ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2018. Том 25, № 4. С. 112–130

УДК 519.17 DOI: 10.17377/daio.2018.25.617

О СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ ВЕРШИННОЙ 3-РАСКРАСКИ ДЛЯ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ, ОПРЕДЕЛЁННЫХ ЗАПРЕТАМИ НЕБОЛЬШОГО РАЗМЕРА *)

Д. В. Сироткин[1,2,a], *Д. С. Малышев*[1,2,b]

[1]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155, Нижний Новгород, Россия
[2]Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23, 603950, Нижний Новгород, Россия

E-mail: [a]dmitriy.v.sirotkin@gmail.com, [b]dsmalyshev@rambler.ru

Аннотация. Задача о 3-раскраске для заданного графа состоит в том, чтобы проверить, можно ли множество его вершин разбить на три подмножества попарно несмежных вершин. Известна полная классификация сложности данной задачи для наследственных классов, определяемых тройками запрещённых индуцированных подграфов, каждый с не более чем 5 вершинами. В настоящей работе рассматриваются четвёрки запрещённых индуцированных фрагментов, каждый с не более чем 5 вершинами, и для всех соответствующих наследственных классов, кроме трёх, устанавливается вычислительный статус задачи о 3-раскраске. Для двух из трёх оставшихся случаев доказывается полиномиальная эквивалентность и полиномиальная сводимость к третьему. Ил. 4, библиогр. 20.

Ключевые слова: задача о 3-раскраске, наследственный класс, вычислительная сложность.

Введение

Правильной вершинной раскраской графа G называется произвольное отображение $c\colon V(G) \to \mathbb{N}$ такое, что $c(v_1) \neq c(v_2)$ для любых смежных вершин $v_1, v_2 \in V(G)$. Правильная вершинная раскраска c графа G называется *k-раскраской*, если $c\colon V(G) \to \overline{1,k}$. Если граф G имеет k-раскраску, то он называется *k-раскрашиваемым*. *Хроматическим числом* графа G называется такое наименьшее k, что граф G является k-раскрашиваемым. Оно обозначается через $\chi(G)$.

*)Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 17–11–01336).

Задача о вершинной раскраске для заданных графа G и числа k состоит в том, чтобы определить, выполняется неравенство $\chi(G) \leqslant k$ или нет. *Задача о вершинной k-раскраске* (кратко, *задача k-ВР*) для заданного графа G заключается в том, чтобы определить, выполняется неравенство $\chi(G) \leqslant k$ или нет. Обе задачи являются классическими NP-полными задачами на графах.

Граф H называется *подграфом* графа G, если H может быть получен из G удалением вершин и рёбер. Граф H называется *индуцированным подграфом* графа G, если H может быть получен из G удалением только вершин. *Классом* графов называется множество графов, замкнутое относительно изоморфизма. Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. *Сильно наследственным* классом графов называют наследственный класс графов, который замкнут ещё и относительно удаления рёбер. Известно, что любой наследственный класс графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещённых индуцированных подграфов $\mathcal{Y}$, и это записывается так: $\mathcal{X} = Free(\mathcal{Y})$. Сильно наследственный класс графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещённых подграфов $\mathcal{Y}$, и это записывается так: $\mathcal{X} = Free_s(\mathcal{Y})$. Если наследственный класс может быть задан конечным множеством своих запрещённых индуцированных подграфов, то он называется *конечно определённым.*

Наследственный класс графов с полиномиально разрешимой задачей 3-ВР будем называть 3-ВР-*простым.* Наследственный класс графов с NP-полной задачей 3-ВР будем называть 3-ВР-*сложным.*

Задача о вершинной раскраске полиномиально разрешима для класса $Free(\{H\})$, если H — индуцированный подграф графа P_4 или графа $P_3 + K_1$, иначе она NP-полна в данном классе [12]. Однако при запрещении двух индуцированных подграфов полную сложностную классификацию получить уже не удаётся. Так, например, для всех наследственных классов, определяемых запретами с не более чем 4 вершинами каждый, кроме трёх, известен вычислительный статус задачи о вершинной раскраске [14]. Для оставшихся трёх случаев данный статус неизвестен, но для них удаётся построить полиномиальные приближённые алгоритмы [19]. Некоторые недавние результаты о сложности задачи о вершинной раскраске в наследственных классах, определяемых запретами маленького размера, представлены в работах $[4, 5, 7, 10, 15, 17, 20]$.

Для задачи k-ВР сложностной статус остаётся открытым даже для некоторых классов, определяемых одним запрещённым индуцированным фрагментом. Вычислительная сложность задачи 3-ВР известна для всех классов вида $Free(\{H\})$, где $|V(H)| \leqslant 6$ [2]. Аналогичный результат получен для задачи 4-ВР и всех классов вида $Free(\{H\})$, где $|V(H)| \leqslant 5$ [8]. Для каждого фиксированного k задача k-ВР разрешима за полиномиальное время в классе $Free(\{P_5\})$ [9]. Задача 3-ВР полиномиально разрешима в классе $Free(\{P_7\})$ [1]. Для каждого фиксированного $k \geqslant 5$ задача k-ВР является NP-полной в классе $Free(\{P_6\})$ [11]. Задача 4-ВР является NP-полной в классе $Free(\{P_7\})$ [11]. Вычислительный статус задачи k-ВР является открытым для класса $Free(\{P_8\})$ и $k = 3$, а также для класса $Free(\{P_6\})$ и $k = 4$.

Существует множество «белых пятен» на «карте» вычислительной сложности задач о вершинной раскраске и о вершинной k-раскраске в семействе наследственных классов. Имеется два способа для уменьшения количества этих «белых пятен». Первый — увеличение числа запрещённых индуцированных подграфов, а второй — увеличение размера таких подграфов. Ограничение на размер или количество запрещённых индуцированных структур образует некоторое подсемейство семейства наследственных классов графов. Возможное сокращение совокупности «белых пятен» состоит в получении полной сложностной дихотомии для бóльших значений данной границы.

В настоящей работе рассматривается задача 3-ВР. В [16] для этой задачи получена полная сложностная дихотомия в семействе наследственных классов, определяемых парой запрещённых индуцированных подграфов, каждый из которых имеет не более чем 5 вершин. В [18] был получен аналогичный результат для всех троек запретов, каждый из которых имеет не более чем 5 вершин. В данной работе рассматриваются наследственные классы, определяемые четвёркой запрещённых индуцированных подграфов, каждый из которых имеет не более 5 вершин, а также для всех таких классов, кроме трёх, устанавливается вычислительный статус задачи 3-ВР. Для двух из трёх оставшихся случаев доказывается полиномиальная эквивалентность и полиномиальная сводимость к третьему.

1. Используемые обозначения

Через $N(x)$ обозначается окрестность вершины x, через $\deg(x)$ — её степень, а через $\Delta(G)$ — максимальная из степеней вершин графа G.

Через P_n, C_n, K_n, O_n будем обозначать простой путь, простой цикл, полный и пустой графы на n вершинах соответственно. Через $K_{p,q}$ обозначается полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой.

Через F_k ($k \geqslant 3$) обозначим граф, получаемый добавлением к простому пути $(x_1, \ldots, x_k)$ вершины x и рёбер xx_1, xx_2, $\ldots$, xx_k. Граф *diamond* изоморфен графу F_3. *Колесом* W_k ($k \geqslant 3$) называется граф, получаемый добавлением к простому циклу $(x_1, \ldots, x_k)$ вершины x и рёбер xx_1, xx_2, $\ldots$, xx_k. *Нечётным колесом* называется произвольный граф из множества $\{W_3, W_5, W_7, \ldots\}$.

На рис. 1 и 2 изображены графы bull, cricket, butterfly и crown, а также spindle, kite, dart, banner, house и sun.

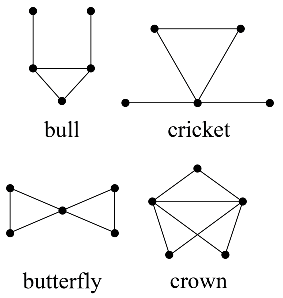

Рис. 1. Графы bull, cricket, butterfly и crown

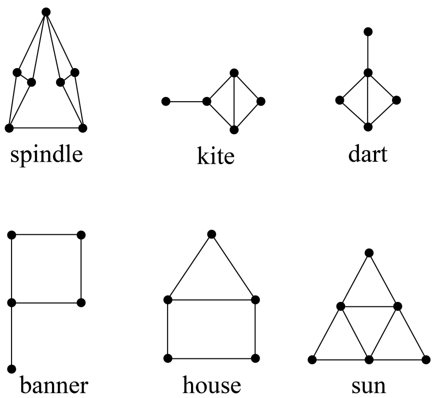

Рис. 2. Графы spindle, kite, dart, banner, house и sun

Пусть G — граф и $V' \subseteq V(G)$. Тогда $G[V']$ — подграф графа G, индуцированный подмножеством вершин V', а $G \setminus V'$ — результат удаления из графа G всех элементов множества V' (вместе со всеми инцидентными им рёбрами). Через $G_1 + G_2$ обозначается дизъюнктное объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин, через kG — дизъюнктное объединение k копий графа G, а через $\overline{W_4 + K_1}$ — дополнительный граф к графу $W_4 + K_1$.

2. NP-полнота задачи о 3-раскраске в некоторых классах графов, порождённых запретами с малым числом вершин

В [18, разд. 2] рассмотрены следующие шесть классов графов:

- $\mathcal{X}_1^*$ — множество всех лесов,
- $\mathcal{X}_2^*$ — множество рёберных графов субкубических лесов,
- $\mathcal{X}_3^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин индуцируют подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{\text{cricket, kite, diamond} + K_1\}$,
- $\mathcal{X}_4^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин индуцируют подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{\text{kite, diamond} + K_1, \text{butterfly, crown}\}$,
- $\mathcal{X}_5^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин индуцируют подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{\text{kite, diamond} + K_1, \text{house}, C_4 + K_1, F_4, W_4, \text{dart, crown}\}$,
- $\mathcal{X}_6^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин индуцируют подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{\text{cricket, house, banner}, C_4 + K_1, C_5\}$.

В [18] показано, что каждый из классов графов $\mathcal{X}_3^*$–$\mathcal{X}_6^*$ является 3-ВР-сложным (см. [18, лемма 4]). Далее докажем NP-полноту задачи 3-ВР ещё для трёх классов графов, определяемых запрещёнными индуцированными фрагментами, каждый из которых имеет не более чем 5 вершин. Для этого рассмотрим графы G_1, G_2, G_3, изображённые на рис. 3 и 4.

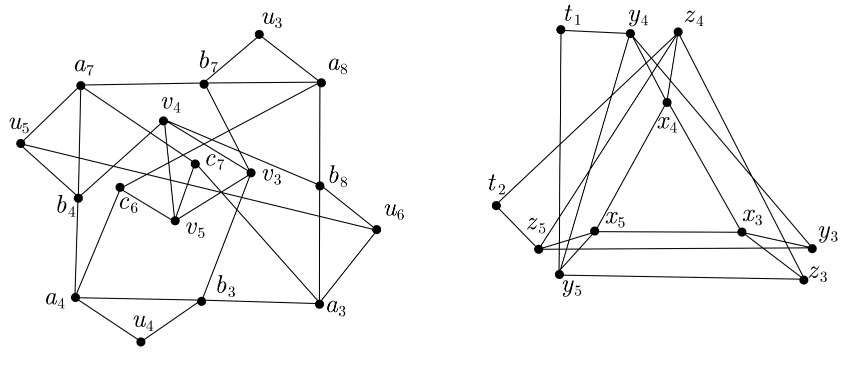

Рис. 3. Графы G_1 и G_2

Лемма 1. *Граф G_1 является 3-раскрашиваемым, причём в любой его 3-раскраске вершины u_3 и u_4 имеют одинаковые цвета.*

Доказательство. Покрасим вершины a_1, a_2, a_3, a_4, v_1 в первый цвет, вершины b_1, b_3, b_4, v_2, u_2 во второй цвет, а вершины $b_2, c_1, c_2, v_3, u_1, u_3, u_4$

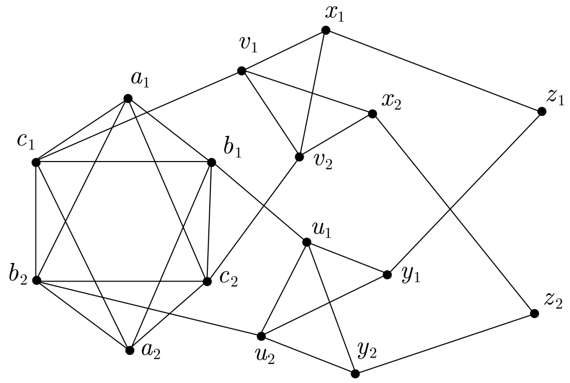

Рис. 4. Граф G_3

в третий цвет. Полученная раскраска будет 3-раскраской графа G_1, поэтому он 3-раскрашиваемый.

Докажем, что в любой 3-раскраске графа G_1 вершины u_3, u_4 имеют одинаковые цвета. Рассмотрим какую-нибудь 3-раскраску c графа G_1. Предположим, что $c(c_1) = 1$, $c(v_3) = 2$. Тогда $c(v_2) = 3$, $c(v_1) = 1$. Поскольку $c(u_1) \neq c(u_2)$, то $c(c_2) \neq 1$, тем самым $c(c_2) = 2$.

Пусть $c(b_1) = 1$. Тогда обязательно

$$c(a_1) = 3, \quad c(b_4) = 2, \quad c(a_4) = 3,$$
$$c(b_3) = 1, \quad c(a_3) = 3, \quad c(b_2) = 2,$$

поэтому $c(u_1) = c(u_2) = 1$; противоречие.

Пусть $c(b_1) = 3$. Тогда

$$c(a_2) = 2, \quad c(b_2) = 3, \quad c(a_3) = 1, \quad c(b_3) = 3,$$
$$c(a_4) = 2, \quad c(b_4) = 3, \quad c(a_1) = 1,$$

поэтому $c(u_1) = c(u_2) = 2$; противоречие.

Если же $c(c_1) = c(v_3)$, то и $c(c_1) = c(v_3) = c(u_3) = c(u_4)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Граф G_2 является 3-раскрашиваемым, причём в любой его 3-раскраске вершины t_1 и t_2 имеют одинаковые цвета.*

Доказательство. Покрасим вершины x_3, y_1, z_1 в первый цвет, вершины x_1, y_2, z_2 во второй цвет, а вершины x_2, y_3, z_3, t_1, t_2 в третий цвет.

Такая раскраска является 3-раскраской графа G_2, поэтому он 3-раскрашиваемый.

Докажем, что в любой 3-раскраске графа G_2 вершины t_1, t_2 имеют одинаковые цвета. Рассмотрим какую-нибудь его 3-раскраску c. Предположим, что существует такое i, что $c(y_i) \neq c(z_i)$. Можно считать, что $i = 1$ и $c(y_1) = 1$, $c(z_1) = 2$. Ввиду наличия рёбер x_1x_2, x_1x_3 ни одно из множеств $\{c(y_2), c(z_2)\}$, $\{c(y_3), c(z_3)\}$ не совпадает с $\{1, 2\}$. Если хотя бы одно из них будет одноцветным, то этот цвет должен быть третьим, а другое множество должно совпадать с $\{1, 2\}$, что невозможно. Если $\{c(y_2), c(z_2)\} = \{1, 3\}$, то $c(z_2) = 1$, $c(y_2) = 3$ и $c(x_1) = 3$, $c(x_2) = 2$, $c(x_3) = 1$, поэтому каждый из трёх цветов запрещён для вершины z_3. Если $\{c(y_2), c(z_2)\} = \{2, 3\}$, то $c(y_2) = 2$, $c(z_2) = 3$ и $c(x_1) = 3$, $c(x_2) = 1$, $c(x_3) = 2$, тем самым каждый из трёх цветов запрещён для вершины y_3. Значит, можно считать, что $c(y_1) = c(z_1) = 1$, $c(y_2) = c(z_2) = 2$, $c(y_3) = c(z_3) = 3$, поэтому $c(t_1) = c(t_2) = 3$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Граф G_3 является 3-раскрашиваемым, причём в любой его 3-раскраске вершины a_1, a_2, z_1, z_2 имеют одинаковые цвета.*

Доказательство. Покрасим вершины $a_1, a_2, v_1, u_1, z_1, z_2$ в первый цвет, вершины b_1, b_2, v_2, y_1, y_2 во второй цвет, а вершины c_1, c_2, u_2, x_1, x_2 в третий цвет. Данная раскраска будет 3-раскраской графа G_3, поэтому он является 3-раскрашиваемым.

Докажем, что в любой 3-раскраске графа G_3 вершины a_1, a_2, z_1, z_2 имеют одинаковые цвета. Действительно, нетрудно убедиться в том, что граф $G_3[\{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}]$ имеет единственную 3-раскраску (с точностью до перестановки цветов), в которой вершины a_1, a_2 имеют первый цвет, вершины b_1, b_2 — второй цвет, а вершины c_1, c_2 — третий цвет. Тогда в любой 3-раскраске графа G_3 вершины y_1, y_2 имеют второй цвет, а вершины x_1, x_2 имеют третий цвет. Значит, вершины z_1 и z_2 имеют первый цвет. Лемма 3 доказана.

Пусть G — произвольный граф, x — его вершина, окрестность которой образована вершинами v_1, v_2, v_3, v_4. Операция *G_i-шунтирования* состоит в удалении вершины x из графа G, добавлении графа G_i

$$\text{и рёбер } v_1u_3, v_2u_3, v_3u_4, v_4u_4 \text{ (если } i = 1\text{)},$$
$$\text{или рёбер } v_1t_1, v_2t_1, v_3t_2, v_4t_2 \text{ (если } i = 2\text{)},$$
$$\text{или рёбер } v_1a_1, v_2a_2, v_3z_1, v_4z_2 \text{ (если } i = 3\text{)}.$$

По леммам 1–3 получившийся граф 3-раскрашиваемый тогда и только тогда, когда граф G является 3-раскрашиваемым.

Определим следующие три класса графов:

• $\mathcal{X}_7^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин индуцируют подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{\text{cricket}, C_5\}$,

• $\mathcal{X}_8^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин индуцируют подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{\text{cricket, banner, house}, C_4 + K_1\}$,

• $\mathcal{X}_9^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин индуцируют подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{\text{kite, diamond} + K_1, \text{dart}, C_4 + K_1, \text{banner}, W_4, C_5\}$.

Каждый из классов $\mathcal{X}_7^*$–$\mathcal{X}_9^*$ наследственный.

Лемма 4. *Каждый из классов графов* $\mathcal{X}_7^*$–$\mathcal{X}_9^*$ *является* 3-ВР-*сложным.*

Доказательство. Задача 3-ВР NP-полна в классе $\mathcal{Y}$ связных графов, степень каждой вершины которых равна 4 [6]. Пусть $G \in \mathcal{Y}$. Выберем $i \in \overline{1,3}$ и одновременно применим операцию G_i-шунтирования к каждой вершине графа G. Получившийся граф обозначим через G'_i. Граф G'_i 3-раскрашиваемый тогда и только тогда, когда таковым является граф G_i, по леммам 1–3. Нетрудно видеть, что $G'_i \in \mathcal{X}_{i+6}^*$. Действительно, пусть H_i — некоторый 5-вершинный индуцированный подграф графа G'_i. Если он несвязный, то $H_i \in \mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^*$, или $i = 2$, $H_2 = C_4 + K_1$, или $i = 3$, $H_3 = \text{diamond} + K_1$. В двух последних случаях имеем $H_i \in \mathcal{X}_{i+6}^*$. Если H_i — индуцированный подграф графа G_i, то $H_i \in \mathcal{X}_{i+6}^*$. Предположим, что H_i связен и не является индуцированным подграфом графа G_i. Тогда одна или две вершины H_i принадлежат одной копии индуцированного подграфа G_i графа G'_i, а четыре или три принадлежат другой такой копии, поэтому обязательно $H_i \in \mathcal{X}_1^*$. Тем самым задача 3-ВР в классе $\mathcal{Y}$ полиномиально сводится к той же задаче в каждом из классов $\mathcal{X}_7^*$–$\mathcal{X}_9^*$. Значит, каждый из классов графов $\mathcal{X}_7^*$–$\mathcal{X}_9^*$ 3-ВР-сложный. Лемма 4 доказана.

3. Некоторые результаты, связанные с полиномиальной сводимостью и полиномиальной разрешимостью задачи о 3-раскраске

В [18] введено понятие неприводимого графа. Граф G называется *неприводимым*, если одновременно выполнены следующие условия:

1) G связный и не содержит вершин x и y таких, что $N(y) \subseteq N(x)$,

2) граф G не содержит шарниров,

3) граф G не содержит ни одного нечётного колеса в качестве индуцированного подграфа,

4) граф G не содержит spindle в качестве подграфа,

5) $\Delta(G) \geqslant 4$ и граф G не содержит вершин степени не более чем 2.

В [18, лемма 5] показано, что для произвольного наследственного класса $\mathcal{X}$ задача 3-ВР полиномиально сводится к той же задаче для совокупности неприводимых графов из $\mathcal{X}$.

Лемма 5. *Если* $G \in Free(\{K_{1,4},\ W_3,\ W_4,\ W_5,$ butterfly, cricket$\})$, *то* $\Delta(G) \leqslant 4$. *Более того, если* $\deg(x) = 4$, *то* $G[N(x)] \in \{K_{1,3}, P_3 + K_1, P_4\}$.

Доказательство. Пусть x^* — вершина максимальной степени графа G. Предположим, что $G[N(x^*)]$ содержит компоненту связности G^*, имеющую не менее четырёх вершин. Так как $G \in Free(\{W_3, W_4, W_5,$ butterfly$\})$, то G^* — дерево диаметра не более чем 3. Понятно, что $\Delta(G^*) \leqslant 3$. Если $\Delta(G^*) = 2$, то $G^* = P_4$. Если $\Delta(G^*) = 3$ и $G^* \neq K_{1,3}$, то G^* содержит индуцированный подграф $K_2{+}2K_1$, поэтому $G \notin Free(\{$cricket$\})$. Тем самым $G^* = K_{1,3}$, если $\Delta(G^*) = 3$.

Поскольку $G \in Free(\{K_{1,4},$ cricket$\})$, граф $G[N(x^*)]$ имеет не более трёх компонент связности, причём если их ровно три, то $G[N(x^*)]$ пуст. Если таковых компонент ровно две, то одна из них — граф K_1, так как $G \in Free(\{$butterfly$\})$. Предположим, что $G[N(x^*)] = H{+}K_1$, где H связный и $|V(H)| \geqslant 3$. Так как $G \in Free(\{K_{1,4}, W_3,$ cricket$\})$, по результатам предыдущего абзаца граф H должен иметь в точности три вершины, откуда следует, что $H = P_3$. Значит, $\Delta(G) \leqslant 4$.

Если $\deg(x) = 4$, то $G[N(x)] \in \{K_{1,3}, P_3 + K_1, P_4\}$. Это следует из рассуждений предыдущих абзацев. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Задача* 3-ВР *в классе* $Free(\{K_{1,4},$ butterfly, cricket, dart$\})$ *полиномиально сводится к той же задаче для класса* $Free(\{K_{1,4},\ W_4,$ butterfly, cricket, dart$\})$.

Доказательство. Очевидно, что окрестность любой вершины любого графа из $Free(\{K_{1,4}, W_4\})$ индуцирует подграф из класса $Free(\{K_3, O_4\})$. По теореме Рамсея данный подграф содержит не более 8 вершин. Пусть G — неприводимый граф из класса $Free(\{K_{1,4},$ butterfly, cricket, dart$\})$, содержащий индуцированный подграф W_4. Обозначим вершины данного подграфа через v, v_1, v_2, v_3, v_4, где $C = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ — его индуцированный 4-цикл. Будем считать, что множество вершин графа G, отстоящих от v на расстояние 3, непусто. Иначе G содержит не более чем $1 + 8 + 8 \cdot 7 + 8 \cdot 7^2$ вершин ввиду связности данного графа.

Так как $G \in Free(\{$butterfly, cricket$\})$, все элементы множества $N(v)$, кроме, быть может, одного, принадлежат множеству $\widehat{V} = \bigcup\limits_{j=1}^{4} N(v_j)$. Докажем, что существует индуцированный путь длины 3 с началом в вершине v, проходящий через вершины C. Предположим противное. Тогда индуцированный путь (v, a, b, c) не содержит элементов множества $V(C)$. По нашему предположению каждый сосед любого элемента множества $\widehat{V} \setminus N(v)$ принадлежит множеству $\widehat{V} \cup \{a\}$. Если вершина $a' \notin \{v_2, v_4\}$ является общим соседом вершин v и v_1, то a' должна быть смежна с v_3 и одновременно не смежна с каждой из вершин v_2 и v_4, так как $G \in Free(\{W_3, dart\})$. По тем же причинам каждый сосед вершины a' принадлежит множеству $\widehat{V} \cup \{a\}$. Значит, вершина a — шарнир графа G, поэтому G не является неприводимым.

Рассмотрим индуцированный путь (v, a_1, b_1, c_1), в котором $a_1 \in V(C)$ и $c_1 \notin \widehat{V}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_1 = v_1$. Так как граф G неприводимый и принадлежит классу $Free(\{\text{dart}\})$, то b_1 смежна ровно с двумя вершинами цикла C, которые являются соседними. В этом легко убедиться, перебрав все возможные случаи пересечения $N(b_1)$ и $V(C)$: одна вершина, две несмежные, две смежные, три или четыре вершины соответственно. Можно считать, что $b_1v_2 \in E(G)$. Если b_1 имеет соседа $c' \notin \{v_1, v_2, c_1\}$, то $c' \in N(v_1) \otimes N(v_2)$, так как $G \in Free(\{W_3,$ butterfly, cricket$\})$. Из соображений симметрии достаточно рассмотреть случай, когда $c' \in N(v_1) \setminus N(v_2)$. Так как $G \in Free(\{W_3, W_5\})$, то $c'v_4 \notin E(G)$. Тогда вершины v_1, v_2, v_4, b_1, c' индуцируют dart.

Предположим, что $b_2 \in \widehat{V} \setminus (V(W_4) \cup \{b_1\})$. Вершина b_2 не может иметь ровно одного соседа на цикле C, так как $G \in Free(\{\text{dart}\})$. Если $N(b_2) \cap V(C) \in \{\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}\}$, то $b_1b_2 \in E(G)$, поскольку $G \in Free(\{$butterfly, cricket$\})$, но тогда $G \notin Free(\{W_3, W_5\})$. Пусть $N(b_2) \cap V(C) = \{v_1, v_3\}$. Если $b_2b_1 \in E(G)$, то v_1, v_2, v_4, b_1, b_2 индуцируют dart. Если же $b_2b_1 \notin E(G)$, то либо v_1, v_2, v_4, v, b_2 (если $b_2v \notin E(G)$), либо v_1, v_4, v, b_1, b_2 индуцируют dart (если $b_2v \in E(G)$). Случай $N(b_2) \cap V(C) = \{v_2, v_4\}$ рассматривается аналогично. Во всех случаях, когда $|V(C) \cap N(b_2)| \geqslant 3$, имеем $b_2v \notin E(G)$ и $b_1b_2 \notin E(G)$, так как $G \in Free(\{W_3, W_5\})$. Тогда G содержит индуцированный подграф dart. Тем самым каждый элемент множества $\widehat{V} \setminus (V(W_4) \cup \{b_1\})$ смежен в C только с вершинами v_3 и v_4.

Итак, $N(b_2) \cap V(C) = \{v_3, v_4\}$. Более того, в силу предыдущих рассуждений и того, что $G \in Free(\{W_3, \text{cricket}\})$, имеем $N(v_3) \cap N(v_4) = \{b_2, v\}$. Поскольку G spindle$_s$-свободный, то $b_1b_2 \notin E(G)$. Если существует вершина $c_2 \in N(b_2) \setminus \{v_3, v_4\}$, то $c_2v \notin E(G)$, иначе $G \in Free(\{\text{dart}\})$. Тем самым $c_2 \notin \widehat{V} \cup N(v)$ и $\deg(b_2) = 3$, так как $G \in Free(\{$butterfly, cricket$\})$. Значит, $\deg(b_1) = 3$, $\deg(b_2) \leqslant 3$ и $\deg(v) \leqslant 5$.

Удалим из графа G все вершины множества $V(C)$, добавим к нему вершины w_1 и w_2, а также рёбра w_1w_2, w_1b_1, w_2b_1, w_1v, w_2v, w_1b_2, w_2b_2.

Получившийся граф обозначим через G^*. Нетрудно видеть, что граф G будет 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда граф G^* является таковым. Кроме того, $G^* \in Free(\{K_{1,4}$, butterfly, cricket, dart$\})$. Если $\widehat{V} = V(W_4) \cup \{b_1\}$, то можно выполнить аналогичную редукцию, в которой не проводятся рёбра w_1b_2, w_2b_2. Применив преобразование необходимое количество раз, в итоге получим граф из $Free(\{K_{1,4}, W_4$, butterfly, cricket, dart$\})$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Задача* 3-ВР *в классе* $Free(\{K_{1,4}, W_4$, butterfly, cricket$\})$ *полиномиально сводится к той же задаче в классе* $Free(\{K_{1,4}, W_4$, butterfly, cricket, crown$\})$. *Этот факт также верен для классов* $Free(\{K_{1,4}, W_4$, butterfly, cricket, dart$\})$ *и* $Free(\{K_{1,4}$, W_4, butterfly, cricket, crown, dart$\})$.

Доказательство. Допустим, что неприводимый граф G из класса $Free(\{K_{1,4}, W_4$, butterfly, cricket$\})$ содержит индуцированный подграф crown, вершины степени 2 которого обозначим через x_1, x_2, x_3. Из леммы 5 следует, что в графе G каждая из вершин x_1, x_2, x_3 имеет степень не более чем 3. В графе G стянем рассматриваемый подграф в вершину x, а сам результат такого стягивания обозначим через G^*. Очевидно, что граф G^* будет 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является G. Также очевидно, что степень вершины x в графе G^* не превосходит трёх. Если эта степень не превосходит двух или x — вершина степени 3 в индуцированном подграфе W_4 графа G^*, то граф G^* 3-раскрашиваемый тогда и только тогда, когда таковым является и граф $G^* \setminus \{x\} = G \setminus V(\text{crown})$. Поэтому далее предполагается, что данный случай не реализуется, и поэтому $G^* \in Free(\{W_4\})$. Тогда в графе G существуют вершины y_1, y_2, y_3 такие, что

$$y_i \in N(x_i) \setminus \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} N(x_j)$$

для любого $i \in \overline{1,3}$. Понятно, в графе G^* вершины y_1, y_2, y_3 образуют окрестность вершины x. Так как при переходе от G к G^* степени вершин y_1, y_2, y_3 не меняются, то $G^* \in Free(\{K_{1,4}\})$. Если $G^* \notin Free(\{\text{butterfly}\})$, то в графе G^* вершина x является вершиной степени 2 индуцированной копии графа butterfly, и можно считать, что x, y_1, y_2 образуют треугольник в данном подграфе butterfly и y_3 ему не принадлежит. Но тогда все вершины рассматриваемого подграфа butterfly, кроме x, а также вершина x_1 индуцируют в G подграф cricket. Если $G^* \notin Free(\{\text{cricket}\})$, то вершина x в графе G^* является вершиной степени 1 индуцированной копии графа cricket (и тогда, очевидно, $G \notin Free(\{\text{cricket}\})$) или является вершиной степени два индуцированной копии графа *cricket* (и тогда, очевидно, $G \notin Free(\{K_{1,4}\})$). Поэтому $G^* \in Free(\{K_{1,4}, W_4,$ butterfly, cricket$\})$. Если дополнительно $G \in Free(\{\text{dart}\})$, то индуцированный подграф dart может существовать в графе G^*, только если он индуцирован вершинами x, y_1, y_2, y_3 и некоторой вершиной z. Можно считать, что (y_1, y_2, y_3) — индуцированный путь в графе G^* и $z \in N(y_2)\setminus (N(y_1) \cup N(y_3))$. Тогда в графе G вершины y_1, y_2, y_3, x_2, z индуцируют подграф $K_{1,4}$.

Применив описанную редукцию необходимое число раз, получим некоторый граф $H_G \in Free(\{K_{1,4}, W_4,$ butterfly, cricket, crown$\})$, причём $H_G \in Free(\{\text{dart}\})$, если $G \in Free(\{\text{dart}\})$. Понятно, что граф G 3-раскрашиваемый тогда и только тогда, когда граф H_G является таковым. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Класс* $Free(\{K_{1,4},$ butterfly, cricket, dart$\})$ *является* 3-ВР-*простым.*

Доказательство. По леммам 6 и 7 задача 3-ВР в классе $Free(\{K_{1,4},$ butterfly, cricket, dart$\})$ полиномиально сводится к той же задаче в классе $Free(\{K_{1,4}, W_4,$ butterfly, cricket, crown, dart$\})$.

Напомним, что 2-*деревом* называется любой граф, который может быть получен из графа K_3, считающегося простейшим 2-деревом, по следующему правилу: добавить новую вершину к ранее полученному графу и соединить её ребрами с двумя смежными вершинами старого графа. Нетрудно видеть, что любое 2-дерево имеет единственную 3-раскраску, причём она может быть найдена за линейное время.

Пусть G — 2-дерево из класса $\mathcal{X} = Free(\{K_{1,4}, W_4,$ butterfly, cricket, crown, dart$\})$. Тогда $\Delta(G) \leqslant 4$ по лемме 5. С использованием этого факта индукцией по числу вершин нетрудно доказать каждое из следующих трёх утверждений. Если $G \notin \{K_3,$ diamond, F_4, sun$\}$, то все его вершины, кроме x_1, x_2, y_1, y_2, имеют степень 4. Более того, $\deg(x_1) = \deg(x_2) = 2$ и $\deg(y_1) = \deg(y_2) = 3$, причём $(x_1, y_1) \in E(G)$, $(x_2, y_2) \in E(G)$ и $G[\{x_1, x_2, y_1, y_2\}] = 2K_2$ или $G[\{x_1, x_2, y_1, y_2\}] = P_4$. В 3-раскраске графа G все три цвета встречаются среди цветов вершин x_1, x_2, y_1, y_3, причём совпадают цвета вершин x_1, x_2, или вершин y_1, y_2, или вершин x_1, y_2. Последнее верно и для графов diamond и F_4. В 3-раскраске графов K_3 и sun их вершины степени 2 получают попарно различные цвета.

Пусть G — неприводимый граф из класса $\mathcal{X}$. Максимальный по включению подграф графа G, который является 2-деревом и принадлежит $\mathcal{X}$, назовём 2_G-*деревом.* Из леммы 5 следует, что любые два 2_G-дерева не пересекаются по вершинам, 2_G-деревья покрывают все вершины степени 4 в графе G и каждая вершина, имеющая в 2_G-дереве степень 2 или 3, имеет в G степень, равную трём.

Удалим из графа G все вершины степени 3, окрестности которых индуцируют пустой граф, и все рёбра ab такие, что $G[N(a)] = K_2 + K_1$. Нетрудно видеть, что в результате получится дизъюнктное объединение всевозможных 2_G-деревьев. Поэтому множество всех 2_G-деревьев может быть найдено за полиномиальное время.

Рассмотрим какое-нибудь 2_G-дерево и его 3-раскраску. Если в G имеется ребро, соединяющее две одноцветные вершины данного 2_G-дерева, то G не 3-раскрашиваемый. Покажем, что если для каждого 2_G-дерева нет такого ребра, то граф G является 3-раскрашиваемым. Для этого применим некоторый процесс редукции графов. Пусть G' — текущий граф, в начале процесса $G' = G$. Рассмотрим граф G' и 3-раскраску некоторого его 2_G-дерева. Удалим из G' рассматриваемое 2_G-дерево, затем добавим треугольник и для любого $i \in \overline{1,3}$ вершину треугольника с номером i соединим в точности с теми вершинами полученного графа, с которыми ранее были смежны вершины цвета i удалённого 2_G-дерева. Треугольник обязательно будет содержать вершину степени 2. После исключения всех 2_G-деревьев в получившемся графе удалим все вершины степени 2, а полученный граф обозначим через G^*. Граф G^* не содержит индуцированной копии графа K_4 и имеет максимальную степень вершин не более чем 3. Ясно, что граф G будет 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является и граф G^*. По теореме Брукса [3] граф G^* 3-раскрашиваемый. Значит, граф G является 3-раскрашиваемым. Лемма 8 доказана.

4. Основной результат работы и его доказательство

Введём следующие обозначения:

$$\mathcal{X}'_1 = Free(\{K_{1,4}, \text{butterfly}, \text{cricket}, C_4\}),$$
$$\mathcal{X}'_2 = Free(\{K_{1,4}, \text{butterfly}, \text{cricket}, C_4 + K_1\}),$$
$$\mathcal{X}'_3 = Free(\{K_{1,4}, \text{butterfly}, \text{cricket}, W_4\}).$$

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{X}$ — класс графов, определяемый не более чем четырьмя запрещёнными индуцированными подграфами, каждый из которых имеет не более 5 вершин, и отличный от каждого из классов графов $\mathcal{X}'_1$–$\mathcal{X}'_3$. Тогда $\mathcal{X}$ является* 3-ВР-*сложным, если он включает хотя бы один из классов $\mathcal{X}^*_1$–$\mathcal{X}^*_9$, иначе он* 3-ВР-*простой. Задача* 3-ВР *в классе $\mathcal{X}'_1$ полиномиально эквивалентна той же задаче в классе $\mathcal{X}'_2$, а задача* 3-ВР *в классе $\mathcal{X}'_2$ полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathcal{X}'_3$.*

Доказательство. В [13] доказано, что конечно определённый класс графов, включающий хотя бы один из классов графов $\mathcal{X}_1^*, \mathcal{X}_2^*$, является 3-ВР-сложным. Поэтому если $\mathcal{X}$ включает хотя бы один из классов $\mathcal{X}_1^*$–$\mathcal{X}_9^*$, то он 3-ВР-сложный.

Предположим, что $\mathcal{X}$ не включает ни один из классов графов $\mathcal{X}_1^*$–$\mathcal{X}_9^*$. В [16] доказано, что если $G_1 \in \mathcal{X}_1^*$ и $G_2 \in \mathcal{X}_2^*$ — произвольные графы с не более чем 5 вершинами каждый, причём $\{G_1, G_2\} \neq \{K_{1,4}, \text{bull}\}$ и $\{G_1, G_2\} \neq \{K_{1,4}, \text{butterfly}\}$, то класс $Free(\{G_1, G_2\})$ 3-ВР-простой. Вместе с тем доказано (см. доказательство теоремы 1 в [18]), что если G — граф с не более чем 5 вершинами и класс $Free(\{K_{1,4}, \text{bull}, G\})$ не включает ни один из классов $\mathcal{X}_3^*$–$\mathcal{X}_6^*$, то $Free(\{K_{1,4}, \text{bull}, G\})$ является 3-ВР-простым. Поэтому можно считать, что

$$\mathcal{X} = Free(\{K_{1,4}, \text{butterfly}, G_1, G_2\}),$$

где $\max(|V(G_1)|, |V(G_2)|) \leqslant 5$ и ни один из графов G_1, G_2 не принадлежит ни одному из классов $\mathcal{X}_1^*, \mathcal{X}_2^*$. Вместе с тем так как $\mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{X}_7^*$, то $G_1 = \text{cricket}$ или $G_1 = C_5$.

Очевидно, что если $H \in Free(\{H' + K_1\})$, то либо $H \in Free(\{H'\})$, либо $|V(H)| \leqslant |V(H')|(\Delta(H) + 1)$. Задача 3-ВР в классе $\mathcal{X}$ полиномиально сводится к той же задаче для множества неприводимых графов из данного класса, причём по теореме Рамсея максимальная степень вершин любого неприводимого графа из $\mathcal{X}$ не превосходит 8. Значит, если $G_2 = H' + K_1$, то задача 3-ВР в классе $\mathcal{X}$ полиномиально сводится к той же задаче в классе $Free(\{K_{1,4}, \text{butterfly}, G_1, H'\})$. Тем самым если $G_1 = C_5$, то можно предполагать, что $G_2 \in \{\text{cricket, kite, diamond}\}$, так как $\mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{X}_3^*$. Это невозможно, поскольку $\mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{X}_5^*$, $\mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{X}_8^*$. Предположим, что $G_1 = \text{cricket}$. Тогда

$$G_2 \in \{\text{kite, diamond} + K_1, \text{dart}, C_4, C_4 + K_1, W_4\},$$

так как $\mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{X}_5^*$, $\mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{X}_9^*$. Классы $Free(\{K_{1,4}, \text{butterfly, cricket, kite}\})$ и $Free(\{K_{1,4}, \text{butterfly, cricket, diamond}\})$ являются 3-ВР-простыми (см. леммы 7 и 8 из [18]). По лемме 8 класс $Free(\{K_{1,4}, \text{butterfly, cricket, dart}\})$ 3-ВР-прост. Случаи, когда $G_2 \in \{C_4, C_4 + K_1, W_4\}$, невозможны.

Очевидно, что $\mathcal{X}_1' \subseteq \mathcal{X}_2'$ и $\mathcal{X}_1' \subseteq \mathcal{X}_3'$. Тем самым задача 3-ВР в классе $\mathcal{X}_1'$ полиномиально сводится к той же задаче в каждом из классов $\mathcal{X}_2'$, $\mathcal{X}_3'$. По рассуждениям из предыдущего абзаца задача 3-ВР в классе $\mathcal{X}_2'$ полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathcal{X}_2' \cap Free(\{C_4\})$, т. е. в классе $\mathcal{X}_1'$. Поэтому первые два случая полиномиально эквивалентны и каждый из них полиномиально сводится к третьему. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bonomo F., Chudnovsky M., Maceli P., Schaudt O., Stein M., Zhong M.** Three-coloring and list three-coloring of graphs without induced paths on seven vertices // Combinatorica. 2018. P. 1–23.
2. **Broersma H. J., Golovach P. A., Paulusma D., Song J.** Updating the complexity status of coloring graphs without a fixed induced linear forest // Theor. Comp. Sci. 2012. Vol. 414, No. 1. P. 9–19.
3. **Brooks R. L.** On colouring the nodes of a network // Proc. Camb. Philos. Soc., Math. Phys. Sci. 1941. Vol. 37, No. 2. P. 194–197.
4. **Dabrowski K., Golovach P. A., Paulusma D.** Colouring of graphs with Ramsey-type forbidden subgraphs // Theor. Comput. Sci. 2014. Vol. 522. P. 34–43.
5. **Dabrowski K., Lozin V. V., Raman R., Ries B.** Colouring vertices of triangle-free graphs without forests // Discrete Math. 2012. Vol. 312, No. 7. P. 1372–1385.
6. **Dailey D. P.** Uniqueness of colorability and colorability of planar 4-regular graphs are NP-complete // Discrete Math. 1980. Vol. 30, No. 3. P. 289–293.
7. **Golovach P. A., Paulusma D., Ries B.** Coloring graphs characterized by a forbidden subgraph // Discrete Appl. Math. 2015. Vol. 180. P. 101–110.
8. **Golovach P. A., Paulusma D., Song J.** 4-Coloring H-free graphs when H is small // Discrete Appl. Math. 2013. Vol. 161, No. 1–2. P. 140–150.
9. **Hoàng C., Kamiński M., Lozin V. V., Sawada J., Shu X.** Deciding k-colorability of P_5-free graphs in polynomial time // Algorithmica. 2010. Vol. 57. P. 74–81.
10. **Hoàng C., Lazzarato D.** Polynomial-time algorithms for minimum weighted colorings of $(P_5, \overline{P_5})$-free graphs and similar graph classes // Discrete Appl. Math. 2015. Vol. 186. P. 105–111.
11. **Huang S.** Improved complexity results on k-coloring P_t-free graphs // Eur. J. Comb. 2016. Vol. 51. P. 336–346.
12. **Král D., Kratochvíl J., Tuza Z., Woeginger G.** Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs // Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. Proc. 27th Int. Workshop (Boltenhagen, Germany, June 14–16, 2001). Heidelberg: Springer-Verl., 2001. P. 254–262. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 2204).
13. **Lozin V. V., Kamiński M.** Coloring edges and vertices of graphs without short or long cycles // Contrib. Discrete Math. 2007. Vol. 2, No. 1. P. 61–66.
14. **Lozin V. V., Malyshev D. S.** Vertex coloring of graphs with few obstructions // Discrete Appl. Math. 2017. Vol. 216. P. 273–280.
15. **Malyshev D. S.** The coloring problem for classes with two small obstructions // Optim. Lett. 2014. Vol. 8, No. 8. P. 2261–2270.

16. **Malyshev D. S.** The complexity of the 3-colorability problem in the absence of a pair of small forbidden induced subgraphs // Discrete Math. 2015. Vol. 338, No. 11. P. 1860–1865.
17. **Malyshev D. S.** Two cases of polynomial-time solvability for the coloring problem // J. Comb. Optim. 2015. Vol. 31, No. 2. P. 833–845.
18. **Malyshev D. S.** The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs // Graphs Comb. 2017. Vol. 33, No. 4. P. 1009–1022.
19. **Malyshev D. S.** Polynomial-time approximation algorithms for the coloring problem in some cases // J. Comb. Optim. 2017. Vol. 33, No. 3. P. 809–813.
20. **Malyshev D. S., Lobanova O. O.** Two complexity results for the vertex coloring problem // Discrete Appl. Math. 2017. Vol. 219. P. 158–166.

Сироткин Дмитрий Валерьевич,
Малышев Дмитрий Сергеевич

Статья поступила
11 апреля 2018 г.

Исправленный вариант —
20 мая 2018 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2018. Volume 25, No. 4. P. 112–130

UDC 519.17 DOI: 10.17377/daio.2018.25.617

ON THE COMPLEXITY OF THE VERTEX 3-COLORING PROBLEM FOR THE HEREDITARY GRAPH CLASSES WITH FORBIDDEN SUBGRAPHS OF SMALL SIZE

D. V. Sirotkin[1,2,a] and *D. S. Malyshev*[1,2,b]

[1]National Research University Higher School of Economics,
25/12 Bolshaya Pecherskaya St., 603155 Nizhny Novgorod, Russia
[2]Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarina Ave., 603950 Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: [a]dmitriy.v.sirotkin@gmail.com, [b]dsmalyshev@rambler.ru

Abstract. The 3-coloring problem for a given graph consists in verifying whether it is possible to divide the vertex set of the graph into three subsets of pairwise nonadjacent vertices. A complete complexity classification is known for this problem for the hereditary classes defined by triples of forbidden induced subgraphs, each on at most 5 vertices. In this article, the quadruples of forbidden induced subgraphs is under consideration, each on at most 5 vertices. For all but three corresponding hereditary classes, the computational status of the 3-coloring problem is determined. Considering two of the remaining three classes, we prove their polynomial equivalence and polynomial reducibility to the third class. Illustr. 4, bibliogr. 20.

Keywords: 3-colorability problem, hereditary class, computational complexity.

REFERENCES

1. **F. Bonomo, M. Chudnovsky, P. Maceli, O. Schaudt, M. Stein,** and **M. Zhong,** Three-coloring and list three-coloring of graphs without induced paths on seven vertices, *Comb.,* 1–23, 2018. DOI: 10.1007/s00493-017-3553-8.
2. **H. J. Broersma, P. A. Golovach, D. Paulusma,** and **J. Song,** Updating the complexity status of coloring graphs without a fixed induced linear forest, *Theor. Comput. Sci.,* **414**, No. 1, 9–19, 2012.
3. **R. L. Brooks,** On colouring the nodes of a network, *Proc. Camb. Philos. Soc., Math. Phys. Sci.,* **37**, No. 2, 194–197, 1941.

4. **K. Dabrowski, P. A. Golovach,** and **D. Paulusma,** Colouring of graphs with Ramsey-type forbidden subgraphs, *Theor. Comput. Sci.,* **522**, 34–43, 2014.
5. **K. Dabrowski, V. V. Lozin, R. Raman,** and **B. Ries,** Colouring vertices of triangle-free graphs without forests, *Discrete Math.,* **312**, No. 7, 1372–1385, 2012.
6. **D. P. Dailey,** Uniqueness of colorability and colorability of planar 4-regular graphs are NP-complete, *Discrete Math.,* **30**, No. 3, 289–293, 1980.
7. **P. A. Golovach, D. Paulusma,** and **B. Ries,** Coloring graphs characterized by a forbidden subgraph, *Discrete Appl. Math.,* **180**, 101–110, 2015.
8. **P. A. Golovach, D. Paulusma,** and **J. Song,** 4-Coloring H-free graphs when H is small, *Discrete Appl. Math.,* **161**, No. 1–2, 140–150, 2013.
9. **C. Hoàng, M. Kamiński, V. V. Lozin, J. Sawada,** and **X. Shu,** Deciding k-colorability of P_5-free graphs in polynomial time, *Algorithmica,* **57**, 74–81, 2010.
10. **C. Hoàng** and **D. Lazzarato,** Polynomial-time algorithms for minimum weighted colorings of $(P_5, \overline{P}_5)$-free graphs and similar graph classes, *Discrete Appl. Math.,* **186**, 105–111, 2015.
11. **S. Huang,** Improved complexity results on k-coloring P_t-free graphs, *Eur. J. Comb.,* **51**, 336–346, 2016.
12. **D. Král, J. Kratochvíl, Z. Tuza,** and **G. Woeginger,** Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs, in *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science* (Proc. 27th Int. Workshop, Boltenhagen, Germany, June 14–16, 2001), pp. 254–262, Springer, Heidelberg, 2001 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 2204).
13. **V. V. Lozin** and **M. Kamiński,** Coloring edges and vertices of graphs without short or long cycles, *Contrib. Discrete Math.,* **2**, No. 1, 61–66, 2007.
14. **V. V. Lozin** and **D. S. Malyshev,** Vertex coloring of graphs with few obstructions, *Discrete Appl. Math.,* **216**, 273–280, 2017.
15. **D. S. Malyshev,** The coloring problem for classes with two small obstructions, *Optim. Lett.,* **8**, No. 8, 2261–2270, 2014.
16. **D. S. Malyshev,** The complexity of the 3-colorability problem in the absence of a pair of small forbidden induced subgraphs, *Discrete Math.,* **338**, No. 11, 1860–1865, 2015.
17. **D. S. Malyshev,** Two cases of polynomial-time solvability for the coloring problem, *J. Comb. Optim.,* **31**, No. 2, 833–845, 2015.
18. **D. S. Malyshev,** The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs, *Graphs Comb.,* **33**, No. 4, 1009–1022, 2017.

19. D. S. Malyshev, Polynomial-time approximation algorithms for the coloring problem in some cases, *J. Comb. Optim.,* **33**, No. 3, 809–813, 2017.

20. D. S. Malyshev and **O. O. Lobanova,** Two complexity results for the vertex coloring problem, *Discrete Appl. Math.,* **219**, 158–166, 2017.

Dmitry V. Sirotkin,
Dmitry S. Malyshev

Received
11 April 2018

Revised
20 May 2018