Сопряженность диффеоморфизмов Морса-Смейла с тремя неблуждающими точками

Е. В. Жужома, В. С. Медведев

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса-Смейла, топологическая сопряженность, гиперболические точки.

Системы Морса-Смейла образуют важный класс гладких динамических систем, поскольку они существуют на любом замкнутом многообразии и структурно устойчивы (грубые). Кроме этого, имеются глубокие связи между динамикой систем Морса-Смейла и топологической структурой несущего многообразия (основные понятия и факты теории динамических систем см. в книгах [7, 12] и обзорах [1, 16]; по системам Морса-Смейла см. обзоры [5, 8]). Будем рассматривать динамические системы с дискретным временем, которые порождаются положительными и отрицательными итерациями диффеоморфизмов несущего многообразия (которые далее будем считать замкнутыми). Известно, что любая система Морса-Смейла имеет хотя бы одну источниковую и хотя бы одну стоковую орбиты [15]. Простейший диффеоморфизм Морса-Смейла имеет неблуждающее множество, состоящее ровно из двух точек (источника и стока). В этом случае несущее многообразие M является n-мерной сферой S^n соответствующей размерности $n = \dim M$, и любые два сохраняющие ориентацию диффеоморфизма сферы S^n сопряжены (отметим, что аналогичный результат имеет место и для потоков Морса-Смейла) [6]. Напомним, что диффеоморфизмы $f_1, f_2 : M^n \to M^n$ n-мерного многообразия M^n называются *сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h : M^n \to M^n$ такой, что $h \circ f_1 = f_2 \circ h$.

В [9, 10] была описана топологическая структура несущих многообразий диффеоморфизмов Морса-Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех точек (такой диффеоморфизм имеет два узла и одно седло, причем все точки необходимо являются неподвижными). А именно, если $f : M^n \to M^n$ – диффеоморфизм Морса-Смейла замкнутого многообразия M^n размерности $n \geqslant 2$, и неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит из трех (неподвижных) точек, то 1) размерность $\dim M^n$ многообразия может принимать только одно из следующих значений $n \in \{2, 4, 8, 16\}$; 2) M^2 есть проективная плоскость; 3) при $n \geqslant 4$ группы $\pi_1(M^n) = \cdots = \pi_{\frac{n}{2}-1}(M^n) = 0$ и, следовательно, M^n ориентируемое; 4) M^n гомеоморфно компактификации евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с помощью $\frac{n}{2}$-мерной сферы. Аналогичный результат имеет место и для потоков Морса-Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех состояний равновесия.

В [11] были получены необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности для потоков Морса-Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех состояний равновесия. Полным инвариантом топологической эквивалентности таких потоков является *локально эквивалентная вложимость* устойчивых (или неустойчивых) многообразий их седел. Другими словами, два потока топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда замыкания устойчивых (или неустойчивых) многообразий их седел имеют гомеоморфные окрестности и при этом, гомеоморфизм окрестностей переводит устойчивое (или неустойчивое) многообразие одного седла в устойчивое (или неустойчивое) многообразие другого седла.

В настоящей статье получены необходимые и достаточные условия сопряженности для диффеоморфизмов Морса-Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ, грант 17-11-01041).

точек. Прежде, чем формулировать основной результат, мы дадим необходимые определения и укажем на принципиальную разницу между потоками и диффеоморфизмами Морса-Смейла при решении задачи эквивалентности и сопряженности.

Пусть $f : M^n \to M^n$ – диффеоморфизм Морса-Смейла замкнутого n-мерного ($n \geqslant 3$) многообразия M^n, и σ – седловая периодическая точка диффеоморфизма f с k-мерным устойчивым $W^s(\sigma)$ и $(n-k)$-мерным неустойчивым многообразием $W^u(\sigma)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Если $W^s(\sigma)$ не пересекается с неустойчивыми многообразиями других седловых периодических точек, то топологическое замыкание этого устойчивого многообразия $W^s(\sigma)$ является топологически вложенной в M^n k-сферой, скажем S^k [4]. Полностью аналогично, если $W^u(\sigma)$ не пересекается с устойчивыми многообразиями других седловых точек, то его топологическое замыкание является топологически вложенной $(n-k)$-сферой, скажем S^{n-k}. Возможность дикого вложения k-сферы S^k и $(n-k)$-сферы S^{n-k} впервые была открыта Пикстоном [14] при $k = 1, 2$ для несущего многообразия, являющегося 3-сферой $M^3 = S^3$ (аналогичные примеры были построены в [2] - [4], [13], где рассматривались также вопросы классификации). Отталкиваясь от примера Пикстона [14], можно построить потоки Морса-Смейла с дико вложенными замыканиями устойчивых и неустойчивых многообразий седел. Однако, как было доказано авторами в [9], для потоков Морса-Смейла с тремя состояниями равновесия топологические замыкания (единственного) седла всегда локально плоско вложены. Основываясь на этом результате, авторы в работе [11] построили полный инвариант топологической эквивалентности для потоков Морса-Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех состояний равновесия. С другой стороны, в [10] авторы построили пример с дико вложенными замыканиями инвариантных многообразий седловой неподвижной точки для диффеоморфизма Морса-Смейла, неблуждающее множество которого состояло из трех точек. Таким образом, инвариант сопряженности для диффеоморфизмов, в отличие от потоков, должен учитывать возможность указанных диких вложений.

Рассмотрим теперь диффеоморфизм Морса-Смейла $f : M^n \to M^n$ замкнутого многообразия M^n размерности $n \geqslant 2$, неблуждающее множество которого состоит из трех неподвижных точек: стока ω, источника α и седловой точки s. Поскольку сепаратрисы седловой неподвижной точки s не пересекаются, то топологические замыкания $closW^u(s)$, $closW^s(s)$ инвариантных многообразий $W^u(s)$, $W^s(s)$ соответственно равны

$$closW^u(s) = W^u(s) \cup \{\omega\} \stackrel{\text{def}}{=} S_\omega(f), \quad closW^s(s) = W^s(s) \cup \{\alpha\} \stackrel{\text{def}}{=} S_\alpha(f)$$

и являются топологически вложенными $\frac{n}{2}$-мерными сферами. Ниже будет показано, что $S_\omega(f)$ (соответственно, $S_\alpha(f)$) является притягивающим (соответственно, отталкивающим) множеством диффеоморфизма f.

Пусть $f_i : M^n \to M^n$ – диффеоморфизм Морса-Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех неподвижных точек: стока ω_i, источника α_i и седловой точки s_i, $i = 1{,}2$. Будем говорить, что множества $W^s(s_1)$, $W^s(s_2)$ *локально динамически эквивалентно вложены*, если существуют открытые окрестности δ_1, δ_2 множеств $S_{\omega_1}(f_1)$, $S_{\omega_2}(f_2)$ соответственно, и гомеоморфизм $h_0 : \delta_1 \to \delta_2$ такие, что

$$f_1(\delta_1) \subset \delta_1, \quad h_0 \circ f_1|_{\delta_1} = f_2 \circ h_0|_{\delta_1}.$$

Полностью аналогично дается определение локально динамической эквивалентной вложимости для множеств $W^u(s_1)$, $W^u(s_2)$. Следующая теорема является основным результатом статьи.

Теорема 1. *Пусть $f_i : M^n \to M^n$ – диффеоморфизм Морса-Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех неподвижных точек: стока ω_i, источника α_i и седловой точки s_i, $i = 1{,}2$. Диффеоморфизмы f_1, f_2 сопряжены тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

- *множества $W^s(s_1)$, $W^s(s_2)$ локально динамически эквивалентно вложены;*

- *множества $W^u(s_1)$, $W^u(s_2)$ локально динамически эквивалентно вложены.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ, грант 17-11-01041), кроме доказательства леммы 2 (описание порождающих множеств). Это доказательство было поддержано ЦФИ НИУ ВШЭ в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ, проект ТЗ-95, в 2018 году.

Сперва напомним некоторые определения и приведем вспомогательные утверждения. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f обозначается через $NW(f)$. Диффеоморфизм f называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если $NW(f)$ состоит из конечного числа периодических точек (следовательно, $NW(f) = Per(f)$), все периодические точки гиперболические и инвариантные многообразия $W^s(x)$, $W^u(y)$ пересекаются трансверсально (если пересечение не пусто) для любых точек x, $y \in NW(f)$.

Открытое множество U называется *областью притяжения* для диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$, если $clos f(U) \subset U$, где $clos f(U)$ суть топологическое замыкание множества $f(U)$. Инвариантное множество N_a диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ называется *притягивающим*, если существует область притяжения $U(N_a)$ такая, что

$$clos f(U(N_a)) \subset U(N_a), \quad \bigcap_{k \geqslant 0} f^k(U(N_a)) = N_a.$$

Область притяжения $U(N_a)$ называется *захватывающей* областью множества N_a. Объединение всевозможных захватывающих областей $U(N_a)$ называется *бассейном* притягивающего множества N_a. Будем обозначать бассейн через $B(N_a)$. Ясно, что бассейн определяется через одну захватывающую область, т.е. если U – захватывающая область притягивающего множества N_a, то

$$B(N_a) = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(U) \right) \tag{1}$$

Инвариантное множество N_r называется *отталкивающим*, если оно является притягивающим для f^{-1}. Окрестность $U(N_r)$ множества N_r называется *выталкивающей*, если она является притягивающей для N_r относительно f^{-1}. Бассейном $B(N_r)$ отталкивающего множества N_r будем называть объединение всех выталкивающих областей $U(N_r)$.

Пусть N — инвариантное отталкивающее или притягивающее множество диффеоморфизма f. Замкнутое множество $G(N) \subset B(N) \setminus N$ называется *порождающим* для бассейна $B(N)$, если 1) любая орбита из $B(N) \setminus N$ пересекается с $G(N)$; 2) орбита, пересекающая внутренность множества $G(N)$, пересекает $G(N)$ ровно в одной точке; 3) орбита, пересекающая границу множества $G(N)$, пересекает $G(N)$ ровно в двух точках; 4) граница множества $G(N)$ состоит из конечного числа (топологических) компактных подмногообразий коразмерности один.

Обозначим через $MS^{\mathrm{diff}}(M^n, 3)$ множество диффеоморфизмов $f : M^n \to M^n$ Морса-Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех точек: стока ω, источника α и седловой точки s. Ясно, что ω (соответственно, α) является притягивающим (соответственно, отталкивающим) множеством диффеоморфизма f.

Лемма 1. *Пусть $f \in MS^{diff}(M^n, 3)$. Тогда*

1. *Для любой открытой окрестности $V_0(\omega)$ точки ω существуют порождающее множество $G(\omega)$ для бассейна $B(\omega)$ и захватывающая окрестность $U(\omega)$ точки ω, гомеоморфная открытому n-мерному шару, такие, что*

$$G(\omega) = clos\,[U(\omega) \setminus f(U(\omega))] \subset V_0(\omega)$$

2. *Для любой открытой окрестности $V_0(\alpha)$ точки α существуют порождающее множество $G(\alpha)$ для бассейна $B(\alpha)$ и выталкивающая окрестность $U(\alpha)$ точки α, гомеоморфная замкнутому n-мерному шару, такие, что*

$$G(\alpha) = clos\,[f(U(\alpha)) \setminus U(\alpha)] \subset V_0(\alpha)$$

Доказательство. Достаточно доказать только первое утверждение, поскольку второе утверждение вытекает из первого переходом от f к f^{-1}. Согласно теореме Гробмана-Хартмана, в некоторой окрестности гиперболического стока ω диффеоморфизм f сопряжен линейному сжимающему диффеоморфизму евклидового пространства с одной притягивающей гиперболической точкой. Поэтому ω имеет захватывающую окрестность $U(\omega)$, гомеоморфную открытому n-мерному шару, а ее топологическое замыкание $closU(\omega)$ гомеоморфно замкнутому n-мерному шару. Ясно, что $U(\omega)$ можно взять столь малой, что будет выполняться включение $closU(\omega) \subset V_0(\omega)$. Следовательно, множество $G(\omega) = clos\,[U(\omega) \setminus f(U(\omega))] \subset V_0(\omega)$ является порождающим для бассейна $B(\omega)$. $\square$

Отметим, что порождающие множества $G(\omega)$, $G(\alpha)$ гомеоморфны замкнутым n-мерным шаровым кольцам, гомеоморфным произведению $S^{n-1} \times S^1$. Напомним, что

$$closW^u(s) = W^u(s) \cup \{\omega\} \overset{\text{def}}{=} S_\omega(f), \quad closW^s(s) = W^s(s) \cup \{\alpha\} \overset{\text{def}}{=} S_\alpha(f)$$

Лемма 2. *Пусть $f \in MS^{diff}(M^n, 3)$. Тогда*

1. *$S_\omega(f)$ является притягивающим множеством с бассейном $B(S_\omega(f)) = M^n \setminus \{\alpha\}$.*
2. *Любое порождающее множество $G(\alpha)$ источника α, гомеоморфное замкнутому n-мерному шаровому кольцу, является порождающим для бассейна $B(S_\omega(f))$.*
3. *Для любой окрестности δ множества $S_\omega(f)$ существует порождающее множество $G(\alpha)$ для бассейна источника α, гомеоморфное замкнутому n-мерному шаровому кольцу, такое, что $G(\alpha) \subset \delta$.*
4. *$S_\alpha(f)$ является отталкивающим множеством с бассейном $B(S_\alpha(f)) = M^n \setminus \{\omega\}$.*
5. *Любое порождающее множество $G(\omega)$ для бассейна стока ω, гомеоморфное замкнутому n-мерному шаровому кольцу, является порождающим для бассейна $B(S_\alpha(f))$.*
6. *Для любой окрестности δ множества $S_\alpha(f)$ существует порождающее множество $G(\omega)$ для бассейна стока ω, гомеоморфное замкнутому n-мерному шаровому кольцу, такое, что $G(\omega) \subset \delta$.*

Доказательство. Достаточно доказать только первые три утверждения, поскольку остальные получаются переходом от f к f^{-1}. Будем использовать обозначения леммы 1. Ясно, что $S_\omega(f) \subset M^n \setminus U(\alpha)$. Уменьшив, если необходимо, окрестность $U(\alpha)$, можно считать, что $S_\omega(f) \subset clos\,(M^n \setminus U(\alpha))$. Поскольку $U(\alpha) \subset f\,(U(\alpha))$, то

$$f\,(M^n \setminus U(\alpha)) = M^n \setminus f\,(U(\alpha)) \subset M^n \setminus U(\alpha).$$

Поэтому внутренность множества $M^n \setminus U(\alpha)$ является захватывающей для $S_\omega(f)$. Из

$$\alpha = \bigcap_{m \leqslant 0} f^m\,(U(\alpha))\,, \quad M^n \setminus \{\alpha\} = W^s(\omega) \cup W^s(s)$$

следует, что $S_\omega(f) = \bigcap_{m \geqslant 0} f^m\,(clos\,(M^n \setminus U(\alpha)))\,.$ Поэтому $S_\omega(f)$ является притягивающим множеством с бассейном $B(S_\omega(f)) = M^n \setminus \{\alpha\}$. Отсюда вытекает, что любое порождающее множество $G(\alpha)$ источника α, гомеоморфное замкнутому n-мерному шаровому кольцу, является порождающим множеством для бассейна $B(S_\omega(f))$. Из равенства $M^n \setminus \{\alpha\} = B(S_\omega(f))$ и того, то итерация порождающего множества является порождающим множеством следует, что для любой окрестности δ множества $S_\omega(f)$ существует порождающее множество $G(\alpha)$, гомеоморфное замкнутому n-мерному шаровому кольцу, такое, что $G(\alpha) \subset \delta$. $\Box$

Доказательство теоремы 1. Если f_1 и f_2 сопряжены, то сопрягающий гомеоморфизм определен на всем многообразии M^n. Поэтому множества $S_{\omega_1}(f_1)$, $S_{\omega_2}(f_2)$ равно, как и множества $S_{\alpha_1}(f_1)$, $S_{\alpha_1}(f_2)$ будут локально динамически эквивалентно вложены, поскольку в качестве окрестности этих множеств можно взять несущее многообразие M^n.

Докажем теперь обратное утверждение. Для определенности, предположим, что множества $S_{\omega_1}(f_1)$, $S_{\omega_2}(f_2)$ локально динамически эквивалентно вложены, и будем доказывать сопряженность диффеоморфизмов f_1, f_2. По условию, существуют открытые окрестности δ_1, δ_2 множеств $S_{\omega_1}(f_1)$, $S_{\omega_2}(f_2)$ соответственно, и гомеоморфизм $h_0 : \delta_1 \to \delta_2$ такие, что

$$h_0 \circ f_1|_{\delta_1} = f_2 \circ h_0|_{\delta_1}, \quad f_1(\delta_1) \subset \delta_1. \tag{2}$$

Согласно леммам 1, 2, существует порождающее множество $G(\alpha_1)) \stackrel{\text{def}}{=} G_1$ бассейна $B(\alpha_1)$, принадлежащее окрестности δ_1 и гомеоморфное замкнутому n-мерному шаровому кольцу. В силу леммы 2, множество G_1 является порождающим для бассейна $B(S_{\omega_1}(f_1))$. Поскольку $h_0(\delta_1) \subset \delta_2$, то отсюда и (2) вытекает, что

$$h_0(G_1) \stackrel{\text{def}}{=} G_2 \subset \delta_2$$

является порождающим множеством для бассейна $B(S_{\omega_2}(f_2))$. Поскольку G_2 гомеоморфно замкнутому n-мерному шаровому кольцу, то согласно лемме 2, множество G_2 является порождающим для бассейна $B(\alpha_2)$ источника α_2.

Множества $D(\alpha_1) = \{\alpha_1\} \cup_{m \leqslant 0} f_1^m(G_1)$, $D(\alpha_2) = \{\alpha_2\} \cup_{m \leqslant 0} f_2^m(G_2)$ являются n-мерными замкнутыми шарами. Так как

$$M^n \setminus D(\alpha_1) \subset \delta_1, \quad M^n \setminus D(\alpha_2) \subset \delta_2,$$

то на $M^n \setminus D(\alpha_1)$ определен сопрягающий гомеоморфизм $h_0 : M^n \setminus D(\alpha_1) \to M^n \setminus D(\alpha_2)$, причем на $M^n \setminus D(\alpha_1)$ выполняется соотношение (2), поскольку множества $S_{\omega_1}(f_1)$, $S_{\omega_2}(f_2)$ являются притягивающими. Продолжим этот гомеоморфизм с сохранением сопряжения до гомеоморфизма $h : D(\alpha_1) \to D(\alpha_2)$. Отметим, что на подмножестве $G_1 \subset D(\alpha_1)$ гомеоморфизм $h = h_0$ уже задан. Положим $h(\alpha_1) = \alpha_2$. Возьмем произвольную точку $z \in D(\alpha_1) \setminus (G_1 \cup \{\alpha_1\})$. Тогда $z \in f_1^{-k}(G_1)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Положим $h(z) = f_2^{-k} \circ h_0 \circ f_1^k(z)$. Если точка $f_1^k(z)$ принадлежит внутренности шарового кольца G_1, то число k определено однозначно. Если $f_1^k(z)$ принадлежи границе шарового кольца G_1, то число k определено неоднозначно, однако в силу (2), выражение $h(z) = f_2^{-k} \circ h_0 \circ f_1^k(z)$ определено однозначно. Поскольку шаровые кольца $f_1^{-m}(G_1)$ сходятся к α_1 при $m \to \infty$, то h является гомеоморфизмом. Стандартная проверка показывает, что выполняется соотношение $h \circ f_1 = f_2 \circ h$. Теорема доказана. $\Box$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Д. В. Аносов, “Исходные понятия. Элементарная теория”, *Современные проблемы математики, Фундаментальные направления (Итоги науки и техники), Дин. системы - 1*, М., 1985. **[2]** Х. Бонатти, В. З Гринес, В. С. Медведев, Е. Пеку, “О топологической классификации градиентноподобных диффеоморфизмов без гетероклинических кривых на трехмерных многообразиях”, *Доклады РАН*, **377**:2 (2001), 151-155. **[3]** Х. Бонатти, В. З Гринес, В. С. Медведев, Е. Пеку, “О диффеоморфизмах Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на трехмерных многообразиях”, *Труды МИАН*, **236** (2002), 66-78. **[4]** В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “О диффеоморфизмах Морса-Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях”, *Матем. Заметки*, **74**:3 (2003), 369-386. **[5]** В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. О. В. Починка, “Системы Морса-Смейла и топологическая структура несущих многообразий", *Современная математика. Фундаментальные направления*, **61** (2016), 5-40. **[6]** В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, "Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса-Смейла", *Труды МИАН*, **271** (2010), 111-133. **[7]** В. З. Гринес, В. О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три*, РХД, Москва-Ижевск, 2011. **[8]** Е. В. Жужома, В. С. Медведев, "Глобальная динамика систем Морса-Смейла", *Труды МИАН*, **261** (2008), 115-139. **[9]** Е. В. Жужома, В. С. Медведев, "Системы Морса-Смейла с тремя неблуждающими точками", *Доклады РАН*, **440**:1 (2011), 11-14. **[10]** Е. В. Жужома, В. С. Медведев, "Диффеоморфизмы Морса-Смейла с тремя неподвижными точками", *Матем. Заметки*, **92**:4 (2012), 511-558. **[11]** Е. В. Жужома, В. С. Медведев, "Непрерывные потоки Морса-Смейла с тремя состояниями равновесия", *Матем. сб.*, **207**:5 (2016), 69-92. **[12]** S. Aranson, G. Belitsky, E. Zhuzhoma, *Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces*, Amer. Math. Soc., Translations of Math. Monographs, 1996. **[13]** Ch. Bonatti, V. Grines, "Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3", *Journal of Dyn. and Control Syst.*, **6** (2000), 579-602. **[14]** D. Pixton, "Wild unstable manifolds", *Topology*, **16** (1977), 167-172. **[15]** S. Smale, "Morse inequalities for a dynamical system", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43-49. **[16]** S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747-817.

Е. В. Жужома
Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»
E-mail: zhuzhoma@mail.ru

Поступило

Исправленный вариант

В. С. Медведев
Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»
E-mail: medvedev@uic.nnov.ru