А. Н. Магазинов, К теореме Делоне о классификации схождений параллелоэдров в гранях коразмерности 3, *Модел. и анализ информ. систем*, 2013, том 20, номер 4, 71–80

Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **4** (2013) 71–80

УДК 514.1+514.8

К теореме Делоне о классификации схождений параллелоэдров в гранях коразмерности 3

Магазинов А. Н. [1]

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8
Лаборатория «Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б.Н. Делоне,
ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14

e-mail: magazinov-al@yandex.ru

получена 27 июля 2013

Ключевые слова: параллелоэдр, решетчатое разбиение, дуальная клетка

В 1929 году Б.Н. Делоне привел полную классификацию комбинаторных типов схождений параллелоэдров в гранях коразмерности 3. Оказалось, что любое схождение дуально одному из следующих пяти трехмерных многогранников: тетраэдру, четырехугольной пирамиде, октаэдру, треугольной призме или параллелепипеду. В статье приводится новое доказательство этого результата, основанное на формуле Эйлера. С использованием этой классификации получены некоторые дальнейшие свойства граней коразмерности 3 разбиений пространства на параллелоэдры. Показано, что для граней коразмерности 3 выполнена гипотеза о размерности, т.е. аффинная оболочка центров параллелоэдров, сходящихся в грани коразмерности 3, трехмерна. Наконец, установлено, что центры параллелоэдров, сходящихся в грани коразмерности 3, порождают трехмерную подрешетку индекса 1.

1. Введение

Пусть P — такой выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^d$, что существует разбиение грань-в-грань $T(P)$ пространства $\mathbb{R}^d$ транслятами (параллельными переносами) P. Тогда многогранник P называется *параллелоэдром*. В данной работе обозначение d принято для размерности P.

Как легко видеть, свойство $T(P)$ быть разбиением грань-в-грань влечет, что

$$\Lambda_P = \{\mathbf{t} : P + \mathbf{t} \in T(P)\} \quad \text{является решеткой.}$$

В 1897 году Г. Минковским [8] были установлены 3 необходимых условия для того, чтобы выпуклый многогранник P был параллелоэдром. Сначала сформулируем первые 2 из них

[1]Работа частично поддержана грантом Правительства РФ в рамках постановления №220, проект 11.G34.31.0053 и грантом РФФИ 11-01-00633-а.

1. Параллелоэдр P имеет центр симметрии.

2. Любая гипергрань P имеет центр симметрии.

Третье условие использует понятие *пояска*, определяемое для многогранников, все гиперграни которых обладают центральной симметрией.

Пусть Q — выпуклый d-мерный многогранник, и каждая гипергрань Q имеет центр симметрии. Пусть F — произвольная $(d-2)$-мерная грань Q. Тогда F определяет *поясок* Q как множество всех гиперграней Q, параллельных F. Отсюда следует, например, что каждая гипергрань пояска содержит ровно две $(d-2)$-мерные грани, параллельные F, и каждая $(d-2)$-мерная грань, параллельная F, содержится ровно в двух гипергранях пояска.

Тогда третье условие Минковского формулируется следующим образом.

3. Каждый поясок P состоит из 4 или 6 гиперграней.

В 1954 году Б.А. Венков [1] показал, что любой выпуклый многогранник, обладающий свойствами 1 – 3, есть параллелоэдр. Условия 1 – 3 поэтому называют *условиями Минковского–Венкова*.

Пусть F — произвольная грань разбиения $T(P)$. Определим *дуальную клетку* $\mathcal{D}(F)$ как множество всех центров параллелоэдров $T(P)$, содержащих F. Это определение было использовано, например, А. Ординым [9].

Следуя [4, §17.3], можно определить *звездное разбиение* кусочно-линейного многообразия M по данному локально конечному полиэдральному разбиению грань-в-грань T_M этого многообразия. А именно, рассмотрим сначала разбиение T'_M, являющееся барицентрическим подразделением T_M. Затем для каждой грани $F \in T_M$ определим (замкнутую) клетку F^* как объединение всех симплексов T'_M, содержащих барицентр F, но не содержащих барицентров никаких ее подграней. Обозначим это разбиение T^*_M.

В случае $M = \mathbb{R}^d$ и $T_M = T(P)$ обозначим соответствующее звездное разбиение через $T^*(P)$. Легко видеть, что для k-мерной грани F разбиения $T(P)$ клетка F^* гомеоморфна $(d-k)$-мерному диску. Кроме того, естественная биекция, устанавливающая соответствие между $\mathcal{D}(F)$ и F^*, сохраняет отношение включения. Таким образом, изучение комбинаторики $T(P)$ можно свести к изучению комбинаторики $T^*(P)$, а то, в свою очередь, к изучению отношения включения на множестве всех дуальных клеток $\mathcal{D}(F)$, где F — грань $T(P)$.

Пусть $\dim F = d - k$. Рассмотрим k-мерную аффинную плоскость L, пересекающую F трансверсально в точке, принадлежащей $\operatorname{rel\,int} F$. В достаточно малой окрестности F сечение $T(P)$ плоскостью L совпадает с полным k-мерным полиэдральным веером, называемым *веером* F. Вводя в рассмотрение тем самым порядок включения на множестве

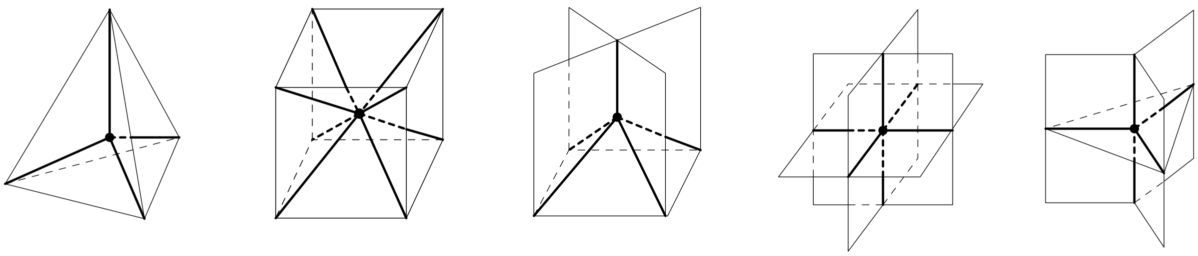
$$\{F' : F' \text{ — грань } T(P) \text{ и } F' \supseteq F\},$$

мы уточняем определение *звезды грани* F, данное С.С. Рышковым и К.А. Рыбниковым [10].

Комбинаторика веера F полностью определяется частичным порядком включения на множестве подклеток клетки $\mathcal{D}(F)$.

В 1929 году Б.Н. Делоне [6] доказал теорему, которая может быть сформулирована следующим образом в терминах данной статьи.

Теорема 1. *Дуальная клетка произвольной* $(d-3)$*-мерной грани разбиения грань-в-грань пространства на параллелоэдры комбинаторно эквивалентна одному из пяти трехмерных многогранников: тетраэдру, октаэдру, четырехугольной пирамиде, треугольной призме или параллелепипеду. Или, эквивалентно, веер любой* $(d-3)$*-мерной грани комбинаторно эквивалентен одному из изображенных на рис. 1.*



a) b) c) d) e)

Рис. 1. 5 комбинаторных типов вееров $(d-3)$-граней

Замечание. Значение теоремы 1 объясняется ее использованием во многих известных доказательствах частных случаев не решенной пока проблемы Вороного [11]. В качестве примеров приведем [6, 12, 9].

В данной статье приводится комбинаторное доказательство теоремы 1 с использованием понятия *тесного полиэдрального веера*. Далее, для любой $(d-3)$-мерной грани F разбиения мы доказываем, что комбинаторика $\mathcal{D}(F)$ как дуальной клетки совпадает с комбинаторным строением многогранника $\operatorname{conv}\mathcal{D}(F)$. В частности, это подразумевает, что аффинная размерность точечного множества $\mathcal{D}(F)$ равна трем.

Замечание. Равенство $\dim \operatorname{aff} \mathcal{D}(F)$ представляет собой частный случай *гипотезы о размерности* (см. [3]), утверждающей, что для любой грани F разбиения $T(P)$ (не обязательно $(d-3)$-мерной) выполняется равенство $\dim \operatorname{aff} \mathcal{D}(F) = d - \dim F$.

Далее исследуются способы сопоставления грани F некоторой решетки. Первый способ — это взятие минимальной подрешетки Λ_P, содержащей $\mathcal{D}(F)$. В результате получается трехмерная решетка, обозначаемая $\Lambda(F)$. Второй способ — рассмотреть решетку

$$\Lambda_{\mathrm{aff}}(F) = \Lambda_P \cap \operatorname{aff} \mathcal{D}(F).$$

Очевидно, $\Lambda(F) \subseteq \Lambda_{\mathrm{aff}}(F)$. На самом деле, мы докажем, что данные решетки совпадают. Другими словами, индекс

$$(\Lambda_{\mathrm{aff}}(F) : \Lambda(F))$$

равен единице.

Автору неизвестно, имеют ли место аналогичные результаты для $(d-4)$-мерных граней. Для $(d-5)$-мерных граней теорема о совпадении решеток неверна, поскольку 5-мерный симплекс индекса 2 может быть даже клеткой Делоне для некоторой решетки (см., напр., [7]).

2. Тесные вееры

Пусть $\mathcal{C}$ — полный k-мерный полиэдральный веер в $\mathbb{R}^k$. Рассмотрим его произвольную грань $C \in \mathcal{C}$ и положим $\dim C = k - m$.

Можно определить *веер* C так же, как и веер грани в разбиении пространства на параллелоэдры. А именно, пусть L — m-мерная аффинная плоскость в $\mathbb{R}^k$, трансверсально пересекающая C. В некоторой достаточно малой окрестности $C \cap L$ сечение веера $\mathcal{C}$ плоскостью L совпадает с некоторым полным m-мерным полиэдральным веером, который мы и назовем *веером грани* C.

Грань $C \in \mathcal{C}$ (представляющая собой полиэдральный конус) называется *стандартной*, если ее веер обладает центральной симметрией.

Пусть C — стандартный конус полного полиэдрального веера $\mathcal{C}$. Будем говорить, что конусы $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, такие что $C \subset C_1$ и $C \subset C_2$ *симметричны* относительно C, если центральная симметрия в точке $C \cap L$ локально меняет местами L-сечения C_1 и C_2.

Очевидно, что для любого стандартного конуса $C \in \mathcal{C}$ все конусы $C' \in \mathcal{C}$, для которых $C \subsetneq C'$, распадаются на пары симметричных относительно C.

Назовем k-мерный полный полиэдральный веер $\mathcal{C}$ *тесным*, если для любых двух различных k-мерных конусов $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ конус $C = C_1 \cap C_2$ является стандартным и, кроме того, C_1 и C_2 симметричны относительно C.

Далее, грань F разбиения $T(P)$ будем также называть *стандартной*, если F инвариантна относительно некоторой центральной симмерии, сохраняющей Λ_P. В работе [2] Н.П. Долбилин показал, что пересечение любых двух параллелоэдров разбиения $T(P)$ — стандартная грань $T(P)$ или пусто. Отсюда следует предложение 2.

Предложение 2. *Веер любой грани разбиения $T(P)$ является тесным.*

Для доказательства теоремы 1 мы классифицируем все тесные трехмерные вееры. Предваряя классификацию, отметим некоторые важные свойства тесных трехмерных вееров.

Предложение 3 (Свойства тесных трехмерных вееров)**.** *Пусть $\mathcal{C}$ — тесный трехмерный веер. Тогда*

1. *Любой луч $R \in \mathcal{C}$ содержится в трех или четырех двумерных гранях $\mathcal{C}$ (имеет степень 3 или 4).*

2. *Для любых двух трехмерных конусов $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ выполнено ровно одно из следующих утверждений:*

   (i) *$C_1 \cap C_2$ — двумерный конус;*

   (ii) *$C_1 \cap C_2$ — луч степени 4;*

   (iii) *$\mathcal{C}$ симметричен относительно вершины, центральная симметрия $\mathcal{C}$ меняет местами C_1 и C_2, а пересечение $C_1 \cap C_2$ есть в точности вершина $\mathcal{C}$.*

Доказательство. Легко видеть, что веер любой грани тесного веера тесен. Рассмотрим луч $R \in \mathcal{C}$. Веер, соответствующий R, двумерен. Но легко видеть, что тесный двумерный веер может иметь только 3 или 4 двумерных конуса. Таким образом, пункт 1 доказан.

Для доказательства пункта 2 рассмотрим пересечение $C = C_1 \cap C_2$. Если $\dim C = 2$, то выполняется (i). Если $\dim C = 0$, то выполяется (iii) в силу определения тесного веера. Наконец, если $\dim C = 1$, то C — стандартный луч $\mathcal{C}$. Поэтому C имеет четную степень, таким образом, единственно возможная степень C равна 4. Соответственно выполнено (ii).

□

Замечание. Заметим, что пункт 1 предложения 3 дает третье условие Минковского–Венкова (условие о поясках).

3. Несимметричные тесные вееры

Предположим, что трехмерный тесный веер $\mathcal{C}$ несимметричен, т.е. его вершина не является стандартной гранью. В этом случае утверждение 2.(iii) предложения 3 не выполняется ни для какой пары различных трехмерных конусов $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$.

Пусть a_3 — число лучей $\mathcal{C}$, имеющих степень 3, a_4 — число лучей степени 4, b — число двумерных и c — число трехмерных граней $\mathcal{C}$.

Поскольку любая двумерная грань $\mathcal{C}$ имеет 2 подграни-луча,

$$b = \tfrac{3a_3}{2} + 2a_4. \tag{1}$$

Далее, рассмотрим единичную сферу S^2 с центром в вершине $\mathcal{C}$. Для любой грани $C \in \mathcal{C}$ ненулевой размерности пересечение $C \cap S^2$ является диском размерности $\dim C - 1$. Совокупность относительных внутренностей всех таких дисков является представлением S^2 в виде CW-комплекса. Эйлерова характеристика (см., напр., [4, § 13.5, упражнение 8]) такого комплекса равна двум. Поэтому

$$a_3 + a_4 - b + c = 2. \tag{2}$$

Наконец, пересечение любых двух трехмерных конусов удовлетворяет одному из описаний в пункте 2 предложения 3, следовательно,

$$\tfrac{c(c-1)}{2} = 2a_4 + b. \tag{3}$$

Исключением a_4 и b из системы уравнений (1), (2) и (3), получаем

$$\tfrac{c(c-1)}{2} = 4(c-2) - \tfrac{a_3}{2}.$$

Из неравенств

$$\tfrac{c(c-1)}{2} \leq 4(c-2) \quad \text{and} \quad c \geq 4$$

вытекает, что $c = 4, 5$ или 6. Используя (1) – (3), находим

$$(a_3, a_4, b, c) = (4, 0, 6, 4),\ (4, 1, 8, 5) \text{ или } (2, 3, 9, 6).$$

Перечисляя комбинаторные типы полных трехмерных полиэдральных вееров не более чем с шестью лучами, находим всевозможные комбинаторые типы несимметричных тесных вееров. А именно, получаем типы a), c) и e) на рис. 1.

4. Симметричные тесные вееры

Для симметричного трехмерного веера (т.е. такого, что его вершина является стандартной гранью) мы используем те же обозначения a_3, a_4, b, c, что и в разделе 3. Тогда равенства (1) и (2) выполняются в силу тех же причин, что и ранее. Вместо равенства (3) имеет место

$$\tfrac{c(c-1)}{2} = 2a_4 + b + \tfrac{c}{2}, \qquad (3')$$

где новое слагаемое $\frac{c}{2}$ соответствует $\frac{c}{2}$ парам трехмерных конусов $\mathcal{C}$, пересекающимся по вершине (описанным в пункте 2.(iii) предложения 3).

Как и ранее, мы исключаем a_4 and b из системы уравнений 1), (2) и (3′). В результате получаем

$$\tfrac{c(c-1)}{2} = 4(c-2) - \tfrac{a_3}{2}.$$

Число c трехмерных граней симметричного трехмерного полиэдрального веера четно и не меньше 6. Следовательно, неравенство

$$\tfrac{c(c-1)}{2} \leq 4(c-2)$$

влечет $c = 6$ or $c = 8$. Таким образом,

$$(a_3, a_4, b, c) = (0, 6, 12, 8) \text{ or } (8, 0, 12, 6).$$

Перечисляя все возможные комбинаторные типы трехмерных симметричных полных полиэдральных вееров с шестью и восемью лучами, получаем, что лишь два комбинаторных типа отвечают тесным веерам. Эти типы показаны на рис. 1, b) и d).

5. Трехмерные дуальные клетки

Пусть F — грань $T(P)$. Напомним, что *дуальная клетка* $\mathcal{D}(F)$ — это множество всех центров параллелоэдров $T(P)$, содержащих F. Предположим, что выполняются следующие условия.

1. Для любой дуальной клетки $\mathcal{D}(F')$, являющейся подклеткой $\mathcal{D}(F)$, многогранник $\operatorname{conv}\mathcal{D}(F')$ — грань $\operatorname{conv}\mathcal{D}(F)$.

2. Обратно, множество вершин любой грани многогранника $\operatorname{conv}\mathcal{D}(F)$ является подклеткой $\mathcal{D}(F)$.

В этом случае будем говорить, что $\mathcal{D}(F)$ *удовлетворяет условиям двойственности.*

В этом разделе мы получим следующий результат.

Теорема 4. *Дуальная клетка любой $(d-3)$-мерной грани F разбиения $T(P)$ удовлетворяет условиям двойственности.*

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\dim \operatorname{aff} \mathcal{D}(F) > 2. \qquad (4)$$

Предположим, наоборот, что $\dim \operatorname{aff} \mathcal{D}(F) \leq 2$. Тогда, очевидно,

$$\operatorname{aff} \mathcal{D}(F) = \operatorname{aff} \mathcal{D}(F'),$$

где F' — произвольная $(d-2)$-мерная грань, содержащая F.

Пусть $\pi_{F'}$ обозначает проекцию вдоль F' на дополнительную двумерную плоскость. Известно [8, 6], что множество

$$\{\pi_{F'}(P') : P' \in T(P) \text{ and } c(P') \in \operatorname{aff} \mathcal{D}(F')\}$$

есть разбиение плоскости into на шестиугольники в случае если F' примитивна или на параллелограммы, если F' стандартна.

В случаях a) – c), e) на рис. 1 веер грани F содержит примитивную $(d-2)$-мерную грань F'. Тогда из рассмотрения проекции, описанной выше, следует, что множество

$$\{P' \in T(P) : c(P') \in \operatorname{aff} \mathcal{D}(F')\}$$

не содержит ни одного подмножества из 4 параллелоэдров, имеющих общую точку. С другой стороны, хотя бы 4 параллелоэдра содержат грань F, противоречие.

В случае d) на рис. 1 пусть F' — произвольная $(d-2)$-мерная грань, содержащая F. Снова из рассмотрения проекции, описанной выше, следует, что множество

$$\{P' \in T(P) : c(P') \in \operatorname{aff} \mathcal{D}(F')\}$$

не содержит ни одного подмножества из 5 параллелоэдров, имеющих общую точку. Но ровно 8 параллелоэдров содержат грань F, противоречие. Итак, неравенство (4) доказано.

Пусть теперь G — стандартная грань $T(P)$ и $P_{m_i} \in T(P)$ при $i = 1, 2, 3, 4$. Предположим, что

$$P_{m_1} \cap P_{m_2} = P_{m_3} \cap P_{m_4} = G.$$

Тогда, принимая обозначение $c(Q)$ для центра симметрии многогранника Q, имеем

$$c(P_{m_1}) + c(P_{m_2}) = c(P_{m_3}) + c(P_{m_4}), \tag{5}$$

поскольку обе части равенства равны $2c(G)$.

Пусть $\mathcal{D}(F) = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, где $x_m = c(P_m)$. Тогда любое равенство вида (5) влечет векторное соотношение

$$(x_{m_1} - x_0) + (x_{m_2} - x_0) = (x_{m_3} - x_0) + (x_{m_4} - x_0). \tag{6}$$

Рассматривая отдельно каждый из случаев a) – e) на рис. 1, запишем всевозможные соотношения вида (6). Решая данную систему, в каждом случае получаем, что существуют 3 таких вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, что каждый из векторов $(x_m - x_0)$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$ есть линейная комбинация $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ с действительными коэффициентами. Поэтому $\operatorname{conv} \mathcal{D}(F)$ есть образ конкретного трехмерного многогранника D (своего для каждого из случаев a) – e)) при некотором линейном отображении.

Неравенство (4) показывает, что это отображение невырождено, поэтому многогранник $\operatorname{conv} \mathcal{D}(F)$ аффинно (следовательно, и комбинаторно) эквивалентен D. В каждом из случаев a) – e) установление типа D с использованием соотношений (6) и последующая проверка условий двойственности оставляется читателю в качестве упражнения.

$\square$

6. Решетки $(d-3)$-мерных граней

В разделе 1. были введены два способа построения решетки по грани F разбиения $T(P)$ и, соответственно, обозначения этих решеток $\Lambda(F)$ и $\Lambda_{\text{aff}}(F)$. Мы покажем, что в случае $\dim F = d-3$ оба способа дают на самом деле одну и ту же решетку.

Теорема 5. *Для любой $(d-3)$-мерной грани F разбиения $T(P)$ выполняется*

$$\Lambda_{\text{aff}}(F) = \Lambda(F)).$$

Доказательство. Выберем точку $x \in \operatorname{rel\,int} F$ и зафиксируем параллелоэдр $P_0 \in T(P)$, содержащий грань F. Рассмотрим произвольный параллелоэдр P_1 разбиения $T(P)$, содержащий F (возможно, совпадающий с P_0). Точка x принадлежит P_1, поэтому

$$x + c(P_0) - c(P_1) \in P_0.$$

Таким образом, если $P_0, P_1, \ldots, P_n$ — это все параллелоэдры $T(P)$, содержащие F, тогда

$$\operatorname{conv}\{-c(P_i) + x + c(P_0) : i = 0, 1, \ldots, n\} \subset P_0.$$

Следовательно, для любого $P' \in T(P)$

$$(-\operatorname{conv}\mathcal{D}(F)) + x + c(P') = \operatorname{conv}\{x - c(P_i) + c(P') : i = 0, 1, \ldots, n\} \subset P'.$$

Рассматривая лишь параллелоэдры P' со свойством $c(P') \in \Lambda_{\text{aff}}(F)$, заключаем, что семейство

$$\{(-\operatorname{conv}\mathcal{D}(F)) + x + \mathbf{t} : \mathbf{t} \in \Lambda_{\text{aff}}(F)\}$$

образует упаковку.

В силу известного свойства упаковок (см., например, работу Данцера и Грюнбаума [5]), семейство транслятов симметризаций Минковского

$$\{\tfrac{1}{2}(-\operatorname{conv}\mathcal{D}(F)) + \tfrac{1}{2}\operatorname{conv}\mathcal{D}(F) + \mathbf{t} : \mathbf{t} \in \Lambda_{\text{aff}}(F)\}$$

также образует упаковку.

Из сказанного следует неравенство

$$V\left(\tfrac{1}{2}(-\operatorname{conv}\mathcal{D}(F)) + \tfrac{1}{2}\operatorname{conv}\mathcal{D}(F)\right) \le V(\Lambda_{\text{aff}}(F)), \tag{7}$$

где в левой части стоит объем трехмерного множества, а в правой — фундаментальный объем решетки.

Разделив обе части неравенства (7) на $V(\Lambda(F))$ и рассмотрев обратные величины, получаем

$$(\Lambda_{\text{aff}}(F) : \Lambda(F)) \le \frac{8V(\Lambda(F))}{V\left((-\operatorname{conv}\mathcal{D}(F)) + \operatorname{conv}\mathcal{D}(F)\right)}.$$

В случаях b) – e) на рис. 1 правая часть последнего неравенства меньше 2, следовательно, $(\Lambda_{\text{aff}}(F) : \Lambda(F)) = 1$. В случае a) то же рассуждение дает $(\Lambda_{\text{aff}}(F) : \Lambda(F)) \le 2$.

Пусть теперь $\operatorname{conv}\mathcal{D}(F)$ — тетраэдр и $(\Lambda_{\text{aff}}(F) : \Lambda(F)) = 2$. Последнее равенство означает, что

$$\Lambda_{\text{aff}}(F) = \Lambda(F) \cup \left(\Lambda(F) + \tfrac{1}{2}\mathbf{t}\right),$$

где $\mathbf{t}$ — вектор решетки $\Lambda(F)$. Если $(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2)/2$ — вектор решетки $\Lambda(F)$, то решетки

$$\Lambda(F) + \tfrac{1}{2}\mathbf{t}_1 \quad \text{and} \quad \Lambda(F) + \tfrac{1}{2}\mathbf{t}_2$$

совпадают. Таким образом, при фиксированном $\mathcal{D}(F)$ решетка $\Lambda(F)$ также фиксирована, и для $\Lambda_{\text{aff}}(F)$ существует 7 возможностей.

Прямой проверкой каждой из семи возможностей можно убедиться, что у каждого тетраэдра

$$(-\operatorname{conv}\mathcal{D}(F)) + x + c(P')$$

есть хотя бы одно ребро, середина которого принадлежит другому тетраэдру того же вида. С другой стороны легко видеть, что все середины ребер данного тетраэдра лежат строго внутри P', противоречие.

Из полученного противоречия следует, что и в случае а) на рис. 1 выполняется $(\Lambda_{\text{aff}}(F) : \Lambda(F)) = 1$.

$\square$

Список литературы

1. Венков Б.А. Об одном классе эвклидовых многогранников // Вестник Ленинградского Университета. Сер. мат., физ., хим. 1954. 2. С. 11 – 31. (Venkov B.A. Ob odnom klasse evklidovykh mnogogrannikov // Vestnik Leningradskogo Universiteta. Ser. mat., fiz., khim. 1954. 2. P. 11 – 31 [in Russian]).

2. Долбилин Н.П. Свойства граней параллелоэдров // Геометрия, топология и математическая физика. II: Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова. Тр. МИАН. 2009. 266. С. 112 – 126. (English Translation: Dolbilin N.P. Properties of Faces of Parallelohedra // Proc. Steklov Inst. Math. 2009. 266. P. 105 – 119).

3. Долбилин Н.П. Параллелоэдры: ретроспектива и новые результаты // Труды ММО. 2012. 73:2. С. 259 – 276. (English Translation: Dolbilin N.P. Parallelohedra: A retrospective and new results // Trans. Moscow Math. Soc. 2012. 73. P. 207 – 220).

4. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989. (Fomenko A.T., Fuks D.B. Kurs gomotopicheskoy topologii. Moskva: Nauka, 1989 [in Russian]).

5. Danzer L., Grünbaum B. Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdös und von V. L. Klee // Math. Z. 1962. 79. P. 95 – 99.

6. Delaunay B.N. Sur la partition régulière de l'espace à 4 dimensions // Izv. Acad. sci. of the USSR. Ser. VII. Sect. of phys. and math. sci. 1929. 1 – 2. P. 79 – 110, 147 – 164.

7. Dutour M. The six-dimensional Delaunay polytopes // European Journal of Combinatorics. 2004. 25. P. 535 – 548.

8. Minkowski H. Allgemeine Lehrsätze über die konvexe Polyeder. Nach. Ges. Wiss., Göttingen, 1897. P. 198 – 219.

9. Ordine A. Proof of the Voronoi conjecture on parallelotopes in a new special case: Ph.D. Thesis / Queen's University, Ontario, 2005.

10. Ryshkov S.S., Rybnikov K.A. Jr. The theory of quality translations with applications to tilings // European Journal of Combinatorics. 1997. 18. P. 431 – 444.

11. Voronoi G. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire. Recherches sur les parallélloèdres primitifs // J. Reine Angew. Math. 1908. 134. P. 198 – 287; 1909. 136. P. 67 – 178. *Перевод:* Вороной Г.Ф. Исследования о примитивных параллелоэдрах: Собр. соч. Т. 2. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. С. 239 – 368.

12. Zitomirskij O.K. Verschärfung eines Satzes von Woronoi // J. Leningrad. Fiz.-Mat. Ob-va. 1929. 2. P. 131 – 151.

On Delaunay's Theorem Classifying Coincidences of Parallelohedra at Faces of Codimension 3

Magazinov A.N.

Steklov Mathematical Institute of RAS, Gubkina street, 8, Moscow, 119991, Russia
B. N. Delaunay Laboratory «Discrete and Computational Geometry»,
Yaroslavl State University, Sovetskaya street, 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: parallelohedron, lattice tiling, dual cell

In 1929 B.N. Delaunay obtained the complete classification of all possible combinatorial coincidence types of parallelohedra at their faces of codimension 3. It appeared that every such coincidence is dual to one of the following five three-dimensional polytopes: a tetrahedron, a quadrangular pyramid, an octahedron, a triangular prism, or a parallelepiped. The present paper contains a new combinatorial proof of this result based on Euler formula. Using the classification, we have obtained several further properties of faces of codimension 3 in parallelohedral tilings. For instance, we showed that the Dimension Conjecture holds for faces of codimension 3, i.e. if we take the affine hull of centers of all parallelohedra containing a particular face of codimension 3, this affine hull is three-dimensional. Finally, we proved that the set of centers of all parallelohedra sharing a face of codimension 3 spans a three-dimensional sublattice of index one.

Сведения об авторе: **Магазинов Александр Николаевич**,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН;
Лаборатория «Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б.Н. Делоне,
ЯрГУ им. П.Г. Демидова, аспирант