

УДК 517.9+513.8

Классификация систем Морса–Смейла и топологическая структура несущих многообразий

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, О. В. Починка

Системы Морса–Смейла естественным образом возникают в приложениях при математическом моделировании процессов с регулярной динамикой (например, в цепочках связанных отображений, описывающих реакции диффузии, или при изучении топологии магнитных полей в проводящей среде, в частности при исследовании вопроса существования сепараторов в магнитных полях хорошо проводящих сред). Поскольку математические модели в форме систем Морса–Смейла появляются при описании процессов, имеющих разную природу, первым шагом в изучении таких моделей является выделение свойств, не зависящих от физического контекста, но определяющих разбиение фазового пространства на траектории. Отношение, сохраняющее разбиение на траектории с точностью до гомеоморфизма, называется топологической эквивалентностью, а отношение, сохраняющее дополнительно время движения по траекториям (непрерывное в случае потоков и дискретное в случае каскадов), называется топологической сопряженностью. Задача топологической классификации динамических систем состоит в поиске инвариантов, однозначно определяющих класс эквивалентности или сопряженности для заданной системы.

Настоящий обзор посвящен изложению результатов по топологической классификации систем Морса–Смейла на замкнутых многообразиях, включая результаты, полученные авторами в последнее время. Также приведены недавние результаты авторов, относящиеся к взаимосвязи между глобальной динамикой таких систем и топологической структурой несущих многообразий.

Библиография: 112 названий.

Ключевые слова: системы Морса–Смейла, топологическая классификация, топология несущего многообразия.

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9855>

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 17-11-01041) за исключением раздела 5, написанного при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 14-41-00044), и раздела 4, написанного в рамках выполнения программы ЦФИ НИУ ВШЭ в 2018 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	42
1. Основные определения и факты	44
1.1. Локальная динамика систем Морса–Смейла в окрестности периодических орбит	45
1.2. Асимптотические и топологические свойства инвариантных многообразий	47
1.3. Метод факторизации	52
1.4. Согласованная система окрестностей	54
2. Одномерные системы	57
3. Двумерные системы	58
3.1. Двумерные потоки	58
3.2. Двумерные диффеоморфизмы	67
4. Трехмерные системы	78
4.1. Трехмерные потоки	78
4.2. Трехмерные диффеоморфизмы	87
5. Многомерные системы	97
5.1. Топологическая классификация систем с седлами коразмерности 1	97
5.2. Потоки и диффеоморфизмы с тремя неблуждающими точками	103
5.3. Топологическая структура несущих многообразий, допускающих потоки без неподвижных точек	106
5.4. Топология многообразий, допускающих системы Морса–Смейла с неподвижными точками	107
Список литературы	109

Введение

Системы Морса–Смейла – структурно-устойчивые системы с конечным множеством неблуждающих орбит – являются фундаментальным объектом в теории динамических систем. Определение системы Морса–Смейла восходит к необходимым и достаточным условиям грубости (т.е. сохранения качественных свойств решений при малых изменениях правых частей) систем дифференциальных уравнений, заданных в конечной части плоскости, полученных в 1937 г. А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным. Динамическая система с непрерывным или дискретным временем на замкнутом многообразии называется *системой Морса–Смейла*, если ее неблуждающее множество состоит из конечного числа неподвижных и периодических орбит, все они гиперболические, а их устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально. При этом оказывается, что каждая точка объемлющего многообразия лежит как в неустойчивом многообразии, так и в устойчивом многообразии какой-нибудь периодической орбиты. Простейшим примером потока (диффеоморфизма) Морса–Смейла является градиентный поток (соответственно сдвиг на единицу времени градиентного потока) типичной функции Морса.

На первый взгляд представляется, что глобальная динамика системы Морса–Смейла и топология несущего многообразия хорошо определяются локальным поведением системы в окрестности периодических орбит, по аналогии с тем, как топология многообразия определяется информацией о критических точках функции Морса, заданной на этом многообразии. Для систем с непрерывным временем эти ожидания отчасти оправдываются в классе *градиентно-подобных* потоков – потоков Морса–Смейла без периодических траекторий. С. Смейл [100] показал, что такой поток является градиентным для некоторой функции Морса, если он локально градиентный в окрестности неподвижных точек.

В случае дискретного времени даже в классе *градиентно-подобных* диффеоморфизмов (диффеоморфизмов Морса–Смейла, размерность пересечения инвариантных многообразий различных периодических точек которых отлична от нуля) склейка локальной динамики в окрестностях периодических точек может быть весьма нетривиальной с топологической точки зрения. Тем не менее динамические характеристики каскадов Морса–Смейла имеют тесную связь с топологией несущего многообразия. Отчасти этим обстоятельством объясняется пристальное внимание к системам Морса–Смейла и большое количество работ по данной тематике (см., например, обзор [51]).

Кроме того, системы Морса–Смейла естественным образом возникают в приложениях при математическом моделировании процессов с регулярной динамикой, например в цепочках связанных отображений, описывающих реакции диффузии (см. [88]), или при изучении топологии магнитных полей в проводящей среде (см. обзор авторов [52]), в частности при исследовании вопроса существования сепараторов в магнитных полях хорошо проводящих сред (см. [45]).

Поскольку математические модели в форме систем Морса–Смейла появляются при описании процессов, имеющих разную природу, первым шагом в изучении таких моделей является выделение свойств, не зависящих от физического контекста, но определяющих разбиение фазового пространства на траектории. Отношение, сохраняющее разбиение на траектории с точностью до гомеоморфизма, называется *топологической эквивалентностью*, а отношение, сохраняющее дополнительно время движения по траекториям (непрерывное в случае потоков и дискретное в случае каскадов), называется *топологической сопряженностью*. Задача топологической классификации динамических систем состоит в поиске *инвариантов*, однозначно определяющих класс эквивалентности или сопряженности для заданной системы.

Настоящий обзор посвящен изложению результатов по топологической классификации систем Морса–Смейла на замкнутых многообразиях, включая результаты, полученные авторами в последнее время. Также приведены недавние результаты авторов, относящиеся к взаимосвязи между глобальной динамикой таких систем и топологической структурой несущих многообразий.

1. Основные определения и факты

Дадим точные определения отношений эквивалентности динамических систем на замкнутом n -многообразии M^n , рассматриваемых в качественной теории.

Будем обозначать пространство C^r -диффеоморфизмов (векторных полей гладкости C^r), наделенное равномерной C^r -топологией, через $\text{Diff}^r(M^n)$ (соответственно $\Xi^r(M^n)$). Для $r = 1$ будем обычно писать $\text{Diff}(M^n)$ и $\Xi(M^n)$.

Диффеоморфизмы $f, g \in \text{Diff}(M^n)$ называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h: M^n \rightarrow M^n$ такой, что $h \circ f = g \circ h$. Поток $f^t, g^t \in \Xi(M^n)$ называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: M^n \rightarrow M^n$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока g^t . Диффеоморфизм $f \in \text{Diff}(M^n)$ называется *структурно устойчивым*, если существует его окрестность $U(f)$ в пространстве $\text{Diff}(M^n)$ такая, что любой диффеоморфизм $g \in U(f)$ топологически сопряжен f . Аналогично, поток $f^t \in \Xi(M^n)$ называется *структурно устойчивым*, если существует его окрестность $U(f^t) \subset \Xi(M^n)$ такая, что любой поток $g^t \in U(f^t)$ топологически эквивалентен f^t .

Понятию структурной устойчивости, введенному М. Пейшото [85], предшествовало понятие грубости, введенное А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным [1]. Для грубости диффеоморфизма f (потока f^t) на многообразии M^n требуется дополнительно, чтобы гомеоморфизм $h: M^n \rightarrow M^n$, осуществляющий сопряженность (эквивалентность) с системой из окрестности $U(f)$ ($U(f^t)$), был близок к тождественному. Для потоков на замкнутых двумерных многообразиях и диффеоморфизмов окружности понятия структурной устойчивости и грубости равносильны.

Наиболее непосредственное обобщение условий грубости потоков на поверхностях, найденных в [1] и [85], выделяет класс динамических систем (как потоков, так и каскадов) Морса–Смейла.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Динамическая система на замкнутом многообразии M^n , $n \geq 1$, называется *системой Морса–Смейла*, если:

- 1) неблуждающее множество системы гиперболично и состоит из конечного числа неподвижных точек и периодических орбит;
- 2) инвариантные многообразия неподвижных точек и периодических орбит пересекаются трансверсально.

Своим названием эти системы обязаны С. Смейлу [99], который в 1960 г. рассмотрел класс потоков со свойствами 1), 2) и доказал для них выполнение соотношений, аналогичных неравенствам Морса [77]. Заметим, что системы Морса–Смейла не являются типичными, за исключением потоков Морса–Смейла на поверхностях и систем Морса–Смейла на окружности. Отсутствие свойства типичности потоков Морса–Смейла на многообразиях размерности большей двух, и каскадов на многообразиях размерности, большей единицы, следует из классических результатов Д.В. Аносова [2], [3] и С. Смейла [101], [102], установивших существование структурно устойчивых потоков и каскадов со счетным множеством седловых периодических орбит на таких многообразиях.

С. Смейл и Дж. Палис в [82], [84] доказали структурную устойчивость систем Морса–Смейла. Отправной точкой доказательства является локальная структурная устойчивость гиперболических множеств. Гомеоморфизм, осуществляющий топологическую сопряженность в окрестностях неблуждающих множеств, для близких систем может быть продолжен на все несущее многообразие с помощью построения согласованного семейства окрестностей седловых точек. Как будет видно из классификационных результатов ниже, в некоторых частных случаях для систем Морса–Смейла удается найти полный топологический инвариант, который сохраняется при малых шевелениях системы. Построение таких инвариантов в этом случае является альтернативным методом доказательства структурной устойчивости.

Все обозначения, рассуждения и результаты ниже приводятся для диффеоморфизмов, однако они естественным образом адаптируются и для потоков. В местах, где прямой аналогии нет, мы будем говорить также и о потоках.

1.1. Локальная динамика систем Морса–Смейла в окрестности периодических орбит. Пусть $f \in \text{Diff}(M^n)$. Напомним, что точка $x \in M^n$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности U и любого натурального числа N найдется $n_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что $|n_0| \geq N$ и $f^{n_0}(U) \cap U \neq \emptyset$. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f обозначается через

$$\text{NW}(f).$$

Очевидно, что множество $\text{Per}(f)$ периодических точек диффеоморфизма f принадлежит $\text{NW}(f)$, а в случае, когда f является диффеоморфизмом Морса–Смейла, имеет место равенство $\text{NW}(f) = \text{Per}(f)$. Периодическая точка $p \in \text{Per}(f)$ периода m называется *гиперболической*, если дифференциал $Df^m(p): T_p M^n \rightarrow T_p M^n$, рассматриваемый как линейное отображение касательного пространства $T_p M^n$ в себя, не имеет собственных значений, равных по модулю единице. Согласно теореме Гробмана–Хартмана [53], [54], [57], в некоторой окрестности гиперболической периодической точки p диффеоморфизм f^m топологически сопряжен линейному диффеоморфизму, определяемому матрицей Якоби $(\partial f^m / \partial x)|_p$.

Отсюда получаем, что для гиперболической периодической точки p существуют так называемые *устойчивое многообразие*

$$W_p^s = \left\{ x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{km}(x), p) = 0 \right\}$$

и *неустойчивое многообразие*

$$W_p^u = \left\{ x \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{-km}(x), p) = 0 \right\},$$

где d – метрика на M^n . Неустойчивые и устойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*. Число j , равное числу собственных значений матрицы Якоби, по модулю больших единицы, и, соответственно, совпадающее с размерностью неустойчивого многообразия $\dim W_p^u$, называется *индексом Морса* гиперболической точки p . Тогда размерность устойчивого

многообразия вычисляется по формуле $\dim W_p^s = n - j$. Согласно [83; теорема 5.5], линейные диффеоморфизмы $\mathbb{R}^n$ топологически сопряжены в окрестностях неподвижных гиперболических точек одинакового индекса при условии одновременного сохранения (или смены) ориентаций инвариантных многообразий. Отсюда, в частности, следует локальная структурная устойчивость диффеоморфизма Морса–Смейла в окрестности неблуждающего множества.

Везде в дальнейшем мы будем обозначать через

$$\Omega^j, \quad j \in \{0, \dots, n\},$$

множество гиперболических периодических точек диффеоморфизма с индексом Морса j . Точка с индексом Морса $0 < j < n$ называется *седловой*, остальные точки называются *узловыми*, при этом узловая точка с индексом 0 называется *стоком*, а с индексом n – *источником* (см. рис. 1).

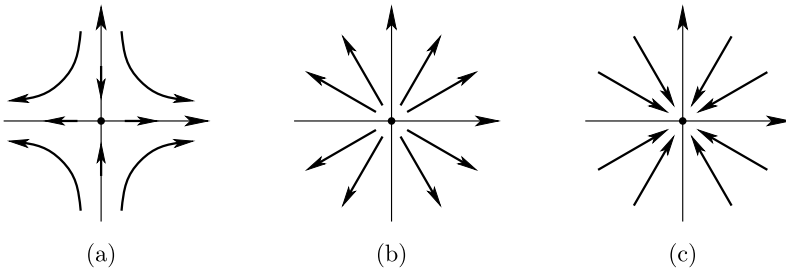


Рис. 1. Динамика в окрестности гиперболической неподвижной точки: (a) седло, (b) источник, (c) сток

В силу сопряженности с линейным сжатием, в окрестности неподвижной стоковой точки p существует замкнутый n -шар $U_p \subset W_p^s$ такой, что

$$f(U_p) \subset \text{int } U_p \quad \text{и} \quad \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_p) = p.$$

Таким образом, стоковая гиперболическая неподвижная точка является аттрактором диффеоморфизма f в смысле следующего определения.

Замкнутое f -инвариантное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором* f , если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что

$$f(U_A) \subset \text{int } U_A \quad \text{и} \quad A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A).$$

Окрестность U_A при этом называется *захватывающей*, а объединение

$$\bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(U_A)$$

– *бассейном* аттрактора. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1} .

Гиперболичность неподвижной точки потока определяется отсутствием собственных значений с нулевой действительной частью у дифференциала функции локального векторного поля, а число собственных значений с отрицательной действительной частью называется ее *индексом Морса*. Гиперболичность

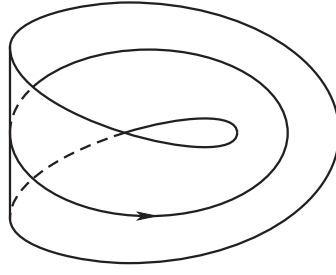


Рис. 2. Окрестность скрученной периодической траектории на поверхности

периодической траектории определяется гиперболичностью отображения последования Пуанкаре на секущей к ней. *Индексом периодической траектории* называется число, равное размерности ее неустойчивого многообразия минус единица. Периодическая траектория называется *скрученной*, если она имеет неориентируемое устойчивое многообразие (см. рис. 2), в противном случае траектория называется *нескрученной*.

1.2. Асимптотические и топологические свойства инвариантных многообразий. Для любой периодической гиперболической точки p компонента связности ℓ_p^s (ℓ_p^u) множества $W_p^s \setminus p$ (соответственно $W_p^u \setminus p$) называется *сепаратрисой точки p* . Для любого подмножества $P \subset \text{NW}(f)$ будем обозначать через W_P^u (соответственно W_P^s) объединение неустойчивых (соответственно устойчивых) многообразий всех точек из множества P .

Тесная связь топологии несущего многообразия с динамическими свойствами диффеоморфизмов Морса–Смейла во многом объясняется следующим фактом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 [58], [99], [102]. Пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ – диффеоморфизм Морса–Смейла. Тогда W_p^u и W_p^s являются гладкими подмногообразиями многообразия M^n , диффеоморфными $\mathbb{R}^j$ и $\mathbb{R}^{n-j}$ соответственно, для любой периодической точки $p \in \text{NW}(f)$ и имеют место равенства

$$M^n = \bigcup_{p \in \text{NW}(f)} W_p^u = \bigcup_{p \in \text{NW}(f)} W_p^s.$$

Доказательство этого факта зиждется лишь на конечности неблуждающего множества и локальной динамике в его окрестности, поэтому результат верен и для случая нетрансверсального пересечения инвариантных многообразий различных периодических точек. Напомним, что инвариантные многообразия W_p^u , W_q^s пересекаются *трансверсально (находятся в общем положении)*, если либо $W_p^u \cap W_q^s = \emptyset$, либо для любой точки $x \in W_p^u \cap W_q^s$ касательные подпространства $T_x W_p^u$, $T_x W_q^s$, $T_x M^n$ связаны соотношением

$$T_x W_p^u + T_x W_q^s = T_x M^n.$$

Из последнего равенства вытекает, что $\dim W_p^u + \dim W_q^s \geq n$ в случае непустого пересечения $W_p^u \cap W_q^s$.

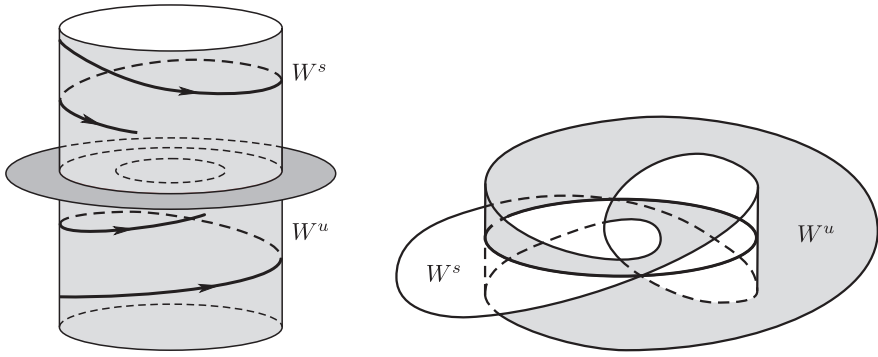


Рис. 3. Динамика в окрестности гиперболической периодической орбиты потока на трехмерном многообразии

Утверждение предложения 1.1 справедливо также и для потоков Морса–Смейла, с той лишь оговоркой, что инвариантные многообразия периодической орбиты не гомеоморфны евклидову пространству. Например, в случае $n = 3$ эти многообразия могут быть гомеоморфны цилиндру или листу Мёбиуса (см. соответственно левую и правую части рис. 3).

Предложение 1.1 фактически утверждает, что объемлющее многообразие диффеоморфизма Морса–Смейла допускает “почти клеточное” разбиение¹ неустойчивыми (равно как и устойчивыми) многообразиями периодических точек. Это наблюдение позволяет доказать для систем Морса–Смейла неравенства, аналогичные неравенствам Морса.

Обозначим через C_j число периодических точек диффеоморфизма Морса–Смейла f с индексом Морса j . Пусть $\beta_i(M^n) = \beta_i$ есть i -е число Бетти многообразия M^n , т.е.

$$\beta_i(M^n) = \text{rank } H_i(M^n, \mathbb{Z}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2 [99], [98]. Для любого диффеоморфизма Морса–Смейла имеют место следующие соотношения:

$$C_0 \geq \beta_0, \quad C_1 - C_0 \geq \beta_1 - \beta_0, \quad C_2 - C_1 + C_0 \geq \beta_2 - \beta_1 + \beta_0, \quad \dots, \\ \sum_{i=0}^n (-1)^i C_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i = \chi(M^n),$$

где $\chi(M^n)$ – эйлерова характеристика многообразия M^n .

Все неравенства имеют место также для потоков Морса–Смейла, но числа Бетти вычисляются в кольце $\mathbb{Z}_2$: $\beta_i(M^n) = \text{rank } H_i(M^n, \mathbb{Z}_2)$, а под C_j понимается сумма числа состояний равновесия с j -мерными неустойчивыми многообразиями и числа одномерных периодических траекторий с $(j+1)$ -мерными

¹ n -мерным клеточным комплексом называется хаусдорфово пространство X , которое можно представить в виде объединения попарно непересекающихся клеток e_q^j (непрерывных образов открытых дисков $\text{int } \mathbb{B}^j$) $X = \bigcup_{j=0}^n \bigcup_{q=1}^{c_j} e_q^j$ – клеточного разбиения такого, что граница ∂e_j^q каждой клетки e_j^q содержится в объединении клеток меньших размерностей.

неустойчивыми сепаратрисами. Последнее равенство в случае потока без периодических орбит совпадает с *формулой Пуанкаре–Хопфа*, которая в общем случае гласит, что для произвольного потока с конечным числом состояний равновесия сумма индексов состояний равновесия равна эйлеровой характеристике несущего многообразия.

Первое неравенство предложения 1.2 влечет за собой тот факт, что любой диффеоморфизм Морса–Смейла имеет хотя бы одну стоковую и хотя бы одну источниковую орбиту. При этом диффеоморфизмы без седловых орбит существуют на многообразиях любой размерности n , их неблуждающие множества состоят в точности из одной источниковой и одной стоковой точки, все такие системы топологически сопряжены, а их несущее многообразие гомеоморфно n -мерной сфере (см., например, [44], где приведено динамическое доказательство этого факта). Такие системы называются *системами “источник–сток”*.

Хотя инвариантные многообразия седловых периодических точек диффеоморфизма Морса–Смейла f являются подмногообразиями многообразия M^n , их замыкания могут иметь сложную топологическую структуру. Например, такое поведение имеет место, когда сепаратриса седловой точки участвует в гетероклинических пересечениях.

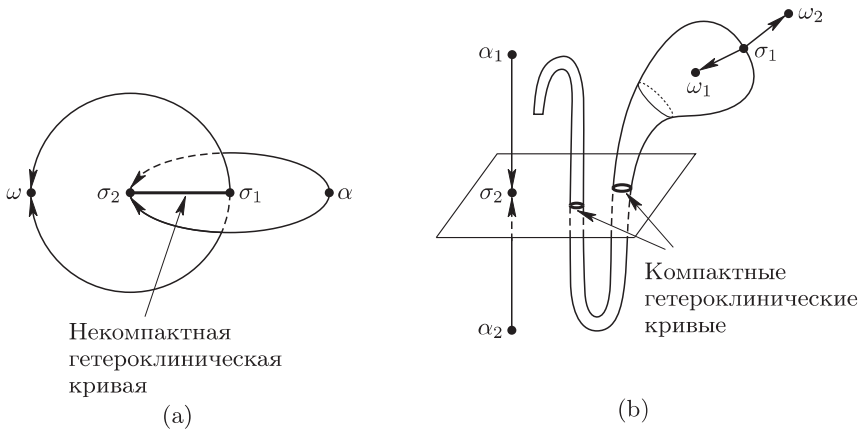


Рис. 4. Гетероклинические кривые

Пусть $\sigma_1, \sigma_2 \in NW(f)$ – различные седловые периодические точки диффеоморфизма Морса–Смейла f . Пересечение инвариантных многообразий $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u$ в случае $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$ называется *гетероклиническим*. Поскольку инвариантные многообразия пересекаются трансверсально и каждое из $W_{\sigma_1}^s, W_{\sigma_2}^u$ является подмногообразием, то любая компонента связности гетероклинического пересечения $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u$ также является подмногообразием. Если $\dim(W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u) \geq 1$, то компонента связности такого пересечения называется *гетероклиническим многообразием*. В частности, если $\dim(W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u) = 1$, то гетероклиническое многообразие называется *гетероклинической кривой* (см. рис. 4).

Если $\dim(W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u) = 0$, то такое пересечение есть счетное множество точек, которые называются *гетероклиническими*. Множество гетероклинических точек инвариантно и представляет собой объединение *гетероклинических орбит*.

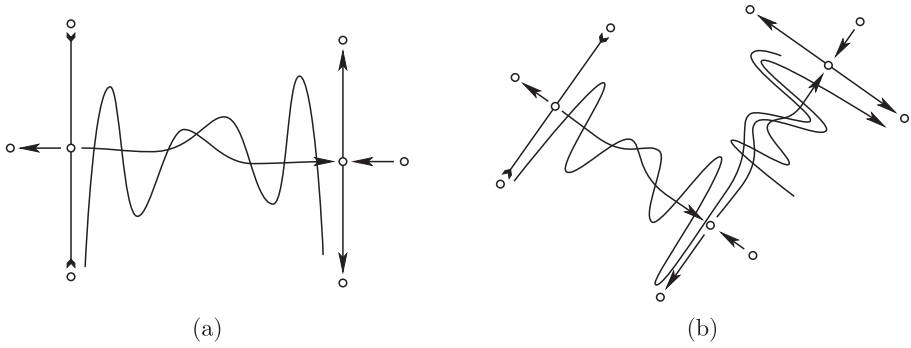


Рис. 5. Гетероклинические точки

Наличие же гетероклинических точек на инвариантных седловых многообразиях диффеоморфизмов приводит к сложному асимптотическому поведению последних (см. рис. 5), следующему из λ -леммы.

Везде далее сферой S^k мы называем многообразие, гомеоморфное стандартной сфере

$$S^k = \{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} : x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = 1\},$$

и шаром B^n – многообразие, гомеоморфное стандартному шару

$$B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}.$$

ЛЕММА 1.1 ([82], λ -лемма). Пусть p – седловая точка диффеоморфизма Морса–Смейла f , а $B^u \subset W_p^u$ и $B^s \subset W_p^s$ – диски размерности j и $n-j$ соответственно, содержащие точку p , и пусть $V = \psi(B^s \times B^u)$, где $\psi: B^s \times B^u \rightarrow M^n$ – топологическое вложение, для которого ограничение $\psi|_{B^u}$ ($\psi|_{B^s}$) совпадает с включением множества B^u (B^s) в M^n . Тогда для любого гладкого j -диска B , содержащего точку x трансверсального пересечения с W_p^s и любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число k_0 такое, что компонента связности множества $f^k(B) \cap V$, содержащая точку $f^k(x)$, и диск B^u являются ε - C^1 -близкими для любого $k \geq k_0$ (см. рис. 6).

Согласно λ -лемме 1.1, замыкание сепаратрисы седловой точки, участвующей в гетероклиническом пересечении, не имеет структуры топологического многообразия. Напротив, замыкание седловой сепаратрисы, не участвующей в гетероклинических пересечениях, является топологически вложенным многообразием. Асимптотическое поведение неустойчивой сепаратрисы в общем случае описывается следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ – диффеоморфизм Морса–Смейла. Тогда

$$\text{cl}(\ell_p^u) \setminus (\ell_p^u \cup p) = \bigcup_{r \in \text{NW}(f): \ell_p^u \cap W_r^s \neq \emptyset} W_r^u$$

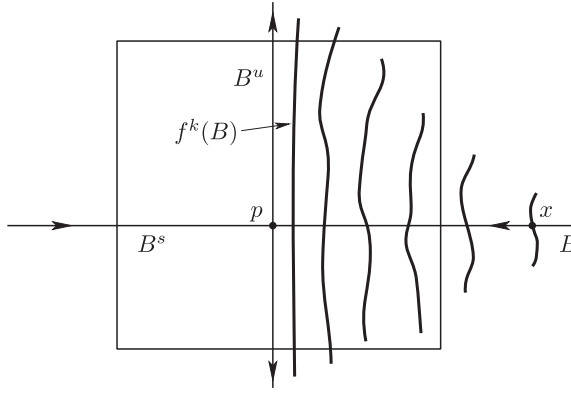


Рис. 6. Иллюстрация к λ -лемме

(где $\text{cl}(A)$ – замыкание множества A) для любой неустойчивой сепаратрисы ℓ_p^u периодической точки $p \in \text{NW}(f)$. В частности, если ℓ_p^u – седловая сепаратриса, не участвующая в гетероклинических пересечениях, то

$$\text{cl}(\ell_\sigma^u) \setminus (\ell_\sigma^u \cup \sigma) = \{\omega\},$$

где ω – стоковая периодическая точка, при этом если $j = 1$, то $\text{cl}(\ell_\sigma^u)$ есть топологически вложенная дуга в M^n , а если $j \geq 2$, то $\text{cl}(\ell_\sigma^u)$ есть топологически вложенная в M^n сфера S^j .

Гетероклинические точки естественным образом приводят к появлению так называемых *гетероклинических цепочек* из седловых орбит, т.е. последовательностей седловых орбит $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_h$ таких, что $W_{\mathcal{O}_i}^u \cap W_{\mathcal{O}_{i+1}}^s \neq \emptyset$ для всех $1 \leq i < h$. Так как диффеоморфизмы Морса–Смейла не имеют гомоклинических точек, то гетероклинические цепочки состоят из конечного числа $h \geq 2$ попарно различных седловых орбит. Число $h - 1$ называется *длиной* цепочки $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_h$. Максимальная из длин цепочек, соединяющих две орбиты $\mathcal{O} \prec \mathcal{O}'$, обозначается $\text{beh}(\mathcal{O}'|\mathcal{O})$ (от слова “behaviour”, см. [82]). На рис. 5, (а) и (б), изображены гетероклинические цепочки длины 1 и 2. Про элементы гетероклинической цепочки $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_h$ говорят, что они связаны отношением частичного порядка C . Смейла $\prec$: $\mathcal{O}_1 \prec \dots \prec \mathcal{O}_h$, определяемого условием

$$\mathcal{O}_{i_1} \prec \mathcal{O}_{i_2} \iff W_{\mathcal{O}_{i_1}}^s \cap W_{\mathcal{O}_{i_2}}^u \neq \emptyset.$$

Отметим, что у потоков Морса–Смейла гетероклинических точек не бывает и гетероклиническое многообразие состоит из одномерных траекторий. Но асимптотика гетероклинического пересечения тоже может быть весьма сложной за счет образования цепочек седловых периодических траекторий.

Частичный порядок C . Смейла продолжается (неоднозначно) до полного порядка в множестве периодических орбит диффеоморфизма Морса–Смейла f . Нумерацию орбит $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k$ называют *согласованной с порядком C . Смейла*, если из условия $\mathcal{O}_{i_1} \prec \mathcal{O}_{i_2}$ следует, что $i_1 \leq i_2$. Такую нумерацию всегда можно считать *согласованной с индексом Морса j_i орбиты $\mathcal{O}_i$* , т.е. $i_1 < i_2$, если $j_{i_1} < j_{i_2}$

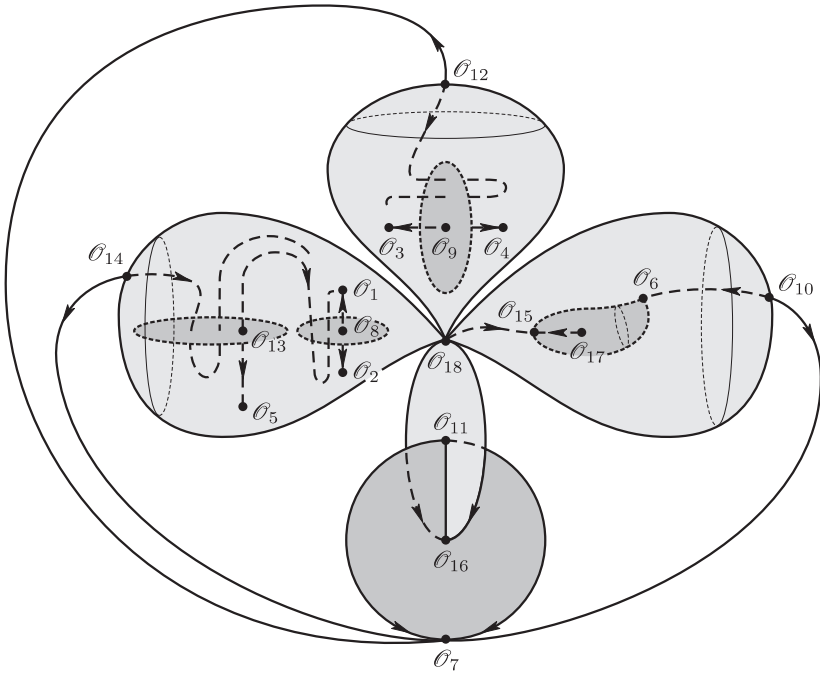


Рис. 7. Фазовый портрет диффеоморфизма Морса–Смейла $f: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ с согласованной нумерацией периодических орбит

(см. рис. 7), поскольку, в силу трансверсальности, пересечение $W_{\mathcal{O}_{i_1}}^u \cap W_{\mathcal{O}_{i_2}}^s$ пусто в случае $j_{i_1} > j_{i_2}$.

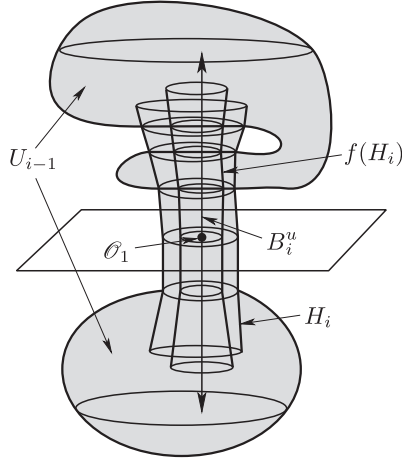
Везде в дальнейшем мы будем полагать, что нумерация орбит диффеоморфизма Морса–Смейла удовлетворяет обоим свойствам согласованности. Возможность такого полного упорядочения орбит является ключом к построению согласованного семейства окрестностей². Поясним, как выглядит это построение, используя технику *факторизации*, т.е. перехода к пространству орбит диффеоморфизма f .

1.3. Метод факторизации. Для каждой орбиты $\mathcal{O}_i$, $i = 1, \dots, k$, диффеоморфизма Морса–Смейла $f: M^n \rightarrow M^n$ положим $W_i^s = W_{\mathcal{O}_i}^s$ и $W_i^u = W_{\mathcal{O}_i}^u$. Тогда каждому $i \in \{1, \dots, k-1\}$ соответствует представление динамики диффеоморфизма f в виде “источник–сток”, где роль источника и стока играют репеллер R_i и аттрактор A_i , определяемые формулами

$$A_i = \bigcup_{j=1}^i W_j^u \quad \text{и} \quad R_i = \bigcup_{j=i+1}^k W_j^s.$$

Существование гладкой захватывающей окрестности U_i у аттрактора A_i устанавливается по индукции. Для стоковой орбиты $\mathcal{O}_1$ это результат сопряжения с линейным сжатием в бассейне стока. Пусть по предположению индукции

²Согласованная система окрестностей является модификацией допустимой системы трубчатых семейств, построенной в работах [82], [84].


 Рис. 8. Построение захватывающей окрестности аттрактора A_i

построена гладкая захватывающая окрестность U_{i-1} аттрактора A_{i-1} . В силу предложения 1.3

$$\text{cl}(W_i^u) \setminus W_i^u \subset A_{i-1}$$

и (из соображений общего положения) ∂U_{i-1} трансверсально пересекается с W_i^u . Тогда гиперболическая структура орбиты $\mathcal{O}_i$ гарантирует существование множества $B_i^u \subset W_i^u$, состоящего из j_i -мерных дисков таких, что

$$B_i^u \subset \text{int } f(B_i^u) \quad \text{и} \quad (f(B_i^u) \setminus B_i^u) \subset U_{i-1}.$$

Объединение трубчатой окрестности H_i дисков B_i^u с множеством U_{i-1} является захватывающей окрестностью U_i аттрактора A_i , которую, очевидно, можно сгладить (см. рис. 8).

Пространство

$$V_i = M^n \setminus (A_i \cup R_i)$$

состоит из блуждающих точек и называется *характеристическим многообразием*. Множество $K_i = U_i \setminus \text{int } f(U_i)$ является его *фундаментальной областью*, т. е.

$$(K_i \cap f(K_i)) \subset \partial K_i \quad \text{и} \quad V_i = \bigcup_{\mu \in \mathbb{Z}} f^\mu(K_i).$$

Тогда пространство орбит

$$\widehat{V}_i = V_i / f$$

является гладким замкнутым n -многообразием, а естественная проекция $p_i: V_i \rightarrow \widehat{V}_i$ является накрытием. Пространство $\widehat{V}_i$ называется *характеристическим фактормногообразием*. Заметим, что пространство $\widehat{V}_i$ не является связным в общем случае. Обозначим через $\widehat{V}_i^1, \dots, \widehat{V}_i^{r_i}$ – компоненты связности пространства $\widehat{V}_i$. Любая замкнутая в точке $\hat{x}$ ориентированная кривая $\hat{c} \subset \widehat{V}_i^l$ имеет единственное поднятие $c \subset V_i$, начинающееся в точке $x = p_i^{-1}(\hat{x}) \cap K_i$

и заканчивающееся в точке $f^q(x)$, $q \in \mathbb{Z}$. Тогда соответствие $[c] \mapsto q$ является нетривиальным гомоморфизмом из группы $\pi_1(\widehat{V}_i^l)$ в группу $\mathbb{Z}$. Обозначим через η_i совокупность этих гомоморфизмов для $l = 1, \dots, r_i$.

Резюмируя вышесказанное, получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4 [44]. Для любого диффеоморфизма Морса–Смейла f множество A_i (R_i) является аттрактором (репеллером), а проекция $p_i: V_i \rightarrow \widehat{V}_i$ является накрытием, индуцирующим структуру гладкого замкнутого n -многообразия на характеристическом фактормногообразии $\widehat{V}_i$ и отображение η_i , состоящее из нетривиальных гомоморфизмов $\eta_{\widehat{V}_i^l}: \pi_1(\widehat{V}_i^l) \rightarrow \mathbb{Z}$, $l = 1, \dots, r_i$.

Следующее предложение уточняет топологию введенных объектов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5 [50], [21]. 1) Если $\dim A_i \leq n - 2$ ($\dim R_i \leq n - 2$), то репеллер R_i (аттрактор A_i) является связным, и если $\dim(A_i \cup R_i) \leq n - 2$, то многообразия V_i , $\widehat{V}_i$ связны и отображение $\eta_i: \pi_1(\widehat{V}_i) \rightarrow \mathbb{Z}$ является эпиморфизмом.

2) Каждая компонента связности характеристического фактормногообразия $\widehat{V}_f$ является простым многообразием³.

Непосредственным следствием пункта 2) предложения 1.5 является, например, следующий факт.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Если диффеоморфизм Морса–Смейла $f: M^2 \rightarrow M^2$ сохраняет ориентацию, то каждая компонента связности характеристического фактормногообразия $\widehat{V}_i$ гомеоморфна двумерному тору.

Заметим, что характеристические фактормногообразия играют ключевую роль в построении инвариантов. Как мы увидим ниже, правильный выбор такого многообразия зачастую полностью решает задачу топологической классификации (включая реализацию) для некоторых классов диффеоморфизмов Морса–Смейла.

1.4. Согласованная система окрестностей. Пусть ν_i – число, равное $+1$, если $f|_{W_i^u}$ сохраняет ориентацию, и равное -1 в противном случае. Положим $L_i^u = W_i^u \setminus \mathcal{O}_i$ и обозначим через μ_i период неустойчивых сепаратрис, входящих в L_i^u ; он совпадает с периодом m_i орбиты $\mathcal{O}_i$ во всех случаях, кроме случая $j_i = 1$, $\nu_i = -1$, в котором $\mu_i = 2m_i$. Из гиперболичности периодической орбиты $\mathcal{O}_i$ и предложения 1.1 следует, что диффеоморфизм f^{m_i} на каждой компоненте связности многообразия W_i^u топологически сопряжен с растягивающей гомотетией

$$a_{j_i}^u(x_1, \dots, x_{j_i}) = (\pm 2x_1, \dots, 2x_{j_i}): \mathbb{R}^{j_i} \rightarrow \mathbb{R}^{j_i}.$$

Тогда фундаментальная область ограничения f на $W_i^u \setminus \mathcal{O}_i$ гомеоморфна многообразию $\mathbb{S}^{j_i-1} \times [0, 1]$. отождествляя границы кольца в силу диффеоморфизма $a_{j_i}^u$, мы получим многообразие $\mathbb{S}^{j_i-1} \times \mathbb{S}^1$ в ориентируемом случае и косое

³Сфера $S^{n-1} \subset M^n$ называется цилиндрически вложенной в многообразие $\widehat{V}_f$, если существует топологическое вложение $h: S^{n-1} \times [-1, +1] \rightarrow \widehat{V}_f$ такое, что $h(S^{n-1} \times \{0\}) = S^{n-1}$. Многообразие $\widehat{V}_f$ называется неприводимым, если любая цилиндрически вложенная в $\widehat{V}_f$ сфера S^{n-1} ограничивает в нем n -шар. Многообразие $\widehat{V}_f$ называется простым, если оно либо неприводимо, либо гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ или косому произведению $\mathbb{S}^{n-1}$ на $\mathbb{S}^1$.

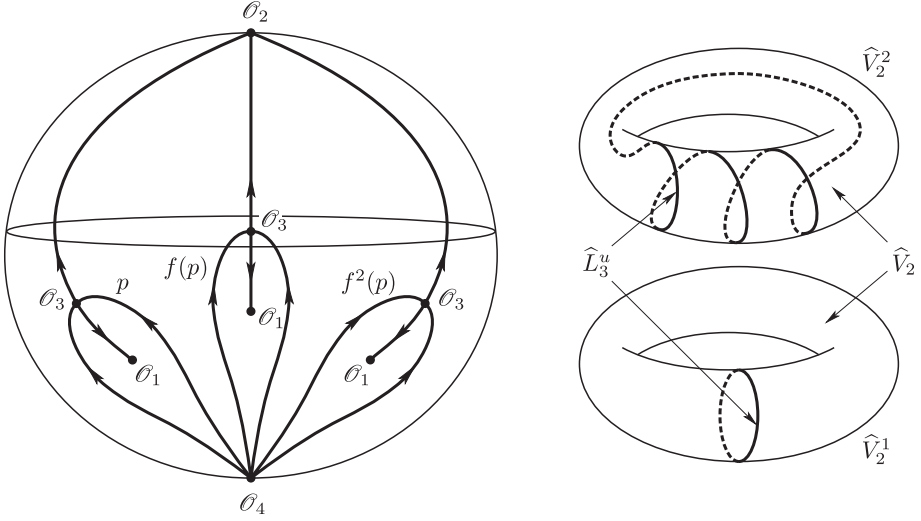


Рис. 9. Проекция $\hat{L}_3^u$ седловых сепаратрис орбиты периода 3 в пространство орбит $\hat{V}_2$ бассейнов стоков для диффеоморфизма Морса–Смейла на 2-сфере, здесь $\eta_2(e_{\hat{V}_2^1*}(\pi_1(\hat{V}_2^1))) = 3\mathbb{Z}$ и $\eta_2(e_{\hat{V}_2^2*}(\pi_1(\hat{V}_2^2))) = \mathbb{Z}$

произведение $\mathbb{S}^{j_i-1}$ на $\mathbb{S}^1$ – в неориентируемом, последнее называется j_i -мерной бутылкой Клейна. В случае $j_i = 2$ это классическая бутылка Клейна, в случае $j_i = 1$ это окружность.

Поскольку L_i^u является гладким подмногообразием многообразия V_{i-1} , то $\hat{L}_i^u = p_{i-1}(L_i^u)$ является гладким подмногообразием многообразия $\hat{V}_{i-1}$, гомеоморфным $\mathbb{S}^{j_i-1} \times \mathbb{S}^1$ в случае $\nu_i = +1$ и гомеоморфным j_i -мерной бутылке Клейна в противном случае. При этом отображение включения $e_{\hat{L}_i^u}: \hat{L}_i^u \rightarrow \hat{V}_{i-1}$ индуцирует гомоморфизм $e_{\hat{L}_i^u*}: \pi_1(\hat{L}_i^u) \rightarrow \pi_1(\hat{V}_{i-1})$ такой, что

$$\eta_{i-1}(e_{\hat{L}_i^u*}(\pi_1(\hat{L}_i^u))) = \mu_i \mathbb{Z},$$

где $\mu_i \mathbb{Z}$ – группа целых чисел, кратных μ_i (см. рис. 9).

Таким образом, $\hat{L}_i^u$ является j_i -мерным гладким замкнутым подмногообразием n -многообразия $\hat{V}_f$. Следовательно, существует его трубчатая окрестность $N(\hat{L}_i^u) \subset \hat{V}_{i-1}$, расслоенная $(n-j_i)$ -мерными дисками $\hat{F}_i^s = \{\hat{d}_i^s(\hat{x}), \hat{x} \in \hat{L}_i^u\}$. Это расслоение порождает f -инвариантное слоение

$$F_i^s = \{p_{i-1}^{-1}(\hat{d}_i^s(\hat{x})), \hat{x} \in \hat{L}_i^u\} \cup W_i^s$$

с гладкими слоями, непрерывно зависящими от точки, в f -инвариантной окрестности $N_i^u = p_{i-1}^{-1}(N(\hat{L}_i^u)) \cup W_i^s$ орбиты $\mathcal{O}_i$. Обозначим через $F_{i,x}^s$ единственный слой слоения F_i^s , проходящий через точку $x \in N_i^u$. Индуктивность построения позволяет строить текущее устойчивое слоение F_i^s согласованным с уже построенными устойчивыми слоениями $F_{i'}^s$, $i' < i$ (см. рис. 10), так, что для любой точки $x \in N_i^u \cap N_{i'}^u$

$$\left(F_{i,x}^s \cap \bigcup_{l < i} N_l^u \right) \subset F_{i',x}^s.$$

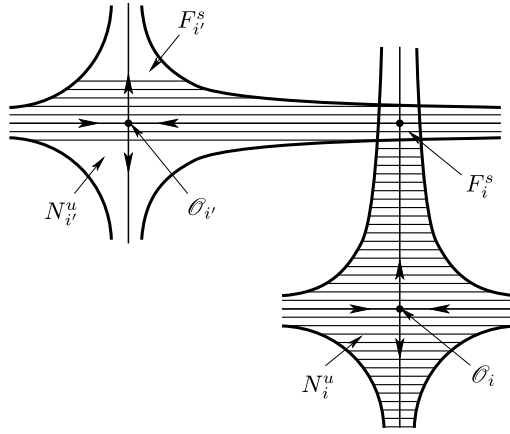


Рис. 10. Согласованные устойчивые слоения

Переходом к обратному отображению f^{-1} осуществляется построение неустойчивого согласованного слоения F_i^u в некоторой f -инвариантной окрестности N_i^s орбиты $\mathcal{O}_i$.

В силу λ -леммы 1.1 слоения F_i^u и F_i^s трансверсальны в некоторой f -инвариантной окрестности N_i орбиты $\mathcal{O}_i$. Причем эту окрестность можно выбрать так, что диффеоморфизм f в ней линеен с точностью до замены координат. Именно, рассмотрим линейный диффеоморфизм

$$a_{j_i}(x_1, \dots, x_{j_i}, x_{j_i+1}, \dots, x_n) = \left(\pm 2x_1, \dots, 2x_{j_i}, \pm \frac{x_{j_i+1}}{2}, \dots, \frac{x_n}{2} \right): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

и a_{j_i} -инвариантную окрестность

$$\mathcal{N}_{j_i} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: (x_1^2 + \dots + x_{j_i}^2)(x_{j_i+1}^2 + \dots + x_n^2) \leq 1\}$$

начала координат. Положим

$$a_{j_i, m_i}(x_1, \dots, x_n, w) = (a_{j_i}(x_1, \dots, x_n), w + 1 \sim \text{mod } m_i): \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{m_i} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}_{m_i}$$

и $\mathcal{N}_{j_i, m_i} = \mathcal{N}_{j_i} \times \mathbb{Z}_{m_i}$. Окрестность N_i назовем *линеаризующей*, если существует гомеоморфизм $\mu_i: N_i \rightarrow \mathcal{N}_{j_i, m_i}$, сопрягающий диффеоморфизм $f|_{N_i}$ с диффеоморфизмом $a_{j_i, m_i}|_{\mathcal{N}_{j_i, m_i}}$.

Из вышесказанного следует существование у любого диффеоморфизма Морса–Смейла *согласованной системы окрестностей* в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Набор N_f линеаризующих окрестностей N_i , $i = 1, \dots, k$, периодических орбит диффеоморфизма Морса–Смейла f , оснащенных парой трансверсальных слоений F_i^u , F_i^s , включающих как слои компоненты связности многообразий $W_{i_1}^u$, $W_{i_1}^s$, назовем согласованной системой окрестностей, если выполняются следующие условия:

- 1) если $W_{i_1}^s \cap W_{i_2}^u = \emptyset$ для $i_1 < i_2$, то $N_{i_1} \cap N_{i_2} = \emptyset$;
- 2) если $W_{i_1}^s \cap W_{i_2}^u \neq \emptyset$ для $i_1 < i_2$, то для любой точки $x \in N_{i_1} \cap N_{i_2}$

$$\left(F_{i_1, x}^u \cap \bigcup_{l > i_1} N_l \right) \subset F_{i_2, x}^u, \quad \left(F_{i_2, x}^s \cap \bigcup_{l < i_2} N_l \right) \subset F_{i_1, x}^s.$$

2. Одномерные системы

Окружность S^1 является единственным замкнутым одномерным многообразием. Поскольку поток Морса–Смейла на S^1 всегда имеет только конечное число траекторий, то, в силу предложений 1.1 и 1.3, динамика любого такого потока представляет собой чередование источников и стоков, число которых является полным топологическим инвариантом.

Что касается диффеоморфизмов Морса–Смейла на S^1 , то в [67] А. Г. Майер, соратник и друг А. А. Андропова, ввел понятие грубости для динамических систем с дискретным временем (каскадов) на окружности и показал, что грубые каскады на окружности также типичны и любой грубый каскад имеет только конечное число периодических точек, причем каждая такая точка гиперболическая. Для доказательства их плотности необходимо было доказывать лемму о замыкании, что впервые и было сделано А. Г. Майером [67] в 1939 г., а позже, в начале 1960-х годов, было передоказано В. А. Плиссом [91] и М. Пейшото [86]. Так как для окружности лемму о замыкании удастся доказать в любом классе гладкости (даже аналитическом), то получаем, что диффеоморфизмы Морса–Смейла всюду плотны в $\text{Diff}^r(S^1)$ для любых $1 \leq k \leq r \leq \omega$.

Описание и топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла окружности достаточно проста и также получена А. Г. Майером в работе [67]. Ниже мы приводим эти классификационные результаты в современной обработке авторов обзора.

Разобьем множество грубых каскадов окружности на два подкласса

$$\mathcal{MS}_+^r(S^1) \quad \text{и} \quad \mathcal{MS}_-^r(S^1),$$

состоящих из сохраняющих ориентацию и меняющих ориентацию диффеоморфизмов соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. 1) Для каждого диффеоморфизма $f \in \mathcal{MS}_+^r(S^1)$ непустое множество $\text{NW}(f)$ состоит из $2n$, $n \in \mathbb{N}$, периодических орбит, каждая из которых имеет период k .

2) Для каждого диффеоморфизма $f \in \mathcal{MS}_-^r(S^1)$ множество $\text{NW}(f)$ состоит из $2q$, $q \in \mathbb{N}$, периодических точек, две из которых являются неподвижными, а другие имеют период 2.

Пусть $f \in \mathcal{MS}_+^r(S^1)$. Перенумеруем периодические точки из

$$\text{NW}(f): \quad p_0, p_1, \dots, p_{2nk-1}, p_{2nk} = p_0,$$

начиная с произвольной периодической точки p_0 по часовой стрелке. Тогда существует целое число l такое, что $f(p_0) = p_{2nl}$, причем $l = 0$ для $k = 1$, $l \in \{1, \dots, k-1\}$ для $k > 1$ и числа (k, l) являются взаимно простыми⁴. Заметим,

⁴На самом деле А. Г. Майер вместо числа l использовал число r_1 (которое называл *порядковым числом*) такое, что $lr_1 \equiv 1 \pmod{k}$.

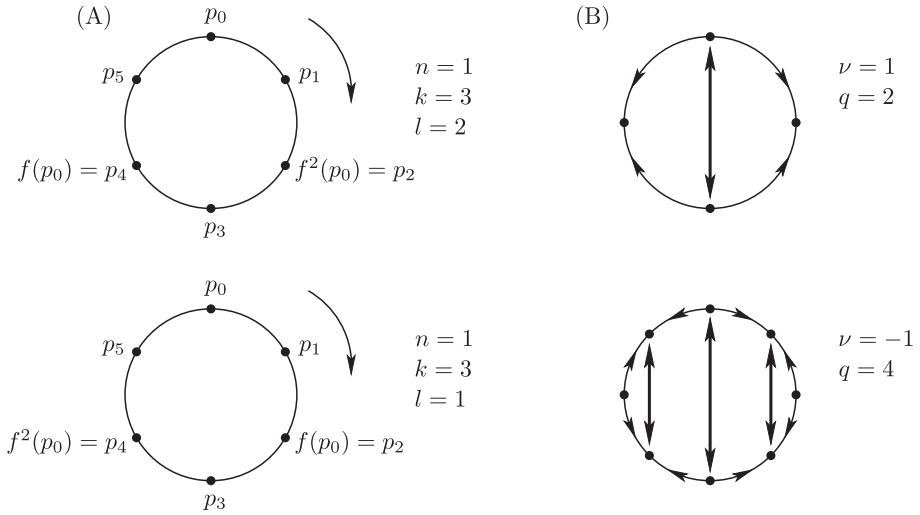


Рис. 11. Грубые преобразования окружности

что l не зависит от выбора точки p_0 (см. рис. 11, (A)). Для диффеоморфизма $f \in \mathcal{MS}^r_-(S^1)$ положим

$$\nu = -1; \quad \nu = 0; \quad \nu = +1,$$

если его неподвижные точки являются соответственно источниками; стоком и источником; стоками. Заметим, что $\nu = 0$, если q нечетное, и $\nu = \pm 1$, если q четное (см. рис. 11, (B)).

ТЕОРЕМА 2.1. 1) Два диффеоморфизма f и f' из $\mathcal{MS}^r_+(S^1)$ с параметрами n, k, l и n', k', l' соответственно топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $n = n'$, $k = k'$ и выполнено одно из следующих условий:

- (a) $l = l'$ (при этом, если $l \neq 0$, то сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию);
- (b) $l = k' - l'$ (при этом сопрягающий гомеоморфизм меняет ориентацию).

2) Два диффеоморфизма $f, f' \in \mathcal{MS}^r_-(S^1)$ с параметрами q, q' топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $q = q'$ и $\nu = \nu'$.

3. Двумерные системы

3.1. Двумерные потоки. В 1959 г. М. Пейшото [85] обобщил результаты А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина на произвольные ориентируемые замкнутые поверхности. При этом Пейшото модифицировал понятие грубости и ввел понятие *структурной устойчивости*, которое стало более популярным и употребимым. Фактически результат Пейшото дословно повторяет результат Андронова–Понтрягина о динамике структурно устойчивого потока, при этом было явно сформулировано утверждение о C^1 -типичности таких полей (у Андронова и Понтрягина это утверждение формально не выделялось). Отметим,

что Пейшото передоказал часть результатов А. Г. Майера, не зная о работе [67]. Что касается C^r -типичности потоков Морса–Смейла, то имеет место следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Множество векторных полей Морса–Смейла на замкнутой поверхности M^2 совпадает с множеством структурно устойчивых векторных полей, и оно плотно в пространстве $\Xi(M^2)$. Если поверхность M^2 ориентируемая или неориентируемая рода $1 \leq g \leq 3$, то множество C^r векторных полей Морса–Смейла совпадает с множеством C^r структурно устойчивых векторных полей для любого $r \geq 1$ и оно плотно в пространстве $\Xi^r(M^2)$.*

Для сферы $M^2 = S^2$ предложение 3.1 фактически доказано А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным [1]. Для остальных поверхностей в случае $r = 1$, а также всех ориентируемых поверхностей и проективной плоскости в случае $r \geq 1$ предложение 3.1 доказано М. Пейшото [86]. Из теоремы Арансона–Маркли [4], [68] о том, что никакой поток на бутылке Клейна не имеет нетривиально рекуррентных траекторий, вытекает справедливость предложения 3.1 для бутылки Клейна в случае $r \geq 1$. Наконец, для неориентируемой поверхности рода 3 предложение 3.1 в случае $r \geq 1$ следует из результата С. Гутierrez [56] о том, что на этой поверхности у потоков нет так называемых неориентируемых нетривиально рекуррентных траекторий.

3.1.1. Градиентно-подобные потоки. Первые результаты по топологической классификации градиентно-подобных потоков на поверхностях были получены Е. А. Леонтович и А. Г. Майером [65], [66] в рамках рассмотрения класса потоков с конечным числом особых траекторий (неподвижных точек, периодических орбит и сепаратрис) на 2-сфере. Идея классификации была основана на разбиении фазового пространства на *ячейки* – области с одинаковым асимптотическим поведением траекторий. Описание типов ячеек и их взаимное расположение составили полный топологический инвариант, названный *схемой Леонтович–Майера*, для таких потоков.

В 1973 г. М. Пейшото [87] ввел для потоков Морса–Смейла без периодических траекторий полный топологический инвариант в виде оснащенного графа⁵, обобщающего схему Леонтович–Майера. Именно, он поставил в соответствие градиентно-подобному потоку f^t (потоку Морса–Смейла без периодических траекторий) связный ориентированный граф Γ_{f^t} так, что вершины графа Γ_{f^t} соответствуют неподвижным точкам потока f^t , а ребра соответствуют седловым сепаратрисам и полагаются ориентированными согласно движению по сепаратрисе в положительном по времени направлении. Таким образом вершины графа разделены на три части: вершины источников, вершины седел и вершины стоков. Каждая седловая вершина инцидентна четырем ребрам, соответствующим четырем сепаратрисам. В силу предложения 1.3, все ребра направлены от источниковой вершины в седловую или из седловой в стоковую (см. рис. 12).

⁵В действительности М. Пейшото рассматривал произвольные потоки Морса–Смейла, но его инвариант содержит неточность при наличии у потока периодических орбит.

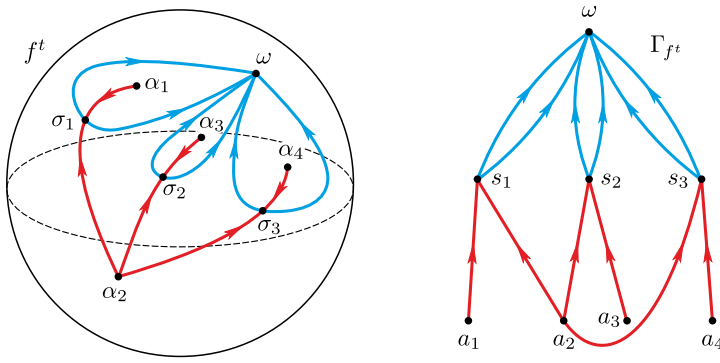


Рис. 12. Градиентно-подобный поток и его ориентированный граф

Ясно, что топологически эквивалентные системы Морса–Смейла должны иметь изоморфные ориентированные графы. Оказалось, что обратное неверно, М. Пейшото [87] построил топологически не эквивалентные градиентно-подобные потоки на 2-сфере с изоморфными ориентированными графами (кроме оригинальной работы [87], см., например, [81], а также рис. 13).

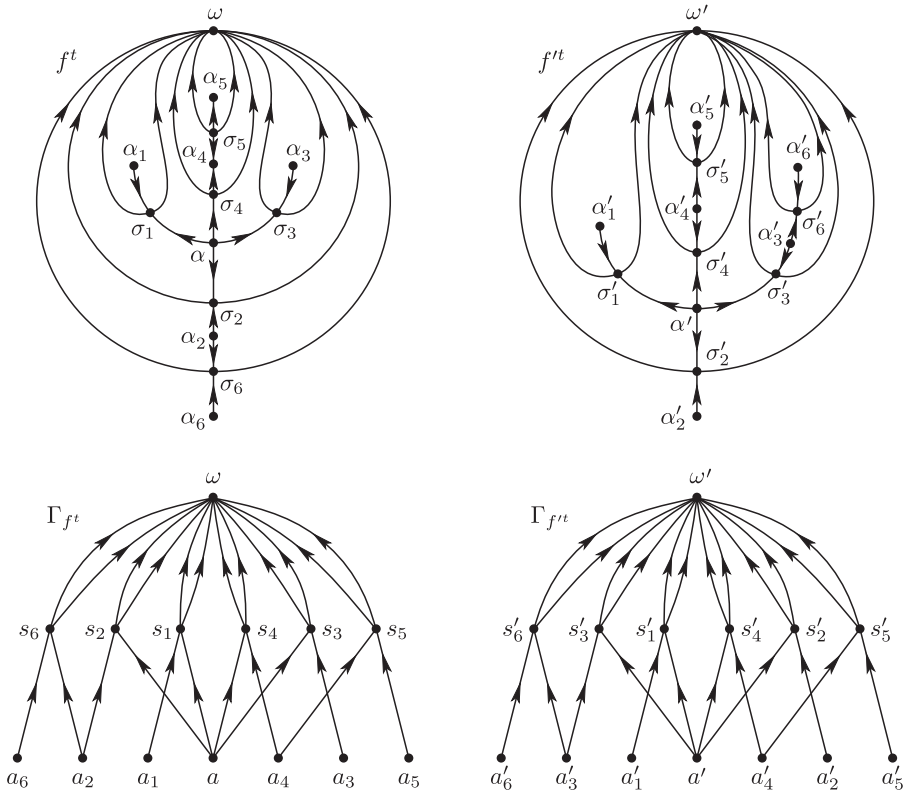


Рис. 13. Пример Пейшото

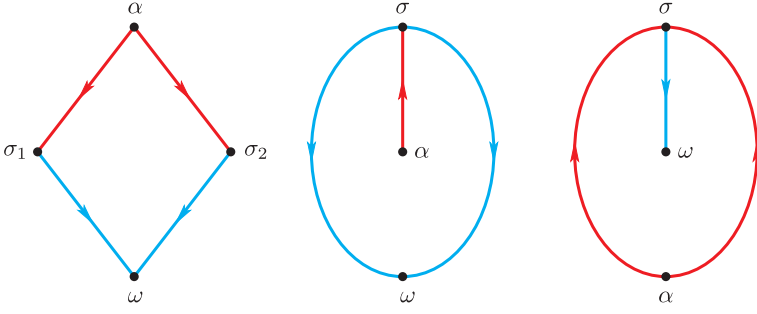


Рис. 14. Типы ячеек градиентно-подобного потока

Поэтому Пейшото добавил к графу Γ_{f^t} информацию о так называемых различающих множествах и получил оснащенный граф $\Gamma_{f^t}^P$, который уже является полным топологическим инвариантом. Чтобы определить различающее множество, рассмотрим множество

$$M^2 \setminus \bigcup_{\sigma \in \Omega^1} (\text{cl}(W_\sigma^u) \cup \text{cl}(W_\sigma^s)).$$

Замыкание любой компоненты связности этого множества называется *ячейкой* и, в силу предложения 1.1, имеет один из типов, изображенных на рис. 14.

Различающим множеством называется подграф графа Γ_{f^t} , соответствующий границе ячейки (см. рис. 15).

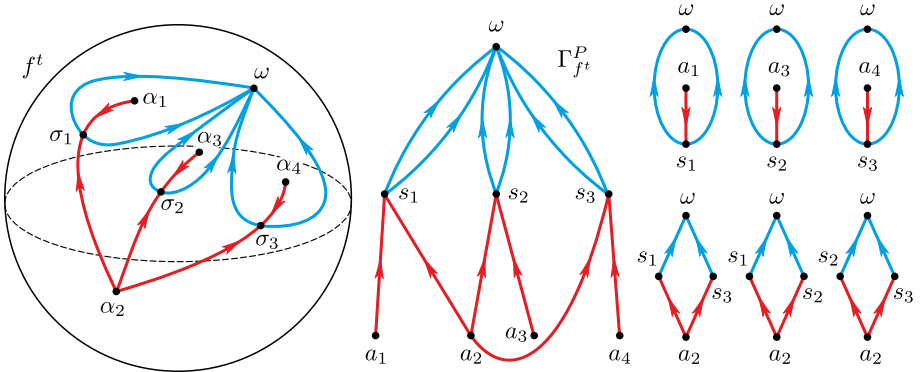


Рис. 15. Различающий граф Пейшото

Два графа Пейшото $\Gamma_{f^t}^P$ и $\Gamma_{f^{t'}}^P$ градиентно-подобных потоков f^t и $f^{t'}$ соответственно называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм, сохраняющий различающие множества.

ТЕОРЕМА 3.1 [87; предложение 4.4]. *Два градиентно-подобных потока $f^t, f^{t'}$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их графы Пейшото $\Gamma_{f^t}^P, \Gamma_{f^{t'}}^P$ изоморфны.*

Отметим, что имеются другие формы полного топологического инварианта таких потоков, которые по духу соответствуют оснащённому графу Пейшото

(см., например, [79], [107]). Кроме того, для *градиентно-подобных* потоков все известные на сегодняшний день инварианты и различающие их алгоритмы описаны, например, в обзоре [62].

Полный топологический инвариант для произвольных потоков Морса–Смейла на замкнутых поверхностях был построен А. А. Ошемковым и В. В. Шарко [81] (см. также [43]). Ниже мы описываем обобщение этого инварианта на класс Ω -устойчивых потоков, полученное В. Е. Кругловым, Д. С. Малышевым и О. В. Починкой [61].

3.1.2. Ω -устойчивые потоки. В этом пункте ϕ^t есть Ω -устойчивый поток, заданный на замкнутой поверхности M^2 . Напомним, что поток ϕ^t называется *Ω -устойчивым*, если существует его окрестность $U(\phi^t)$ в $C^1(S \times \mathbb{R}, M^2)$ такая, что если $\phi^{t'} \in U(\phi^t)$, то потоки ϕ^t и $\phi^{t'}$ топологически эквивалентны на неблуждающих множествах $NW(\phi^t)$ и $NW(\phi^{t'})$, т. е. существует гомеоморфизм $h: M^2 \rightarrow M^2$, переводящий неблуждающие траектории потока ϕ^t в неблуждающие траектории потока $\phi^{t'}$ с сохранением направления движения по траекториям.

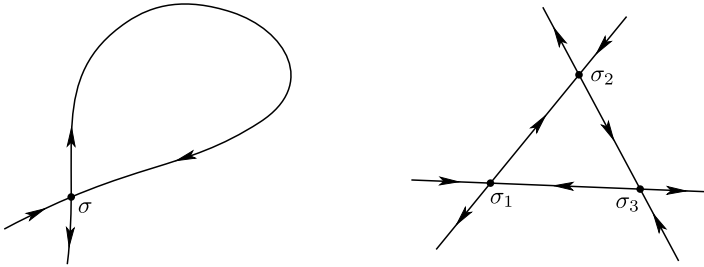


Рис. 16. Цикл из седловых точек потока

Из критерия Ω -устойчивости [94] следует, что ϕ^t имеет неблуждающее множество, состоящее из конечного числа гиперболических периодических орбит и конечного числа неподвижных гиперболических точек, не образующих *циклов* (см. рис. 16), т. е. наборов неподвижных точек

$$\sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+1} = \sigma_1$$

со свойством

$$W_{\sigma_i}^s \cap W_{\sigma_{i+1}}^u \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, k.$$

При этом поток ϕ^t может быть структурно устойчивым, а может и нет, и определяется это отсутствием или наличием *связок* – сепаратрис, идущих из седла в седло. Однако для Ω -устойчивых потоков справедливо предложение 1.1, а предложение 1.3 имеет место с точностью до замены равенства на включение

$$\text{cl}(\ell_p^u) \setminus (\ell_p^u \cup p) \subset \bigcup_{r \in NW(\phi^t): \ell_p^u \cap W_r^s \neq \emptyset} W_r^u$$

для любой неустойчивой сепаратрисы ℓ_p^u неподвижной точки $p \in NW(\phi^t)$. Поэтому топологическая классификация таких потоков по-прежнему допускает

комбинаторное описание. Подобно графу Пейшото, полным топологическим инвариантом для потоков рассматриваемого класса является класс изоморфности оснащенного ориентированного графа.

Ориентированный граф. Чтобы построить такой граф для потока ϕ^t , напомним, что любая периодическая траектория c потока ϕ^t имеет окрестность U_c , не пересекающуюся с другими предельными циклами и неподвижными точками. При этом она, в зависимости от ее скрученности, гомеоморфна двумерному кольцу или пленке Мёбиуса, а ее граница R_c трансверсальна траекториям потока.

Положим

$$\mathcal{R} = \bigcup_{c \in \Omega_{\phi^t}^3} R_c$$

и назовем замыкание любой компоненты связности множества $M^2 \setminus \mathcal{R}$ *элементарной областью*. В силу предложения 1.1, элементарная область может иметь один из следующих четырех типов в зависимости от того, какую часть неблуждающего множества она содержит:

- 1) $\mathcal{L}$ -область – содержит в точности один предельный цикл;
- 2) $\mathcal{A}$ -область – содержит в точности один источник или один сток;
- 3) $\mathcal{M}$ -область – содержит по крайней мере одну седловую точку;
- 4) $\mathcal{E}$ -область – не пересекается с неблуждающим множеством.

Теперь построим ориентированный граф Υ_{ϕ^t} следующим образом:

- (1) вершины графа Υ_{ϕ^t} соответствуют элементарным областям потока ϕ^t ;
- (2) каждое ориентированное ребро графа Υ_{ϕ^t} , соединяющее вершину a с вершиной b , соответствует окружности $R \subset \mathcal{R}$, которая является общей границей элементарных областей A и B , соответствующих a и b так, что траектории ϕ^t , пересекающие R , ориентированы от A к B (см. рис. 17).

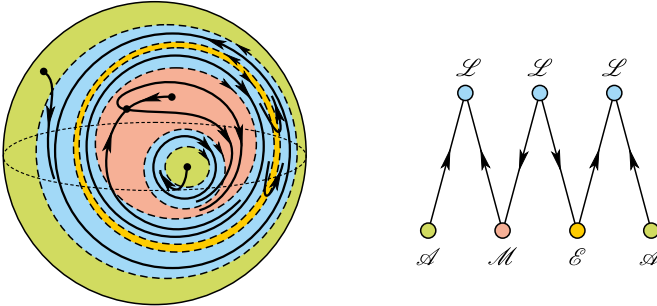


Рис. 17. Поток ϕ^t и его оснащенный граф Υ_{ϕ^t}

Поясним, как оснастить ориентированный граф Υ_{ϕ^t} , чтобы он стал полным топологическим инвариантом в рассматриваемом классе.

Оснащенный граф. Поток в $\mathcal{E}$ -области может принадлежать одному из двух классов эквивалентности, представители которых изображены на рис. 18. Мы будем приписывать соответствующей вершине вес “+”, если динамика эквивалентна потоку слева, и вес “−” в противном случае.

Каждую $\mathcal{M}$ -вершину мы оснастим четырехцветным графом. Для этого заметим, что соответствующая $\mathcal{M}$ -область является либо поверхностью с краем,

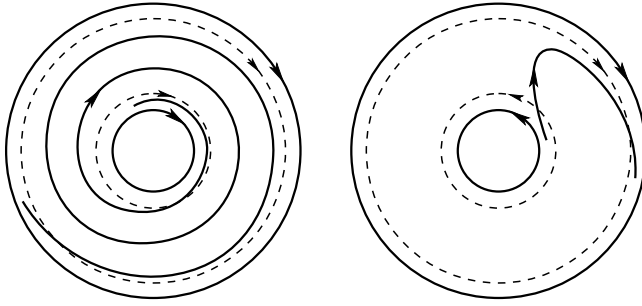


Рис. 18. Два типа потоков в области

либо замкнутой поверхностью. В первом случае присоединим к границе области объединение D попарно непересекающихся дисков так, чтобы получилась замкнутая поверхность S , и продолжим поток $\phi^t|_{\mathcal{M}}$ до Ω -устойчивого потока $f^t: M \rightarrow M$ так, чтобы f^t совпадал с ϕ^t вне D и Ω_{f^t} имел в точности одну неподвижную точку (сток или источник) в каждой компоненте D . Во втором случае просто положим $S = \mathcal{M}$ и $f^t = \phi^t$. Рассмотрим ячейки потока f^t , т. е. замыкания компонент связности множества

$$S \setminus (\Omega^0 \cup W_{\Omega^1}^s \cup W_{\Omega^1}^u \cup \Omega^2).$$

Как и в градиентно-подобном случае, каждая ячейка J содержит в точности один сток ω и один источник α в своей границе и все внутренние траектории ячейки идут из α в ω . Выберем по одной внутренней траектории к каждой ячейке, назовем ее t -кривой и обозначим через $\mathcal{T}$ их объединение. Назовем s -кривыми седловые связки, u -кривыми – неустойчивые сепаратрисы, не являющиеся связками, и s -кривыми – устойчивые сепаратрисы, не являющиеся связками. Назовем замыкание компоненты связности множества

$$S \setminus (\Omega^0 \cup W_{\Omega^1}^s \cup W_{\Omega^1}^u \cup \Omega^2 \cup \mathcal{T})$$

многоугольной областью. В силу предложений 1.1 и 1.3, каждая многоугольная область гомеоморфна двумерному диску, граница которого состоит из одной t -кривой, одной u -кривой, одной s -кривой и конечного (возможно, пустого) множества s -кривых (см. рис. 19). Границу каждой многоугольной области

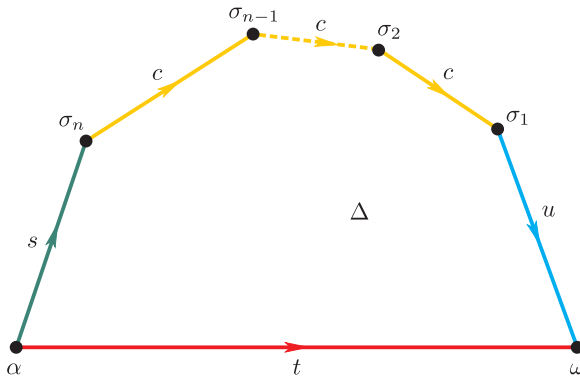
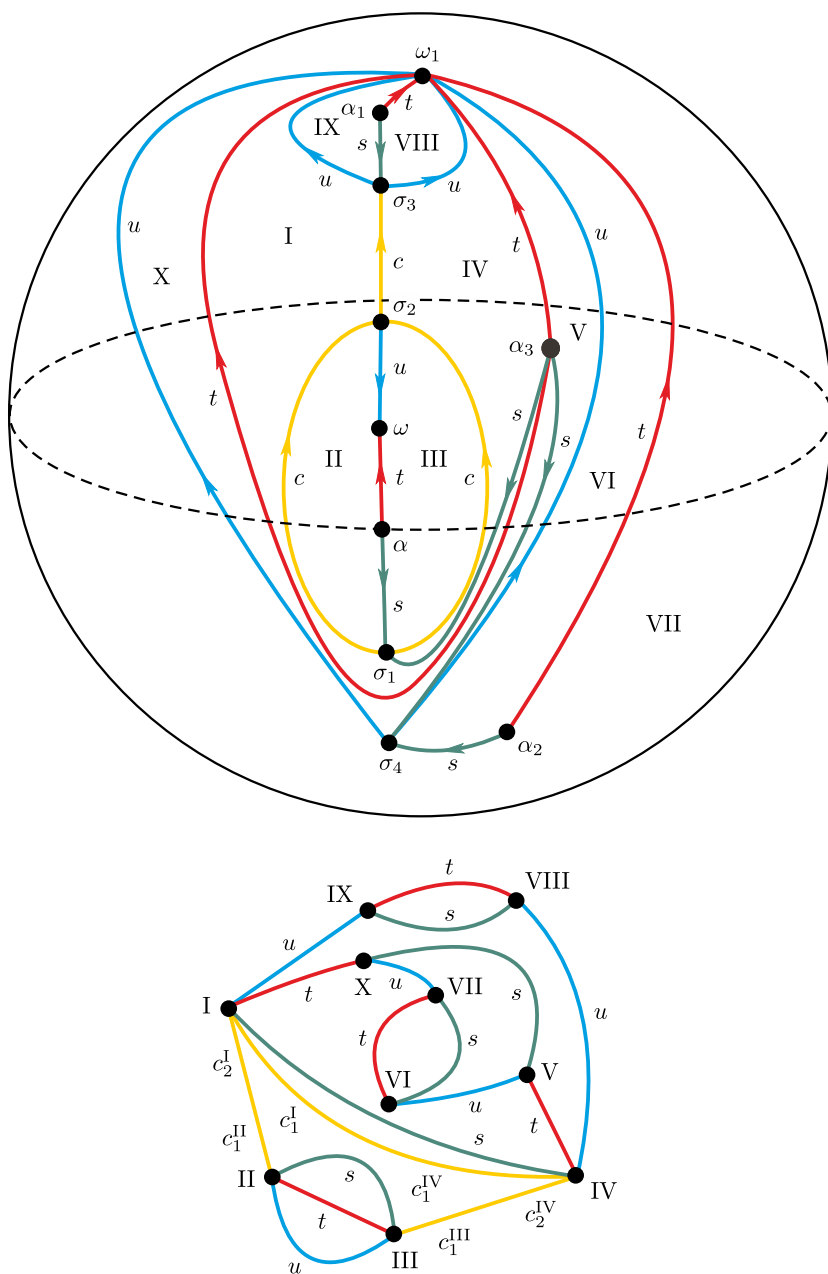


Рис. 19. Многоугольная область


 Рис. 20. Пример потока f^t и его четырехцветный граф

будем считать ориентированной соответственно движению по t -кривой от источника к стоку.

Поставим в соответствие потоку $\phi^t|_{\mathcal{M}}$ четырехцветный (s, t, u, c) граф $\Gamma_{\mathcal{M}}$ следующим образом (см. рис. 20):

1) вершины графа взаимно однозначно соответствуют многоугольным областям;

2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s, t, u или c , если соответствующие этим вершинам многоугольные области содержат в своих замыканиях общую s -, t -, u - или c -кривую;

3) при наличии более одного c -ребра, выходящего из некоторой вершины b графа, c -ребра считаются упорядоченными согласно прохождению соответствующих сепаратрис при обходе границы соответствующей области.

В силу вложимости четырехцветного графа в несущую поверхность, нетрудно заметить, что каждому tu -циклу (ts -циклу) графа соответствует сток (источник), в бассейне которого цикл лежит. В свою очередь каждому стоку (источнику) на дисках D соответствует ребро $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ ($(\mathcal{L}, \mathcal{M})$) ориентированного графа Υ_{ϕ^t} . Таким образом, каждому такому ребру соответствует цикл четырехцветного графа; обозначим его $\tau_{\mathcal{M}, \mathcal{L}}$ ($\tau_{\mathcal{L}, \mathcal{M}}$) и ориентируем его согласованно с соответствующим предельным циклом.

Будем называть ориентированный граф Υ_{ϕ^t} *оснащенным* и обозначать его через $\Upsilon_{\phi^t}^*$, если:

- (1) каждая $\mathcal{E}$ -вершина оснащена весом “+” или “-”;
- (2) каждая $\mathcal{M}$ -вершина оснащена четырехцветным графом $\Gamma_{\mathcal{M}}$;
- (3) каждое ребро $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ ($(\mathcal{L}, \mathcal{M})$) оснащено ориентированным tu -циклом (st -циклом) $\tau_{\mathcal{M}, \mathcal{L}}$ ($\tau_{\mathcal{L}, \mathcal{M}}$) графа $\Gamma_{\mathcal{M}}$ (см. рис. 21).

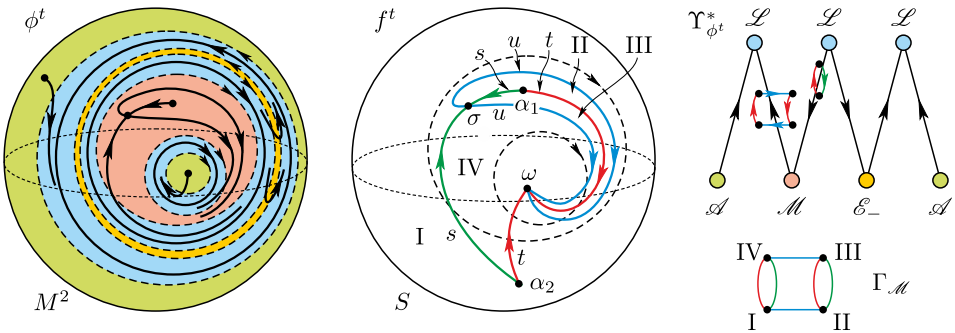


Рис. 21. Оснащенный граф потока ϕ^t

Оснащенные графы $\Upsilon_{\phi^t}^*$ и $\Upsilon_{\phi^{t'}}^*$ называются *изоморфными*, если существует изоморфизм ξ ориентированных графов $\Upsilon_{\phi^t}^*$ и $\Upsilon_{\phi^{t'}}^*$, сохраняющий их оснащение в следующем смысле:

- (1) веса вершин $\mathcal{E}$ и $\xi(\mathcal{E})$ равны;
- (2) для вершин $\mathcal{M}$ и $\xi(\mathcal{M})$ существует изоморфизм $\psi_{\mathcal{M}}$ четырехцветных графов $\Gamma_{\mathcal{M}}$, $\Gamma_{\xi(\mathcal{M})}$ со следующими свойствами: $\psi_{\mathcal{M}}(\tau_{\mathcal{M}, \mathcal{L}}) = \tau_{\xi(\mathcal{M}), \xi(\mathcal{L})}$ и ориентации циклов $\psi_{\mathcal{M}}(\tau_{\mathcal{M}, \mathcal{L}})$ и $\tau_{\xi(\mathcal{M}), \xi(\mathcal{L})}$ совпадают (аналогично для $\tau_{\mathcal{L}, \mathcal{M}}$).

ТЕОРЕМА 3.2 [61; теорема 5.3]. *Потоки $\phi^t, \phi^{t'}$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их оснащенные графы $\Upsilon_{\phi^t}^*, \Upsilon_{\phi^{t'}}^*$ изоморфны.*

В работе [61] также решена проблема реализации Ω -устойчивых диффеоморфизмов поверхностей по абстрактному оснащённому графу и найден эффективный алгоритм⁶, устанавливающий изоморфность графов.

3.2. Двумерные диффеоморфизмы. Как уже упоминалось выше, диффеоморфизмы Морса–Смейла на поверхностях – не единственные структурно устойчивые системы. С шестидесятых годов прошлого столетия хорошо известны примеры структурно устойчивой хаотической динамики: подкова Смейла, диффеоморфизм Аносова, аттрактор Плыкина и др. При этом каскады Морса–Смейла продолжают играть в динамике важную роль, будучи так называемыми “простейшими” представителями класса грубых систем. Однако столь просто описываемая динамика в действительности весьма нетривиальна даже на поверхностях, если допустить наличие гетероклинических точек.

Поскольку гетероклинические точки образованы пересечением инвариантных многообразий седловых орбит, то топологический тип этого пересечения является инвариантом системы. Для соседних седел в максимальной цепочке гетероклиническое пересечение состоит из конечного числа орбит и его условно можно изобразить сигнатурой и даже описать комбинаторно в виде подстановки, введенной В. З. Гринесом [34] и содержащей две нумерации гетероклинических орбит, соответствующие их появлению на двух седловых сепаратрисах, участвующих в гетероклиническом пересечении (см. рис. 22).

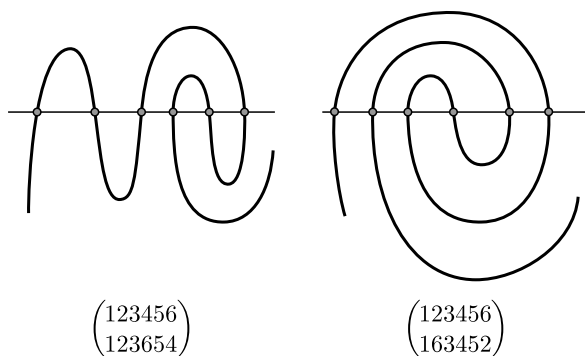


Рис. 22. Примеры сигнатур гетероклинического пересечения с подстановками

Однако, как будет показано ниже, даже в случае конечного числа гетероклинических орбит совпадение гетероклинических подстановок еще не гарантирует существование сопрягающего гомеоморфизма. Для седел, не являющихся соседними в цепочке, гетероклиническое пересечение состоит уже из

⁶Понятие *эффективно разрешимой задачи* восходит к работе А. Кобхама [28], в которой утверждается, что вычислительная проблема может быть рассчитана на некотором устройстве только в том случае, если ее можно вычислить за время, ограниченное полиномом от параметра, представляющего длину входных данных. На сегодняшний день не известна сложность общей проблемы изоморфизма графов. Однако графы, используемые в приведенных критериях, не являются графами общего типа, они обладают своеобразными комбинаторными свойствами, позволяющими различать их изоморфность за полиномиальное время.

счетного числа орбит, сигнатура которых не поддается комбинаторному описанию. Поэтому решение задачи классификации (с точностью до топологической сопряженности) диффеоморфизмов Морса–Смейла на поверхностях естественно начать с *градиентно-подобных диффеоморфизмов* – диффеоморфизмов Морса–Смейла без гетероклинических точек.

3.2.1. Градиентно-подобные диффеоморфизмы. Динамика градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхностях принципиально схожа с динамикой одноименных потоков, с той лишь разницей, что диффеоморфизмы допускают периодические перестановки ячеек. Поэтому естественно использовать для классификации каскадов модификации комбинаторных инвариантов потоков. Так, аналог графа Пейшото – различающий ориентированный граф с подстановкой на множестве вершин и ребер, соответствующей периодическим данным градиентно-подобного диффеоморфизма, – был использован в качестве полного топологического инварианта А. Н. Безденежных и В.З. Гринесом в работах [10], [11]. Исчерпывающая классификация (включающая реализацию) градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхностях была получена В.З. Гринесом, С.Х. Капкаевой, О.В. Починкой в работе [42] на языке трехцветных (s, t, u) графов, оснащенных периодическим автоморфизмом, – аналогов графа Ошемкова–Шарко (см. рис. 23).

Следует отметить тесную взаимосвязь топологической классификации градиентно-подобных диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей с класси-

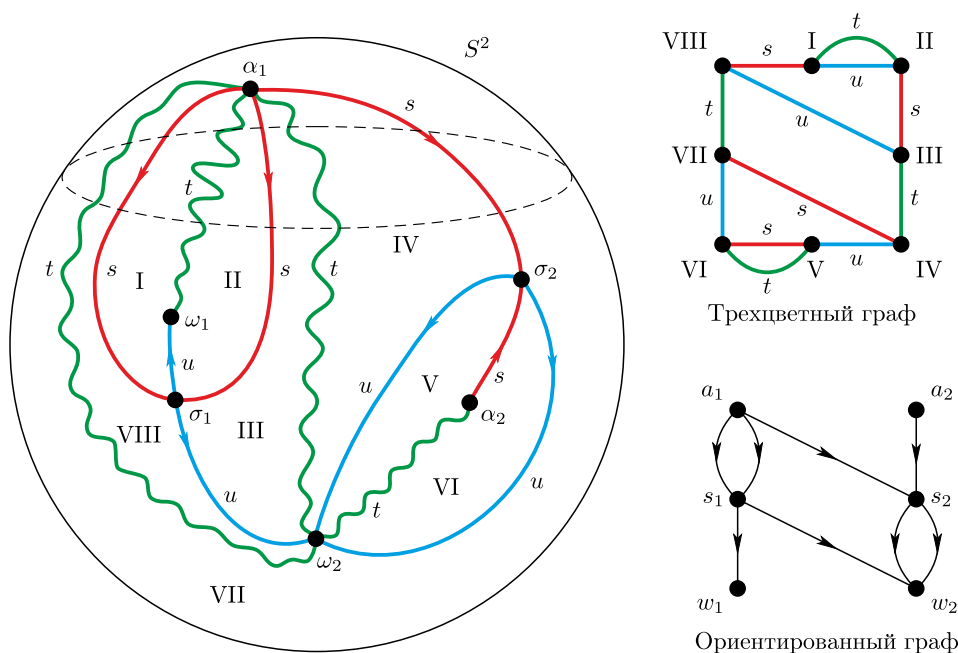


Рис. 23. Пример градиентно-подобного диффеоморфизма на сфере S^2 , его ориентированный и трехцветный графы

фикаций периодических преобразований и градиентно-подобных потоков на поверхностях.

Пусть $f: M^2 \rightarrow M^2$ – сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм ориентируемого двумерного многообразия M^2 , а ν – минимальное натуральное число, при котором все компоненты связности множества $M \setminus (W_{\Omega^1}^u \cup W_{\Omega^1}^s) \cup (\Omega^0 \cup \Omega^2)$ являются компонентами инвариантного типа для f^ν .

Напомним, что гомеоморфизм $g: M^n \rightarrow M^n$ называется *периодическим* периода $\nu \in \mathbb{N}$, если $g^\nu = \text{id}$ и $g^i \neq \text{id}$ для любого $1 < i < \nu$. Обозначим через $P_\nu(M^2)$ множество всех сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов M^2 периода ν на M^2 . Дж. Нильсеном [78] найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности гомеоморфизмов из $P_\nu(M^2)$ и показано, что число классов топологической сопряженности этих гомеоморфизмов конечно для каждого натурального ν . К. Йокоямой [108] предъявлен алгоритм нахождения этого числа и предложена конструкция построения в каждом гомотопическом классе стандартного представителя из данного класса топологической сопряженности.

В работах А. Н. Безденежных и В. З. Гринеса [11], [10] (подробное изложение имеется также в [44; ч. 3]) для каждого диффеоморфизма $g \in P_\nu(M^2)$ на модульной поверхности $N = M^2/g$ (N – пространство орбит действия диффеоморфизма g на M^2) строится множество $\Phi(g)$ стандартных потоков на N таких, что множество $\hat{\Phi}(g)$ потоков на M^2 , накрывающих потоки из $\Phi(g)$, состоит из градиентно-подобных потоков. Далее рассматривается множество $\theta(M^2, g)$ градиентно-подобных диффеоморфизмов, полученных суперпозицией диффеоморфизма g и сдвига на единицу времени по траекториям потоков из $\Phi(g)$.

Положим

$$\theta(M^2) = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \bigcup_{g \in P_\nu(M^2)} \theta(M^2, g).$$

ТЕОРЕМА 3.3 [10]. *Для любого сохраняющего ориентацию градиентно-подобного диффеоморфизма f многообразия M^2 существует диффеоморфизм $\tilde{f} \in \theta(M^2)$, топологически сопряженный с f .*

3.2.2. Диффеоморфизмы Морса–Смейла с конечным числом гетероклинических орбит. В. З. Гринес в работе [34] доказал, что для диффеоморфизмов Морса–Смейла f с конечным числом гетероклинических орбит полным топологическим инвариантом вновь является некая модификация графа Пейшото. Именно, если из несущей поверхности M^2 удалить замыкания всех седловых сепаратрис, не участвующих в гетероклинических пересечениях, то компонентами связности полученного множества будут кроме ячеек еще и *гетероклинические области* – открытые кольца или диски, содержащие гетероклинические точки. Добавив к ориентированному графу Пейшото эту область в качестве вершины H , а лежащие в ней сепаратрисы в качестве ориентированных ребер, инцидентных этой вершине, мы получим искомый ориентированный граф (см. рис. 24). Оснащение этого графа подграфами Пейшото, соответствующими ячейкам, изоморфизмом, соответствующим периодическим данным, а также комбинаторной информацией о пересечении сепаратрис в гетероклинических областях делает его полным топологическим инвариантом.

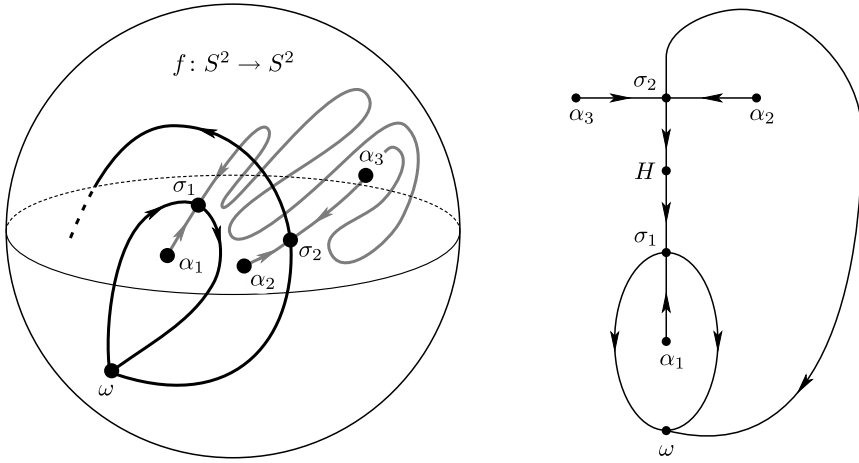


Рис. 24. Модификация графа Пейшото для диффеоморфизма Морса–Смейла с конечным числом гетероклинических орбит на сфере S^2

Чтобы объяснить, что в себя включает комбинаторная информация о гетероклиническом пересечении, приведем еще один полный топологический инвариант для рассматриваемых диффеоморфизмов, восходящий к работе Р. Ланжевена [63] и доведенный до классификационных результатов в работах В.З. Гринеса, Т.М. Митряковой и О.В. Починки [46], [75].

Упорядочим периодические орбиты диффеоморфизма f : $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_k$ так, что сначала идут все стоковые орбиты (обозначим их число через k^s), затем все седловые орбиты, чьи неустойчивые многообразия не содержат гетероклинических точек (обозначим их число через m^s), далее все остальные седловые орбиты (обозначим их число через m^u) и, наконец, все источниковые орбиты (обозначим их число через k^u). Заметим, что введенный на множестве неподвижных точек порядок согласуется с отношением частичного порядка С. Смейла и индексом Морса.

В обозначениях п. 1.3 положим

$$A_f = A_{k^s+m^s}, \quad R_f = R_{k^s+m^s}, \quad V_f = V_{k^s+m^s}, \quad \widehat{V}_f = \widehat{V}_{k^s+m^s}.$$

Согласно предложению 1.4, множества A_f и R_f являются аттрактором и репеллером соответственно, а множество V_f является двумерным многообразием и состоит из конечного числа компонент связности. В силу следствия 1.1, характеристическое фактормногообразие $\widehat{V}_f$ состоит из конечного числа копий двумерного тора, а естественная проекция $p_f: V_f \rightarrow \widehat{V}_f$ является накрытием, индуцирующим отображение η_f , составленное из эпиморфизмов в группу $\mathbb{Z}$, действующих на фундаментальных группах торов множества $\widehat{V}_f$.

Положим

$$\hat{L}_f^s = \bigcup_{i=k^s+1}^{k^s+m^s} p_f(L_i^s), \quad \hat{L}_f^u = \bigcup_{i=k^s+m^s+1}^{k-k^u} p_f(L_i^u).$$

Набор $S_f = (\widehat{V}_f, \eta_f, \hat{L}_f^s, \hat{L}_f^u)$ называется *схемой* диффеоморфизма f (см. рис. 25).

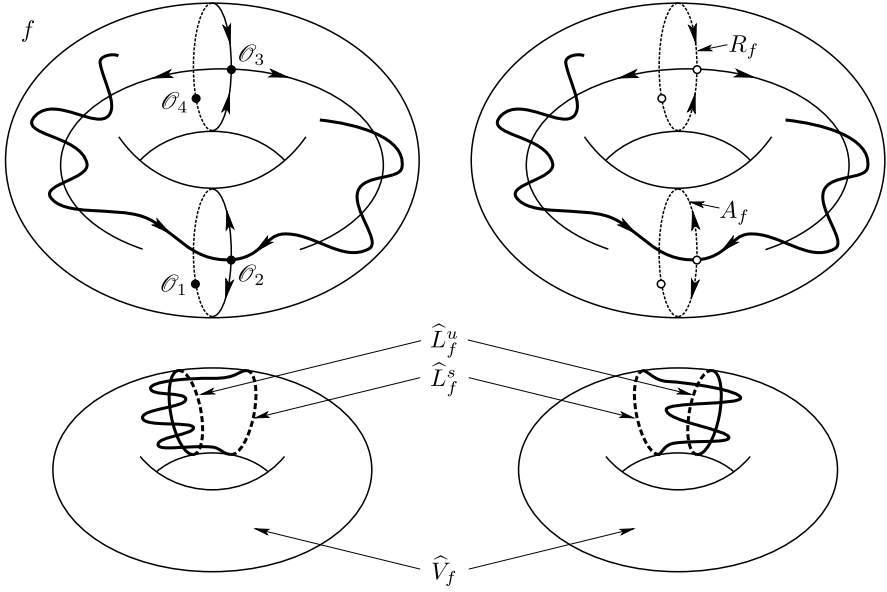


Рис. 25. Схема диффеоморфизма Морса–Смейла с конечным числом гетероклинических орбит на двумерном торе

Схемы $S_f, S_{f'}$ диффеоморфизмов f, f' называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi}: \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$ такой, что

(а) $\eta_f = \eta_{f'} \hat{\varphi}_*$;

(б) $\hat{\varphi}(\hat{L}_f^u) = \hat{L}_{f'}^u, \hat{\varphi}(\hat{L}_f^s) = \hat{L}_{f'}^s$;

(с) существует поднятие $\varphi: V_f \rightarrow V_{f'}$ гомеоморфизма $\hat{\varphi}$ такое, что для каждой седловой точки $\sigma \in \text{NW}(f)$ существует седловая точка $\sigma' \in \text{NW}(f')$ такая, что

$$\begin{aligned} \varphi(W_\sigma^u \setminus \sigma) &= W_{\sigma'}^u \setminus \sigma' \quad \text{для } i \in \{k^s + 1, \dots, k^s + m^s\}, \\ \varphi(W_\sigma^s \setminus \sigma) &= W_{\sigma'}^s \setminus \sigma' \quad \text{для } i \in \{k^s + m^s + 1, \dots, k - k^u\}. \end{aligned}$$

Заметим, что поднятие φ существует всегда, а условие (с) для него проверяется на конечном числе точек, по одной на каждой седловой сепаратрисе. При этом, если одно из поднятий удовлетворяет условию (с), то все остальные поднятия ему тоже удовлетворяют. Более того, условие (с) выполняется автоматически, если седловые точки являются неподвижными.

Если же диффеоморфизм имеет периодические седловые точки, то условий (а) и (б) может оказаться недостаточно для построения сопрягающего гомеоморфизма. Так, на рис. 26 изображены многоугольники, отождествление пар сторон с одинаковыми седловыми точками каждого из них задает поверхность и градиентно-подобный диффеоморфизм на ней. Геометрические составляющие схем этих диффеоморфизмов эквивалентны, а сами системы отличаются лишь расположением пар седловых сепаратрис в бассейне стока. Однако несущая поверхность диффеоморфизма слева является сферой, справа – тором.

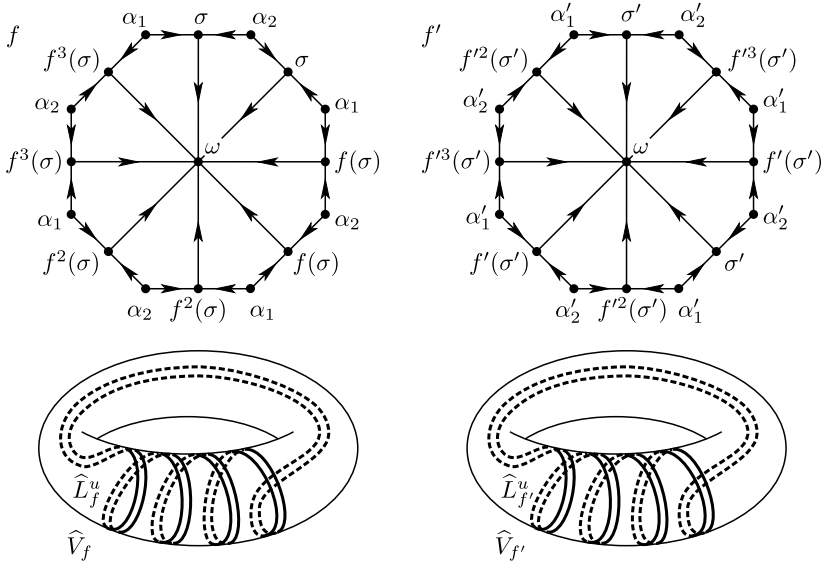


Рис. 26. Несопряженные диффеоморфизмы с эквивалентными геометрическими составляющими схем

ТЕОРЕМА 3.4 [75]. *Диффеоморфизмы f, f' топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.*

Комбинаторная информация о гетероклиническом пересечении состоит из гетероклинической подстановки, которая в фактормногообразии определяется следующим образом. Каждая кривая в паре пересекающихся замкнутых кривых $\hat{\ell}^u \subset \hat{L}_f^u$, $\hat{\ell}^s \subset \hat{L}_f^s$ имеет положительное направление обхода, выраженное условием $\eta_f([\hat{\ell}^u]) > 0$, $\eta_f([\hat{\ell}^s]) > 0$. Тогда нумерации $(1, \dots, r)$ точек пересечения этих кривых в порядке их появления на ориентированной кривой $\hat{\ell}^u$ соответствует перестановка $(i_1, \dots, i_r)$ этих номеров, соответствующая порядку их появления на ориентированной кривой $\hat{\ell}^s$.

К подстановке необходимо добавить информацию об индексе пересечения в точках $\hat{\ell}^u \cap \hat{\ell}^s$, а также гомотопический тип замкнутых кривых $\hat{c}_{i_l, i_{l+1}}$, $i = 1, \dots, r-1$, выраженный числом $\nu_{i_l, i_{l+1}} = \eta_f([\hat{c}_{i_l, i_{l+1}}])$. Кривая $\hat{c}_{i_l, i_{l+1}}$ составляется из двух положительно ориентированных дуг с началом в точке i_1 и концом в точке i_2 , взятых на $\hat{\ell}^u$, $\hat{\ell}^s$ соответственно, ориентация на кривой $\hat{c}_{i_l, i_{l+1}}$ индуцируется с кривой $\hat{\ell}^u$ (см. рис. 27).

На рис. 27 изображены фазовые портреты диффеоморфизмов f, f' и их схемы. Неэквивалентность схем $S_f, S_{f'}$, в частности, следует из неизоморфности комбинаторной информации о гетероклиническом пересечении. Оба диффеоморфизма имеют тождественную гетероклиническую подстановку и одинаковые индексы в точках пересечения кривых. Различие состоит в наборе чисел $(\nu_{1,2}, \nu_{2,3}, \nu_{3,4})$, который у диффеоморфизма f имеет вид $(0, 0, 0)$, а у f' имеет вид $(0, 1, 0)$.

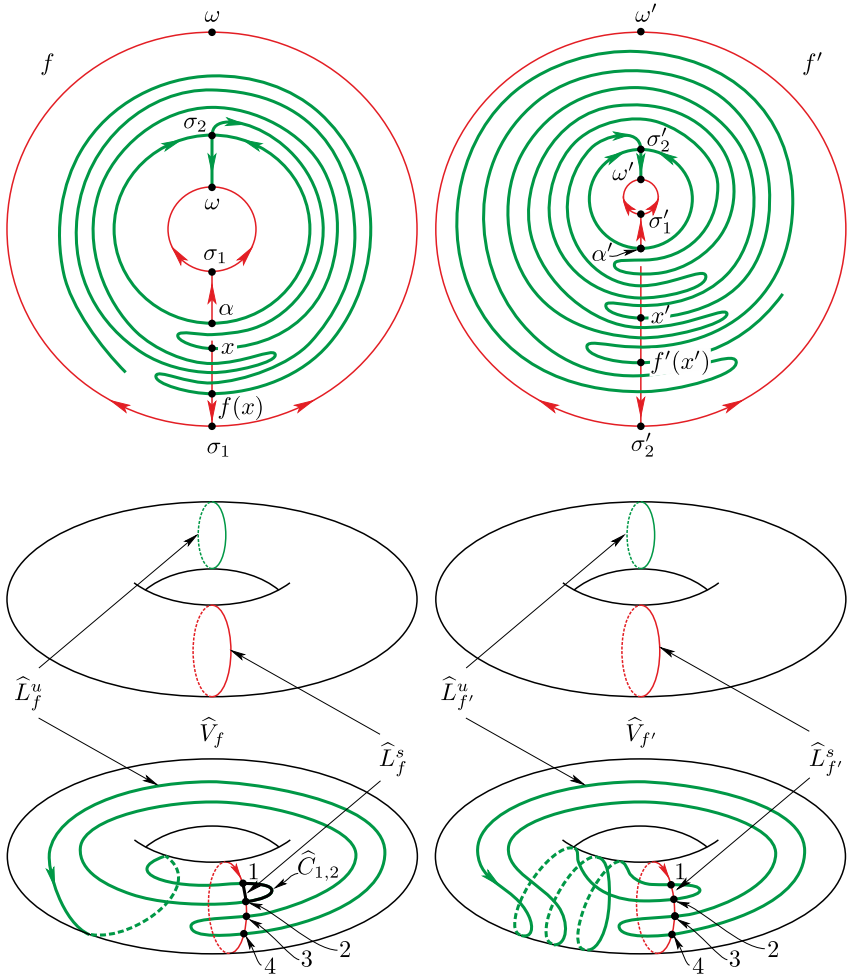


Рис. 27. Несопряженные диффеоморфизмы с одинаковыми гетероклическими подстановками

3.2.3. *Общий случай.* И. Ю. Власенко [104] описал идею комбинаторного подхода к построению полного топологического инварианта для произвольных диффеоморфизмов Морса–Смейла на поверхностях, однако он не опубликовал достаточное для понимания авторов обзора изложение своих результатов.

Х. Бонатти и Р. Ланжевэн в работе [20] рассмотрели класс *диффеоморфизмов Смейла* – класс структурно устойчивых диффеоморфизмов с нульмерными базисными множествами на поверхностях, который, очевидно, включает в себя класс диффеоморфизмов Морса–Смейла. Для рассмотренных систем они ввели полный топологический инвариант, названный *геометрическим типом марковского разбиения*, и построили конечный алгоритм для определения того, имеют ли два диффеоморфизма один и тот же инвариант. Реализация диффеоморфизмов Смейла по допустимому набору марковских разбиений была завершена Ф. Беганом в [8], [9].

Здесь мы приведем результаты по классификации произвольных сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла, полученные Х. Бонатти, В.З. Гринесом, О.В. Починкой, С. Ван Стрином [19] и основанные на методе факторизации.

Пусть $f: M^2 \rightarrow M^2$ – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, и пусть $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k$ – его согласованно упорядоченные периодические орбиты и N_f – согласованное семейство окрестностей (см. п. 1.4). Другими словами, N_f состоит из окрестностей N_i , $i = 1, \dots, k$, орбит $\mathcal{O}_i$, в которых диффеоморфизм f линеен с точностью до замены координат, т.е. из линеаризующих окрестностей. Каждая такая окрестность оснащена парой f -инвариантных трансверсальных слоений F_i^u, F_i^s , включающих как слои компоненты связности многообразий W_i^u, W_i^s со следующими свойствами:

- 1) ∂N_i трансверсально слоям слоений F_i^s, F_i^u и не содержит гетероклинических точек для любого $i \in \{1, \dots, k\}$;
- 2) если $W_{i_1}^s \cap W_{i_2}^u = \emptyset$ для $i_1 < i_2$, то $N_{i_1} \cap N_{i_2} = \emptyset$;
- 3) если $W_{i_1}^s \cap W_{i_2}^u \neq \emptyset$ для $i_1 < i_2$, то

$$(F_{i_1,x}^u \cap N_{i_2}) \subset F_{i_2,x}^u, \quad (F_{i_2,x}^s \cap N_{i_1}) \subset F_{i_1,x}^s$$

для $x \in (N_{i_1} \cap N_{i_2})$;

- 4) для каждой компоненты связности D_1 множества $N_i \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} N_j$ существует единственный номер i_* такой, что D_1 является компонентой связности множества $N_{i_*} \cap N_i$; аналогично, для каждой компоненты связности D_2 множества $N_i \cap \bigcup_{j=i+1}^k N_j$ существует единственный номер i_{**} такой, что D_2 является компонентой связности множества $N_{i_{**}} \cap N_i$.

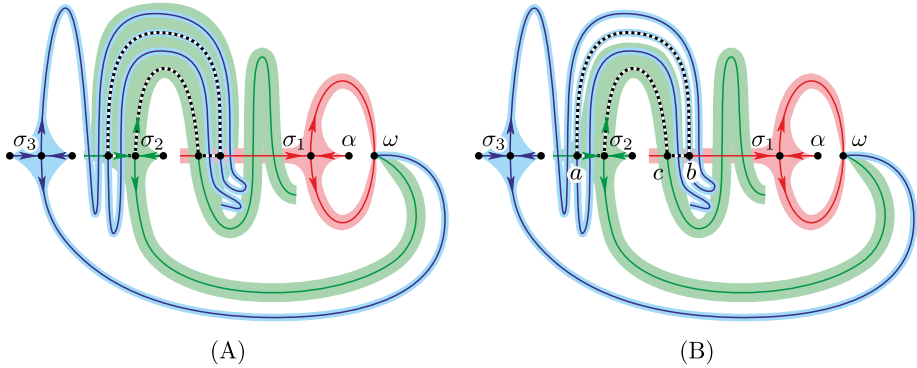


Рис. 28. Несопряженные согласованные системы окрестностей для диффеоморфизма Морса–Смейла на 2-сфере

В общем случае согласованная система окрестностей не является топологическим инвариантом. Например, линеаризующая окрестность N_{σ_2} на рис. 28, (А), содержит все гетероклинические точки диффеоморфизма f , в отличие от ситуации на рис. 28, (В), где окрестность N_{σ_2} не содержит, например, гетероклиническую точку b , т.е. не является “максимально возможной”.

Формализуем понятие максимальности.

Для седловой точки σ обозначим через $[a, b]_\sigma^u$ ($[a, b]_\sigma^s$) отрезок многообразия W_σ^u (W_σ^s), расположенный между точками $a, b \in W_\sigma^u$ ($a, b \in W_\sigma^s$). Пусть $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ – различные седловые точки такие, что

$$W_{\sigma_1}^s \cap W_\sigma^u \neq \emptyset, \quad W_\sigma^s \cap W_{\sigma_2}^u \neq \emptyset.$$

Замкнутый двумерный диск Π_σ , ограниченный отрезками $[\sigma, a]_\sigma^u$, $[a, b]_{\sigma_1}^s$, $[b, c]_{\sigma_2}^u$, $[c, \sigma]_\sigma^s$ и такой, что $\text{int } \Pi_\sigma \cap \Omega_f = \emptyset$, называется *гетероклиническим прямоугольником*, связанным с точкой σ , если каждая компонента линейной связности множества $W_\Sigma^s \cap \Pi_\sigma$ пересекает каждую компоненту линейной связности множества $W_\Sigma^u \cap \Pi_\sigma$ ровно в одной точке (см. рис. 29).

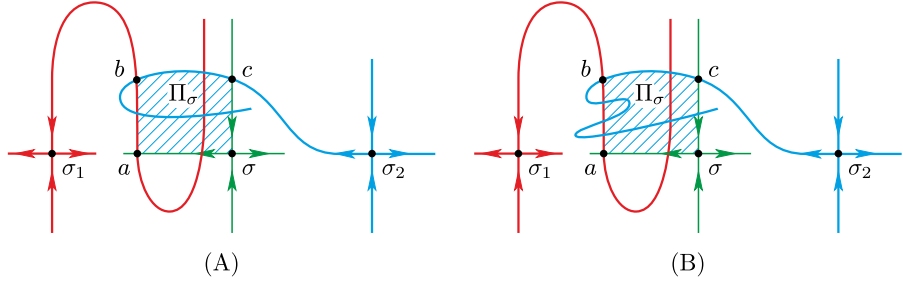


Рис. 29. (А) Π_σ – гетероклинический прямоугольник. (В) Π_σ не является гетероклиническим прямоугольником

Согласованная система окрестностей N_f называется *максимальной*, если для каждой седловой точки $\sigma \in \mathcal{O}_i$ ее линеаризующая окрестность $N_i \in N_f$ содержит все связанные с σ гетероклинические прямоугольники Π_σ .

В работе [19] доказано существование максимальной согласованной системы окрестностей для любого диффеоморфизма f и ее единственность в смысле существования сопрягающего гомеоморфизма $h: M^2 \rightarrow M^2$, переводящего одну максимальную окрестность в другую.

Положим $\Sigma_0 = \Omega^0$ и разобьем множество всех седловых точек диффеоморфизма f на попарно непересекающиеся подмножества $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ в соответствии со следующим принципом: седловая точка σ принадлежит множеству Σ_l , $l \in \{1, \dots, r\}$, тогда и только тогда, когда

$$\text{beh}(\mathcal{O}_\sigma | \Sigma_{l-1}) = 1.$$

Для полноты положим $\Sigma_{r+1} = \Omega^2$.

Рассмотрим характеристическое пространство $V_f = W_{\Sigma_0}^s \setminus \Sigma_0$, характеристическое фактормногообразие $\hat{V}_f$, естественную проекцию $p_f: V_f \rightarrow \hat{V}_f$ и связанный с ней набор гомоморфизмов η_f . Каждая компонента связности множества V_f является проколотым бассейном некоторого стока ω периода m_ω , соответствующая компонента связности множества $\hat{V}_f$ является двумерным тором, и гомоморфизм действует из фундаментальной группы этого тора в группу $m_\omega \mathbb{Z}$ (см. п. 1.3).

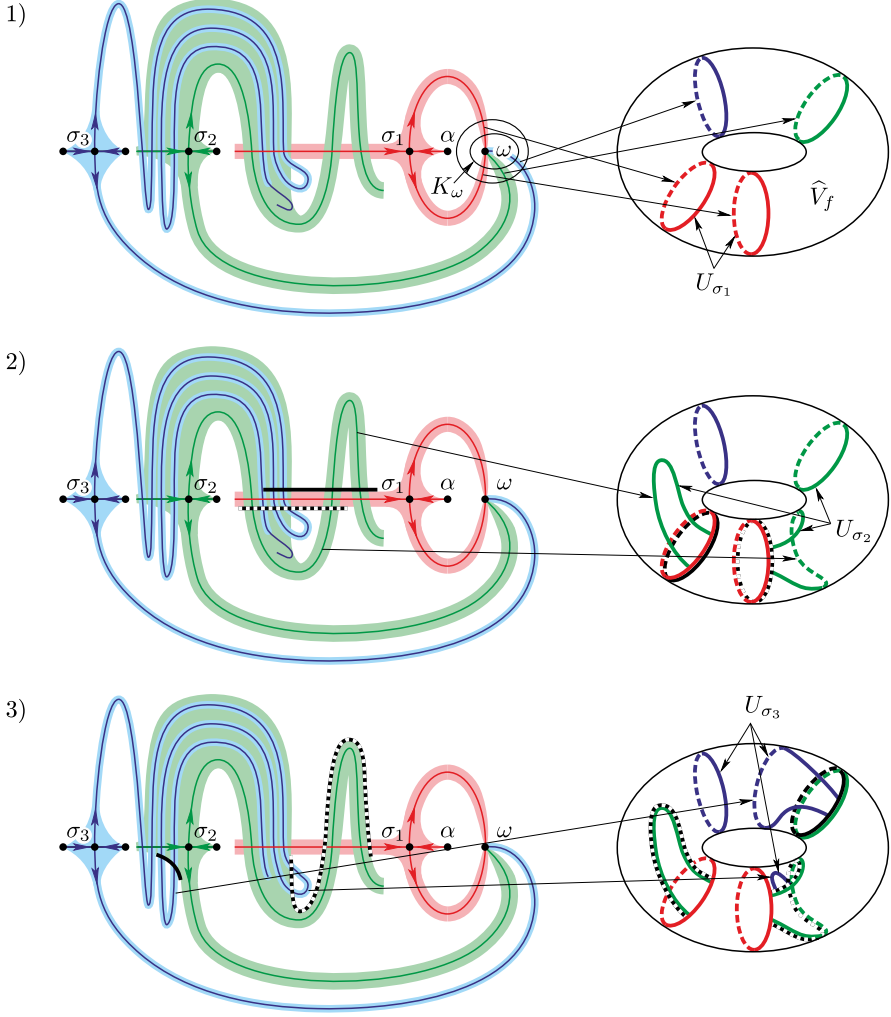


Рис. 30. Пошаговая проекция максимальной согласованной системы окрестностей в факторнообразии $\hat{V}_f$

Везде далее N_σ – линейризующая окрестность седловой точки σ из максимальной согласованной системы окрестностей N_f ; F_σ^s и F_σ^u – слоения в ней; F_f^s и F_f^u – объединение всех устойчивых и неустойчивых согласованных слоев соответственно. Для каждого $l \in \{0, 1, \dots, r+1\}$ положим

$$\mathcal{W}_l^u = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_l} W_\sigma^u, \quad \mathcal{W}_l^s = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_l} W_\sigma^s.$$

Для каждого $l \in \{1, \dots, r\}$ положим

$$\mathcal{N}_l = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_l} N_\sigma.$$

Для $\sigma \in \Sigma_l$ положим (см. рис. 30)

$$U_\sigma = N_\sigma \setminus \bigcup_{j=1}^{l-1} \mathcal{N}_j, \quad \widehat{U}_\sigma = p_f(U_\sigma), \quad \widehat{U}_f = \{\widehat{U}_\sigma, \sigma \in \Sigma\}.$$

Для $l > 0$, $\rho \in \Sigma_l$ каждая компонента связности пересечения $L_\rho = W_\rho^u \cap \bigcup_{j=1}^{l-1} \mathcal{N}_j$ является слоем γ слоения F_σ^u для некоторой седловой точки $\sigma \in \Sigma_j$, $j < l$. Обозначим через P_σ объединение граничных точек таких дуг. Определим отношение эквивалентности $\sim$ на P_σ : мы будем называть точки $p, q \in P_\sigma$ эквивалентными и писать $p \sim q$ тогда и только тогда, когда p, q являются граничными точками такой дуги (см. рис. 31).

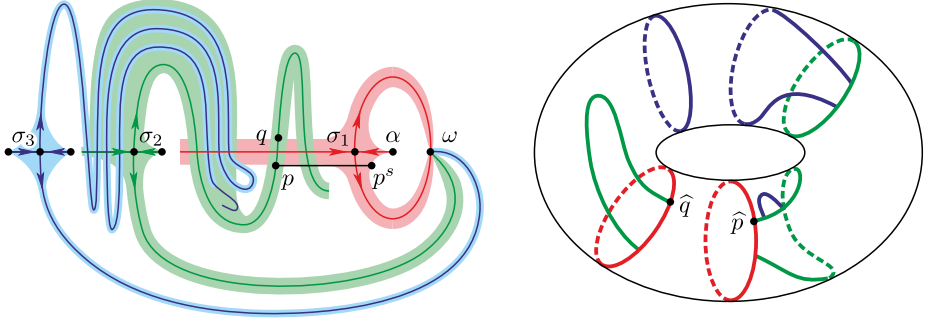


Рис. 31. Парные точки $p \sim q$ и их проекция в $\widehat{V}_f$ для диффеоморфизма с рис. 28

Для точки $p \in P_\sigma$ обозначим через p^s точку множества $F_{\sigma,p}^s \cap \partial N_\sigma$, отличную от точки p . Не уменьшая общности, будем считать, что максимальная система окрестностей выбрана так, что

$$P_\sigma \cap \bigcup_{p \in P_\sigma} p^s = \emptyset.$$

Обозначим через $\mathcal{P}_f$ объединение множеств P_σ для всех седел σ . Для каждого $l \in \{1, \dots, r\}$ и $\sigma \in \Sigma_l$ объединение всех элементов множества $\widehat{U}_f$ совпадает с множеством

$$\widehat{N}_f = p_f(N_f),$$

оснащенным устойчивым слоением

$$\widehat{F}_f^s = p_f(F_f^s),$$

каждый слой которого является отрезком.

Каждый элемент множества $\widehat{U}_f$ является кольцом или 1-ручкой, которая сжатием каждого устойчивого слоя в точку превращается в кривую такую, что множество точек пересечения этих кривых совпадает с множеством $\widehat{\mathcal{P}}_f = p_f(\mathcal{P}_f)$. Поэтому мы можем считать элементы множества $\widehat{U}_f$ кривыми, а их точки пересечения разбитыми на пары $\hat{p} \sim \hat{q}$.

Набор

$$S_f = (\widehat{V}_f, \eta_f, \widehat{\mathcal{N}}_f, \widehat{\mathcal{P}}_f)$$

называется *схемой* диффеоморфизма f .

Схемы $S_f, S_{f'}$ диффеоморфизмов f, f' называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi}: \widehat{V}_f \rightarrow \widehat{V}_{f'}$ такой, что:

$$(1) \eta_{f'} \hat{\varphi}_* = \eta_f;$$

(2) $\hat{\varphi}(\widehat{\mathcal{N}}_f) = \widehat{\mathcal{N}}_{f'}$, $\hat{\varphi}(\widehat{\mathcal{P}}_f) = \widehat{\mathcal{P}}_{f'}$ и $\hat{\varphi}(\hat{p}), \hat{\varphi}(\hat{q})$ являются парными точками в $\widehat{\mathcal{P}}_{f'}$ для любой пары парных точек $\hat{p} \sim \hat{q} \in \widehat{\mathcal{P}}_f$;

(3) любое поднятие $\varphi: \mathcal{V}_f \rightarrow \mathcal{V}_{f'}$ гомеоморфизма $\hat{\varphi}$ обладает следующими свойствами:

(3a) для каждой седловой точки σ существует единственная седловая точка σ' такая, что $\varphi(U_\sigma) = U_{\sigma'}$,

(3b) для каждой пары точек $p \sim q \in \mathcal{P}_f$ существует единственная пара точек $p' \sim q' \in \mathcal{P}_{f'}$ такая, что $p' = \varphi(p)$, $q' = \varphi(q)$.

Заметим, что свойство (3), как и в случае конечного числа гетероклинических орбит, необходимо проверять только на конечном числе точек. При этом свойство (3a) выполняется автоматически, если седловые точки неподвижны, а свойство (3b) дает информацию о гетероклиническом пересечении, которая не залавливается гетероклинической подстановкой.

ТЕОРЕМА 3.5 [19]. *Диффеоморфизмы f, f' топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы $S_f, S_{f'}$ эквивалентны.*

4. Трехмерные системы

4.1. Трехмерные потоки. Поскольку эйлерова характеристика любого трехмерного многообразия равна нулю, то неравенства Морса (см. предложение 1.2) уже не позволяют однозначно определить топологию многообразия по динамике заданной на нем системы, как это было на поверхностях. Более эффективным инструментом для этого оказывается *энергетическая* функция потока – гладкая функция, убывающая вдоль блуждающих траекторий потока, постоянная на периодических орбитах и неподвижных точках и имеющая множество критических точек, совпадающее с неблуждающим множеством потока. Эта функция играет также большую роль в построении топологических инвариантов, поэтому настоящий раздел мы начнем с описания связанных с ней результатов.

4.1.1. Энергетическая функция и связь динамики с топологией несущего многообразия. Мы начнем с краткого введения в теорию Морса (для детального знакомства см., например, [74]).

Пусть $\varphi: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ есть C^r -гладкая функция ($r \geq 1$), заданная на многообразии M . Точка $p \in M^n$ называется *критической точкой* функции φ , если

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_p = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(p) = \dots = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(p) = 0;$$

$\varphi(p)$ называется *критическим значением* функции φ . В противном случае точка p называется *регулярной точкой*, а $\varphi(p)$ *регулярным значением* функции φ .

Распространенный способ задания многообразий основан на том, что множество уровня $\varphi^{-1}(\varphi(p))$ любой регулярной точки p является C^r -подмногообразием многообразия M^n .

Для $r \geq 2$ критическая точка p C^r -функции f называется невырожденной, если матрица вторых производных (матрица Гесса) $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right)\bigg|_p$ невырождена, в противном случае точка p называется вырожденной. В силу симметричности, матрица Гесса имеет только действительные собственные значения и является вырожденной тогда и только тогда, когда имеет нулевые собственные значения. Число нулевых собственных значений матрицы $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right)\bigg|_p$ называют степенью вырождения критической точки p , а число ее отрицательных собственных значений называют индексом критической точки p и обозначают j_p . Гладкая функция, значение которой в каждой критической точке p равно индексу этой точки ($\varphi(p) = j_p$), называется самоиндексирующейся.

C^r -гладкая ($r \geq 2$) функция $\varphi: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется функцией Морса, если все ее критические точки невырождены.

Согласно лемме Морса в некоторой окрестности невырожденной критической точки p существуют локальные координаты $y_1, \dots, y_n$ (называемые координатами Морса), в которых функция φ имеет вид

$$\varphi(y_1, \dots, y_n) = \varphi(p) - y_1^2 - \dots - y_{j_p}^2 + y_{j_p+1}^2 + \dots + y_n^2.$$

C^r -гладкая ($r \geq 2$) функция $\varphi: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется функцией Морса–Ботта, если гессиан в каждой критической точке невырожден в направлении, нормальном к множеству уровня вырожденной критической точки.

К. Мейер в [72; теорема 1] доказал, что для произвольного потока Морса–Смейла существует энергетическая функция со следующими свойствами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1 [72]. Для любого потока Морса–Смейла $f^t: M^n \rightarrow M^n$ на гладком замкнутом многообразии M^n существует самоиндексирующаяся функция Морса–Ботта $\varphi: M^n \rightarrow [0, n]$ такая, что:

1) $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой блуждающей точки x и любого положительного t ;

2) множество $\text{Cr}(\varphi)$ критических точек функции φ состоит из конечного подмножества $\text{Cr}_0(\varphi) = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ невырожденных точек, совпадающего с множеством неподвижных точек потока, и подмножества $\text{Cr}_1(\varphi)$ критических точек со степенью вырождения 1, которое является объединением конечного числа попарно непересекающихся окружностей $\delta_{m+1}, \dots, \delta_k$, совпадающих с периодическими орбитами потока;

3) значение $\varphi(\delta_i)$, $i = 1, \dots, m$, совпадает с индексом Морса неподвижной точки δ_i , а значение $\varphi(\delta_i)$, $i = m+1, \dots, k$, совпадает с индексом периодической орбиты δ_i ;

4) для $i \in \{m+1, \dots, k\}$ существуют окрестность N_i окружности δ_i и диффеоморфизм ξ_i такие, что ξ_i отображает N_i на прямое произведение шара $\mathbb{B}^{n-1}$ и окружности $\mathbb{S}^1$, если N_i ориентируемо, и на косое произведение $\mathbb{B}^{n-1}$ и $\mathbb{S}^1$, если N_i неориентируемо, при этом $\varphi \circ \xi_i^{-1} = \varphi(\delta_i) + Q_i(x)$, где

Q_i – невырожденная квадратичная форма в координатах $x_1, \dots, x_{n-1}$ на $\mathbb{B}^{n-1}$ и периодическая функция периода 1 по координате x_n в $\mathbb{S}^1$.

4.1.2. Градиентно-подобные потоки. Для любого градиентно-подобного потока предложение 4.1 гарантирует существование энергетической функции Морса. Заметим, что этот результат не следует из работы С. Смейла [100], поскольку градиентно-подобные потоки не являются градиентными в общем случае из-за возможного наличия неподвижных точек с комплексными собственными значениями.

Покажем, как информация о критических точках этой функции (а следовательно, информация о неблуждающем множестве градиентно-подобного потока) определяет топологию многообразия. Для этого напомним понятие разложения Хегора.

Говорят, что n -многообразие M получено из n -многообразия N с краем ∂N приклеиванием ручки $H_k = \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$ индекса k , если существует вложение $\psi: \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-k} \rightarrow \partial N$ такое, что M есть факторпространство объединения $N \cup H_k$ по отношению эквивалентности, в силу которого эквивалентны точки $x \in \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-k}$ и $\psi(x)$.

Многообразие Q_k^n , полученное приклеиванием ручек индексов, максимальный из которых равен k , называется (n, k) -ручным телом. Число g ручек индекса 1 тела Q_1^n называется родом этого тела. Гомотопический тип ручечного тела Q_1^n рода g имеет вид клеточного комплекса с одной нульмерной клеткой и g одномерными клетками, следовательно,

$$\chi(Q_1^n) = 1 - g.$$

Пусть Q_g^3, P_g^3 – две копии $(3, 1)$ -ручного тела рода g , и пусть

$$\phi: \partial Q_g^3 \rightarrow \partial P_g^3$$

– гомеоморфизм, меняющий естественную ориентацию края. Склеивая Q_g^3, P_g^3 посредством гомеоморфизма ϕ , мы получим ориентируемое многообразие $M^3 = Q_g^3 \cup_\phi P_g^3$.

Представление многообразия M^3 в виде двух склеенных $(3, 1)$ -ручных тел рода g называется *разложением Хегора рода g* , а общая граница Σ этих тел называется поверхностью Хегора. Представление в виде разложения Хегора рода g существует для любого трехмерного многообразия M^3 , но число g не определяется однозначно. Наименьший род разложений Хегора данного многообразия называется его *родом Хегора* и обозначается $g(M^3)$.

Разложение Хегора геометрически представляется *диаграммой Хегора* – тройкой, состоящей из ориентируемой поверхности Σ рода g (границы $(3, 1)$ -ручного тела рода g), на которой зафиксированы два семейства попарно непересекающихся кривых $\mathcal{M} = \{m_1, \dots, m_g\}$, $\mathcal{L} = \{l_1, \dots, l_g\}$ таких, что после разрезания поверхности вдоль каждого семейства получается сфера с $2g$ дырками. Изотопический класс гомеоморфизма склейки двух ручечных тел (и, как следствие, топология полученного трехмерного многообразия) определяется этими двумя семействами, а именно, склеивающий гомеоморфизм должен переводить кривые одного семейства в кривые другого семейства.

Две диаграммы $\{\Sigma, \mathcal{M}, \mathcal{L}\}, \{\Sigma, \mathcal{M}', \mathcal{L}'\}$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: \Sigma \rightarrow \Sigma$ такой, что

$$h(\mathcal{M}) = \mathcal{M}', \quad h(\mathcal{L}) = \mathcal{L}'.$$

Пусть теперь $f^t: M^3 \rightarrow M^3$ – градиентно-подобный поток и $\varphi: M^3 \rightarrow [0, 3]$ – его самоиндексирующаяся энергетическая функция Морса. Обозначим через r_{f^t} число седловых, а через l_{f^t} число узловых точек потока f^t и положим

$$g_{f^t} = \frac{r_{f^t} - l_{f^t} + 2}{2}.$$

Пусть

$$A_{f^t} = \Omega^0 \cup W_{\Omega_1}^u, \quad R_{f^t} = \Omega^3 \cup W_{\Omega_2}^s.$$

В силу предложений 1.4 и 1.5, множества A_{f^t}, R_{f^t} являются связными аттрактором и репеллером соответственно. Из свойств энергетической функции следует, что множество $U_a = \varphi^{-1}[0, 1.5]$ является захватывающей окрестностью аттрактора, множество $U_r = M^3 \setminus \text{int } U_a$ является захватывающей окрестностью репеллера, а их общая граница $\Sigma_{f^t} = \varphi^{-1}(1.5)$ является глобальной секущей для ограничения потока на множество $M^3 \setminus (A_{f^t} \cup R_{f^t})$.

Обозначим через $|\Omega^i|$ мощность множества Ω^i . Из теории Морса (см., например, [69]) следует, что множество U_a (U_r) является $(3, 1)$ -ручным телом, имеющим гомотопический тип клеточного комплекса с $|\Omega^0|$ ($|\Omega^3|$) нульмерными клетками и $|\Omega^1|$ ($|\Omega^2|$) одномерными клетками, откуда следует, что

$$\chi(U_a) = |\Omega^0| - |\Omega^1| \quad (\chi(U_r) = |\Omega^3| - |\Omega^2|).$$

Поскольку тела U_a и U_r имеют общую границу Σ_{f^t} , то их род одинаков, обозначим его через g . Тогда

$$|\Omega^0| - |\Omega^1| = |\Omega^3| - |\Omega^2| = 1 - g$$

и, следовательно,

$$g = \frac{|\Omega^1 \cup \Omega^2| - |\Omega^0 \cup \Omega^3| + 2}{2} = g_{f^t}.$$

Таким образом, имеет место следующий факт.

ТЕОРЕМА 4.1 [47]. *Несущее многообразие M^3 любого градиентно-подобного потока допускает разбиение Хегора рода g_{f^t} .*

Непосредственным следствием теоремы 4.1 является следующее достаточное условие существования замкнутой траектории потока Морса–Смейла.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Пусть f^t – поток Морса–Смейла, заданный на замкнутом ориентируемом многообразии M^3 . Если*

$$g(M^3) > g_{f^t},$$

то неблуждающее множество f^t содержит по крайней мере одну периодическую траекторию.

Для градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений топологию несущего многообразия можно уточнить. Для этого напомним, что *связной суммой* гладких ориентируемых связных n -многообразий M_1^n, M_2^n называется многообразие $M_1^n \# M_2^n$, полученное следующим образом. Пусть

$$e_1: \mathbb{B}^n \rightarrow M_1^n, \quad e_2: \mathbb{B}^n \rightarrow M_2^n$$

– вложения стандартных дисков. Тогда многообразие $M_1^n \# M_2^n$ есть результат склеивания многообразий с краем

$$M_1^n \setminus e_1(\text{int } \mathbb{B}^n), \quad M_2^n \setminus e_2(\text{int } \mathbb{B}^n)$$

по меняющему ориентацию гомеоморфизму $h: e_1(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow e_2(\mathbb{S}^{n-1})$. Операция определена однозначно с точностью до гомеоморфизма и не зависит от выбора вложений e_1, e_2 (см., например, [59]).

ТЕОРЕМА 4.2 [13]⁷. Пусть M^3 – трехмерное замкнутое связное ориентируемое многообразие. Градиентно-подобный поток f^t без гетероклинических пересечений существует на многообразии M^3 тогда и только тогда, когда либо M^3 является сферой $\mathbb{S}^3$ и $g_{f^t} = 0$, либо M^3 является связной суммой g_{f^t} копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Непосредственным следствием теоремы 4.2 является следующее достаточное условие существования гетероклинических кривых у трехмерного потока Морса–Смейла, использованное в [45] для доказательства существования сепараторов в солнечной короне.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Любой поток Морса–Смейла на 3-многообразии, отличном от 3-сферы и связной суммы копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, имеет хотя бы одну гетероклиническую кривую.

А. О. Пришляк в [92] использовал для классификации трехмерных градиентно-подобных потоков f^t поверхность без контакта, являющуюся границей регулярной окрестности аттрактора A_{f^t} . В качестве такой поверхности можно выбрать поверхность Σ_{f^t} . Рассмотрим следы двумерных сепаратрис на ней, именно, положим

$$C_{f^t}^s = \Sigma_{f^t} \cap W_{\Omega^1}^s, \quad C_{f^t}^u = \Sigma_{f^t} \cap W_{\Omega^2}^u.$$

Тогда имеет место следующий критерий топологической эквивалентности потоков.

ТЕОРЕМА 4.3 [92]. Потоки f^t, f'^t на замкнутом многообразии M^3 топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм $\psi: \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f'^t}$ такой, что

$$\psi(C_{f^t}^s) = C_{f'^t}^s, \quad \psi(C_{f^t}^u) = C_{f'^t}^u.$$

⁷В работе [13] была получена классификационная теорема для 3-многообразий, допускающих диффеоморфизмы Морса–Смейла без гетероклинических кривых (см. теорему 4.17 ниже). Для потоков без гетероклинических пересечений аналогичная классификация получается переходом к сдвигу на единицу времени потока.

Градиентно-подобный поток f^t , у которого каждое из множеств Ω^0 , Ω^n состоит в точности из одной точки, называется *полярным*. Ж. Флейтас [31] заметила, что в этом случае тройка $\{\Sigma_{f^t}, C_{f^t}^s, C_{f^t}^u\}$ является диаграммой описанного выше разбиения Хегора, и доказала следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.4 [31]. *Полярные потоки f^t , f^{t^*} на замкнутом ориентируемом многообразии M^3 топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны связанные с ними диаграммы Хегора $\{\Sigma_{f^t}, C_{f^t}^s, C_{f^t}^u\}$, $\{\Sigma_{f^{t^*}}, C_{f^{t^*}}^s, C_{f^{t^*}}^u\}$.*

Отметим, что изложенный подход был применен А. О. Пришляком [93] к изучению произвольных потоков Морса–Смейла. Упомянем также, что Я. Л. Уманский [103] рассмотрел класс потоков Морса–Смейла (допускающих периодические траектории) с конечным числом гетероклинических кривых и построил для таких потоков полный топологический инвариант. Этот инвариант представляет собой комбинаторное описание границ ячеек потока и описание характера примыкания ячеек к стоковым и источниковым состояниям равновесия в духе схемы Леонтович–Майера.

4.1.3. Неособые потоки. В этом пункте речь пойдет о потоках без неподвижных точек – *неособых потоках*, которые также имеют тесную связь с топологией несущего многообразия. В силу формулы Пуанкаре–Хопфа, эйлерова характеристика замкнутого многообразия M^n , допускающего неособый поток, равна нулю.

Из двумерных поверхностей получаем только тор и бутылку Клейна (на обеих поверхностях существуют неособые потоки Морса–Смейла – НМС-потоки). Для трехмерных замкнутых многообразий этот факт не дает ограничений на несущее многообразие, так как эйлерова характеристика любого замкнутого 3-многообразия равна нулю. Возможно, поэтому первые содержательные результаты были получены для многообразий размерности, большей 3 (см. п. 5.3).

В 1979 г. Дж. Морган [76] описал несущие 3-многообразия для НМС-потоков через многообразия Зейферта. Напомним, что *зейфертовым многообразием* называется 3-многообразие M (возможно, с краем), которое представляет собой объединение $M = \bigcup_r C_r$ (*расслоение Зейферта*) попарно непересекающихся замкнутых простых кривых C_r таких, что каждая кривая C_r имеет замкнутую окрестность, гомеоморфную полноторию $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$, полученному из произведения $\mathbb{B}^2 \times [0, 1]$ склейкой каждой точки $(x, 0)$ с точкой $(d(x), 1)$, где $d: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$ – поворот 2-диска $\mathbb{B}^2$ на угол $2\pi t/n$, t и n – взаимно простые целые числа, $0 \leq t < n$. Многообразие Зейферта называется *нетривиальным*, если хотя бы один из углов поворота отличен от нуля.

ТЕОРЕМА 4.5 [76]. *Пусть M^3 – замкнутое ориентируемое простое 3-многообразие. Тогда на M^3 существует НМС-поток в том и только том случае, когда M^3 есть объединение нетривиальных пространств Зейферта, приклеенных друг к другу вдоль их граничных компонент.*

Примером описанного в теореме 4.5 многообразия M^3 является *линзовое пространство* $L_{p,q}$, которое для взаимно простых чисел $p \geq 3$ и $1 \leq q < p$ явля-

ется склейкой двух заполненных торов посредством гомеоморфизма границы, заданного матрицей $\begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix}$, где целые числа r, s удовлетворяют соотношению $ps - qr = \pm 1$. Оказывается, именно линзовое пространство является несущим многообразием неособых потоков в случае малого количества периодических орбит.

ТЕОРЕМА 4.6 [23]. *Пусть на ориентируемом простом замкнутом 3-многообразии M^3 существует НМС-поток, неблуждающее множество которого состоит из двух или трех периодических траекторий. Тогда M^3 является сферой, прямым произведением $S^2 \times S^1$ или линзовым пространством.*

Следующий факт показывает, что любое замкнутое многообразие может быть компонентой связной суммы объемлющего многообразия неособого потока.

ТЕОРЕМА 4.7 [76], [95]. *Пусть M^3 – замкнутое ориентируемое 3-многообразие. Тогда для некоторого $k \geq 0$ на многообразии $M^3 \#_{i=1}^k (S^2 \times S^1)_i$ существует НМС-поток.*

Приведем один результат Дж. Моргана, где периодическая траектория на 3-сфере S^3 рассматривается как узел. Пусть τ – полноторий $S^1 \times B^2$. Напомним, что его осью называется окружность $S^1 \times \{0\}$. Торическим полноторием в τ называется полноторий τ_* , лежащий внутри τ , такой, что его ось есть торический узел на некотором двумерном торе, параллельном граничному тору $\partial\tau$. Узел $K \subset S^3$ называется *итерированным торическим узлом*, если в S^3 существует конечный набор полноториев

$$\tau_0 \supset \tau_1 \supset \cdots \supset \tau_{i-1} \supset \tau_i \supset \cdots \supset \tau_r$$

такой, что:

- 1) ось полнотория τ_0 незаузлена в S^3 ;
- 2) τ_i является торическим полноторием в τ_{i-1} при $i \geq 1$;
- 3) K есть ось полнотория τ_r .

ТЕОРЕМА 4.8 [76]. *Пусть γ – притягивающая периодическая траектория НМС-потока на S^3 . Тогда γ является итерированным торическим узлом.*

На трехмерной сфере S^3 взаимное расположение периодических траекторий потока Морса–Смейла может быть описано с помощью следующих параметров. Каждому узлу k приписан индекс $i(k) \in \{0, 1, 2\}$ соответствующей периодической траектории. Кроме того, с каждой парой узлов k_1, k_2 связан индекс зацепления $L(k_1, k_2)$, равный числу оборотов узла k_1 вокруг узла k_2 . Индекс зацепления всегда является целым числом, но может быть положительным или отрицательным в зависимости от ориентации узлов. Узлы с индексом зацепления 0 называются *незацепленными*.

Простейшим НМС-поток на S^3 является поток ровно с двумя периодическими траекториями, одна из которых, A , имеет индекс 0 (притягивающая), а вторая, R , имеет индекс 2 (отталкивающая), причем $|L(A, R)| = 1$ (см. рис. 32). Эти траектории образуют хорошо известное зацепление Хопфа. С учетом индексов будем называть его $(0, 2)$ -зацеплением Хопфа.

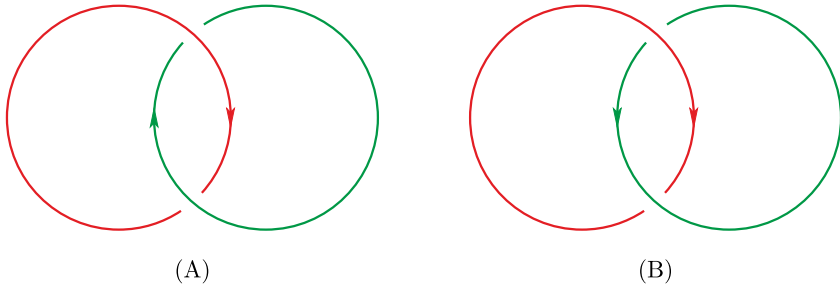


Рис. 32. Зацепление Хопфа: (а) положительное, (б) отрицательное

В 1989 г. М. Вада [105] ввел шесть операций (назовем их *операциями Вады*) на множестве индексированных зацеплений, связывающих зацепления периодических орбит НМС-потока с $(0, 2)$ -зацеплением Хопфа. Для точной формулировки результатов напомним некоторые определения теории узлов.

Разделенной суммой $l_1 \cdot l_2$ двух зацеплений l_1 и l_2 называется их формальное объединение в одно зацепление, причем каждое из зацеплений l_i , $i = 1, 2$, можно поместить в открытый шар B_i^3 так, чтобы $B_1^3 \cap B_2^3 = \emptyset$.

Связной суммой $k_1 \sharp k_2$ двух узлов k_1 и k_2 называется узел, полученный удалением (с учетом ориентации) отрезков $(a_i, b_i) \subset K_i$, $i = 1, 2$, с последующим отождествлением концевых точек $a_1 \leftrightarrow a_2$, $b_1 \leftrightarrow b_2$.

Узел k_2 называется (p, q) -*обкруткой узла* k_1 , если k_2 получается разрезанием k_1 , оборачиванием полученной дуги p раз вдоль k_1 с q оборотами и последующим соединением ее концов, где p и q взаимно просты.

Перечислим *операции Вады* I_i , $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$, с зацеплениями:

- 1) $I_1(l_1, l_2) = l_1 \cdot l_2 \cdot u$, где u – тривиальный узел индекса 1;
- 2) $I_2(l_1, l_2) = l_1 \cdot (l_2 \setminus k_2) \cdot u$, где $k_2 \subset l_2$ – узел индекса 0 или 1;
- 3) $I_3(l_1, l_2) = (l_2 \setminus k_2) \cdot (l_1 \setminus k_1) \cdot u$, где $k_i \subset l_i$ – узел индекса 0 или 2, $i = 1, 2$, при этом $i(k_1) \neq i(k_2)$;

4) $I_4(l_1, l_2) = (l_1 \sharp l_2) \cup m$, где связная сумма $l_1 \sharp l_2$ образуется посредством композиции $k_1 \sharp k_2$ узлов $k_i \subset l_i$ индекса 0 или 2, $i = 1, 2$, а m – меридиан узла $k_1 \sharp k_2$ индекса 1, при этом узел $k_1 \sharp k_2$ имеет индекс $i(k_1)$ или $i(k_2)$;

5) $I_5(l)$ получается из зацепления l следующим образом: сначала выбирается узел $k \subset l$ индекса 0 или 2, и затем его трубчатая окрестность заменяется полноторием $D^2 \times S^1$ с тремя индексированными узлами $k_0 = \{0\} \times S^1$, $k_1, k_2 \subset \partial(D^2 \times S^1)$, где узлы k_1 и k_2 являются (p, q) -обкрутками узла k_0 , при этом $i(k_2) = 1$, индексы $i(k_0)$, $i(k_1)$ равны 0 или 2, а один из этих индексов равен $i(k)$;

6) $I_6(l)$ получается из зацепления l следующим образом: сначала выбирается узел $k \subset l$ индекса 0 или 2, и затем его трубчатая окрестность заменяется полноторием $D^2 \times S^1$ с двумя индексированными узлами $k_0 = \{0\} \times S^1$ и $(2, q)$ -обкруткой k_1 узла k_0 , при этом $i(k_0) = 1$, $i(k_1) = i(k)$.

ТЕОРЕМА 4.9 [105]. Любое индексированное зацепление, образованное периодическими траекториями НМС-потока на S^3 , может быть получено из $(0, 2)$ -зацепления Хопфа с помощью операций Вады. Обратно, любое индексированное зацепление на S^3 , полученное из $(0, 2)$ -зацепления Хопфа с помощью операций Вады, может быть реализовано периодическими траекториями некоторого НМС-потока.

Следуя [24], будем называть зацепления, полученные из $(0, 2)$ -зацепления Хопфа с помощью операций Вады, *зацеплениями Вады*. В [24] исследовалась возможность построения бифуркаций коразмерности 1 между зацеплениями Вады. В работе [25] построены два топологически неэквивалентных НМС-потока с одинаковыми зацеплениями Вады. Следовательно, зацепления Вады не являются топологическими инвариантами.

Дж. Фрэнкс [33] в 1985 г. ввел понятие *графа Ляпунова* для НМС-потоков на 3-сфере. Это ориентированный граф, вершины и ребра которого соответствуют элементам фильтрации и регулярным линиям уровня энергетической функции (см. теорему 4.1). Каждый элемент фильтрации содержит единственную периодическую орбиту, и существует только пять видов таких элементов для НМС-потоков на S^3 (см. [76] или [109]). С каждым ребром связана матрица из $SL(2, \mathbb{Z})$, соответствующая склейке двух соседних элементов фильтрации.

Комбинация результата Вады с описанием индексированных зацеплений посредством графа Ляпунова дает алгоритм для получения полного списка НМС-потоков без гетероклинических пересечений на S^3 . Но когда число периодических орбит велико, таких потоков очень много. Бин Ю [109] дал полную топологическую классификацию НМС-потоков на 3-сфере с не более чем четырьмя периодическими орбитами. Опишем полученные им результаты для двух и трех орбит.

ТЕОРЕМА 4.10 [109]. С точностью до топологической эквивалентности существует единственный НМС-поток на S^3 ровно с двумя периодическими орбитами – притягивающей A и отталкивающей R . Более того, периодические орбиты $A \sqcup R$ образуют $(0, 2)$ -зацепление Хопфа.

ТЕОРЕМА 4.11 [109]. Пусть f^t – НМС-поток на S^3 в точности с тремя периодическими орбитами. Тогда одна из орбит притягивающая (A), другая отталкивающая (R) и третья седловая (γ). При этом:

- 1) если γ не является скрученной, то зацепление $A \sqcup \gamma \sqcup R$ является тривиальным, т. е. все орбиты не заузлены и попарно не зацеплены;
- 2) если γ является скрученной, то γ и одна из узловых орбит образуют положительное зацепление Хопфа, а другая узловая орбита – $(2, 2\nu - 1)$ -обкрутка ($\nu \in \mathbb{Z}$) узла γ .

В случае, когда орбита γ не является скрученной, существует в точности восемь классов топологической эквивалентности, каждый из которых однозначно определяется тройкой индексов $i, j, k \in \{+, -\}$ по следующему правилу.

Пусть $N(A)$ и $N(R)$ – фильтрационные окрестности узловых орбит потока f^t . Тогда пересечение $W_\gamma^s \cap \partial N(R)$ ($W_\gamma^s \cap \partial N(R)$) состоит из двух простых замкнутых кривых w_1^s, w_2^s (w_1^u, w_2^u) таких, что w_1^s, w_1^u изотопны в $N(R)$, $N(A)$

орбитам R , A соответственно и кривые w_2^s, w_2^u не существенные в $\partial N(R), \partial N(A)$ соответственно.

Положим $i = +$ ($i = -$), если w_1^s ориентирована так же, как A (противоположно A) в $N(A)$; $j = +$ ($j = -$), если w_1^u ориентирована так же, как R (противоположно R) в $N(R)$; $k = +$ ($k = -$), если w_2^s лево (право) ориентирована в $\partial N(R)$. Положим

$$\tau(f^t) = (i, j, k).$$

ТЕОРЕМА 4.12 [109]. *НМС-потoki f^t, f^{t^*} на S^3 в точности с тремя периодическими орбитами (притягивающей, отталкивающей и нескрученной седловой) топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $\tau(f^t) = \tau(f^{t^*})$.*

В случае, когда седловая орбита γ является скрученной, в силу теоремы 4.11 одна из узловых орбит образует зацепление Хопфа с узлом γ (не уменьшая общности, будем считать, что это отталкивающая орбита R). Тогда класс топологической эквивалентности такого потока f^t однозначно определяется параметрами $\nu \in \mathbb{Z}$, $\mu \in \{+, -\}$, где $L(A, \gamma) = 2\nu - 1$ и $\mu = +$ ($\mu = -$), если A имеет одинаковую (разную) с γ ориентацию в дополнении к R . Положим

$$\tau(f^t) = (\nu, \mu).$$

ТЕОРЕМА 4.13 [109]. *НМС-потoki f^t, f^{t^*} на S^3 в точности с тремя периодическими орбитами (притягивающей, отталкивающей и скрученной седловой, образующей зацепление Хопфа с отталкивающей орбитой) топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $\tau(f^t) = \tau(f^{t^*})$.*

4.2. Трехмерные диффеоморфизмы. Топологическая классификация даже простейших диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях не вписывается в концепцию выделения каркаса, состоящего из устойчивых и неустойчивых многообразий периодических орбит. Причина этого эффекта кроется прежде всего в возможности “дикого” поведения сепаратрис седловых точек. Пример (не связанный с динамикой) компактной дикой дуги в $\mathbb{R}^3$ с одной точкой дикости был построен Э. Артином и Р. Фоксом [5] в 1948 г. Такая дуга не переводится в луч гомеоморфизмом всего пространства $\mathbb{R}^3$. В 1977 г. Д. Пикстон [90] реализовал эту дугу сепаратрисами седловой точки диффеоморфизма Морса–Смейла на 3-сфере.

На рис. 33 сверху изображен фазовый портрет диффеоморфизма Пикстона, ниже – фазовый портрет диффеоморфизма с ручно вложенными сепаратрисами с тем же графом Пейшото.

Обнаруженные топологические эффекты подчеркивают существенное отличие потоков от диффеоморфизмов в размерности 3. Если в двумерном случае, в силу результата Дж. Палиса [82], некоторая конечная степень любого градиентно-подобного диффеоморфизма включается в топологический поток, то в трехмерном случае это не так. Необходимые и достаточные условия включения в топологический поток 3-диффеоморфизмов Морса–Смейла были найдены В. З. Гринесом, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведевым и О. В. Починкой [37] на языке введенных ниже схем.

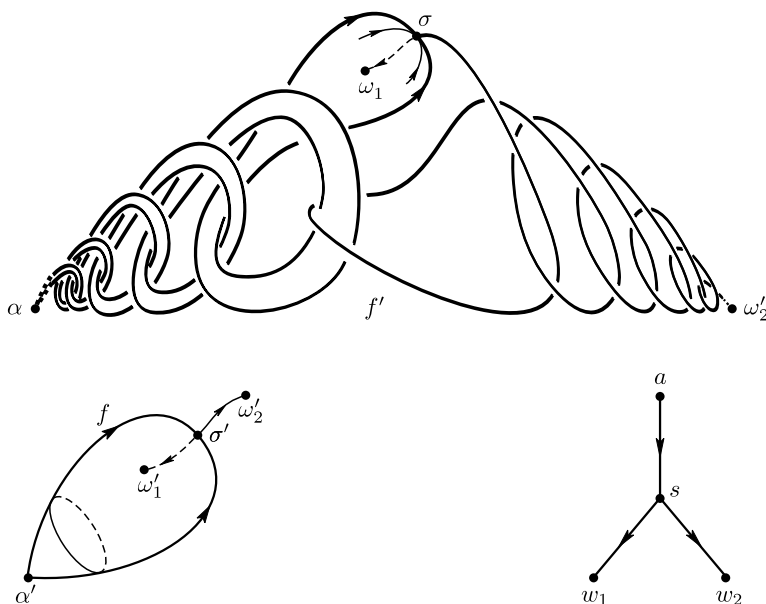


Рис. 33. Примеры диффеоморфизмов на 3-сфере с ручными и дикими сепаратрисами

Этот подход, основанный на методе факторизации, позволил также получить полную топологическую классификацию (включая реализацию) произвольных 3-диффеоморфизмов Морса–Смейла – см. работу Х. Бонатти, В.З. Гринеса и О.В. Починки [18], завершающую цикл работ Х. Бонатти, В.З. Гринеса, Ф. Лауденбаха, В.С. Медведева, Э. Пеку, О.В. Починки [12], [14]–[16]. Задача реализации в общей постановке была решена в работе [17]; полученное в [17] решение является обобщением решения, предложенного в [14] для градиентно-подобных диффеоморфизмов.

4.2.1. Класс Пикстона. Х. Бонатти и В.З. Гринесом [12] в 2000 г. был рассмотрен класс диффеоморфизмов f на трехмерной сфере, имеющих неблуждающее множество, состоящее из четырех неподвижных точек: двух стоков ω_1, ω_2 , источника α и седла σ , – *класс Пикстона*. Поскольку сопрягающий гомеоморфизм должен переводить инвариантные многообразия периодических точек одного диффеоморфизма в аналогичные многообразия другого, становится очевидным существование по крайней мере двух топологически несопряженных диффеоморфизмов: диффеоморфизма, все сепаратрисы которого являются ручными, и диффеоморфизма, среди сепаратрис которого есть дикие (см. рис. 33). В действительности класс Пикстона содержит счетное множество попарно топологически несопряженных диффеоморфизмов, что доказано в [12] и будет следовать из описанного ниже полного топологического инварианта.

Неподвижные точки диффеоморфизма f допускают единственную согласованную нумерацию:

$$\theta_1 = \omega_1, \quad \theta_2 = \omega_2, \quad \theta_3 = \sigma, \quad \theta_4 = \alpha$$

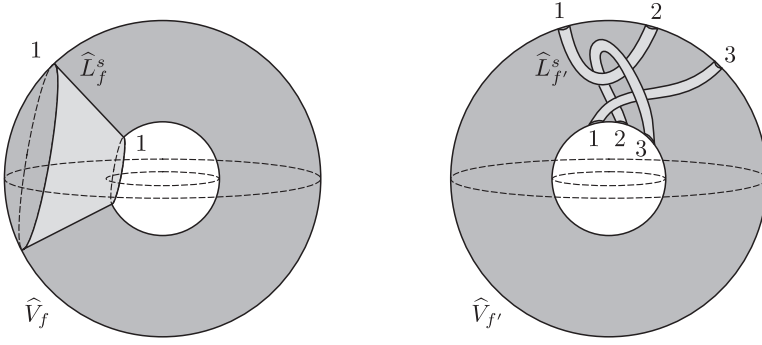


Рис. 34. Схемы диффеоморфизмов класса Пикстона

(см. п. 1.3). Нас будет интересовать характеристическое многообразие $V_f = V_3$, связанное с парой “аттрактор–репеллер”

$$A_f = A_3 = \omega_1 \cup W_\sigma^u \cup \omega_2, \quad R_f = \alpha.$$

В этом случае $V_f = W_\alpha^u \setminus \alpha$ гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ и фактормногообразие $\hat{V}_f$ гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Проекция $p_f: V_f \rightarrow \hat{V}_f$ является накрытием и индуцирует эпиморфизм $\eta_f: \pi_1(\hat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$. Пространство

$$\hat{L}_f^s = p_f(W_\sigma^s \setminus \sigma)$$

является двумерным тором, гладко вложенным в многообразие $\hat{V}_f$. При этом тор $\hat{L}_f^s$ является гомотопически нетривиальным и $\eta_f(e_{\hat{L}_f^s}(\pi_1(\hat{L}_f^s))) = \mathbb{Z}$. Набор

$$S_f = (\hat{V}_f, \eta_f, \hat{L}_f^s)$$

называется *схемой диффеоморфизма* f .

На рис. 34 представлены геометрические составляющие схем $S_f, S_{f'}$ диффеоморфизмов f, f' , фазовые портреты которых изображены на рис. 33. В действительности на этом рисунке изображены фундаментальные области действия диффеоморфизмов f, f' на $V_f, V_{f'}$ соответственно. Каждая фундаментальная область является трехмерным кольцом, из которого пространства орбит $\hat{V}_f, \hat{V}_{f'}$ получаются отождествлением граничных сфер кольца посредством диффеоморфизмов f, f' соответственно. При этом пространства орбит $\hat{L}_f^s, \hat{L}_{f'}^s$ получаются из цилиндров отождествлением окружностей с одинаковыми номерами.

Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмов f и f' называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi}: \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$ со следующими свойствами:

- 1) $\eta_f = \eta_{f'} \hat{\varphi}_*$;
- 2) $\hat{\varphi}(\hat{L}_f^s) = \hat{L}_{f'}^s$.

ТЕОРЕМА 4.14 [12], [44]. Диффеоморфизмы f, f' топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы $S_f, S_{f'}$ эквивалентны.

Идея доказательства состоит в следующем. Согласно предложению 1.1 объемлющее многообразие представляется в виде объединения

$$M^3 = V_f \cup W_\sigma^u \cup \text{NW}(f).$$

В силу условия 1) эквивалентности схем, из существования гомеоморфизма $\hat{\varphi}: \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$, осуществляющего эквивалентность схем $S_f, S_{f'}$, следует существование гомеоморфизма $\varphi: V_f \rightarrow V_{f'}$, сопрягающего диффеоморфизмы $f|_{V_f}, f'|_{V_{f'}}$ и такого, что $\varphi(W_\sigma^s \setminus \sigma) = W_{\sigma'}^s \setminus \sigma'$ (см. рис. 35). В общем случае этот гомеоморфизм не продолжается на множество W_σ^u . Однако φ можно модифицировать в линеаризующей окрестности N_σ так, чтобы он переводил слои слоения F_σ^s в слои слоения $F_{\sigma'}^s$ и, следовательно, единственным образом продолжался до искомого сопрягающего гомеоморфизма.

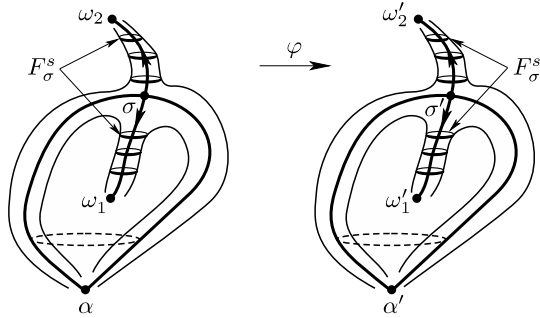


Рис. 35. Построение сопрягающего гомеоморфизма

Для этого определим произвольный сопрягающий гомеоморфизм ψ^s на репеллере R_f . Тогда в линеаризующей окрестности седловой точки σ корректно определен сопрягающий гомеоморфизм ϕ_σ , являющийся произведением ограничения φ на W_σ^u и ограничения ψ^s на W_σ^s . Таким образом, $\xi_\sigma = \phi_\sigma^{-1}\varphi$ является гомеоморфизмом, определенным в некоторой окрестности седла σ , коммутирующим с диффеоморфизмом f и тождественным на W_σ^u . Теперь задача состоит в том, чтобы построить гомеоморфизм, коммутирующий с f , совпадающий с тождественным отображением в окрестности σ и совпадающий с ξ_σ вне немного большей окрестности. Переходя к пространству орбит, эту задачу можно решить стандартными топологическими методами.

4.2.2. Градиентно-подобные диффеоморфизмы. Заметим, что градиентно-подобные 3-диффеоморфизмы, в отличие от 2-диффеоморфизмов, уже могут иметь гетероклинические пересечения по кривым. Ниже мы описываем полный топологический инвариант градиентно-подобного 3-диффеоморфизма f , различающий и топологию вложения седловых сепаратрис, и характер гетероклинического пересечения.

Положим

$$\begin{aligned} A_f &= W_{\Omega^0 \cup \Omega^1}^u, & R_f &= W_{\Omega^2 \cup \Omega^3}^s, \\ V_f &= M^3 \setminus (A_f \cup R_f), & \hat{V}_f &= V_f/f. \end{aligned}$$

Согласно п. 1.3, V_f является характеристическим многообразием, а $\widehat{V}_f$ – характеристическим фактормногообразием для диффеоморфизма f . Поскольку $\dim A_f \leq 1$ и $\dim R_f \leq 1$, то в силу предложения 1.4 множества A_f , R_f , V_f и $\widehat{V}_f$ связные и естественная проекция $p_f: V_f \rightarrow \widehat{V}_f$ является накрытием, индуцирующим эпиморфизм $\eta_f: \pi_1(\widehat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$.

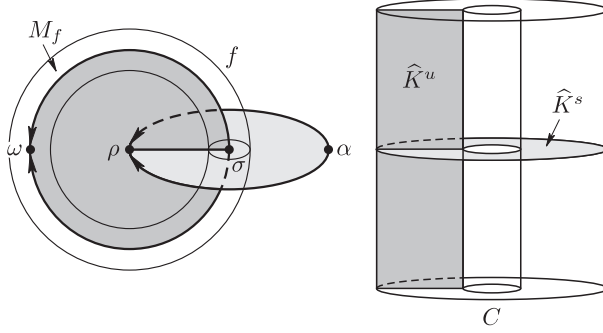


Рис. 36. Схема градиентно-подобного диффеоморфизма f на 3-сфере

На рис. 36 слева изображен фазовый портрет градиентно-подобного диффеоморфизма f трехмерной сферы, неблуждающее множество которого состоит из источника α , стока ω и двух седловых точек σ , ρ индекса Морса 1 и 2 соответственно, двумерные сепаратрисы которых пересекаются некомпактной гетероклинической кривой. В этом случае аттрактор $A_f = \text{cl}(W_\sigma^u)$ является замкнутой кривой, которая гомеоморфна окружности и обладает захватывающей окрестностью M_f , гомеоморфной заполненному тору и такой, что $M_f \setminus \text{int } f(M_f)$ гомеоморфно $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$. Таким образом, характеристическое пространство $\widehat{V}_f$ для рассматриваемого диффеоморфизма гомеоморфно трехмерному тору $\mathbb{T}^3$.

Обозначим через k_i число периодических орбит в множестве Ω^i . Положим

$$\begin{aligned} \widehat{W}_i^s &= p_f(W_i^s \setminus \mathcal{O}_i) \quad \text{для} \quad i = k_0 + 1, \dots, k_1, \\ \widehat{W}_i^u &= p_f(W_i^u \setminus \mathcal{O}_i) \quad \text{для} \quad i = k_1 + 1, \dots, k_2 \end{aligned}$$

и

$$\hat{L}_f^s = \bigcup_{i=k_0+1}^{k_1} \widehat{W}_i^s, \quad \hat{L}_f^u = \bigcup_{i=k_1+1}^{k_2} \widehat{W}_i^u.$$

Каждая компонента связности множеств $\hat{L}_f^s$ и $\hat{L}_f^u$ является тором или бутылкой Клейна, нетривиальной относительно η_f на многообразии $\widehat{V}_f$. Множества $\hat{L}_f^s$ и $\hat{L}_f^u$ либо не пересекаются, либо имеют трансверсальное пересечение вдоль конечного числа замкнутых кривых $\hat{\gamma}$, являющихся проекциями гетероклинических кривых.

При этом если $\eta_f([\hat{\gamma}]) = 0$, то множество $p_f^{-1}(\hat{\gamma})$ состоит из счетного числа компонент связности, каждая из которых является компактной гетероклинической кривой. Если же $|\eta_f([\hat{\gamma}])| = l > 0$, то множество $p_f^{-1}(\hat{\gamma})$ состоит из l

компонент связности, каждая из которых является некомпактной гетероклинической кривой. Непосредственно отсюда получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Любой градиентно-подобный 3-диффеоморфизм имеет конечное число некомпактных гетероклинических кривых.*

Набор

$$S_f = (\hat{V}_f, \eta_f, \hat{L}_f^s, \hat{L}_f^u)$$

называется *схемой* диффеоморфизма f .

Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмов f и f' называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi}: \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$ со следующими свойствами:

- 1) $\eta_f = \eta_{f'} \hat{\varphi}_*$;
- 2) $\hat{\varphi}(\hat{L}_f^s) = \hat{L}_{f'}^s$ и $\hat{\varphi}(\hat{L}_f^u) = \hat{L}_{f'}^u$.

На рис. 36 справа изображено многообразие $C = \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \times [0, 1]$, из которого $\hat{V}_f$ получается отождествлением верхнего и нижнего колец, а также внутреннего кольца с наружным. Торы $\hat{L}_f^s, \hat{L}_f^u$ получаются после этого отождествления из колец $K^s = \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \times (1/2)$, $K^u = \{s_0\} \times [0, 1] \times [0, 1]$ соответственно.

ТЕОРЕМА 4.15 [14], [44]. *Диффеоморфизмы f и f' топологически сопряжены тогда и только тогда, когда схемы S_f и $S_{f'}$ эквивалентны.*

Идея доказательства достаточности условий теоремы 4.15 аналогична идее, использованной для класса Пикстона. Разница состоит в том, что при наличии гетероклинических кривых линеаризующие окрестности различных седловых орбит могут пересекаться, поэтому модификацию гомеоморфизма φ надо делать согласованной в пересекающихся окрестностях. Этого удастся добиться построением согласованной системы окрестностей, которая, помимо свойств 1) и 2) определения 1.2, обладает следующим дополнительным свойством.

3) Если множество $H = W_{\Omega_1}^s \cap W_{\Omega_2}^u$ непусто, то существует его f -инвариантная окрестность $N(H) \subset M^3$, оснащенная f -инвариантным слоением G , состоящим из двумерных дисков, трансверсальных H и таких, что для любой точки $x \in N_{i_1} \cap N_{i_2} \cap N(H)$, $j_{i_1} < j_{i_2}$, имеют места соотношения

$$(F_{i_1, x}^s \cap G_x \cap N_{i_2}) \subset F_{i_2, x}^s, \quad (F_{i_2, x}^u \cap G_x \cap N_{i_1}) \subset F_{i_1, x}^u,$$

где G_x – слой слоения G , проходящий через точку x .

Используя это свойство, гомеоморфизм $\varphi: V_f \rightarrow V_f$, являющийся поднятием гомеоморфизма $\hat{\varphi}$, сначала модифицируем в окрестности аттрактора A_f до гомеоморфизма, сохраняющего двумерные устойчивые слоения. А затем, аналогичным образом, уже построенный гомеоморфизм модифицируем в окрестности репеллера R_f до гомеоморфизма, сохраняющего двумерные неустойчивые слоения, с сохранением достигнутой на предыдущем шаге инвариантности устойчивых двумерных слоений.

4.2.3. Общий случай. Формально определение *схемы* и эквивалентности схем для произвольного сохраняющего ориентацию 3-диффеоморфизма Морса–Смела f дословно переносится с градиентно-подобного случая. Это набор

$$S_f = (\hat{V}_f, \eta_f, \hat{L}_f^s, \hat{L}_f^u).$$

Однако уже не все компоненты линейной связности множеств $\hat{L}_f^s$, $\hat{L}_f^u$ являются компактными, каждая из них гомеоморфна двумерному тору или бутылке Клейна с пустым, конечным или счетным множеством выколотых точек, равномоощному множеству гетероклинических орбит на соответствующей двумерной седловой сепаратрисе.

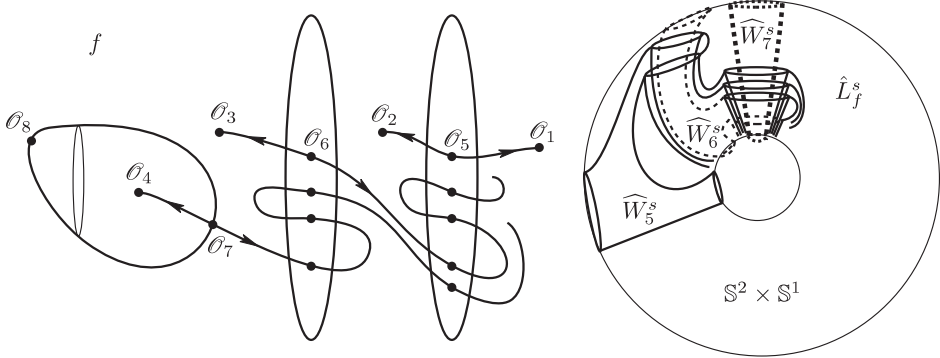


Рис. 37. Схема диффеоморфизма Морса–Смейла на 3-сфере

На рис. 37 изображены фазовый портрет и схема диффеоморфизма f (в виде фундаментальной области с неотожествленными границами). При этом предполагается, что неблуждающее множество диффеоморфизма f неподвижно, периодические орбиты пронумерованы так, как показано на рисунке, и $\widehat{W}_j^s = p_f(W_{\theta_j}^s)$, $j = 5, 6, 7$. На рис. 38 изображено объединение $\hat{L}_f^s = \widehat{W}_5^s \cup \widehat{W}_6^s \cup \widehat{W}_7^s$, где $\widehat{W}_7^s$ – непроколотый тор, $\widehat{W}_6^s$ – тор с конечным числом выколотых точек, $\widehat{W}_5^s$ – тор со счетным числом выколотых точек.

Заметим, что в примере на рис. 37 множество $\hat{L}_f^u$ пусто, а множество $\hat{L}_f^s$ состоит из одной компоненты связности. В общем случае каждое из множеств $\hat{L}_f^s$, $\hat{L}_f^u$ состоит из конечного числа компонент связности, подобных изображенным на рис. 38 и, в силу λ -леммы 1.1, является двумерной ламинацией.

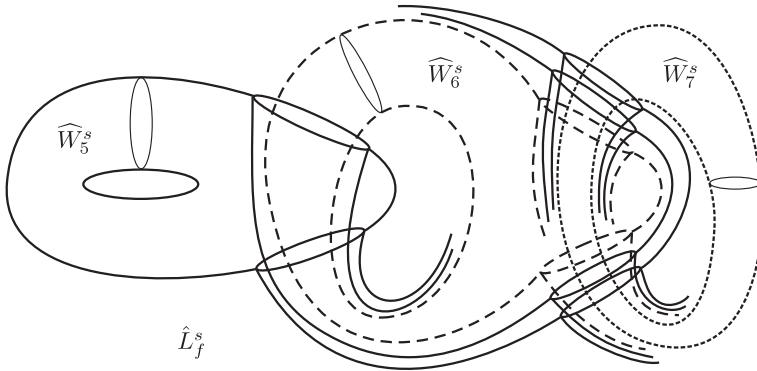


Рис. 38. Объединение проекций в $\hat{V}_f$ двумерных сепаратрис

Кроме того, множества $\hat{L}_f^s, \hat{L}_f^u$ имеют трансверсальное (непустое в общем случае) пересечение.

Несмотря на явное усложнение инварианта, классификационный результат остается неизменным.

ТЕОРЕМА 4.16 [18]. *Диффеоморфизмы f, f' топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.*

Сохраняется и идея построения сопрягающего гомеоморфизма с помощью согласованной системы окрестностей с дополнительным свойством 3). Объясним его тонкости в общем случае.

Для построения сопрягающего гомеоморфизма ϕ_σ заметим, что ограничение гомеоморфизма φ на двумерное седловое многообразие продолжается по непрерывности единственным образом на гетероклинические точки (которых не более чем счетное число). Поэтому φ можно считать определенным на всех двумерных неустойчивых и устойчивых многообразиях. Сопрягающий гомеоморфизм ψ^s на репеллере R_f строится так, чтобы он сохранял двумерные согласованные неустойчивые слоения.

Трудность общего случая состоит в том, что гомеоморфизм $\xi_\sigma = \phi_\sigma^{-1}\varphi$ нужно продолжать до тождественного гомеоморфизма в окрестности σ , сохраняя неизменными пересечения этой окрестности со всеми седловыми сепаратрицами. Кроме того, поскольку процесс построения проводится индуктивно (по индексу i), то необходимо сохранять свойства гомеоморфизмов, которые мы уже построили в окрестности предыдущих седел. Эти окрестности пересекают окрестность седла σ вдоль вертикальных трубок, в которых мы хотим сохранить отображение тождественным. Наконец, продолжение ξ_σ нужно строить, сохраняя еще и двумерные слоения. Для того чтобы решить эту задачу, мы сначала максимально упрощаем геометрию этих пересечений, сводя все конструкции к $\mathbb{R}^3$ с помощью линеаризующих отображений. Затем применяем следствия из классических топологических результатов.

4.2.4. Связь динамики с топологией объемлющего многообразия. В этом пункте устанавливаются некоторые соотношения, связывающие топологию объемлющего многообразия M^3 с количеством седловых и узловых периодических точек диффеоморфизма Морса–Смейла f . В этом пункте мы обозначаем через r_f число седловых, а через l_f число узловых точек диффеоморфизма f и полагаем

$$g_f = \frac{r_f - l_f + 2}{2}.$$

Классификация 3-многообразий, допускающих диффеоморфизмы Морса–Смейла без гетероклинических кривых. Пусть $MS_*(M^3)$ обозначает класс диффеоморфизмов Морса–Смейла без гетероклинических кривых на 3-многообразиях. Классификационная теорема для фазовых пространств диффеоморфизмов этого класса имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 4.17 [13], [44]. *Для любого диффеоморфизма $f \in MS_*(M^3)$ число g_f является целым неотрицательным числом и справедливы следующие*

утверждения:

- 1) если $g_f = 0$, то M^3 есть 3-сфера;
- 2) если $g_f > 0$, то M^3 есть связная сумма g_f копий $S^2 \times S^1$.

Обратно, для любых неотрицательных целых чисел r, l, g таких, что число $g = (r - l + 2)/2$ является целым и неотрицательным, существует диффеоморфизм $f \in MS_*(M^3)$ со следующими свойствами:

- (а) M^3 является 3-сферой, если $g = 0$, и связной суммой g копий $S^2 \times S^1$, если $g > 0$;
- (б) неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит из r седловых и l узловых точек.

Непосредственным следствием теоремы 4.17 является следующий факт.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Если объемлющее 3-многообразие диффеоморфизма Морса–Смейла f отлично от S^3 и связной суммы конечного числа копий $S^2 \times S^1$, то блуждающее множество f обязательно содержит гетероклинические кривые.

Известно, что род Хегора аддитивен по отношению к связным суммам 3-многообразий [70]. Поскольку род Хегора $g(S^2 \times S^1)$ многообразия $S^2 \times S^1$ равен 1, то род Хегора связной суммы $g(\#_{i=1}^k (S^2 \times S^1)_i)$ равен числу k слагаемых в связной сумме. Кроме того, фундаментальная группа $\pi_1(\#_{i=1}^k (S^2 \times S^1)_i)$ изоморфна свободному произведению k экземпляров группы целых чисел $\mathbb{Z}$. Отсюда, из теоремы 4.17 и теоремы Зейферта–Ван-Кампена вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть f – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса–Смейла, заданный на многообразии M^3 , для которого выполняется одно из следующих условий:

- 1) $g(M^3) \neq g_f$;
- 2) фундаментальная группа $\pi_1(M^3)$ не изоморфна свободному произведению g_f экземпляров группы целых чисел $\mathbb{Z}$.

Тогда f имеет гетероклинические кривые.

Из теоремы 4.17 следует, что любой диффеоморфизм Морса–Смейла на неприводимом многообразии, отличном от 3-сферы, с необходимостью имеет гетероклинические кривые (компактные или некомпактные). Следующая теорема уточняет этот результат для полярных систем.

ТЕОРЕМА 4.18 [45]. Двумерное инвариантное многообразие каждой седловой точки полярного градиентно-подобного диффеоморфизма f на неприводимом многообразии содержит некомпактную гетероклиническую кривую.

Разбиение Хегора объемлющего 3-многообразия градиентно-подобного диффеоморфизма. Пусть $f: M^3 \rightarrow M^3$ – диффеоморфизм Морса–Смейла. Согласно предложению 1.3, с любой стоковой точкой ω диффеоморфизма f связано множество L_ω (возможно, пустое) одномерных неустойчивых сепаратрис ℓ седловых точек σ таких, что

$$\text{cl}(\ell) = \sigma \cup \ell \cup \omega.$$

Так как W_ω^s гомеоморфно $\mathbb{R}^3$ (см. предложение 1.1) и множество $F_\omega = L_\omega \cup \omega$ является объединением простых дуг с единственной общей точкой ω , то по аналогии с пучком дуг в $\mathbb{R}^3$ мы назовем F_ω *пучком одномерных неустойчивых сепаратрис* и дадим следующее определение.

Пучок сепаратрис F_ω назовем *ручным*, если существует гомеоморфизм $\psi_\omega: W_\omega^s \rightarrow \mathbb{R}^n$ такой, что $\psi_\omega(F_\omega)$ – пучок лучей в $\mathbb{R}^n$. В противном случае пучок сепаратрис назовем *диким*. Если α – источник диффеоморфизма f , то аналогично определяется ручной (дикий) пучок F_α одномерных устойчивых сепаратрис.

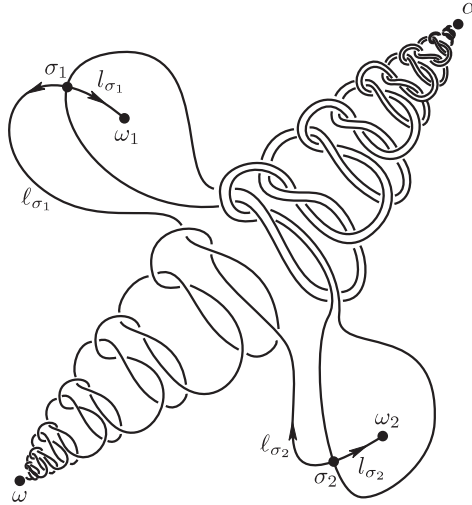


Рис. 39. Градиентно-подобный диффеоморфизм на S^3 с умеренно диким пучком сепаратрис

На рис. 39 изображен фазовый портрет диффеоморфизма на S^3 . Дикость пучка сепаратрис F_ω в этом случае доказана Г. Дебруннером и Р. Фоксом [29]. Такой тип пучков из $n > 1$ дуг они в своей работе назвали умеренно диким, поскольку извлечение из пучка любой дуги делает его ручным.

Обозначим через $MS_0(M^3)$ подкласс 3-диффеоморфизмов Морса–Смейла, все пучки одномерных сепаратрис которого являются ручными. Для рассмотренного класса диффеоморфизмов имеют место следующие результаты.

ТЕОРЕМА 4.19 [47], [44]. *Объемлющее многообразие M^3 градиентно-подобного диффеоморфизма $f \in MS_0(M^3)$ допускает разбиение Хегора рода g_f .*

Непосредственно из доказательства теоремы 4.19 вытекает следующий факт.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Если объемлющее многообразие M^3 диффеоморфизма $f \in MS_0(M^3)$ имеет рода Хегора $g(M^3)$, то $r_f \geq 2g(M^3)$ и эта оценка точна.*

Из теоремы 4.19 вытекает следующее достаточное условие наличия гетероклинических точек у 3-диффеоморфизма Морса–Смейла.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть $f \in \text{MS}_0(M^3)$ и $g(M^3) > g_f$. Тогда диффеоморфизм f имеет гетероклинические точки. В частности, f не вкладывается в поток.

Из неравенств Морса (см. предложение 1.1) следует, что неблуждающее множество диффеоморфизма Морса–Смейла на 3-многообразии не может состоять ровно из трех точек. Если неблуждающее множество состоит ровно из четырех точек, то все они неподвижные, а диффеоморфизм является градиентно-подобным. При этом, как показывает следующая теорема, последние в некоторых случаях с необходимостью имеют гетероклинические кривые.

ТЕОРЕМА 4.20 [47]. Пусть диффеоморфизм Морса–Смейла f задан на линзовом пространстве $M^3 = L_{p,q}$ и его неблуждающее множество состоит в точности из четырех точек. Тогда неблуждающие точки являются неподвижными стоком, источником и двумя седлами (с разными индексами Морса), а блуждающее множество диффеоморфизма f содержит по крайней мере p некомпактных гетероклинических кривых.

5. Многомерные системы

В этом разделе излагаются классификационные результаты для систем Морса–Смейла на многообразиях размерности $n > 3$.

Как и ранее, для систем (потоков или каскадов) Морса–Смейла, заданных на многообразии M^n , через Ω^j , $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, мы будем обозначать множество всех ее неподвижных точек, имеющих индекс Морса (размерность неустойчивого многообразия) j , и через $|\Omega^j|$ – мощность множества Ω^j . По аналогии с трехмерным случаем, для любого n -мерного потока или диффеоморфизма Морса–Смейла ϕ будем полагать

$$g_\phi = \frac{r_\phi - l_\phi + 2}{2},$$

где r_ϕ – число седловых точек с индексом Морса 1 или $n - 1$, а l_ϕ – число узловых точек системы ϕ . Кроме того, обозначим через k_ϕ число седловых точек системы ϕ с индексом Морса, отличным от 1 и $n - 1$.

5.1. Топологическая классификация систем с седлами коразмерности 1. Естественным обобщением систем Морса–Смейла, заданных на трехмерных многообразиях, на случай большей размерности являются системы, множество седловых точек которых состоит из точек индексов 1 и $n - 1$ – *седел коразмерности 1*, поэтому первые классификационные результаты были получены для таких систем. Перечислим эти результаты.

Обозначим через $G(M^n)$ класс градиентно-подобных систем (потоков и каскадов), заданных на связном замкнутом многообразии M^n , инвариантные многообразия седловых точек которых имеют размерность 1 или $n - 1$ и не содержат гетероклинических пересечений.

Заметим сразу, что в случае, когда несущее многообразие M^n является сферой S^n , класс $G(M^n)$ исчерпывает множество градиентно-подобных систем без гетероклинических пересечений в силу следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть ϕ – градиентно-подобный поток или диффеоморфизм без гетероклинических пересечений на сфере S^n , $n \geq 4$. Тогда множество его седловых точек состоит только из точек индексов Морса 1 и $n - 1$.

Для потоков это предложение доказал С.Ю. Пилюгин [89], а обобщение на случай каскадов сделано в [39]. Поясним идею доказательства.

Пусть система ϕ из класса $G(M^n)$ имеет седловую неподвижную точку σ , индекс Морса j которой принадлежит множеству $\{2, \dots, n-2\}$. Так как в рассматриваемом классе инвариантные многообразия различных седловых точек не пересекаются, то из предложения 1.3 следует, что замыкания $\text{cl}(W_\sigma^u)$ и $\text{cl}(W_\sigma^s)$ инвариантных многообразий точки σ содержат кроме самих многообразий в точности одну неблуждающую точку (стоковую и источниковую соответственно) и, следовательно, являются сферами размерностей j и $n - j$ соответственно. Эти сферы пересекаются в единственной точке σ , поэтому их индекс пересечения по модулю равен единице. Так как гомотопические группы $H_j(S^n)$, $H_{n-j}(S^n)$ тривиальны, то найдется сфера S^j , гомологичная сфере $\text{cl}(W_\sigma^u)$ и не пересекающаяся со сферой $\text{cl}(W_\sigma^s)$. Следовательно, индекс пересечения сфер S^j , $\text{cl}(W_\sigma^s)$ равен нулю. Так как индекс пересечения является гомотопическим инвариантом (см., например, [97; § 69]), получаем противоречие.

Топология несущего многообразия системы ϕ из класса $G(M^n)$ снова связана с числом g_ϕ и описывается следующей теоремой, обобщающей теорему 4.17.

ТЕОРЕМА 5.1 [39]. Для любой системы $\phi \in G(M^n)$ число g_ϕ является целым неотрицательным числом и справедливы следующие утверждения:

- 1) если $g_\phi = 0$, то M^n есть n -сфера;
- 2) если $g_\phi > 0$, то M^n есть связная сумма g_ϕ копий $S^{n-1} \times S^1$.

Первый классификационный результат для многомерных потоков Морса–Смейла получен С.Ю. Пилюгиным [89], где для потока $f^t \in G(S^n)$, $n \geq 3$, введен топологический инвариант, названный *фазовой диаграммой*. Фазовая диаграмма является многомерным обобщением графа Пейшото и представляет собой ориентированный граф Γ_{f^t} , множество вершин которого изоморфно множеству Ω , а множество ребер – множеству сепаратрис седловых точек. Каждое ребро графа Γ_{f^t} ориентировано в соответствии с убыванием индексов Морса неподвижных точек, соответствующих инцидентным этому ребру вершинам. С.Ю. Пилюгиным доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.2 [89]. Потоки $f^t, f'^t \in G(S^n)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их фазовые диаграммы Γ_{f^t} , $\Gamma_{f'^t}$ изоморфны посредством изоморфизма, сохраняющего ориентацию ребер.

Идея доказательства теоремы основана на выделении пары “аттрактор–репеллер”

$$A_{f^t} = \Omega^0 \cup W_{\Omega^1}^u, \quad R_{f^t} = \Omega^n \cup W_{\Omega^{n-1}}^s$$

и рассмотрении секущей Σ_{f^t} ограничения потока f^t на множество

$$S^n \setminus (A_{f^t} \cup R_{f^t}).$$

Аналогично трехмерному случаю можно определить эту секущую как множество уровня 1.5 самоиндексирующейся энергетической функции и доказать, что она диффеоморфна $(n - 1)$ -сфере. Следы

$$\mathcal{C}_{f^t}^s = W_{\Omega^1}^s \cap \Sigma_{f^t} \quad \text{и} \quad \mathcal{C}_{f^t}^u = W_{\Omega^{n-1}}^u \cap \Sigma_{f^t}$$

соответственно устойчивых и неустойчивых сепаратрис размерности $n - 1$ на этой секущей являются $(n - 2)$ -сферами, гладко вложенными в Σ_{f^t} . В работе [89] доказывается, что взаимное расположение этих сфер однозначно определяется фазовой диаграммой, т. е. из изоморфизма фазовых диаграмм Γ_{f^t} , $\Gamma_{f^{tt}}$ следует существование гомеоморфизма $h: \Sigma_{f^t} \rightarrow \Sigma_{f^{tt}}$ такого, что

$$h(\mathcal{C}_{f^t}^s) = \mathcal{C}_{f^{tt}}^s, \quad h(\mathcal{C}_{f^t}^u) = \mathcal{C}_{f^{tt}}^u.$$

Далее гомеоморфизм h продолжается на множества A_{f^t} , R_{f^t} .

Эта же идея использовалась В. З. Гринесом, Е. Я. Гуревич, О. В. Починкой [38] для топологической классификации потоков из класса $G(M^n)$, где инвариантом выступала энергетическая функция. К. Мейер в [72] ввел понятие *эквивалентности* энергетических функций φ , φ' потоков Морса–Смейла f^t , f^{tt} , которое для градиентно-подобных систем заключается в существовании сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов

$$H: M^n \rightarrow M^n \quad \text{и} \quad \chi: [0, n] \rightarrow [0, n],$$

удовлетворяющих равенству $\varphi' H = \chi \varphi$.

Из [72] следует, что класс эквивалентности энергетических функций является полным топологическим инвариантом градиентно-подобных потоков на поверхностях. Для обобщения этого результата на случай размерности 3 и выше в [38] понятие эквивалентности функций усилено следующим образом.

Самоиндексирующиеся энергетические функции $\varphi, \varphi': M^n \rightarrow [0, n]$ потоков $f^t, f^{tt} \in G(M^n)$, $n \geq 3$, *согласованно эквивалентны*, если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $H: M^n \rightarrow M^n$ и $\chi: [0, n] \rightarrow [0, n]$ такие, что:

- 1) $\varphi' H = \chi \varphi$;
- 2) $H(\mathcal{C}_{f^t}^s) = W_{\Omega^1}^s \cap H(\Sigma_{f^t})$, $H(\mathcal{C}_{f^t}^u) = W_{\Omega^{n-1}}^u \cap H(\Sigma_{f^t})$.

ТЕОРЕМА 5.3 [38]. *Потоки $f^t, f^{tt} \in G(M^n)$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда согласованно эквивалентны их самоиндексирующиеся энергетические функции.*

Первый классификационный результат для каскадов Морса–Смейла на многообразиях размерности $n \geq 4$ был получен В. З. Гринесом, Е. В. Жужомой и В. С. Медведевым [48] для класса, обобщающего класс Пикстона (см. п. 4.2.1), а именно класса сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла на сфере S^n , $n \geq 4$, неблуждающее множество которых состоит в точности из трех узлов и одного седла. Покажем, что для любого такого диффеоморфизма f его седловая точка σ имеет индекс 1 или $n - 1$. Предположим для определенности, что один узел из трех является источником α , а два других

являются стоками ω_1, ω_2 (случай с двумя источниками и одним стоком получается рассмотрением f^{-1}). В силу предложения 1.1 несущая сфера представляется в виде

$$S^n = \alpha \cup W_{\omega_1}^s \cup W_{\omega_2}^s \cup W_{\sigma}^s,$$

тогда многообразие W_{σ}^s входит в границу каждого из многообразий $W_{\omega_1}^s, W_{\omega_2}^s$. Из предложения 1.3 следует, что тогда обе точки ω_1, ω_2 содержатся в замыкании неустойчивой сепаратрисы седла σ . Следовательно, точка σ делит свое неустойчивое многообразие, а это возможно только в случае $\dim W_{\sigma}^u = 1$.

ТЕОРЕМА 5.4 [48]. *Диффеоморфизмы f, f' из класса Пикстона на сфере S^n , $n \geq 4$, топологически сопряжены тогда и только тогда, когда индексы Морса их седел одинаковы (либо 1, либо $n - 1$).*

Этот результат контрастирует со случаем $n = 3$ (см. п. 4.2.1), в котором имеется счетное семейство попарно несопряженных диффеоморфизмов Морса–Смейла с одним седлом и тремя узлами [12]. Более простой инвариант в многомерном случае объясняется следующим. Из предложения 1.3 следует, что замыкание каждой сепаратрисы седловой точки содержит кроме этой сепаратрисы и седла в точности одну узловую точку и, следовательно, является либо дугой, либо сферой размерности $n - 1$, гладкой всюду, кроме узловой точки.

В работах Дж. Кантрелла, Ч.Г. Эдвардса и Р. Кирби [27], [60] доказано, что при $n \geq 4$ дуга и сфера размерности $n - 1$ не могут быть дико вложенными в конечном числе точек. Поэтому замыкания сепаратрис являются ручно вложенными, и удастся доказать, что в размерности $n \geq 4$ нет обнаруженных Пикстоном эффектов.

Эти результаты стали стимулом для рассмотрения класса $G_1(M^n) \subset G(M^n)$ диффеоморфизмов Морса–Смейла, для которых все неустойчивые инвариантные многообразия седловых точек одномерны. В.З. Гринесом, Е.Я. Гуревич, В.С. Медведевым [35] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.5 [35]. *Неблуждающее множество произвольного диффеоморфизма $f \in G_1(M^n)$ содержит в точности одну источниковую точку, а несущее многообразие M^n является сферой S^n .*

В работах [35], [36] получена полная топологическая классификация диффеоморфизмов из класса $G_1(S^n)$. Как и в случае потоков из класса $G(S^n)$, каждому диффеоморфизму $f \in G_1(S^n)$ поставлен в соответствие ориентированный граф Γ_f , аналогичный различающему графу Безденежных–Гринеса (и, в свою очередь, обобщающий граф Пейшото). Множество вершин графа Γ_f изоморфно множеству периодических точек, множество ребер – множеству сепаратрис седловых периодических точек, ориентация на ребрах согласована с убыванием индексов периодических точек. Динамика на множестве периодических точек диффеоморфизма f индуцирует автоморфизм P_f графа Γ_f .

ТЕОРЕМА 5.6 [35], [36]. *Диффеоморфизмы $f, f' \in G(M^n)$, $n \geq 4$, топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существует сохраняющий ориентацию ребер изоморфизм графов $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$, сопрягающий автоморфизмы $P_f, P_{f'}$.*

Кроме того, в [36] введено множество Γ допустимых графов и показано, что для любого диффеоморфизма $f \in G_1(M^n)$ граф Γ_f является допустимым. Справедлива следующая теорема реализации.

ТЕОРЕМА 5.7 [36]. *Для любого допустимого графа $\Gamma \in \Gamma$ существует гомеоморфизм $f \in G_1(S^n)$ такой, что $\Gamma_f = \Gamma$.*

Необходимость условия теоремы 5.6 следует непосредственно из определения топологической сопряженности; доказательство достаточности заключается в построении гомеоморфизма $H: S^n \rightarrow S^n$, сопрягающего диффеоморфизмы $f, f' \in G_1(S^n)$ с изоморфными графами. Этот гомеоморфизм строится в два этапа. На первом этапе определяется гомеоморфизм h_0 , сопрягающий ограничения диффеоморфизмов f, f' на устойчивые многообразия стоковых точек и переводящий одномерные сепаратрисы диффеоморфизма f , лежащие в этих многообразиях, в соответствующие им при изоморфизме графов одномерные сепаратрисы диффеоморфизма f' . Такой гомеоморфизм построен в работе [35].

На втором этапе построенный гомеоморфизм продолжается на замыкания $(n-1)$ -мерных устойчивых сепаратрис. При этом используется тот факт, что пространство между границей каждой линеаризующей окрестности $N_i \subset N_f$ седловой точки σ_i (см. определение 1.2) и ее образом относительно гомеоморфизма, построенного на первом шаге, гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, 1] \times S^0$ (доказательство этого утверждения базируется на нетривиальных и относительно новых результатах многомерной топологии). Переходом к пространству орбит это утверждение сводится к следующему.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Пусть $h: S^1 \times \mathbb{B}^{n-1} \rightarrow \text{int}(S^1 \times \mathbb{B}^{n-1})$ – гомеоморфизм на образ такой, что $h(\partial S^1 \times \mathbb{B}^{n-1})$ является топологическим подмногообразием и*

$$h(S^1 \times \{O\}) = (S^1 \times \{O\}).^8$$

Тогда многообразие $W = S^1 \times \mathbb{B}^{n-1} \setminus \text{int}(S^1 \times \mathbb{B}^{n-1})$ гомеоморфно прямому произведению $S^1 \times S^{n-2} \times [0, 1]$.

Для случая $n = 2$ справедливость предложения 5.2 следует из двумерной “теоремы о кольце”, доказанной Т. Радо [96], при $n = 3$ – из результатов Ф. Вальдхаузена [106], а при $n \geq 4$ – из топологической теоремы об s -кобордизме (краткий обзор связанной с этой теоремой проблематики приведен в [36]).

Топологическая классификация диффеоморфизмов из класса $G(M^n)$ получена В. З. Гринесом, Е. Я. Гуревич, О. В. Починкой в [39]. В этой работе каждому диффеоморфизму $f \in G(M^n)$ поставлена в соответствие схема S_f , обобщающая схему трехмерного диффеоморфизма Морса–Смейла. А именно, введены характеристическое многообразие $V_f = M^n \setminus (A_f \cup R_f)$, факторпространство $\hat{V}_f = V_f/f$, естественная проекция $p_f: V_f \rightarrow \hat{V}_f$, индуцирующая эпиморфизм $\eta_f: \pi_1(\hat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$, и определены проекции $(n-1)$ -мерных устойчивых и неустойчивых многообразий:

$$\hat{L}_f^s = \bigcup_{p \in \Omega_f^1} p_f(W_p^s \setminus p), \quad \hat{L}_f^u = \bigcup_{q \in \Omega_f^{n-1}} p_f(W_q^u \setminus q).$$

⁸Здесь O – центр шара $\mathbb{B}^{n-1}$.

Каждая компонента связности множеств $\hat{L}_f^s, \hat{L}_f^u$ гомеоморфна либо прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, либо неориентируемому локально-тривиальному расслоению над окружностью $\mathbb{S}^1$ со слоем $\mathbb{S}^{n-1}$, названному обобщенной бутылкой Клейна.

Для схем $S_f, S_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in G(M^n)$ введено понятие эквивалентности, аналогичное определению, данному в п. 4.2.1.

Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмов f и f' называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi}: \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$ со следующими свойствами:

- 1) $\eta_f = \eta_{f'} \hat{\varphi}_*$;
- 2) $\hat{\varphi}(\hat{L}_f^s) = \hat{L}_{f'}^s$ и $\hat{\varphi}(\hat{L}_f^u) = \hat{L}_{f'}^u$.

ТЕОРЕМА 5.8 [39]. *Диффеоморфизмы $f, f' \in G(M^n)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы $S_f, S_{f'}$ эквивалентны.*

Этот инвариант можно упростить для класса $G^*(S^n) \subset G(S^n)$ диффеоморфизмов на сфере S^n , $n > 3$, таких, что для любого $f \in G^*(S^n)$ выполняются следующие условия:

- 1) множество $NW(f)$ состоит только из неподвижных точек;
- 2) для любой точки $p \in NW(f)$ ограничение диффеоморфизма f на множество W_p^δ , $\delta \in \{s, u\}$, сохраняет его ориентацию.

Из предложения 1.3 следует, что для любой седловой точки σ диффеоморфизма $f \in G^*(S^n)$ замыкание ее инвариантного многообразия W_σ^δ размерности $n-1$ содержит кроме самого этого многообразия в точности одну неподвижную точку. Эта точка является стоковой в случае $\delta = u$ и источниковой в случае $\delta = s$. Тогда множество $\text{cl}(W_\sigma^\delta)$ является сферой размерности $n-1$, гладко вложенной во всех точках, кроме, возможно, одной (не принадлежащей W_σ^δ). В силу работ [26], [22], эта сфера является цилиндрически вложенной⁹. Тогда объединение

$$\mathcal{L}_f = \bigcup_{p \in \Omega^1} \text{cl}(W_p^s) \cup \bigcup_{q \in \Omega^{n-1}} \text{cl}(W_q^u)$$

замыканий всех инвариантных многообразий размерности $n-1$ делит сферу S^n на $r_f + 1$ компонент связности. Обозначим эти компоненты связности через $D_1, \dots, D_{r_f+1}$ и положим

$$\mathcal{D}_f = \bigcup_{i=1}^{r_f+1} D_i.$$

Двухцветным графом диффеоморфизма f будем называть граф Γ_f такой, что:

- 1) существует взаимно однозначное соответствие ξ_f^0 между множеством Γ_f^0 вершин графа Γ_f и компонентами связности множества $\mathcal{D}_f$;
- 2) существует взаимно однозначное соответствие ξ_f^1 между множеством Γ_f^1 ребер графа Γ_f и компонентами связности множества $\mathcal{L}_f$;
- 3) вершины v_i, v_j соединены ребром $e_{i,j}$ тогда и только тогда, когда области D_i, D_j , соответствующие вершинам v_i, v_j , имеют общую границу;

⁹Сфера $S^{n-1} \subset M^n$ называется цилиндрически вложенной в M^n , если существует топологическое вложение $h: \mathbb{S}^{n-1} \times [-1, +1] \rightarrow M^n$ такое, что $h(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}) = S^{n-1}$.

4) ребро $e_{i,j}$ имеет цвет $s(u)$, если ему соответствует многообразие $W_p^s \subset \mathcal{L}_f$ ($W_q^u \subset \mathcal{L}_f$).

ТЕОРЕМА 5.9 [40]. *Диффеоморфизмы $f, f' \in G^*$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ изоморфны посредством изоморфизма $\eta: \Gamma_f \rightarrow \Gamma_{f'}$, сохраняющего цвета ребер.*

Для диффеоморфизмов из класса $G^*(S^n)$ справедлива также следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.10 [39]. *Любой диффеоморфизм $f \in G^*(S^n)$ включается в топологический поток.*

5.2. Поток и диффеоморфизмы с тремя неблуждающими точками. Известно, что любая система Морса–Смейла имеет хотя бы одну источниковую и хотя бы одну стоковую орбиту. Если неблуждающее множество системы Морса–Смейла состоит ровно из двух точек (источника и стока), то несущее многообразие является сферой соответствующей размерности. На сфере любой размерности можно задать систему Морса–Смейла, неблуждающее множество которой состоит из двух точек. Система Морса–Смейла, неблуждающее множество которой состоит из трех точек, существует на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ (неориентируемой поверхности рода 1 с фундаментальной группой $\pi_1(M^2) = \mathbb{Z}_2$). На рис. 40 приведен фазовый портрет потока с тремя неподвижными точками на диске. Отождествляя диаметрально противоположные точки граничной окружности, получим требуемый поток, а сдвиг по времени вдоль траекторий дает требуемый диффеоморфизм Морса–Смейла.

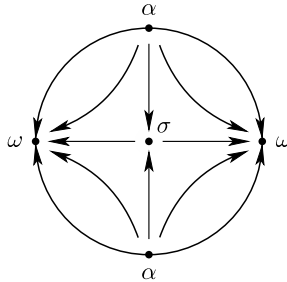


Рис. 40. Поток на проективной плоскости

Естественно рассмотреть вопрос существования многомерных систем Морса–Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех точек. В 1962 г. Дж. Иллс и Н. Квипер [30] доказали, что существуют замкнутые многообразия в топологической и гладкой категориях, допускающие непрерывные и гладкие функции Морса с тремя критическими точками. Поэтому замкнутое топологическое (гладкое) многообразие будем называть топологическим (гладким) *ИК-многообразием*, если на нем можно задать непрерывную (гладкую) функцию Морса с тремя особенностями. Рассмотрение топологической категории было связано с тем, что к тому времени были открыты топологические многообразия, которые не допускают гладкой структуры (см., например, [73]), и авторы показали, что существуют 8-мерные и 16-мерные несглаживаемые

ИК-многообразия (см. [30; следствие 10В]). Для топологического (и, следовательно, гладкого) ИК-многообразия M^n в [30] был доказан следующий замечательный результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть M^n – многообразие Илльса–Квинпера. Тогда:

- 1) размерность многообразия M^n может принимать только одно из значений $\{2, 4, 8, 16\}$;
- 2) M^2 есть проективная плоскость;
- 3) при $n \geq 4$ группы $\pi_1(M^n) = \dots = \pi_{n/2-1}(M^n)$ тривиальны и, следовательно, M^n ориентируемое;
- 4) M^n гомеоморфно компактификации евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с помощью $(n/2)$ -мерной сферы.

Последнее утверждение можно переформулировать следующим образом: M^n есть дизъюнктное объединение¹⁰ $(n/2)$ -мерной сферы $S^{n/2}$, топологически вложенной в M^n , и открытого n -мерного шара B^n .

В связи с существованием несглаживаемых многообразий имеет смысл рассматривать не только гладкие потоки Морса–Смейла, но и топологические. Будем называть поток f^t , заданный на замкнутом топологическом многообразии, *топологическим потоком Морса–Смейла*, если выполняются следующие условия:

- (а) неблуждающее множество $NW(f^t)$ состоит из конечного набора неподвижных точек и периодических траекторий;
- (б) в окрестности каждой траектории из $NW(f^t)$ поток f^t топологически эквивалентен ограничению гладкого потока на окрестность гиперболической неподвижной точки или гиперболической периодической траектории; заметим, что отсюда следует, что для каждой траектории $l \subset NW(f^t)$ определяются устойчивое и неустойчивое многообразия W_l^s, W_l^u соответственно, которые являются топологически вложенными подмногообразиями:

$$W_l^s = \{x \in M^n: f^t(x) \rightarrow l\}, \quad W_l^u = \{x \in M^n: f^{-t}(x) \rightarrow l\}, \quad t \rightarrow \infty;$$

- (с) для любых траекторий $l_1, l_2 \subset NW(f^t)$ многообразия $W_{l_1}^s, W_{l_2}^u$ либо не пересекаются, либо являются топологически трансверсальными¹¹.

Из [30] вытекает существование гладких замкнутых многообразий, допускающих гладкие системы Морса–Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех точек. Для гладких потоков Морса–Смейла мы также получаем топологическое описание несущих многообразий, поскольку несущее многообразие таких потоков является гладким ИК-многообразием. Отметим, однако, что из работы [30] не извлекается топологическое описание несущих многообразий для топологических потоков Морса–Смейла (включая существование таких потоков) и для диффеоморфизмов Морса–Смейла.

В работе [111] был введен класс многообразий, топологическая структура которых тесно связана со свойствами топологических потоков Морса–Смейла,

¹⁰Объединение называется *дизъюнктным*, если объединяемые множества попарно не пересекаются.

¹¹Топологическая трансверсальность означает, что в окрестности любой точки из $W_{l_1}^s \cap W_{l_2}^u$ пересечение многообразий $W_{l_1}^s, W_{l_2}^u$ локально гомеоморфно трансверсальному пересечению гиперплоскостей в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

неблуждающее множество которых состоит в точности из трех неподвижных точек. Замкнутое многообразие M^n называется *проективно-подобным*, если

(а) $n \in \{2, 4, 8, 16\}$;

(б) M^n есть дизъюнктное объединение $(n/2)$ -мерной сферы $S^{n/2}$, локально плоско вложенной в M^n , и открытого n -мерного шара B^n .

ТЕОРЕМА 5.11 [112]. Пусть f^t – топологический поток Морса–Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех неподвижных точек, на замкнутом n -мерном топологическом многообразии M^n , $n \geq 2$. Тогда M^n является проективно-подобным многообразием (т.е. замыкания сепаратрис седла суть локально плоско вложенные сферы). Более того, на каждом проективно-подобном многообразии существует непрерывный поток Морса–Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех неподвижных точек.

Из двумерных классификационных результатов (см. раздел 3) следует, что все потоки с тремя неподвижными точками на проективной плоскости топологически эквивалентны. Аналогичный результат имеет место в размерности 4 в силу следующего результата Е. В. Жужомы и В. С. Медведева [112].

ТЕОРЕМА 5.12 [112]. Пусть f_1^t, f_2^t – топологические потоки Морса–Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех неподвижных точек, на замкнутых четырехмерных топологических многообразиях M_1^4, M_2^4 соответственно. Тогда f_1^t, f_2^t топологически эквивалентны. В частности, многообразия M_1^4, M_2^4 гомеоморфны.

Отсюда следует, что с точностью до гомеоморфизма существует ровно одно гладкое четырехмерное ИК-многообразие.

В работе [30] отмечается, что в размерностях 8 и 16 имеется соответственно 6 и 60 гомотопически неэквивалентных ИК-многообразий. Поэтому вопрос о топологической классификации (даже гладких) потоков в размерностях 8 и 16 значительно сложнее. В работе [112] было введено следующее ключевое для решения этой проблемы понятие.

Пусть M_1^k, M_2^k – топологически вложенные в M^n подмногообразия размерности k , $1 \leq k \leq n - 1$. Будем говорить, что M_1^k и M_2^k *локально эквивалентно вложены*, если существуют окрестности $U(\text{cl}(M_1^k)), U(\text{cl}(M_2^k))$ топологических замыканий $\text{cl}(M_1^k), \text{cl}(M_2^k)$ подмногообразий M_1^k, M_2^k соответственно и гомеоморфизм

$$h: U(\text{cl}(M_1^k)) \rightarrow U(\text{cl}(M_2^k))$$

такой, что $h(M_1^k) = M_2^k$.

ТЕОРЕМА 5.13 [112]. Пусть f_i^t – топологический поток Морса–Смейла ($i = 1, 2$), неблуждающее множество которого состоит из трех неподвижных точек, на замкнутом n -мерном топологическом многообразии M_i^n , где $n = 8, 16$. Потоки f_1^t, f_2^t топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1) устойчивые многообразия седел потоков f_1^t, f_2^t локально эквивалентно вложены;

2) неустойчивые многообразия седел потоков f_1^t, f_2^t локально эквивалентно вложены.

Относительно диффеоморфизмов Морса–Смейла имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 5.14 [111], [71]. Пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ – диффеоморфизм Морса–Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех точек. Тогда:

- 1) $n \in \{2, 4, 8, 16\}$;
- 2) M^n – проективно-подобное многообразие, если $n \in \{2, 8, 16\}$;
- 3) существует $f: M^4 \rightarrow M^4$ такой, что замыкания сепаратрис седловой неподвижной точки являются дико вложенными 2-сферами;
- 4) M^4 есть дизъюнктное объединение двумерной сферы S^2 , топологически вложенной в M^4 , и открытого четырехмерного шара B^4 .

Отметим, что в силу теоремы 5.11 диффеоморфизм $f: M^4 \rightarrow M^4$ в теореме 5.14 нельзя вложить в поток. В то же время дикое вложение замыканий сепаратрис седловой неподвижной точки возможно и для потоков Морса–Смейла (что важно учитывать при решении задачи топологической эквивалентности). В качестве иллюстрации такого феномена для многомерных гладких потоков приведем следующую теорему, доказанную в [110].

ТЕОРЕМА 5.15. Для любого $n \geq 4$ существуют замкнутое многообразие M^n и градиентный полярный поток Морса–Смейла f^t на M^n такие, что f^t не имеет гетероклинических пересечений, неблуждающее множество f^t состоит из четырех неподвижных точек (два узла и два седла) и замыкание сепаратрисы одного из седел является дико вложенной сферой коразмерности 2.

5.3. Топологическая структура несущих многообразий, допускающих потоки без неподвижных точек. Рассмотрим структуру многообразий размерности 4 и выше, которые допускают неособые потоки (т.е. потоки без неподвижных точек) Морса–Смейла (НМС-потоки).

В 1975 г. Даниэль Азимов [6] получил топологическое описание замкнутых многообразий размерности, большей трех, которые допускают неособые потоки Морса–Смейла¹². Для формулировки этих результатов приведем некоторые определения.

Напомним, что *круговой k -ручкой* размерности n , $0 \leq k \leq n$, называется прямое произведение $S^1 \times \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k-1}$. Приклеивание круговой k -ручки к M^n состоит в отождествлении части границы этой ручки

$$S^1 \times S^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-k-1}$$

и части границы ∂M^n с помощью некоторого диффеоморфизма. Если многообразие M^n может быть получено из многообразия $M^{n-1} \times [0, 1]$ последовательным приклеиванием круговых ручек (вообще говоря, различных индексов), то говорят, что M^n допускает разложение на круговые ручки.

ТЕОРЕМА 5.16 [6]. На замкнутом многообразии M^n ($n \geq 4$) НМС-поток существует тогда и только тогда, когда M^n допускает разложение на круговые ручки и эйлерова характеристика M^n равна нулю.

¹²На самом деле Азимов рассматривал более широкий класс неособых потоков, который включает класс потоков с неблуждающим множеством, состоящим из конечного числа гиперболических замкнутых траекторий.

В 1979 г. Дж. Морган [76] модернизировал понятие круговой ручки, предложив вместо прямых произведений $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k-1}$ рассматривать косые произведения $\mathbb{S}^1$ с дисками $\mathbb{B}^k$, $\mathbb{B}^{n-k-1}$. В этом случае круговой k -ручкой размерности n называется тотальное пространство расслоения $\mathbb{B}^k \oplus \mathbb{B}^{n-k}$ над $\mathbb{S}^1$. С этим расширением понятия круговой ручки и соответствующим понятием разложения на круговые ручки теорема 5.16 становится справедливой и для размерности $n = 3$ (условие на эйлерову характеристику, разумеется, можно опустить).

В работе [7] Азимов доказал, что любое неособое векторное поле на многообразии размерности $n \geq 4$ можно соединить путем, состоящим из неособых векторных полей, с векторным полем Морса–Смейла неподвижных точек. Поэтому описание несущего многообразия, в силу теоремы 5.16, может быть применимо для более широкого класса потоков без неподвижных точек.

В 1978 г. Дж. Френкс [32] усилил неравенства Морса (см. предложение 1.2) для неособых потоков Морса–Смейла, получив для некоторых классов потоков следующие неравенства в форме необходимых и достаточных условий существования НМС-потоков с предписанным набором периодических траекторий.

ТЕОРЕМА 5.17 [32]. Пусть на замкнутом многообразии M^n , $n \geq 3$, существует НМС-поток, и пусть C_j^+ – число нескрученных периодических траекторий индекса j . Тогда

- 1) $C_0^+ \geq \beta_0$, $C_j^+ \geq \beta_j - \beta_{j-1} + \dots \pm \beta_0$, $j \geq 1$;
- 2) $C_1^+ \geq C_0^+ - 1$, $C_{n-2}^+ \geq C_{n-1}^+ - 1$;
- 3) если $C_{j-1}^+ = C_{j+1}^+ = 0$ и $\beta_j - \beta_{j-1} + \dots \pm \beta_0 \leq 0$, то $C_j^+ = 0$;

здесь $\beta_j = \dim H_j(M^n, \mathbb{Q})$.

ТЕОРЕМА 5.18 [32]. Пусть замкнутое односвязное многообразие M^n , $n \geq 6$, имеет нулевую эйлерову характеристику и группы $H_*(M^n, \mathbb{Z})$ не имеют кручений. Тогда для любого набора неотрицательных чисел $\{C_j^+\}$, удовлетворяющих условиям 1)–3) теоремы 5.17, на M^n существует НМС-поток без скрученных периодических траекторий и с C_j^+ нескрученными периодическими траекториями для любого $j \geq 0$.

В работе [32] получены также необходимые и достаточные условия существования НМС-потока на трехмерной сфере S^3 с предписанным набором периодических траекторий.

ТЕОРЕМА 5.19 [32]. На трехмерной сфере существует НМС-поток с предписанным набором (C_0^+, C_1^+, C_2^+) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$C_0^+ \geq 1, \quad C_2^+ \geq 1, \quad C_1^+ \geq C_0^+ - 1, \quad C_1^+ \geq C_2^+ - 1.$$

При этом число скрученных периодических траекторий индекса 1 может быть произвольным.

5.4. Топология многообразий, допускающих системы Морса–Смейла с неподвижными точками. По аналогии с разложением Хегора трехмерного многообразия (см. п. 4.1.2) будем называть представление гладкого многообразия M^n размерности $n > 3$ в виде двух склеенных $(n, 1)$ -ручечных

тел рода g обобщенным разложением Хегора. Минимальное число $g(M^n)$ всех возможных таких разложений данного многообразия M^n назовем его *обобщенным родом Хегора*. В случае, когда размерность многообразия равна 3, под обобщенным разложением и родом Хегора будем понимать разложение и род Хегора.

Для градиентно-подобных потоков на многообразиях размерности $n \geq 4$ справедливо следующее обобщение теоремы 4.1, полученное В.З. Гринесом, Е.Я. Гуревич, Е.В. Жужомой и В.С. Медведевым [41].

ТЕОРЕМА 5.20 [41]. 1) Пусть f^t – градиентно-подобный поток, заданный на связном замкнутом ориентируемом многообразии M^n , $n \geq 3$, все седловые точки которого имеют индекс Морса 1 или $n - 1$. Тогда многообразие M^n допускает обобщенное разложение Хегора рода g_{f^t} .

2) На любом ориентируемом многообразии M^n , $n \geq 3$, имеющем обобщенный род Хегора $g(M^n) > 0$, существует полярный поток f^t , все множество седловых точек которого состоит из $g(M^n)$ точек индекса 1 и $g(M^n)$ точек индекса $n - 1$. Кроме того, если M^n является связной суммой $2g(M^n)$ копий многообразий $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, то поток f^t может быть построен таким образом, что устойчивые и неустойчивые многообразия седловых точек не имеют гетероклинических пересечений.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть f^t – поток Морса–Смейла, заданный на замкнутом многообразии M^n , все седловые точки которого имеют индекс Морса 1 или $n - 1$. Если выполняется неравенство $g(M^n) > g_{f^t}$, то неблуждающее множество потока f^t содержит по крайней мере одну периодическую траекторию.

Будем называть диффеоморфизм Морса–Смейла $f: M^n \rightarrow M^n$ диффеоморфизмом без гетероклинических многообразий на сепаратрисах коразмерности 1, если любая его сепаратриса коразмерности 1 может пересекаться только с одномерными сепаратрисами. Другими словами, у f допускаются гетероклинические точки, но не допускаются гетероклинические многообразия положительной размерности на сепаратрисах, размерность которых на единицу меньше размерности несущего многообразия.

В следующей теореме описывается топологическая структура многообразия, допускающего диффеоморфизм Морса–Смейла без гетероклинических многообразий на сепаратрисах коразмерности 1. Она обобщает основные результаты работы [13], где рассматривались сохраняющие ориентацию трехмерные диффеоморфизмы Морса–Смейла, и работ [55], [49], где рассматривались сохраняющие ориентацию многомерные диффеоморфизмы Морса–Смейла.

ТЕОРЕМА 5.21 [13], [55], [49]. Предположим, что на замкнутом n -многообразии M^n , $n \geq 3$, задан диффеоморфизм Морса–Смейла f без гетероклинических многообразий на сепаратрисах коразмерности 1. Тогда g_{f^t} является целым неотрицательным числом, при этом

- 1) если $g_f = 0$, $k_f = 0$, то M^n гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^n$;
- 2) если $g_f = 0$, $k_f > 0$, то существует число $1 \leq k_0 \leq 1 + k_f$ такое, что M^n является связной суммой многообразий $N_1^n, \dots, N_{k_0}^n$, каждое из которых допускает полярный диффеоморфизм Морса–Смейла без седловых периодических

точек коразмерности 1; более того, если M^n ориентируемое, то

$$\beta_1(N_i^n) = \beta_{n-1}(N_i^n) = 0 \quad \text{для всех } i = 1, \dots, k_0;$$

3) если $g_f > 0$, $k_f = 0$, то M^n гомеоморфно связной сумме g_f копий $\mathbb{S}^{n-1} \otimes \mathbb{S}^1$;

4) если $g_f > 0$, $k_f > 0$, то M^n гомеоморфно связной сумме g_f копий $\mathbb{S}^{n-1} \otimes \mathbb{S}^1$ и многообразий $N_1^n, \dots, N_{k_0}^n$.

Так как сдвиг на фиксированное время вдоль траекторий потока Морса–Смейла без периодических траекторий дает диффеоморфизм Морса–Смейла, то из теоремы 5.21 непосредственно вытекает аналогичный результат для таких потоков.

Следующая теорема решает проблему реализации диффеоморфизма Морса–Смейла с заданными динамическими характеристиками (ее формулировка приведена для диффеоморфизмов, аналог этой теоремы справедлив и для потоков).

ТЕОРЕМА 5.22 [49], [41]. Пусть $l \geq 2$, $r \geq 0$ – целые числа такие, что $g = (r-l+2)/2$ – целое неотрицательное число, и пусть k – любое целое неотрицательное число. Тогда существует градиентно-подобный диффеоморфизм $f: M^n \rightarrow M^n$ без гетероклинических пересечений, неблуждающее множество которого состоит в точности из l узлов, r седловых точек индексов 1, $n-1$ и $2k$ точек индексов, отличных от 1 и $n-1$, а топология несущего многообразия M^n описывается следующим образом:

- 1) если $g = 0$, $k = 0$, то M^n гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^n$;
- 2) если $g = 0$, $k > 0$, то M^n является удвоением¹³ ручечного тела с k ручками индексов, отличных от 1 и $n-1$;
- 3) если $g > 0$, $k = 0$, то M^n можно представить в виде связной суммы:

$$M^n = (S^{n-1} \times S^1) \# \dots \# (S^{n-1} \times S^1);$$

- 4) если $g > 0$, $k > 0$, то M^n можно представить в виде связной суммы

$$M^n = (S^{n-1} \times S^1) \# \dots \# (S^{n-1} \times S^1) \# N,$$

где число слагаемых $S^{n-1} \times S^1$ равно g , а многообразие N является удвоением ручечного тела с k ручками индексов, отличных от 1 и $n-1$.

Список литературы

- [1] А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, “Грубые системы”, Докл. АН СССР, **14**:5 (1937), 247–250.
- [2] Д. В. Аносов, “Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны”, Докл. АН СССР, **145**:4 (1962), 707–709; англ. пер.: D. V. Anosov, “Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature”, Soviet Math. Dokl., **3** (1962), 1068–1070.

¹³Замкнутое многообразие M^n называется удвоением многообразия N с краем ∂N , если M^n может быть получено склеиванием двух копий многообразия N по некоторому диффеоморфизму ψ , обращающему естественную ориентацию края ∂N (см., например, [64]).

- [3] Д. В. Аносов, “Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны”, Тр. МИАН СССР, **90**, 1967, 3–210; англ. пер.: D. V. Anosov, “Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **90** (1967), 1–235.
- [4] С. Х. Арансон, “Траектории на неориентируемых двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **80(122)**:3(11) (1969), 314–333; англ. пер.: S. H. Aranson, “Trajectories on nonorientable two-dimensional manifolds”, *Math. USSR-Sb.*, **9**:3 (1969), 297–313.
- [5] R. H. Fox, E. Artin, “Some wild cells and spheres in three-dimensional space”, *Ann. of Math.* (2), **49**:4 (1948), 979–990.
- [6] D. Asimov, “Round handles and non-singular Morse–Smale flows”, *Ann. of Math.* (2), **102**:1 (1975), 41–54.
- [7] D. Asimov, “Homotopy of non-singular vector fields to structurally stable ones”, *Ann. of Math.* (2), **102**:1 (1975), 55–65.
- [8] F. Béguin, “Classification des difféomorphismes de Smale des surfaces: types géométriques réalisables”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **52**:4 (2002), 1135–1185.
- [9] F. Béguin, “Smale diffeomorphisms of surfaces: a classification algorithm”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **11**:2-3 (2004), 261–310.
- [10] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, “Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. I, II”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений*, Межвуз. темат. сб. науч. тр., Изд-во Горьковск. ун-та, Горький, 1985, 1987, 22–38, 24–31; англ. пер.: A. N. Bezdenezhnykh, V. Z. Grines, “Dynamical properties and topological classification of gradient-like diffeomorphisms on two-dimensional manifolds. I, II”, *Selecta Math. Soviet.*, **11**:1 (1992), 1–11, 13–17.
- [11] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, “Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий”, *Дифференциальные и интегральные уравнения*, Сб. науч. тр., Изд-во Горьковск. ун-та, Горький, 1985, 33–37; англ. пер.: A. N. Bezdenezhnykh, V. Z. Grines, “Realization of gradient-like diffeomorphisms of two-dimensional manifolds”, *Selecta Math. Soviet.*, **11**:1 (1992), 19–23.
- [12] C. Bonatti, V. Grines, “Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 ”, *J. Dynam. Control Systems*, **6**:4 (2000), 579–602.
- [13] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, “Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology Appl.*, **117**:3 (2002), 335–344.
- [14] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Topology*, **43**:2 (2004), 369–391.
- [15] Х. Бонатти, В. З. Гринес, О. В. Починка, “Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **250**, Наука, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2005, 5–53; англ. пер.: Ch. Bonatti, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, “Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic orbits on 3-manifolds”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **250** (2005), 1–46.
- [16] Ch. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka, “Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with the chain of saddles on 3-manifolds”, *Foliations 2005*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006, 121–147.
- [17] Х. Бонатти, В. З. Гринес, О. В. Починка, “Реализация диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях”, *Порядок и хаос в динамических системах*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **297**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2017, 46–61;

- англ. пер.: Ch. Bonatti, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, “Realization of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **297** (2017), 35–49.
- [18] Ch. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka, *Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds*, 2017, 48 pp., [arXiv: 1710.08292](#).
- [19] Ch. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka, S. Van Strien, *A complete topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on surfaces: a kind of kneading theory in dimension two*, preprint.
- [20] C. Bonatti, R. Langevin, *Difféomorphismes de Smale des surfaces*, Astérisque, **250**, Soc. Math. France, Paris, 1998, viii+235 pp.
- [21] Ch. Bonatti, L. Paoluzzi, “3-manifolds which are orbit spaces of diffeomorphisms”, *Topology*, **47**:2 (2008), 71–100.
- [22] M. Brown, “Locally flat imbeddings of topological manifolds”, *Ann. of Math.* (2), **75**:2 (1962), 331–341.
- [23] B. Campos, A. Cordero, J. Martínez-Alfaro, P. Vindel, “NMS flows on three-dimensional manifolds with one saddle periodic orbit”, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **20**:1 (2004), 47–56.
- [24] B. Campos, J. Martínez-Alfaro, P. Vindel, “Bifurcations of links of periodic orbits in non-singular Morse–Smale systems on S^3 ”, *Nonlinearity*, **10**:5 (1997), 1339–1355.
- [25] B. Campos, P. Vindel, “Non equivalence of NMS flows on S^3 ”, *Math. Bohemica*, **137**:2 (2012), 165–173.
- [26] J. C. Cantrell, “Almost locally flat embeddings S^{n-1} in S^n ”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69**:4 (1963), 716–718.
- [27] J. C. Cantrell, C. H. Edwards, “Almost locally polyhedral curves in Euclidean n -space”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **107**:3 (1963), 451–457.
- [28] A. Cobham, “The intrinsic computational difficulty of functions”, *Logic, methodology, and philosophy of science*, Proc. 1964 Internat. Congr., North-Holland, Amsterdam, 1965, 24–30.
- [29] H. Debrunner, R. Fox, “A mildly wild imbedding of an n -frame”, *Duke Math. J.*, **27**:3 (1960), 425–429.
- [30] J. Eells, Jr., N. H. Kuiper, “Manifolds which are like projective planes”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **14** (1962), 5–46.
- [31] G. Fleitas, “Classification of gradient-like flows on dimensions two and three”, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, **6**:2 (1975), 155–183.
- [32] J. Franks, “The periodic structure of non-singular Morse–Smale flows”, *Comment. Math. Helv.*, **53** (1978), 279–294.
- [33] J. Franks, “Nonsingular Smale flows on S^3 ”, *Topology*, **24**:3 (1985), 265–282.
- [34] В. З. Гринес, “Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях”, *Матем. заметки*, **54**:3 (1993), 3–17; англ. пер.: V. Z. Grines, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic trajectories on surfaces”, *Math. Notes*, **54**:3 (1993), 881–889.
- [35] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, “Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей трех”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **261**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2008, 61–86; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, V. S. Medvedev, “Peixoto graph of Morse–Smale diffeomorphisms on manifolds of dimension greater than three”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **261** (2008), 59–83.
- [36] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, “О классификации диффеоморфизмов Морса–Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **270**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2010, 62–85; англ. пер.:

- V.Z. Grines, E.Ya. Gurevich, V.S. Medvedev, “Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with one-dimensional set of unstable separatrices”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **270** (2010), 57–79.
- [37] В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, В.С. Медведев, О.В. Починка, “О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразии в топологический поток”, *Матем. сб.*, **203**:12 (2012), 81–104; англ. пер.: V.Z. Grines, E.Ya. Gurevich, V.S. Medvedev, O.V. Pochinka, “On embedding a Morse–Smale diffeomorphism on a 3-manifold in a topological flow”, *Sb. Math.*, **203**:12 (2012), 1761–1784.
- [38] В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, О.В. Починка, “Энергетическая функция градиентно-подобных потоков и проблема топологической классификации”, *Матем. заметки*, **96**:6 (2014), 856–863; англ. пер.: V.Z. Grines, E.Ya. Gurevich, O.V. Pochinka, “The energy function of gradient-like flows and the topological classification problem”, *Math. Notes*, **96**:6 (2014), 921–927.
- [39] В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, О.В. Починка, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections”, *Проблемы матем. анализа*, **97**, Тамара Рожковская, Новосибирск, 2015, 73–81; англ. пер.: V.Z. Grines, E.Ya. Gurevich, O.V. Pochinka, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **208**:1 (2015), 81–90.
- [40] В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, О.В. Починка, “Комбинаторный инвариант для каскадов Морса–Смейла без гетероклинических пересечений на сфере S^n , $n \geq 4$ ”, *Матем. заметки*, **105**:1 (2019), 136–141.
- [41] В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, Е.В. Жужома, В.С. Медведев, “О топологии многообразий, допускающих градиентно-подобные потоки с заданным неблуждающим множеством”, *Матем. труды*, **21**:2 (2018), 163–180.
- [42] В.З. Гринес, С.Х. Капкаева, О.В. Починка, “Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей”, *Матем. сб.*, **205**:10 (2014), 19–46; англ. пер.: V.Z. Grines, S.Kh. Kapkaeva, O.V. Pochinka, “A three-colour graph as a complete topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of surfaces”, *Sb. Math.*, **205**:10 (2014), 1387–1412.
- [43] V.Z. Grines, D.S. Malyshev, O.V. Pochinka, S.Kh. Zinina, “Efficient algorithms for the recognition of topologically conjugate gradient-like diffeomorphisms”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **21**:2 (2016), 189–203.
- [44] V.Z. Grines, T.V. Medvedev, O.V. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds*, Dev. Math., **46**, Springer, Cham, 2016, xxvi+295 pp.
- [45] V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, E. Zhuzhoma, “On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids”, *Phys. D*, **294** (2015), 1–5.
- [46] В.З. Гринес, Т.М. Митрякова, О.В. Починка, “Новые топологические инварианты неградиентно-подобных диффеоморфизмов на ориентируемых поверхностях”, *Тр. Средневолжского матем. о-ва*, **7**:1 (2005), 123–129.
- [47] В.З. Гринес, Е.В. Жужома, В.С. Медведев, “Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами”, *Матем. сб.*, **194**:7 (2003), 25–56; англ. пер.: V.Z. Grines, E.V. Zhuzhoma, V.S. Medvedev, “New relations for Morse–Smale systems with trivially embedded one-dimensional separatrices”, *Sb. Math.*, **194**:7 (2003), 979–1007.
- [48] В.З. Гринес, Е.В. Жужома, В.С. Медведев, “О диффеоморфизмах Морса–Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях”, *Матем. заметки*, **74**:3 (2003), 369–386; англ. пер.: V.Z. Grines, E.V. Zhuzhoma, V.S. Medvedev, “On Morse–Smale diffeomorphisms with four periodic points on closed orientable manifolds”, *Math. Notes*, **74**:3 (2003), 352–366.
- [49] В.З. Гринес, Е.В. Жужома, В.С. Медведев, “О структуре несущего многообразия для систем Морса–Смейла без гетероклинических пересечений”, *Порядок*

- и хаос в динамических системах, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **297**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2017, 201–210; англ. пер.: V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “On the structure of the ambient manifold for Morse–Smale systems without heteroclinic intersections”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **297** (2017), 179–187.
- [50] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, “Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла”, *Дифференциальные уравнения и топология. II*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **271**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2010, 111–133; англ. пер.: V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, O. V. Pochinka, “Global attractor and repeller of Morse–Smale diffeomorphisms”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **271** (2010), 103–124.
- [51] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, О. В. Починка, “Системы Морса–Смейла и топологическая структура несущих многообразий”, *Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума*, СМФН, **61**, РУДН, М., 2016, 5–40.
- [52] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, О. В. Починка, “Динамические системы и топология магнитных полей в проводящей среде”, *Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения*, СМФН, **63**, № 3, РУДН, М., 2017, 455–474.
- [53] Д. М. Гробман, “О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений”, *Докл. АН СССР*, **128**:5 (1959), 880–881.
- [54] Д. М. Гробман, “Топологическая классификация окрестностей особой точки в n -мерном пространстве”, *Матем. сб.*, **56(98)**:1 (1962), 77–94.
- [55] Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, “О многообразиях размерности n , допускающих диффеоморфизмы с седловыми точками индексов 1 и $n - 1$ ”, *Тр. Средневолжского матем. о-ва*, **8**:1 (2006), 204–208.
- [56] C. Gutiérrez, “Structural stability for flows on the torus with a cross-cap”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **241** (1978), 311–320.
- [57] P. Hartman, “On the local linearization of differential equations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14**:4 (1963), 568–573.
- [58] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Math., **583**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977, ii+149 pp.
- [59] M. A. Kervaire, J. W. Milnor, “Groups of homotopy spheres. I”, *Ann. of Math. (2)*, **77**:3 (1963), 504–537.
- [60] R. C. Kirby, “On the set of non-locally flat points of a submanifold of codimension one”, *Ann. of Math. (2)*, **88**:2 (1968), 281–290.
- [61] V. Kruglov, D. Malyshev, O. Pochinka, “Topological classification of Ω -stable flows on surfaces by means of effectively distinguishable multigraphs”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **38**:9 (2018), 4305–4327.
- [62] V. E. Kruglov, D. S. Malyshev, O. V. Pochinka, “On algorithms that effectively distinguish gradient-like dynamics”, *Regul. Chaotic Dyn.* (to appear).
- [63] R. Langevin, “Quelques nouveaux invariants des difféomorphismes Morse–Smale d’une surface”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **43**:1 (1993), 265–278.
- [64] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, 2nd rev. ed., Grad. Texts in Math., **218**, Spinger, New York, 2013, xvi+708 pp.
- [65] Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, “О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 251–257.
- [66] Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Докл. АН СССР*, **103**:4 (1955), 557–560.
- [67] А. Г. Майер, “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Уч. зап. Горьк. гос. ун-та*, 1939, № 12, 215–229.

- [68] N. G. Markley, “The Poincaré–Bendixson theorem for the Klein bottle”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **135** (1969), 159–165.
- [69] Y. Matsumoto, *An introduction to Morse theory*, Transl. from the Japan., Transl. Math. Monogr., **208**, Iwanami Series in Modern Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, xiv+219 pp.
- [70] С. В. Матвеев, “Классификация достаточно больших трехмерных многообразий”, *УМН*, **52**:5(317) (1997), 147–174; англ. пер.: S. V. Matveev, “Classification of sufficiently large three-dimensional manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **52**:5 (1997), 1029–1055.
- [71] V. S. Medvedev, E. V. Zhuzhoma, “Morse–Smale systems with few non-wandering points”, *Topology Appl.*, **160**:3 (2013), 498–507.
- [72] K. R. Meyer, “Energy functions for Morse Smale systems”, *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040.
- [73] J. Milnor, “On manifolds homeomorphic to the 7-sphere”, *Ann. of Math.* (2), **64**:2 (1956), 399–405.
- [74] Дж. Милнор, *Теория Морса*, Изд-во Платон, Волгоград, 1996, 184 с.; пер. с англ.: J. Milnor, *Morse theory*, Ann. of Math. Stud., **51**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1963, vi+153 pp.
- [75] Т. М. Митрякова, О. В. Починка, “О необходимых и достаточных условиях топологической сопряженности диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом орбит гетероклинического касания”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **270**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2010, 198–219; англ. пер.: T. M. Mitryakova, O. V. Pochinka, “Necessary and sufficient conditions for the topological conjugacy of surface diffeomorphisms with a finite number of orbits of heteroclinic tangency”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **270** (2010), 194–215.
- [76] J. W. Morgan, “Non-singular Morse–Smale flows on 3-dimensional manifolds”, *Topology*, **18**:1 (1979), 41–53.
- [77] M. Morse, *The calculus of variations in the large*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **18**, Amer. Math. Soc., New York, 1934, xii+368 pp.
- [78] J. Nielsen, “Die Structur periodischer Transformationen von Flächen”, *Danske Vidensk. Selsk. Math.-Fys. Medd.*, **15**:1 (1937), 1–77.
- [79] I. Nikolaev, “Graphs and flows on surfaces”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **18**:1 (1998), 207–220.
- [80] I. Nikolaev, E. Zhuzhoma, *Flows on 2-dimensional manifolds. An overview*, Lecture Notes in Math., **1705**, Springer-Verlag, Berlin, 1999, xx+294 pp.
- [81] А. А. Ошемков, В. В. Шарко, “О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93–140; англ. пер.: A. A. Oshemkov, V. V. Sharko, “Classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds”, *Sb. Math.*, **189**:8 (1998), 1205–1250.
- [82] J. Palis, “On Morse–Smale dynamical systems”, *Topology*, **8**:4 (1969), 385–404.
- [83] Ж. Палис, В. Ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем. Введение*, Мир, М., 1986, 302 с.; пер. с англ.: J. Palis, Jr., W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Transl. from the Portuguese, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982, xii+198 pp.
- [84] J. Palis, S. Smale, “Structural stability theorems”, *Global analysis* (Berkeley, CA, 1968), Proc. Sympos. Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, 223–231.
- [85] M. M. Peixoto, “On structural stability”, *Ann. of Math.* (2), **69** (1959), 199–222.
- [86] M. M. Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds”, *Topology*, **1**:2 (1962), 101–120; A further remark, *Topology*, **2**:1-2 (1963), 179–180.

- [87] M. M. Peixoto, “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems*, Proc. Symp. Dyn. Syst. (Univ. Bahia, Salvador, 1971), Academic Press, New York, 1973, 389–419.
- [88] Я. Б. Песин, А. А. Юрченко, “Некоторые физические модели, описываемые уравнением реакции-диффузии, и цепочки связанных отображений”, *УМН*, **59**:3(357) (2004), 81–114; англ. пер.: Ya. B. Pesin, A. A. Yurchenko, “Some physical models of the reaction-diffusion equation, and coupled map lattices”, *Russian Math. Surveys*, **59**:3 (2004), 481–513.
- [89] С. Ю. Пилугин, “Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса–Смейла без периодических траекторий на сферах”, *Дифференц. уравнения*, **14**:2 (1978), 245–254; англ. пер.: S. Ju. Piljugin, “Phase diagrams determining Morse–Smale systems without periodic trajectories on spheres”, *Differential Equations*, **14** (1978), 170–177.
- [90] D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.
- [91] В. А. Плисс, “О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе”, *Вестн. Ленинград. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. Астрон.*, **13** (1960), 15–23.
- [92] А. О. Пришляк, “Векторные поля Морса–Смейла без замкнутых траекторий на трехмерных многообразиях”, *Матем. заметки*, **71**:2 (2002), 254–260; англ. пер.: A. O. Prishlyak, “Morse–Smale vector fields without closed trajectories on 3-manifolds”, *Math. Notes*, **71**:2 (2002), 230–235.
- [93] А. О. Пришляк, “Полный топологический инвариант потоков Морса–Смейла и разложений на ручки трёхмерных многообразий”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:4 (2005), 185–196; англ. пер.: A. Prishlyak, “Complete topological invariants of Morse–Smale flows and handle decompositions of 3-manifolds”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **144**:5 (2007), 4492–4499.
- [94] C. Pugh, M. Shub, “The Ω -stability theorem for flows”, *Invent. Math.*, **11**:2 (1970), 150–158.
- [95] C. C. Pugh, R. B. Walker, F. W. Wilson, “On Morse–Smale approximations – a counterexample”, *J. Differential Equations*, **23**:1 (1977), 173–182.
- [96] T. Radó, “Über den Begriff der Riemannschen Fläche”, *Acta Univ. Szeged*, **2** (1925), 101–121.
- [97] Г. Зейферт, В. Трельфалль, *Топология*, ГОНТИ, М.–Л., 1938, 400 с.; пер. с нем.: H. Seifert, W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, B. G. Teubner, Leipzig, 1934, iv+353 pp.; англ. пер.: H. Seifert, W. Threlfall, *A textbook of topology*, Pure Appl. Math., **89**, Academic Press, Inc., New York–London, 1980, xvi+437 pp.
- [98] M. Shub, D. Sullivan, “Homology theory and dynamical systems”, *Topology*, **14**:2 (1975), 109–132.
- [99] S. Smale, “Morse inequalities for a dynamical system”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49.
- [100] S. Smale, “On gradient dynamical systems”, *Ann. of Math. (2)*, **74**:1 (1961), 199–206.
- [101] S. Smale, “Diffeomorphisms with many periodic points”, *Differential and combinatorial topology*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1965, 63–80.
- [102] С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, *УМН*, **25**:1(151) (1970), 113–185; пер. с англ.: S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
- [103] Я. Л. Уманский, “Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса–Смейла с конечным числом особых траекторий”, *Матем. сб.*, **181**:2 (1990), 212–239; англ. пер.: Ya. L. Umanskiĭ, “Necessary and sufficient conditions for topological equivalence of three-dimensional Morse–Smale dynamical systems with a finite number of singular trajectories”, *Math. USSR-Sb.*, **69**:1 (1991), 227–253.

- [104] И. Ю. Власенко, “О полном инварианте диффеоморфизмов Морса–Смейла на неориентируемых поверхностях”, *УМН*, **54**:5(329) (1999), 155–156; англ. пер.: I. Yu. Vlasenko, “A full invariant for Morse–Smale diffeomorphisms on non-orientable surfaces”, *Russian Math. Surveys*, **54**:5 (1999), 1058–1059.
- [105] M. Wada, “Closed orbits of non-singular Morse–Smale flows on S^3 ”, *J. Math. Soc. Japan*, **41**:3 (1989), 405–413.
- [106] F. Waldhausen, “On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large”, *Ann. of Math.* (2), **87** (1968), 56–88.
- [107] X. Wang, “The C^* -algebras of Morse–Smale flows on two-manifolds”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **10**:3 (1990), 565–597.
- [108] K. Yokoyama, “Classification of periodic maps on compact surfaces. I”, *Tokyo J. Math.*, **6**:1 (1983), 75–94.
- [109] B. Yu, “Behavior 0 nonsingular Morse Smale flows on S^3 ”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **36**:1 (2016), 509–540.
- [110] Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Градиентные потоки с дико вложенными замыканиями сепаратрис”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **270**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2010, 138–146; англ. пер.: E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “Gradient flows with wildly embedded closures of separatrices”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **270** (2010), 132–140.
- [111] Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Системы Морса–Смейла с тремя неблуждающими точками”, *Докл. РАН*, **440**:1 (2011), 11–14; англ. пер.: E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “Morse–Smale systems with three nonwandering points”, *Dokl. Math.*, **84**:2 (2011), 604–606.
- [112] Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “Непрерывные потоки Морса–Смейла с тремя состояниями равновесия”, *Матем. сб.*, **207**:5 (2016), 69–92; англ. пер.: E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “Continuous Morse–Smale flows with three equilibrium positions”, *Sb. Math.*, **207**:5 (2016), 702–723.

Вячеслав Зигмундович Гринес
(Vyacheslav Z. Grines)

Поступила в редакцию
16.09.2018

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
(Нижегородский филиал)
E-mail: vgrines@yandex.ru

Елена Яковлевна Гуревич
(Elena Ya. Gurevich)

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
(Нижегородский филиал)
E-mail: egurevich@hse.ru

Евгений Викторович Жужома
(Evgenii V. Zhuzhoma)

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
(Нижегородский филиал)
E-mail: zhuzhoma@mail.ru

Ольга Витальевна Починка
(Olga V. Pochinka)

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
(Нижегородский филиал)
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru