УДК: 514.7

О структуре группоидов голономии псевдоримановых слоений

А.Ю. Долгоносова, Н.И. Жукова

1) adolgonosova@hse.ru; Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

2) nzhukova@hse.ru; Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики

Аннотация

Исследуется структура группоидов голономии псевдоримановых слоений произвольной коразмерности на n-мерных псевдоримановых многообразиях. Дано описание структуры слоев индуцированных слоений на группоидах голономии. Выяснена специфика группоидов голономии трансверсально полных псевдоримановых слоений.

Ключевые слова: псевдориманово слоение, группоид голономии слоения, связность Эрисмана для слоения.

---

1 Введение

Работа посвящена исследованию группоидов голономии псевдоримановых слоений. Понятие группоида голономии слоения впервые появилось в работах Ш. Эресмана. Х. Винкелькемпер построил конструкцию, эквивалентную группоиду голономии слоения, и назвал ее графиком слоения. Он исследовал графики слоений с дифференциально-геометрической точки зрения.

Группоид голономии слоения содержит всю информацию о слоении и его группах голономии. Поведение слоев слоения (M, F) полностью описывается группоидом голономии $G(F)$. А. Конн определил C^*-алгебру комплекснозначных функций на группоиде голономии $G(F)$, что позволило применить к исследованию слоений некоммутативную геометрию [1].

Как известно, группоид голономии $G(F)$ гладкого слоения (M, F) коразмерности q на n-мерном гладком многообразии M является гладким $(2n-q)$-мерным многообразием, которое, вообще говоря, не хаусдорфово. Х. Винкелькемпер доказал эффективный критерий хаусдорфовости топологического пространства группоида $G(F)$.

Слоение (M, F) на псевдоримановом многообразии (M, g) называется *псевдоримановым*, если оно локально образовано слоями псевдоримановой субмерсии, т.е., если в каждой точке $x \in M$ существует открытая координатная окрестность U и псевдориманова метрика h на многообразии слоев U/F_U такие, что фактор-отображение $f : U \to U/F_U$ является псевдоримановой субмерсией $(U, g|_U)$ на $(U/F_U, h)$. Подчеркнем. что из определения римановой субмерсии вытекает, что сужение метрики g на слоях псевдориманова слоения не вырождается. Следовательно, на каждом его слое индуцируется псевдориманова метрика.

В данной работе исследуются группоиды голономии псевдоримановых слоений. Псевдоримановы слоения включают в себя римановы и лоренцевы слоения и находят приложение в теоретической физике.

2 Теоремы о структуре группоидов псевдоримановых слоений

Следующая теорема доказана нами ([2]) без предположения полноты как псевдориманова многобразия (M, g), так и слоения (M, F). Компактность слоеного многообразия M также не предполагается.

Теорема 1. *Пусть (M, F) — гладкое псевдориманово слоение коразмерности q на n-мерном псевдоримановом многобразии (M, g), где $0 < q < n$. Пусть $G(F)$ — группоид голономии слоения (M, F) с каноническими проекциями $p_i : G(F) \to M$, $i = 1, 2$. Тогда:*

1. Группоид голономии $G(F)$ слоения (M, F) является хаусдорфовым $(2n - q)$-мерным многообразием с индуцированным слоением $(G(F), \mathbb{F})$, где $\mathbb{F} = \left\{\mathbb{L}_\alpha = p_i^{-1}(L_\alpha) | L_\alpha \in F\right\}$, $i = 1, 2$.

2. Ростковые группы голономии $\Gamma(L_\alpha)$ и $\Gamma(\mathbb{L}_\alpha)$ слоев L_α и $\mathbb{L}_\alpha = p_i^{-1}(L_\alpha)$ изоморфны.

3. На $G(F)$ существует единственная псевдориманова метрика d, относительно которой $(G(F), \mathbb{F})$ является псевдоримановым слоением, а канонические проекции $p_i : G(F) \to M$, являются псевдоримановыми субмерсиями, причем в точках пересечения слои субмерсий p_1 и p_2 ортогональны.

4. Для любого слоя L_α определено регулярное накрывающее отображение $k_\alpha : \mathcal{L}_\alpha \to L_\alpha$ с группой накрывающмх преобразований, изоморфной группе голономии $\Gamma(L_\alpha)$, и на $\mathcal{L}_\alpha$ индуцирется псевдориманова метрика. Слой $\mathbb{L}_\alpha = p_i^{-1}(L_\alpha) \in \mathbb{F}$ является приводимым псевдоримановым многообразием, изометричным фактор-многообразию $(\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{L}_\alpha)/\Psi_\alpha$ псевдориманова произведения $\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{L}_\alpha$ по группе изометрий Ψ_α, изоморфной $\Gamma(L_\alpha)$.

Псевдориманова метрика d на группоиде голономии $G(F)$, удовлетворяющая Теореме 1, называется *индуцированной метрикой.*

Напомним, что G_δ-подмножеством торологичекого пространства называется пересечение счетного семейства открытых всюду плотных подмножеств. Если (M, F) — слоение, то подмножество многообразия M называется F-насыщенным, если его можно представить в виде объединения некоторых слоев слоения.

Определение 1. *Свойство слоения (M, F) называется типичным, если им обладают все слои некоторого G_δ-подмножества M_0 многобразия M.*

Слой из M_0 называется типичным слоем слоения.

Следующее утверждение указывает типичное свойство слоев индуцированного слоения на группоиде голономии.

Следствие 1. *Существует всюду плотное $\mathbb{F}$-насыщенное G_δ-подмножество в $G(F)$, каждый слой которого $(\mathbb{L}_\alpha, d|_{\mathbb{L}_\alpha})$ изометричен псевдориманову произведению $L_\alpha \times L_\alpha$ псевдоримановых многобразий $(L_\alpha, g|_{L_\alpha})$.*

Заметим, что четвертое утверждение в Теореме 1 доказано без использования известной теоремы Ву о разложении полного односвязного невырожденного приводимого псевдориманова многобразия в произведение, поскольку полнота индуцированных метрик на слоях псевдориманова слоения нами не предполагается.

Р. А. Блюменталь и Дж. Дж. Хебда в [3] ввели понятие связности Эресмана для слоения (M, F) произвольной коразмерности q как гладкого q-мерного распределения $\mathfrak{M}$, трансверсального слоям, позволяющего переносить интегральные кривые этого распределения вдоль кусочно гладких путей в слоях. Эти авторы также ввели понятие группы $\mathfrak{M}$-голономии $H_{\mathfrak{M}}(L)$ для любого слоя слоения (M, F) со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$. Связность Эресмана существенно используется нами при доказательстве Теоремы 2.

Напомним, что псевдориманово слоение (M, F) называется *трансверсально полным*, если канонический параметр на каждой максимальной ортогональной слоям геодезической определен на всей действительной прямой.

Следующая теорема указывает специфические свойства трансверсально полных псевдоримановых слоений.

Теорема 2. *Пусть (M, F) — трансверсально полное псевдориманово слоение на псевдоримановом многообразии (M, g), L_0 — фиксированный слой с тривиальной группой голономии и d — индуцированная псевдориманова метрика на группоиде голономии $G(F)$. Тогда:*

1. Индуцированное слоение $(G(F), \mathbb{F})$ является трансверсально полным псевдоримановым слоением.

2. Ортогональные q-мерные распределения $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ являются связностями Эресмана для слоений (M, F) и $(G(F), \mathbb{F})$ соответственно, причем для каждого слоя $L_\alpha \in F$ и $\mathbb{L}_\alpha = p_i^{-1}(L_\alpha)$ группы голономии $\Gamma(L_\alpha)$, $H_{\mathfrak{M}}(L_\alpha)$, $\Gamma(\mathbb{L}_\alpha)$ и $H_{\mathfrak{N}}(\mathbb{L}_\alpha)$ изоморфны.

3. Канонические проекции $p_i : G(F) \to M$, $i = 1, 2$, образуют локально тривиальные расслоения с одним и тем же стандартным слоем L_0.

4. Каждый слой $\mathbb{L}_\alpha = p_i^{-1}(L_\alpha) \in \mathbb{F}$ является приводимым псевдоримановым многообразием, изометричным фактор-многообразию $(L_0 \times L_0)\Psi_\alpha$ псевдориманова произведения $L_0 \times L_0$ по группе изометрий Ψ_α, изоморфной группе $\Gamma(L_\alpha)$.

Следствие 2. *Если (M, F) — трансверсально полное псевдориманово слоение на псевдоримановом многообразии (M, g) и d — индуцированная псевдориманова метрика на группоиде голономии $G(F)$, то:*

1. Существует псевдориманово многообразие L_0 такое, что типичный слой слоения (M, F) имеет тривиальную ростковую группу голономии и изометричен L_0.

2. Типичный слой слоения $(G(F), \mathbb{F})$ имеет тривиальную ростковую группу голономии и изометричен псевдориманову произведению $L_0 \times L_0$.

3 Группоиды надстроечных псевдоримановых слоений на замкнутых трехмерных многообразиях

В качестве приложения Теоремы 2 мы описываем структуру группоидов голономии некоторого класса одномерных слоений на замкнутых трехмерных многообразиях.

Как известно, существуют плоские лоренцевы метрики g_0 на двумерном торе $\mathbb{T}^2$, группы изометрий $\mathfrak{I}so(\mathbb{T}^2, g_0)$ которых содержат аносовский автоморфизм f_A, заданный гиперболической матрицей A. Указанные метрики охарактеризованы в [4]. Зафиксируем одну из таких метрик и зафиксируем аносовский автоморфизм $f_A \in \mathfrak{I}so(\mathbb{T}^2, g_0)$.

Пусть $\rho : \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \to \mathfrak{I}so(\mathbb{R}^2, g)$ — гомоморфизм фундаментальной группы окружности $\mathbb{S}^1$ в группу изометрий $\mathfrak{I}so(\mathbb{T}^2, g_0)$, заданный на образующей a группы $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$, изоморфной $\mathbb{Z}$, равенством $\rho(a) := f_A$. Тогда определено надстроечное слоение $(M, F) := Sus(\mathbb{T}^2, \mathbb{S}^1, \rho)$ коразмерности два на замкнутом трехмерном многообразии $M := \mathbb{T}^2 \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}^1$.

Обозначим через $p : M \to \mathbb{S}^1$ ассоциированное расслоение. При этом сужение $p|_L : L \to \mathbb{S}^1$ — регулярное накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований, изоморфной группе голономии $\Gamma(L)$ этого слоя. Требованием, чтобы это накрывающее отображение было римановым, мы наделяем каждый слой L слоения (M, F) локально евклидовой метрикой. Благодаря этому на M определена плоская лоренцева метрика g, относительно которой (M, F) — лоренцево слоение, ортогональное слоям субмерсии p. В силу компактности M и известного результата И. Карьера, эта метрика полная. Следовательно, лоренцево слоение (M, F) на (M, g) является трансверсально полным и к нему применимы Теорема 2 и Следствие 2.

Подчеркнем, что согласно Теореме 1 из [2] слои субмерсии $p : M \to \mathbb{S}^1$ образуют вполне геодезическое слоение на (M, g).

Так как группа изометрий $\mathfrak{I}so(\mathbb{T}^2, g_0)$, действует несобственно на торе $\mathbb{T}^2$ [4], то (M, F) не является римановым слоением.

Группоид голономии $G(F)$ слоения (M, F), наделенный индуцированной метрикой d, представляет собой четырехмерное хаусдорфово лоренцево многообразие, на котором индуцировано слоение $(G(F), \mathbb{F})$ коразмерности 2. Опишем структуру его слоев. Типичный слой L_0 слоения (M, F) имеет тривиальную голономию и изометричен $\mathbb{R}^1$. Следовательно, согласно Следствию 2, типичный слой $\mathbb{L}_0$ индуцированного слоения $(G(F), \mathbb{F})$ изометричен риманову произведению $\mathbb{L}_0 \cong L_0 \times L_0 \cong \mathbb{R}^2$ и имеет тривиальную группу гонономии. Остальные слои L_α слоения (M, F) диффеоморфны окружности $\mathbb{S}^1$, а их группа голономии изоморфна $\mathbb{Z}$. Более того, каждый слой $\mathbb{L}_\alpha := p_1^{-1}(L_\alpha)$ слоения $(G(F), \mathbb{F})$ с нетривиальной группой голономии диффеоморфен цилиндру $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Отметим, что оба слоения (M, F) и $(G(F), \mathbb{F})$ являются вполне геодезическими лоренцевыми слоениями на многообразиях (M, g) и $(G(F), d)$. Кроме того, M и $G(F)$ представляют собой пространства Эйленберга-Маклейна типа $K(\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^2)$, т.е. $\pi_n(M) = \pi_n(G(M)) = 0 \ \ \forall n \geq 2, \ \pi_1(M) = \pi_1(G(F)) \cong \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^2$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-01-00312) и ЦФИ НИУ ВШЭ в 2018 году (проект № 95).

Список литературы

[1] Connes A. *Noncommutative Geometry.* – Boston, MA: Academic Press, 1994, 654 p.

[2] Dolgonosova A. Yu., Zhukova N. I. *Pseudo-Riemannian foliations and their graphs* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 39. – № 1. – P. 54–64.

[3] Blumenthal R. A., Hebda J. J. *Ehresmann connections for foliations* // Indiana Univ. Math. J. – 1984. – Vol. 33. – № 4. – P. 597–611.

[4] Жукова Н., И., Рогожина Е. А. Классификация компактных лоренцевых 2-орбифолдов с некомпактной полной группой изометрий // Сиб. матем. журн. – 2012. – Т. 53. –№ 6.– С. 1292–1309.

On the structure of the holonomy groupoids of pseudo-Riemannian foliations

A.Yu. Dolgonosova, N.I. Zhukova

Abstract

We investigate the structure of the holonomy groupoids of pseudo-Riemannian foliations of arbitrary codimension on n-dimensional pseudo-Riemannian manifolds. The structure of leaves of induced foliations on the holonomy groupoids is described. Clarified specifics of the holonomy groupoids of transversally complete pseudo-Riemannian foliations.

Keywords: pseudo-Riemannian foliation, holonomy groupoid of a foliation, Ehresmann connection for a foliation.