна с 4-путем, двумя 2-путями и листом. Но тогда $mi(T) = 14$ по лемме 1 и T не является минимальным, так как уже $mi(R_{1,1,2}) = 12$ по лемме 2.

Предположим, что дерево $Z(T)$ состоит из двух вершин. По лемме 7 каждая из этих вершин смежна с листом. По леммам 8 и 9 в исходном дереве T эти вершины имеют степень $3 \leqslant d' \leqslant d \leqslant 4$. Случай $d' = d = 4$ невозможен по лемме 9, поэтому мы можем считать, что $d' = 3$. По леммам 4 (п. 1) и 5 (п. 1) среди крайних путей есть не более одного 4-пути, а все остальные пути изоморфны P_2. Обозначим через a количество вершин в наибольшем крайнем пути, который присутствует в дереве. Заметим, что в случае $d = a = 4$ крайний 4-путь обязан быть смежен с вершиной степени четыре, иначе возникает противоречие с леммой 10 (п. 1).

Рассмотрим несколько вариантов в зависимости от количества s вершин степени два между крайними вершинами. Если $s = 1$, то некоторая вершина дерева T степени три смежна с крайним 2-путем и T является R_2-отделимым. Если $s \geqslant 3$, то по лемме 11 в T не может быть вершины степени три, смежной с крайним 2-путем. Но тогда каждая из крайних вершин либо смежна с крайним 4-путем, либо имеет степень четыре, что невозможно. Наконец, если $s = 0$ или $s = 2$, то в зависимости от значения параметров $d \in \{3, 4\}$ и $a \in \{2, 4\}$ возможны восемь следующих вариантов.

Вариант $s = 0, d = 3, a = 2$. Дерево T изоморфно дереву R_4 и содержит восемь вершин.

Вариант $s = 0, d = 3, a = 4$. Граф T содержит 10 вершин и 13 м.н.м. Это дерево не является минимальным, так как уже $mi(R_{1,1,2}) = 12$ по лемме 2.

Вариант $s = 0, d = 4, a = 2$. Граф T содержит 10 вершин и 14 м.н.м. Это дерево не является минимальным, так как уже $mi(R_{1,1,2}) = 12$ по лемме 2.

Вариант $s = 0, d = 4, a = 4$. Граф T содержит 12 вершин и 22 м.н.м. Это дерево не является минимальным, так как уже $mi(R_{1,1,3}) = 20$ по лемме 2.

Вариант $s = 2, d = 3, a = 2$. Граф T содержит 10 вершин и 13 м.н.м. Это дерево не является минимальным, так как уже $mi(R_{1,1,2}) = 12$ по лемме 2.

Вариант $s = 2, d = 3, a = 4$. Граф T содержит 12 вершин и 21 м.н.м.Это дерево не является минимальным, так как уже $mi(R_{1,1,3}) = 20$ по лемме 2.

Вариант $s = 2, d = 4, a = 2$. Граф T содержит 12 вершин и 23 м.н.м. Это дерево не является минимальным, так как уже $mi(R_{1,1,3}) = 20$ по лемме 2.

Вариант $s = 2, d = 4, a = 4$. Граф T содержит 14 вершин и 36 м.н.м. Это дерево не является минимальным, так как уже $mi(R_{1,1,4}) = 32$ по лемме 2.

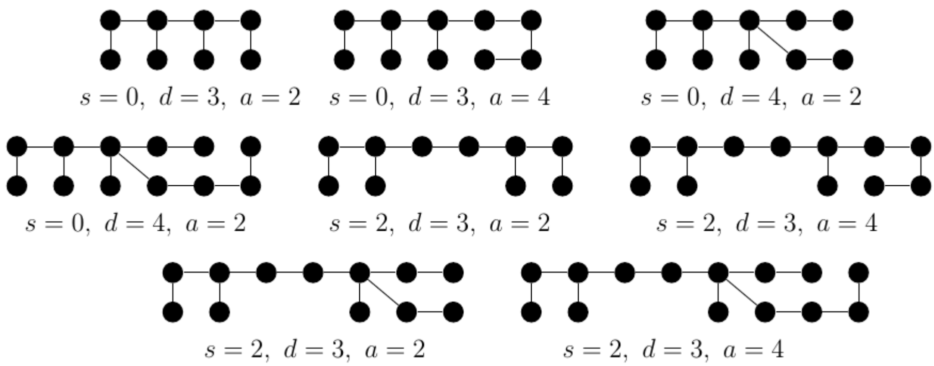

Рис. 7. Варианты графов с двумя крайними вершинами

Пусть дерево $Z(T)$ состоит из трех вершин. Тогда $Z(T)$ — 3-путь. В этом случае рассуждения полностью аналогичны рассуждениям из доказательства теоремы 1.

4. Класс минимальных деревьев

4.1. Вполне разделимые деревья и их свойства. Определим множество $\mathcal{R}(a, b, c, d)$, где $(c, d) \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$, деревьев следующим образом. Множества $\mathcal{R}(1, 0, 0, 0)$ и $\mathcal{R}(0, 1, 0, 0)$ содержат только деревья R_1 и R_2 соответственно. Аналогично, множество $\mathcal{R}(0, 0, 1, 0)$ содержит только деревья R_3 и R_3', а $\mathcal{R}(0, 0, 0, 1)$ содержит только деревья R_4 и R_4'. Множество $\mathcal{R}(a_1 + 1, b_1, c_1, d_1)$ в точности состоит из таких деревьев T, что существует дерево $T' \in \mathcal{R}(a_1, b_1, c_1, d_1)$, для которого $T \in u(T', R_1)$. Множество $\mathcal{R}(a_2, b_2+1, c_2, d_2)$ в точности состоит из таких деревьев T, что существует дерево $T' \in \mathcal{R}(a_2, b_2, c_2, d_2)$, для которого $T \in u(T', R_2)$. Элементы множества $\mathcal{R}(a, b, c, d)$, где $a+b+c+d \neq 1$, назовем *вполне разделимыми* деревьями.

Лемма 15. *Для каждого дерева* $T \in \mathcal{R}(a, b, c, d)$ *имеют место равенства* $|V(T)| = 3 \cdot a + 5 \cdot b + 7 \cdot c + 9 \cdot d - 1$ *и* $mi(T) = 2^{a+3 \cdot d} \cdot 3^b \cdot 5^c$.

Доказательство. Индукция по сумме $s = a + b + c + d$. База индукции $s = 1$ очевидна. Пусть, например, дерево T является R_1-отделимым. Тогда $T \in u(T', R_1)$, где $T' \in \mathcal{R}(a-1,b,c,d)$. По предположению индукции дерево T' содержит $3 \cdot a + 5 \cdot b + 7 \cdot c + 9 \cdot d - 4$ вершин и $2^{a+3d-1} \cdot 3^b \cdot 5^c$ м.н.м. Тогда, очевидно, что для дерева T выполнено утверждение данной леммы (применили лемму 2). Случай R_2-отделимости рассматривается аналогично.

Если для любых деревьев $T \in \mathcal{R}(a,b,c,d)$ и $T' \in \mathcal{R}(a',b',c',d')$ с одним и тем же количеством вершин верно неравенство $mi(T) > mi(T')$, то обозначим это записью $\mathcal{R}(a,b,c,d) \succ \mathcal{R}(a',b',c',d')$.

Лемма 16. *Если вполне разделимое дерево $T \in \mathcal{R}(a,b,c,d)$ является минимальным, то $a \leqslant 3$ и $ac + ad = 0$.*

Доказательство. Если $c = 1$ и $a \geqslant 1$, то $\mathcal{R}(a,b,c,d) \succ \mathcal{R}(a-1,b+2,c-1,d)$. Если $d = 1$ и $a \geqslant 1$, то $\mathcal{R}(a,b,c,d) \succ \mathcal{R}(a-1,b+1,c+1,d-1)$. Отсюда ввиду минимальности дерева T следует, что $a = 0$ или $a \geqslant 1, c = d = 0$. Если $c = 0$ и $a \geqslant 4$, то $\mathcal{R}(a,b,c,d) \succ \mathcal{R}(a-4,b+1,c+1,d)$. Отсюда ввиду минимальности дерева T следует, что $a \leqslant 3$.

Используя леммы 15 и 16 и рассматривая случаи $a \geqslant 1$ и $a = 0$ по отдельности, нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

Лемма 17. *Если минимальное n-вершинное дерево T является вполне разделимым, то*:

1) $T \in \mathcal{R}(2,k-1,0,0)$, *если* $n = 5k$,
2) $T \in \mathcal{R}(0,k-1,1,0)$, *если* $n = 5k+1$,
3) $T \in \mathcal{R}(1,k,0,0)$, *если* $n = 5k+2$,
4) $T \in \mathcal{R}(3,k-1,0,0)$ *или* $T \in \mathcal{R}(0,k-1,0,1)$, *если* $n = 5k+3$,
5) $T \in \mathcal{R}(0,k+1,0,0)$, *если* $n = 5k+4$.

4.2. Описание минимальных деревьев. Определим класс $\mathcal{L}_n$ деревьев с n вершинами без листьев-дубликатов. При $n \in \{1,2,4,5\}$ единственным деревом без листьев-дубликатов является путь P_n. При $n = 6,7,8$ положим

$$\mathcal{L}_6 = \{R_3, R_3'\}, \mathcal{L}_7 = \{R_{1,2}\}, \mathcal{L}_8 = \{R_4, R_4'\}.$$

При $n \geqslant 9$ положим

$$\mathcal{L}_n = \begin{cases} \mathcal{R}(2,k-1,0,0), \text{ если } n = 5k, \\ \mathcal{R}(0,k-1,1,0), \text{ если } n = 5k+1, \\ \mathcal{R}(1,k,0,0), \text{ если } n = 5k+2, \\ \mathcal{R}(3,k-1,0,0) \cup \mathcal{R}(0,k-1,0,1), \\ \text{ если } n = 5k+3, \\ \mathcal{R}(0,k+1,0,0), \text{ если } n = 5k+4. \end{cases}$$

Теорема 3. *Для любого n множество минимальных деревьев с n вершинами в точности совпадает с множеством $\mathcal{L}_n$.*

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что при $n \leqslant 8$ в множестве $\mathcal{L}_n$ собраны все минимальные деревья с n вершинами. По лемме

17 достаточно доказать, что при $n \geqslant 9$ каждое минимальное дерево является вполне разделимым. Применим индукцию по n. Базу индукции составляют все n, для которых выполнено условие $n \leqslant 8$. Предположим, что T — минимальное дерево с $n \geqslant 9$ вершинами. По теореме 1 дерево T является $R_1 \bigvee R_2$-отделимым.

Если T является R_1-отделимым, то существует дерево T' с $n-3$ вершинами, для которого $T \in u(T', R_1)$. Нетрудно видеть, что для минимальности T дерево T' также должно быть минимальным. По предположению индукции $T' \in \mathcal{R}(a_1, b_1, c_1, d_1)$, тогда $T \in \mathcal{R}(a_1+1, b_1, c_1, d_1)$.

Если дерево T является R_2-отделимым, то существует дерево T'' с $n-5$ вершинами, для которого $T \in u(T'', R_2)$. Нетрудно видеть, что для минимальности T дерево T'' также должно быть минимальным. По предположению индукции $T'' \in \mathcal{R}(a_2, b_2, c_2, d_2)$, тогда $T \in \mathcal{R}(a_2, b_2+1, c_2, d_2)$, что и требовалось.

Список литературы

1. Дайняк А., Сапоженко А., “Независимые множества в графах”, *Дискретная математика*, **28**:1 (2016), 44–77; англ. пер.: Dainyak A.B., Sapozhenko A.A., “Independent sets in graphs”, *Discrete Math. Appl.*, **26**:6 (2016), 323–346.
2. Frendrup A., Pedersen A., Sapozhenko A., Vestergaard P., “Merrifield–Simmons index and minimum number of independent sets in short trees”, *Ars Combinatoria*, **111** (2013), 85–95.
3. Griggs J., Grinstead C., Guichard D., “The number of maximal independent sets in a connected graph”, *Discrete Mathematics*, **68**:2–3 (1988), 211–220.
4. Hujter M., Tuza Z., “The number of maximal independent sets in triangle-free graphs”, *SIAM J. Discr. Math.*, **6**:2 (1993), 284–288.
5. Jou M., Chang G., “Maximal independent sets in graphs with at most one cycle”, *Discr. Appl. Math.*, **79**:1–3 (1997), 67–73.
6. Liu J., “Maximal independent sets in bipartite graphs”, *J. Graph Theory*, **17**:1 (1993), 495–507.
7. Moon J., Moser L., “On cliques in graphs”, *Israel J. Math.*, **3**:1 (1965), 23–28.
8. Wilf H., “The number of maximal independent sets in a tree”, *SIAM J. Algebr. Discr. Meth.*, **7**:1 (1986), 125–130.

Статья поступила 04.04.2018.
Переработанный вариант поступил 31.08.2018.