Математические заметки

Том 105 выпуск 1 январь 2019

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Комбинаторный инвариант для каскадов Морса–Смейла без гетероклинических пересечений на сфере S^n, $n \geqslant 4$

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, О. В. Починка

Ключевые слова: диффеоморфизмы Морса–Смейла, топологическая сопряженность, топологическая классификация.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12098

Диффеоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ гладкого замкнутого многообразия M^n называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_f конечно, состоит из гиперболических периодических точек, и для любых двух точек $p,q \in \Omega_f$ пересечение устойчивого многообразия W^s_p точки p и неустойчивого многообразия W^u_q точки q трансверсально (см., например, [1] для знакомства с основными понятиями).

Условие конечности множества неблуждающих орбит дает возможность выделять содержательные классы систем Морса–Смейла, для которых проблема топологической классификации сводится к комбинаторной задаче описания взаимного расположения инвариантных многообразий неблуждающих орбит в несущем многообразии. Этот подход был впервые применен Е. А. Леонтович и А. Г. Майером для классификации потоков на двумерной сфере с конечным числом особых траекторий и позднее был развит М. Пейшото, А. А. Ошемковым, В. В. Шарко, Я. Л. Уманским и С. Ю. Пилюгиным, которые решали аналогичную задачу для потоков Морса–Смейла на многообразиях размерности 2, 3 и выше, а также Х. Бонатти, А. Н. Безденежных, В. З. Гринесом, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведевым, Р. Ланжевеном, О. В. Починкой и др. для каскадов Морса–Смейла на многообразиях (см. для ссылок обзор [2] и работу [3]).

Настоящая работа является существенным развитием работы [3] и устанавливает, что для диффеоморфизмов Морса–Смейла, заданных на сфере S^n, $n \geqslant 4$, и не имеющих гетероклинических пересечений инвариантных многообразий седловых периодических точек, полным топологическим инвариантом является двухцветный граф. Полученный результат переносится также на случай гомеоморфизмов Морса–Смейла, введенных в работе [4].

Обозначим через G класс диффеоморфизмов Морса–Смейла на сфере S^n таких, что:

1) множество Ω_f состоит только из неподвижных точек;
2) для любой точки $p \in \Omega_f$ ограничение диффеоморфизма f на множество W^δ_p, $\delta \in \{s,u\}$, сохраняет его ориентацию;
3) $W^s_p \cap W^u_q = \varnothing$ для любых двух седловых точек $p,q \in \Omega_f$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект 17-11-01041) и Программы Фундаментальных исследований в НИУ ВШЭ в 2018 году (проект 95).

Везде далее $f \in G$. Из [5; теорема 1.3] следует, что множество всех седловых точек диффеоморфизма f исчерпывается точками, размерность неустойчивого многообразия которых равна 1 или $n-1$. Будем обозначать через Ω^i_f множество периодических точек диффеоморфизма f, имеющих неустойчивое многообразие размерности $i \in \{0,1,n-1,n\}$.

Напомним, что *n-шаром* (*n-диском*) называется многообразие с краем, гомеоморфное стандартному шару

$$\mathbb{B}^n = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2+\dots+x_n^2 \leqslant 1\}.$$

Открытым n-шаром (*n-диском*) называется многообразие, гомеоморфное внутренности $\mathbb{B}^n$. *Сферой* называется многообразие S^n, гомеоморфное границе $\mathbb{S}^{n-1}$ шара $\mathbb{B}^n$.

Из [1; предложение 2.3] следует, что для любой седловой точки σ диффеоморфизма f замыкание ее инвариантного многообразия W^δ_σ размерности $n-1$ содержит, кроме самого этого многообразия, в точности одну неподвижную точку. Эта точка является стоковой в случае $\delta = u$ и источниковой в случае $\delta = s$. Тогда множество $\operatorname{cl} W^\delta_\sigma$ является сферой размерности $n-1$, гладко вложенной во всех точках кроме, возможно, одной (не принадлежащей W^δ_σ). В силу работ [6], [7] эта сфера является цилиндрически вложенной[1], что вообще говоря не верно в случае $n=3$, см., например, [1; теорема 4.3.2]. Обозначим через m_f число седловых точек диффеоморфизма f. Тогда объединение

$$\mathscr{L}_f = \bigcup_{p\in\Omega^1_f} \operatorname{cl} W^s_p \cup \bigcup_{q\in\Omega^{n-1}_f} clW^u_q$$

замыканий всех инвариантных многообразий размерности $(n-1)$ делит сферу S^n на $k_f = m_f+1$ компонент связности. Обозначим эти компоненты связности через $D_1,\dots,D_{k_f}$ и положим

$$\mathscr{D}_f = \bigcup_{i\in 1}^{k_f} D_i.$$

Определение 1. *Двухцветным графом* диффеоморфизма f будем называть граф Γ_f такой, что:

1) существует взаимно однозначное соответствие ξ^0_f между множеством Γ^0_f вершин графа Γ_f и компонентами связности множества $\mathscr{D}_f$;
2) существует взаимно однозначное соответствие ξ^1_f между множеством ребер Γ^1_f ребер графа Γ_f и компонентами связности множества $\mathscr{L}_f$;
3) вершины v_i, v_j соединены ребром $e_{i,j}$ тогда и только тогда, когда области D_i, D_j, соответствующие вершинам v_i, v_j, имеют общую границу;
4) ребро $e_{i,j}$ имеет цвет s (u), если ему соответствует многообразие $W^s_p \subset \mathscr{L}_f$ $(W^u_q \subset \mathscr{L}_f)$.

Теорема 1. *Диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда графы Γ_f, $\Gamma_{f'}$ изоморфны посредством изоморфизма $\eta\colon \Gamma_f \to \Gamma_{f'}$, сохраняющего цвета ребер.*

Доказательство. *Необходимость* существования изоморфизма графов Γ_f, $\Gamma_{f'}$ топологически сопряженных диффеоморфизмов $f, f' \in G$ непосредственно следует из определения топологической сопряженности. Докажем *достаточность*, разбив доказательство на шаги.

Шаг 1. *Построение взаимно однозначного соответствия между неблуждающими множествами.* Пусть графы Γ_f, $\Gamma_{f'}$ изоморфны посредством изоморфизма $\eta\colon \Gamma_f \to \Gamma_{f'}$, сохраняющего цвета ребер. Изоморфизм η индуцирует взаимно однозначное соответствие η_*

[1] Сфера $S^{n-1} \subset M^n$ называется *цилиндрически вложенной в* M^n, если существует топологическое вложение $h\colon \mathbb{S}^{n-1}\times[-1;+1] \to M^n$ такое, что $h(\mathbb{S}^{n-1}\times\{0\}) = S^{n-1}$.

между компонентами связности множеств $\mathscr{D}_f \cup \mathscr{L}_f$, $\mathscr{D}_{f'} \cup \mathscr{L}_{f'}$ следующим образом:

$$\eta_*|_{\mathscr{D}_f} = \xi^0_{f'}\eta(\xi^0_f)^{-1}|_{\mathscr{D}_f}, \qquad \eta_*|_{\mathscr{L}_f} = \xi^1_{f'}\eta(\xi^1_f)^{-1}|_{\mathscr{L}_f}.$$

Взаимно однозначное соответствие η_* естественным образом продолжаются до взаимно-однозначного соответствия между множествами Ω_f и $\Omega_{f'}$; отсюда следует, что $m_f = m_{f'}$.

Шаг 2. *Описание динамики на блуждающем множестве*. Представим сферу S^n в виде объединения попарно не пересекающихся множеств

$$A_f = \biggl(\bigcup_{\sigma\in\Omega^1_f} W^u_\sigma\biggr) \cup \Omega^0_f, \qquad R_f = \biggl(\bigcup_{\sigma\in\Omega^{n-1}_f} W^s_\sigma\biggr) \cup \Omega^n_f, \qquad V_f = S^n \setminus (A_f \cup R_f).$$

Согласно [1; теорема 2.6] множества A_f, R_f, V_f являются связными, причем множество A_f является аттрактором, R_f – репеллером, а V_f состоит из блуждающих орбит диффеоморфизма f, идущих от R_f к A_f[2]. Положим

$$L^s_f = \bigcup_{p\in\Omega^1_f} W^s_p, \qquad L^u_f = \bigcup_{q\in\Omega^{n-1}_f} W^u_q$$

и снабдим штрихом обозначения аналогичных объектов для диффеоморфизма f'.

Пусть a^t – поток на множестве $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}$, заданный формулами

$$a^t(x,s) = (x, s+t), \qquad x\in\mathbb{S}^{n-1}, \quad s\in\mathbb{R},$$

и $a = a^1$ – сдвиг на единицу времени вдоль траекторий потока a^t. Для любого набора $m \geqslant 1$ гладких попарно не пересекающихся $(n-2)$-сфер $c_1,\dots,c_m$, принадлежащих сфере $\mathbb{S}^{n-1}$, положим

$$Q^{n-1}_i = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} a^t(c_i), \qquad \mathbb{L}_m = \bigcup_{i=1}^m Q^{n-1}_i.$$

Из работы [8] (см. также [9; лемма 4.1]) следует, что для диффеоморфизма f существует множество $\mathbb{L}_{m_f}$ и гомеоморфизм $\psi_f\colon V_f \to \mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}$ такой, что

$$f|_{V_f} = \psi_f^{-1}a\psi_f|_{V_f}, \qquad \psi_f(L^s_f\cup L^u_f) = \mathbb{L}_{m_f}.$$

Снабдим штрихом обозначения аналогичных объектов для диффеоморфизма f'.

Шаг 3. *Построение сопрягающего гомеоморфизма на* V_f.

Изоморфизм η индуцирует взаимно однозначное соответствие между множествами

$$L^\delta_f \cap S^{n-1}_f, \quad L^\delta_{f'}\cap S^{n-1}_{f'}, \qquad \delta\in\{s,u\},$$

и между компонентами связности множеств $S^{n-1}_f\setminus\mathscr{L}_f$, $S^{n-1}_{f'}\setminus\mathscr{L}_{f'}$, которое также будем обозначать через η_*. При этом, если K, K' – компоненты связности множеств $S^{n-1}_f\setminus\mathscr{L}_f$, $S^{n-1}_{f'}\setminus\mathscr{L}_{f'}$ такие, что $K'=\eta_*(K)$, то являются связными подмножества сфер S^{n-1}_f, $S^{n-1}_{f'}$ соответственно, ограниченные одинаковым количеством цилиндрически вложенных сфер размерности $n-2$, равным числу ребер, входящих в соответствующие множествам K, K' вершины графов.

Не уменьшая общности, будем считать, что $c'_i = \psi_{f'}\eta_*\psi_f^{-1}(c_i)$ и сфера c_1 делит сферу $\mathbb{S}^{n-1}$ на два открытых диска таких, что множество $\mathbb{L}_{m_f}\cap(\mathbb{S}^{n-1}\setminus c_1)$ содержится в одном из них. Обозначим через D_1 замыкание этого диска и положим $d_1 = \mathbb{S}^{n-1}_f\setminus\operatorname{int}D_1$. Для

[2]Множество A называется *аттрактором* гомеоморфизма $f\colon M^n\to M^n$, если существует замкнутая окрестность $U\subset M^n$ множества A такая, что $f(U)\subset\operatorname{int}U$ и $A=\bigcap_{n\geqslant0}f(U)$. Множество R называется *репеллером* гомеоморфизма f, если оно является аттрактором гомеоморифизма f^{-1}.

каждой сферы $c_i \subset (\mathbb{L}_{m_f} \cap \mathbb{S}^{n-1})$, $i \in \{2, \ldots, m_f\}$, обозначим через d_i замкнутый диск, ограниченный сферой c_i, и содержащийся в D_1. Построим диффеоморфизм $\varphi_0 \colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ такой, что $\varphi_0(d_i) = d_i'$, $i \in \{1, \ldots, m_f\}$.

Без потери общности предположим, что нумерация на множестве дисков $d_1, \ldots, d_{m_f}$ выбрана таким образом, что для некоторого $n_1 \leqslant m_f$ выполняется равенство

$$\bigcup_{i=1}^{n_1} d_i = \bigcup_{i=1}^{m_f} d_i.$$

В силу [10; гл. 8, теорема 3.2], существует диффеоморфизм $h_1 \colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ такой, что

$$h_1(d_i) = d_i', \qquad i \in \{1, \ldots, n_1\}.$$

Если $n_1 = m_f$, то положим $\varphi_0 = h_1$ и перейдем к следующему шагу. Пусть $n_1 < m_f$. Как и выше предположим, что нумерация на множестве дисков $d_1, \ldots, d_{m_f}$ выбрана таким образом, что для некоторого $n_2 \leqslant m_f - n_1$ выполняется равенство

$$\bigcup_{i=1}^{n_2} d_{n_1+i} = \bigcup_{i=n_1+1}^{m_f} d_i.$$

Тогда существует диффеоморфизм $h_2 \colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$, совпадающий с h_1 вне дисков d_i, $i \in \{1, \ldots, n_1\}$ и такой, что $h_2(d_{n_1+i}) = d'_{n_1+i}$, $i \in \{1, \ldots, n_2\}$. Если $n_1 + n_2 = m_f$, то положим $\varphi_0 = h_2$ и перейдем к следующему шагу. В противном случае продолжим процесс и за конечное число шагов получим искомый диффеоморфизм φ_0.

Определим диффеоморфизм $\Phi \colon \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ соотношением

$$\Phi(x, t) = (\varphi_0(x), t), \qquad x \in \mathbb{S}^{n-1}, \quad t \in \mathbb{R},$$

и положим $\varphi = \psi_{f'}^{-1} \Phi \psi_f \colon V_f \to V_{f'}$.

Шаг 4. *Построение сопрягающего гомеоморфизма φ_σ в окрестности седловой точки σ.*

Гомеоморфизм φ, построенный на шаге 3, единственным образом продолжается на неподвижные точки. Будем обозначать через $p' \in \Omega_{f'}$ точку $\varphi(p)$, $p \in \Omega_f$. Из условий, определяющих класс G, и теоремы 5.5 книги [11] следует, что гомеоморфизм $f \in G$ в окрестности произвольной точки $p \in \Omega_f^1$ топологически сопряжен с линейным отображением $b \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, задаваемым уравнением

$$b(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(2x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{2}x_n\right),$$

а в окрестности произвольной точки $q \in \Omega_f^{n-1}$ топологически сопряжен с отображением b^{-1}.

Положим

$$\begin{gathered} \mathbb{U}_\tau = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2(x_2^2 + \cdots + x_n^2) \leqslant \tau^2\}, \qquad \tau \in (0, 1], \\ \mathbb{U} = \mathbb{U}_1, \qquad \mathbb{U}_0 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}, \\ \mathbb{N}^s = \mathbb{U} \setminus Ox_1, \qquad \mathbb{N}^u = \mathbb{U} \setminus \mathbb{U}_0. \end{gathered}$$

Определим на $\mathbb{U}_\tau$ два b-инвариантных слоения T^s, T^u следующим образом: каждый слой $T^s(x_1)$ слоения T^s является пересечением гиперплоскости, проходящей через точку $(x_1, 0, \ldots, 0)$ параллельно координатной плоскости $x_1 = 0$, с множеством $\mathbb{U}_\tau$, а каждый слой $T^u(x_2, \ldots, x_n)$ слоения T^u является пересечением прямой, проходящей через точку $(0, x_2, \ldots, x_n)$ и параллельной оси Ox_1, с окрестностью $\mathbb{U}_\tau$. Обозначим через $\pi_s \colon \mathbb{U}_\tau \to Ox_1$, $\pi_u \colon \mathbb{U}_\tau \to \mathbb{U}_0$ проекции вдоль слоев слоений T^s, T^u соответственно:

$$\pi_s(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, 0, \ldots, 0), \qquad \pi_u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (0, x_2, \ldots, x_n).$$

Из [1; теорема 2.1.2] следует, что существует набор попарно не пересекающихся инвариантных окрестностей $\{N_\sigma\}_{\sigma\in\Omega^1_f\cup\Omega^{n-1}_f}$ седловых точек гомеоморфизма f и гомеоморфизмов $\chi_\sigma\colon N_\sigma\to\mathbb{U}$ такой, что

$$\chi_\sigma f|_{N_\sigma}=\begin{cases} b\chi_\sigma|_{N_\sigma}, & \text{если } \sigma\in\Omega^1_f,\\ b^{-1}\chi_\sigma|_{N_\sigma}, & \text{если } \sigma\in\Omega^{n-1}_f.\end{cases}$$

Положим

$$N_f=\bigcup_{\sigma\in(\Omega^1_f\cup\Omega^{n-1}_f)} N_\sigma,$$

$$N^\tau_\sigma=\chi^{-1}_\sigma(\mathbb{U}_\tau),\qquad T^s_\sigma=\chi^{-1}_\sigma(T^s),\quad T^u_\sigma=\chi^{-1}_\sigma(T^u).$$

Для каждой точки $\sigma\in\Omega^1_f$ обозначим через $\pi^u_\sigma\colon N^\tau_\sigma\to W^s_\sigma$, $\pi^s_\sigma\colon N^\tau_\sigma\to W^u_\sigma$ проекции вдоль слоев слоений T^u_σ, T^s_σ соответственно, определяемые соотношениям

$$\pi^u_\sigma=\chi_\sigma\pi_u\chi^{-1}_\sigma,\qquad \pi^s_\sigma=\chi_\sigma\pi_s\chi^{-1}_\sigma,$$

и положим $\varphi^u_\sigma=\chi^{-1}_{\sigma'}\chi_\sigma|_{W^u_\sigma}$; тогда

$$f'|_{W^u_{\sigma'}}=\varphi^u_\sigma f(\varphi^u_\sigma)^{-1}|_{W^u_{\sigma'}}.$$

Выберем значение $\tau\in(0,1]$ так, чтобы на множестве N^τ_σ было корректно определено топологическое вложение $\varphi_\sigma\colon N^\tau_\sigma\to N_{\sigma'}$, задаваемое формулами

$$\varphi_\sigma(x)=T^u_{\sigma'}(\varphi(\pi^u_\sigma(x)))\cap T^s_{\sigma'}(\varphi^u_\sigma(\pi^s_\sigma(x)))$$

и такое, что $\varphi_\sigma(N^\tau_\sigma\setminus W^u_\sigma)\subset\varphi(N^\tau_\sigma\setminus W^u_\sigma)$. По построению

$$f'|_{\varphi_\sigma(N^\tau_\sigma)}=\varphi_\sigma f\varphi^{-1}_\sigma|_{\varphi_\sigma(N^\tau_\sigma)}.$$

Проделаем аналогичные построения, что и для точек из множества Ω^1_f, с формальной заменой s на u, b на b^{-1} и построим топологическое вложение $\varphi_\sigma\colon N^\tau_\sigma\to N_{\sigma'}$ для каждой седловой точки $\sigma\in\Omega^{n-1}_f$.

Шаг 5. *Слияние гомеоморфизма φ с вложениями φ_σ.*

Из [1; следствие 4.3.2] следует, что существуют $0<\tau_1<\tau$ и гомеоморфизм $h_\sigma\colon N_\sigma\to\varphi(N_\sigma)$, совпадающий с φ_σ на множестве $N^{\tau_1}_\sigma$, совпадающий с φ на ∂N_σ и удовлетворяющий условию

$$f'|_{\varphi(N_\sigma)}=h_\sigma f h^{-1}_\sigma|_{\varphi(N_\sigma)}.$$

Тогда искомый сопрягающий гомеоморфизм $h\colon S^n\to S^n$ определяется формулой

$$h(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in(S^n\setminus N_f),\\ h_\sigma(x), & x\in N_\sigma,\quad \sigma\in(\Omega^1_f\cup\Omega^{n-1}_f).\end{cases}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical Systems on* 2- *and* 3-*Manifolds*, Developments in Math., **46**, Springer International Publ., 2016. **[2]** В. З. Гринес, О. В. Починка, *УМН*, **68**:1 (409) (2013), 129–188. **[3]** В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Тр. МИАН, **270**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2010, 62–85. **[4]** В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка, *Матем. заметки*, **102**:4 (2017), 613–618. **[5]** V. Z. Grines, E. A. Gurevich, O. V. Pochinka, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **208**:1 (2015), 81–90. **[6]** J. C. Cantrell, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15**:4 (1964), 574–578. **[7]** M. Brown, *Ann. of Math.* (2), **75** (1962), 331–341. **[8]** В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, О. В. Починка, *УМН*, **71**:6 (432) (2016), 163–164. **[9]** V. Grines,

E. Gurevich, O. Pochinka, *On Embedding of Multidimensional Morse–Smale Diffeomorphisms in Topological Flows*, 2018, arXiv: 1806.03468. **[10]** М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Мир, М., 1979. **[11]** Ж. Палис, В. Ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем. Введение*, Мир, М., 1986.

В. З. Гринес
Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»
(Нижегородский филиал)
E-mail: vgrines@hse.ru

Поступило
18.06.2018

Е. Я. Гуревич
Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»
(Нижегородский филиал)
E-mail: egurevich@hse.ru

О. В. Починка
Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»
(Нижегородский филиал)
E-mail: opochinka@hse.ru