

УДК 533.6.011.72

ОБ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ВИХРЕВОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А. В. Омельченко, Э. А. Тропп

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург

С использованием метода малого параметра решается задача взаимодействия волны Прандтля — Майера со сдвиговым слоем для случая, когда завихренность потока в сдвиговом слое мала. Строится прямое разложение и доказывается его непригодность на больших удалениях от вихревого слоя. Для получения равномерно пригодного разложения используется метод деформируемых координат. Показывается, что при определенных распределениях скорости в сдвиговом слое характеристики в образующейся в результате взаимодействия отраженной простой волне пересекаются и в потоке появляется скачок уплотнения. Находятся координаты зарождения скачка, а также функция, описывающая его форму.

Ключевые слова: взаимодействие простых волн, газовая динамика, асимптотические разложения, сингулярная задача.

Введение. Взаимодействие простой волны со сдвиговым слоем встречается при описании сверхзвуковых струйных течений [1, 2], взаимодействия скачков уплотнения с простыми волнами [3, 4], а также в задачах внешней аэродинамики [5, 6]. С точки зрения классификации волн сдвиговой слой является вырожденной простой волной [7], поэтому рассматриваемая задача относится к задачам взаимодействия простых волн.

Традиционно при исследовании взаимодействия простых волн между собой используется техника группового анализа [7–9]. Однако точные аналитические решения таких задач возможны лишь в исключительных случаях — уже в задаче о взаимодействии простых волн Прандтля — Майера точное решение получить невозможно [7]. В связи с этим оказываются актуальными приближенные методы решения подобных задач, основным из которых является метод асимптотических разложений по малому параметру [10, 11].

Известно большое число работ, в которых методом малого параметра решалась задача взаимодействия простых волн между собой (см., например, [11–18]). В большинстве из них течение считалось изэнтропическим, а в качестве нулевого приближения использовалось тривиальное решение $u = \text{const}$.

В рассматриваемой задаче в качестве малого параметра берется завихренность течения в сдвиговом слое. При этом в нулевом приближении используется решение типа простой волны. Неограниченность области взаимодействия служит источником неравномерности прямого разложения. Равномерно пригодное разложение строится с использованием метода деформируемых координат [10, 11].

1. Постановка задачи. В рамках модели идеального совершенного газа рассматривается взаимодействие изэнтропической центрированной волны разрежения 1 с вихревым (сдвиговым) слоем 2 конечной толщины (рис. 1). Течение в области взаимодействия описывается системой уравнений Эйлера. Удобно от этой системы перейти к продолженной

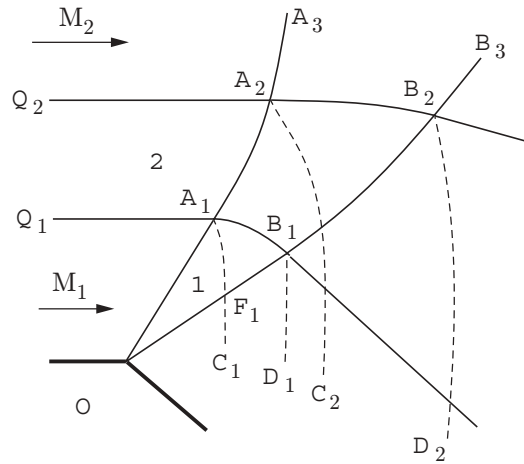


Рис. 1. Схема взаимодействия центрированной волны разрежения с вихревым слоем

системе [19], которая для случая плоского сверхзвукового потока имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{1,2}}{d\nu_{1,2}} &= \pm \frac{\psi}{\cos^2(\vartheta \pm \alpha)} [-M^2 P_{1,2}^2 - (2\mu - M^2)P_1 P_2 + 2\mu P_{1,2} P_3] \pm \\ &\pm Z \left[-\frac{2P_1 P_2 \cos \alpha}{\cos(\vartheta - \alpha) \cos(\vartheta + \alpha)} + \frac{P_1 P_3}{\cos(\vartheta + \alpha) \cos \vartheta} + \frac{P_2 P_3}{\cos(\vartheta - \alpha) \cos \vartheta} \right], \\ \frac{dP_3}{d\nu_3} &= \frac{P_3}{2\Gamma(M) \cos^2 \vartheta} (P_2 - P_1), \quad \Gamma(M) = \frac{\gamma M^2}{A}, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= \frac{P_2 \operatorname{tg}(\vartheta - \alpha) - P_1 \operatorname{tg}(\vartheta + \alpha)}{2\Gamma(M)}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{P_1 - P_2}{2\Gamma(M)}, \\ \frac{\partial M}{\partial x} &= \nu \left[-P_3 \operatorname{tg} \vartheta + \frac{P_2 \operatorname{tg}(\vartheta - \alpha) - P_1 \operatorname{tg}(\vartheta + \alpha)}{2} \right], \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= \nu \left[P_3 - \frac{P_1 + P_2}{2} \right], \quad \nu = \frac{\mu}{(1 + \varepsilon) M}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь M — число Маха; ϑ — угол наклона вектора скорости к оси абсцисс; $\alpha = \arcsin(1/M)$; γ — показатель адиабаты;

$$\begin{aligned} Z &= \frac{M^2 - 2}{2A^2} \frac{\mu}{(1 + \varepsilon) M^3}; \quad \psi = \frac{1}{2(1 + \varepsilon) M^2 A}; \\ \mu &= 1 + \varepsilon A^2; \quad A = \sqrt{M^2 - 1}; \quad \varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1). \end{aligned}$$

Входящие в (1.1) функции

$$P_{1,2} = \frac{\partial \ln p}{\partial y} \pm \Gamma(M) \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \quad P_3 = \frac{\partial \ln p}{\partial y} + \frac{(1 + \varepsilon) M^2}{\mu} \frac{\partial \ln M}{\partial y}$$

характеризуют интенсивность малых возмущений, распространяющихся вдоль характеристик первого (P_1) и второго (P_2) семейств, а также вдоль линий тока (P_3). Так, в простой волне Прандтля — Майера $P_2 = P_3 = 0$, а

$$P_1 = \frac{2(1 + \varepsilon) \sqrt{M^2 - 1} \cos^2(\vartheta + \alpha)}{x - c}. \quad (1.2)$$

Константа c меняется при переходе от одной характеристики первого семейства к другой. В центрированной волне эта величина постоянна во всей волне и равна абсциссе x_0 центра (x_0, y_0) волны.

Из (1.1) также следует, что

$$\frac{d\vartheta}{dv_3} + \frac{(1-\varepsilon)\sqrt{M^2-1}}{\mu} \frac{d \ln M}{dv_3} = \frac{d\vartheta}{dv_3} + \frac{d\omega(M)}{dv_3} = 0,$$

где $\omega(M)$ — функция, рассчитываемая по формуле

$$\omega(M) = (1/\sqrt{\varepsilon}) \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon(M^2-1)} - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2-1}.$$

Следовательно, во всей волне справедливо соотношение

$$\vartheta + \omega(M) = \vartheta_1 + \omega(M_1), \quad (1.3)$$

где ϑ_1, M_1 — значения данных переменных на произвольной характеристике первого семейства.

В случае центрированной волны удобно перейти к полярной системе координат (r, φ) , центр которой совпадает с центром волны. Полярный угол φ в такой системе координат связан с числом Маха M и углом ϑ наклона линии тока в волне соотношением

$$\varphi = \vartheta + \alpha = \vartheta + \arcsin(1/M) = \vartheta_1 + \omega(M_1) - \omega(M) + \arcsin(1/M),$$

которое с учетом равенства

$$\arcsin(1/M) + \operatorname{arctg} \sqrt{M^2-1} = \pi/2$$

можно переписать так:

$$\begin{aligned} \varphi &= -\tilde{\omega}(M) + C_1, & \tilde{\omega}(M) &= (1/\sqrt{\varepsilon}) \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon(M^2-1)}, \\ C_1 &= \vartheta_1 + \arcsin(1/M_1) + \tilde{\omega}(M_1) = \varphi_1 + \tilde{\omega}(M_1). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Разрешая (1.4) относительно числа Маха, получим явный вид функции $M(\varphi)$ в центрированной волне

$$M(\varphi) = \sqrt{(1/\varepsilon) \operatorname{tg}(\sqrt{\varepsilon}[C_1 - \varphi])^2 + 1}. \quad (1.5)$$

Используя найденную зависимость (1.5), несложно записать функции $r_l(\varphi)$ и $r_h(\varphi)$, описывающие форму линии тока и характеристики второго семейства в центрированной волне. Действительно, из геометрических соображений следует, что

$$\frac{r_l d\varphi}{dr_l} = -\operatorname{ctg} \alpha = -A, \quad \frac{r_h d\varphi}{dr_h} = -\operatorname{ctg} 2\alpha = -\frac{A^2-1}{2A}, \quad A := \sqrt{M^2-1}.$$

Интегрируя эти равенства, получим для линии тока и характеристики второго семейства, проходящих через точку с координатами (r_1, φ_1) , следующие выражения:

$$r_l(\varphi) = r_1 \left[\frac{\mu(M(\varphi))}{\mu(M(\varphi_1))} \right]^{1/2\varepsilon}, \quad r_h(\varphi) = r_1 \frac{R(M)}{R(M_1)}, \quad R(M) = \sqrt{\frac{\mu^x}{A}}. \quad (1.6)$$

Сдвиговой слой 2, в котором $P_3 \neq 0$, а $P_1 = P_2 = 0$, является согласно классификации [8] вырожденной простой волной. Действительно, как видно из (1.1), условия $P_1 = P_2 = 0$ означают, что в такой волне $p = \operatorname{const}$ и $\vartheta = \operatorname{const}$, т. е. данная волна представляет собой изобарическое движение, в котором все характеристики третьего рода (они же — линии тока) являются параллельными одна другой прямыми. При этом в

силу равенства нулю производных $d \ln M / d\nu_3$ и $dP_3/d\nu_3$ в такой волне функции P_3 и M не меняются вдоль линий тока.

Введем декартову систему координат с центром в точке O , ось x которой параллельна линиям тока набегающего потока. В этом случае из равенства $dP_3/d\nu_3 = 0$ следует, что функции P_3 и M в сдвиговом слое зависят только от y и связаны формулой

$$P_3(y) = \frac{(1 + \varepsilon) M^2(y)}{\mu(y)} \frac{d \ln M(y)}{dy} = \frac{d \ln \mu^{\varepsilon}(y)}{dy}, \quad (1.7)$$

позволяющей по заданной $P_3 = P_3(y)$ определить функцию $\mu(y)$:

$$\mu(y) = \mu(y_1) \exp \int_{y_1}^y P_3(y) dy.$$

Обратимся к описанию взаимодействия центрированной волны 1 Прандтля — Майера со сдвиговым слоем 2 (см. рис. 1). Сдвиговый слой 2, ограниченный слабыми тангенциальными разрывами Q_1A_1 и Q_2A_2 , движется до взаимодействия параллельно стенке. В точке O происходит излом поверхности, в результате чего образуется центрированная волна 1 Прандтля — Майера, ограниченная слабыми разрывами OA_1 и OB_1 .

Пересечение слабого разрыва OA_3 со слабыми тангенциальными разрывами Q_1A_1 и Q_2A_2 приводит к образованию исходящих слабых разрывов A_1C_1 и A_2C_2 соответственно. Слабые тангенциальные разрывы A_1B_1 и A_2B_2 в точках B_1 и B_2 пересекаются с замыкающим волну Прандтля — Майера слабым разрывом OB_1B_2 , в результате чего образуются слабые разрывы B_1D_1 и B_2D_2 . Таким образом, область взаимодействия ограничена слева слабым разрывом OA_3 , являющимся продолжением слабого разрыва OA_1 , разделяющего равномерное течение и волну Прандтля — Майера, снизу — исходящим из точки A_1 пересечения слабых разрывов OA_1 и Q_1A_1 слабым разрывом $A_1F_1C_1$.

Вдоль характеристики OA_3 угол ϑ наклона вектора скорости к оси x и функция P_2 равны нулю, а распределение чисел Маха зависит только от y . При этом на участках OA_1 и A_2A_3 функция $M(y)$ постоянна и равна числам Маха M_1 и M_2 под и над сдвиговым слоем 2, а на участке A_1A_2 она определяется заданной завихренностью потока $P_3(y)$ (формула (1.7)). По известной функции $M(y)$ несложно с использованием соотношения $dy/dx = \operatorname{tg} \alpha(y)$ ($\alpha = \arcsin(1/M)$) восстановить форму характеристики первого семейства OA_3 .

Функция P_1 на слабом разрыве OA_3 испытывает разрыв: левее OA_3 эта функция равна нулю, а правее — отлична от нуля. При этом на участке OA_1 в системе координат с центром в точке O функция P_1 определяется по формуле (1.2)

$$P_1 = \frac{2(1 + \varepsilon)A(M_1) \cos^2 \alpha(M_1)}{x} = \frac{2(1 + \varepsilon)A^3(M_1)}{M_1^2 x},$$

а на участке A_1A_2 она описывается вытекающим из (1.1) дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{1}{A(M(y))} \frac{\partial P_1}{\partial y} = a_2(y)P_1^2 + a_1(y)P_1,$$

$$a_1(y) = \frac{\mu(M(y))(3M^2(y) - 2)P_3(y)}{2(1 + \varepsilon)M^2(y)A^3(M(y))}, \quad a_2(y) = -\frac{M^2(y)}{2(1 + \varepsilon)A^3(M(y))},$$

решение которого имеет вид

$$P_1(x, y) = \frac{2(1 + \varepsilon)M(y)\sqrt{A(M(y))}}{M_1^3 A^{-5/2}(M_1)(x - F_0(y)) + g(y)},$$

где

$$F_0(y) = \int_{y_0}^y A(M(y)) dy, \quad g(y) = \int_{y_0}^y \left[\frac{M(y)}{\sqrt{A(M(y))}} \right]^3 dy$$

(y_0 — ордината точки A_1 (см. рис. 1)). Так как вдоль A_1A_2

$$x = x_0 + \int_{y_0}^y A(M(y)) dy = x_0 + F_0(y),$$

то на характеристике A_1A_2 имеем

$$P_1(y) = \frac{2(1 + \varepsilon) M(y) \sqrt{A(M(y))}}{M_1^3 A^{-5/2}(M_1) x_0 + g(y)}.$$

Наконец, выше точки A_2 функция P_1 определяется соотношением

$$P_1 = \frac{2(1 + \varepsilon) A^3(M_2)}{M_2^2(x + c)}, \quad c = \frac{2(1 + \varepsilon) A^3(M_2)}{M_2^2 P_1(x_a)} - x_a,$$

где x_a — абсцисса точки A_2 .

Для описания газодинамических функций на нижней границе $A_1F_1C_1$ области взаимодействия используем полярную систему координат с центром в точке O . В такой системе по углу φ из заданного диапазона $[\varphi_1, \varphi_2]$, $\varphi_1 = \arcsin(1/M_1)$ с помощью формулы (1.6) восстанавливается форма характеристики второго семейства A_1F_1 в волне 1, а также распределение числа Маха $M(\varphi)$ (формула (1.5)) и угла ϑ (формула (1.3)) вдоль этой характеристики.

Исходящие из точек A_1 и A_2 слабые тангенциальные разрывы A_1B_1 и A_2B_2 отделяют область, в которой $P_3 = 0$, от области, в которой $P_3 \neq 0$. Однако последняя уже не будет сдвиговым слоем, так как в ней помимо P_3 отличны от нуля и функции P_1, P_2 . В дальнейшем будем называть эту область с переменной энтропией вихревым слоем.

Взаимодействие вихревого слоя со слабым разрывом OB_3 приводит к скачкообразному изменению функции P_1 . При этом за участком F_1B_1 , так же как и за характеристикой OF_1 , замыкающей простую волну 1, функция P_1 обращается в нуль, а за участком B_1B_3 эта функция отлична от нуля. Физически это объясняется наличием слабых возмущений, исходящих из области $A_1A_2B_2B_1$ и взаимодействующих с расположенным за B_1B_2 вихревым слоем. В результате такого взаимодействия в вихревой области за B_1B_2 образуются слабые возмущения более высокого порядка, распространяющиеся вдоль характеристик первого рода. Так как интенсивность этих возмущений характеризует P_1 , то выше разрывной линии тока, исходящей из точки B_1 , эта функция отлична от нуля.

Аналогично показывается, что в области, ограниченной сверху линией тока, исходящей из точки B_2 , а слева — характеристикой F_1C_1 , отлична от нуля функция P_2 . Таким образом, в результате взаимодействия волны со сдвиговым слоем образуются вихревой слой, ограниченный исходящими из точек B_1 и B_2 линиями тока, простая волна, ограниченная слева и снизу характеристикой B_2B_3 и линией тока, исходящей из точки B_2 , а также простая волна, ограниченная слева и сверху характеристикой F_1C_1 и линией тока, исходящей из точки B_1 .

Описанная картина имеет место до тех пор, пока слабый разрыв $A_1F_1C_1$ не достигнет ограничивающей снизу рассматриваемое течение твердой стенки. В результате отражения образуются возмущения, распространяющиеся вдоль характеристик первого семейства и догоняющие вихревой слой. Кроме того, в волне $C_1F_1B_1D_1$ может осуществляться как

разрежение, так и сжатие потока. В последнем случае возможно появление скачка уплотнения, вызванное пересечением соседних характеристик в волне.

В общем случае задача взаимодействия сдвигового слоя с простой волной не имеет аналитических решений. Основная задача данной работы состоит в построении аналитических решений на основе асимптотических разложений по малому параметру в случае, когда завихренность потока в сдвиговом слое мала.

2. Построение прямого разложения. Введем параметр

$$\delta = \max_y |M(y) - M_1| / M_1,$$

характеризующий величину завихренности потока в сдвиговом слое 2. Считая, что завихренность потока мала, попытаемся построить аналитическое решение задачи взаимодействия на основе асимптотического разложения входящих в (1.1) функций по малому параметру δ :

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k f^{(k)}, \quad \delta \rightarrow 0, \quad f \in \{A, \vartheta, P_1, P_2, P_3\}. \quad (2.1)$$

В нулевом приближении система (1.1) описывает течение в центрированной волне Прандтля — Майера, в которой $P_2^{(0)} = P_3^{(0)} = 0$, функция $P_1^{(0)}$ определяется по формуле (1.2), а $\vartheta^{(0)}$ и $M^{(0)}$ связаны с числом Маха M_1 в равномерном потоке до волны 1 и полярным углом φ соотношениями (1.5) и (1.3).

Для получения первого приближения перейдем в системе (1.1) к полярной системе координат, подставим в (1.1) ряды (2.1) и сохраним члены при δ^1 . В результате для функций $f^{(1)}$ получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_3^{(1)}}{\partial \varphi} - r \operatorname{ctg}(\varphi - \vartheta^{(0)}) \frac{\partial P_3^{(1)}}{\partial r} &= \alpha_{13}(\varphi) P_3^{(1)}, \\ \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \varphi} - r \operatorname{ctg}(\varphi + \alpha^{(0)} - \vartheta^{(0)}) \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial r} &= \alpha_{22}(\varphi) P_2^{(1)} + \alpha_{23}(\varphi) P_3^{(1)}, \\ \frac{D^{(1)}}{r} + \frac{1}{\nu(\varphi)} \frac{\partial \vartheta^{(1)}}{\partial r} &= -\alpha_{32}(\varphi) P_2^{(1)}, \quad D^{(1)} = \vartheta^{(1)} - \frac{A^{(1)}}{(M^{(0)})^2}, \\ \frac{D^{(1)}}{r} + \frac{1}{\mu(\varphi)} \frac{\partial A^{(1)}}{\partial r} &= \alpha_{32}(\varphi) P_2^{(1)} + \alpha_{33}(\varphi) P_3^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{D^{(1)}}{r} \frac{\partial P_1^{(0)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial r} = \alpha_{41}(\varphi) + \alpha_{42}(\varphi) P_2^{(1)} + \alpha_{43}(\varphi) P_3^{(1)} + \alpha_{44}(\varphi) \vartheta^{(1)} + \alpha_{45}(\varphi) A^{(1)}.$$

Так же как и исходная система (1.1), система (2.2) записана в инвариантах [19]. Кроме того, матрица правой части (2.2) является треугольной. Отмеченные обстоятельства позволяют получить аналитическое решение системы (2.2), последовательно, одно за другим решая входящие в нее линейные неоднородные уравнения в частных производных первого порядка относительно функций $P_3^{(1)}$, $P_2^{(1)}$, $\vartheta^{(1)}$, $A^{(1)}$ и $P_1^{(1)}$.

Действительно, в центрированной волне число Маха $M^{(0)}$ и угол $\vartheta^{(0)}$ однозначно выражаются через полярный угол φ . Поэтому первое уравнение системы (2.2) можно переписать так:

$$\frac{\partial P_3^{(1)}}{\partial \varphi} + r a(\varphi) \frac{\partial P_3^{(1)}}{\partial r} = P_3^{(1)} F(\varphi). \quad (2.3)$$

Для (2.3) ставится следующая задача Коши: найти поверхность, проходящую через кривую

$$\varphi = \varphi_0, \quad P_3^{(1)} = f(r).$$

Решение этой задачи можно записать в явном виде:

$$P_3^{(1)} = \Psi(\varphi)f\left(\frac{r}{B(\varphi)}\right), \quad B(\varphi) = \exp \int_{\varphi_0}^{\varphi} a(\varphi) d\varphi, \quad \Psi(\varphi) = \exp \int_{\varphi_0}^{\varphi} F(\varphi) d\varphi. \quad (2.4)$$

Известный вид функции $P_3^{(1)}$ позволяет получить аналитическое выражение для $P_2^{(1)}$. Введем обозначения $z = P_2^{(1)}$, $b(\varphi) = -\operatorname{ctg}(\varphi + \alpha^{(0)} - \vartheta^{(0)})$ и запишем для второго уравнения в (2.2) характеристическую систему

$$\frac{d\varphi}{1} = \frac{dr}{rb(\varphi)} = \frac{dz}{\alpha_1(\varphi)z + \alpha_2(\varphi)\Psi(\varphi)f(r/B(\varphi))}.$$

Один общий интеграл этой системы находится просто:

$$\frac{r}{D(\varphi)} = C_1, \quad D(\varphi) = \exp \int_{\varphi_0}^{\varphi} b(\varphi) d\varphi.$$

Для получения второго интеграла следует решить уравнение

$$z' = \alpha_1(\varphi)z + \alpha_2(\varphi)\Psi(\varphi)f(r/B(\varphi)) = \alpha_1(\varphi)z + \alpha_2(\varphi)\Psi(\varphi)f(C_1D(\varphi)/B(\varphi)).$$

Общее решение однородного уравнения записывается так:

$$z_0 = C_0 \exp \int_{\varphi_0}^{\varphi} \alpha_1(\varphi) d\varphi =: C_0 A_1(\varphi).$$

Будем искать решение в виде $z = C(x)A_1(\varphi)$. Несложно показать, что в этом случае функция

$$C(x) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\alpha_2(\varphi)}{A_1(\varphi)} \Psi(\varphi) f\left(\frac{C_1 D(\varphi)}{B(\varphi)}\right) d\varphi + C_2 =: \Phi(\varphi, C_1) + C_2.$$

Следовательно, общее решение выглядит так:

$$z = A_1(\varphi)\tilde{g}(\varphi)(r/D(\varphi)) + A_1(\varphi)\Phi(\varphi, r/D(\varphi)).$$

Здесь \tilde{g} — произвольная функция своего аргумента. Нас интересует решение, обращающееся в нуль при $\varphi = \varphi_0$. Так как при таком φ функция $\Phi = 0$, а $A_1(\varphi) = 1$, то $\tilde{g} \equiv 0$. Поэтому решение задачи Коши имеет следующий вид:

$$z = A_1(\varphi)\Phi(\varphi, r/D(\varphi)). \quad (2.5)$$

Перейдем теперь к определению функций $A^{(1)}$ и $\vartheta^{(1)}$. Несложно показать, что третье и четвертое уравнения системы (2.2) можно переписать в следующем виде:

$$A^{(1)} = \mu^{(0)}E(r, \varphi) - \frac{\mu^{(0)}}{\varphi^{(0)}}\vartheta^{(1)}, \quad \frac{1}{r}\vartheta^{(1)} + \frac{\partial\vartheta^{(1)}}{\partial r} = \frac{\tilde{G}(r, \varphi)}{r}.$$

Интегрируя последнее уравнение в пределах от r_0 до r и учитывая, что $\vartheta^{(1)} = 0$ при $r = r_0$, получим

$$\vartheta^{(1)} = \frac{1}{r} \int_{r_0}^r \tilde{G}(r, \varphi) dr.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае вихревого слоя конечной толщины функции $P_3^{(1)}$ и $P_2^{(1)}$ обращаются в нуль при r , большем некоторого r_1 . Можно показать, что при таких r выражение для угла $\vartheta^{(1)}$ упрощается и принимает следующий вид:

$$\vartheta^{(1)} = C_1(\varphi)/r + C_2(\varphi).$$

Следует отметить, что область взаимодействия неограниченна по r . Последнее обстоятельство является причиной неравномерности полученного асимптотического разложения. Для доказательства последнего утверждения следует исследовать систему, полученную подстановкой в (1.1) рядов (2.1) и сохранением членов при δ^2 . При интегрировании этой системы в выражениях для функций $\vartheta^{(2)}$, $A^{(2)}$ и $P_1^{(2)}$ возникнут члены вида $D(\varphi) \ln r$, неограниченно возрастающие при $r \rightarrow \infty$.

3. Построение равномерно пригодного разложения методом деформируемых координат. Для получения равномерно пригодного первого приближения воспользуемся методом деформируемых координат [10, 11]. Перейдем от (r, φ) к деформированным переменным (s, t) по формулам

$$\varphi = s + \delta\varphi_2(s, t) + \dots, \quad r = t.$$

При таком переходе вид функций $P_3^{(1)}(s, t)$ и $P_2^{(1)}(s, t)$ не изменится — они по-прежнему будут определяться по формулам (2.4) и (2.5) с заменой в них r и φ на t и s соответственно. Измениться должны выражения для $\vartheta^{(1)}$ и $A^{(1)}$, получаемые при разложении этих функций вдоль характеристик первого семейства.

Действительно, в новых координатах уравнение для $\vartheta^{(1)}$ запишется так:

$$\frac{\partial\vartheta^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} \frac{\partial\vartheta^{(0)}}{\partial s} - \frac{1}{t} \frac{\partial\vartheta^{(0)}}{\partial s} \left(\varphi_2 - \vartheta^{(1)} + \frac{A^{(1)}}{(M^{(0)})^2} \right) = \alpha_{\vartheta_2}(\varphi) P_2^{(1)}.$$

Если φ_2 выбрать из условия

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \frac{1}{t} \left(\varphi_2 - \vartheta^{(1)} + \frac{A^{(1)}}{(M^{(0)})^2} \right) = 0, \quad (3.1)$$

то уравнение для $\vartheta^{(1)}$ примет следующий вид:

$$\frac{\partial\vartheta^{(1)}}{\partial t} = - \frac{P_2^{(1)}}{\cos(\vartheta^{(0)} - \alpha^{(0)})} \frac{(A^{(0)})^2}{\gamma(M^{(0)})^4}.$$

Как видно из последнего равенства, функция $\vartheta^{(0)} + \delta\vartheta^{(1)}$ в первом приближении останется постоянной на лучах $s = \text{const}$ при $t > r_1$. Кроме того, при $s = \varphi_0$ функция $P_2^{(1)} = 0$, так что вдоль характеристики OA_3 рассматриваемая функция тождественно равна нулю.

Условие (3.1) можно переписать так:

$$\frac{\partial}{\partial t} (t\varphi_2) = \vartheta^{(1)} - \frac{A^{(1)}}{(M^{(0)})^2} \implies \varphi_2(s, t) = \frac{1}{t} \tilde{\varphi}(s) + \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \left[\vartheta^{(1)} - \frac{A^{(1)}}{(M^{(0)})^2} \right] dt.$$

Так как при $t = t_0$ имеем течение в простой волне, в которой $\varphi = s$, то в последнем равенстве произвольную функцию $\tilde{\varphi}(s)$ следует взять тождественно равной нулю. Тогда

$$\varphi = s + \frac{\delta}{t} \int_{t_0}^t \left[\vartheta^{(1)} - \frac{A^{(1)}}{(M^{(0)})^2} \right] dt + \dots \quad (3.2)$$

Продолжая разложение, на следующем шаге получим такое уравнение для определения $\vartheta^{(2)}$:

$$\frac{\partial \vartheta^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \frac{\partial \vartheta^{(0)}}{\partial s} - \frac{1}{t} \frac{\partial \vartheta^{(0)}}{\partial s} \left(\varphi_3 - \vartheta^{(2)} + \frac{A^{(2)}(M^{(0)})^2 - A^{(0)}A^{(1)}}{(M^{(0)})^4} \right) = \dots$$

Несложно показать, что выбор функции $\varphi_3(s, t)$ из условия

$$\frac{\partial}{\partial t} (t\varphi_3) = \vartheta^{(2)} - \frac{A^{(2)}(M^{(0)})^2 - A^{(0)}A^{(1)}}{(M^{(0)})^4}$$

обеспечит условие постоянства функции $\vartheta^{(2)}$ на лучах $s = \text{const}$ при $t > r_1$, а также отсутствие секулярных слагаемых в следующих членах разложения.

Заметим, что, как и в задаче обтекания сверхзвуковым потоком тонкого профиля [10], физически линии $s = \text{const}$ можно интерпретировать как исправленные с учетом следующих приближений характеристики первого семейства. Действительно,

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \text{tg}(\varphi - \vartheta - \alpha).$$

В первом приближении имеем

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \left(-\vartheta^{(1)} + \frac{A^{(1)}}{(M^{(0)})^2} \right) \implies \varphi = \text{const} + \frac{\delta}{r} \int_{r_0}^r \left[\vartheta^{(1)} - \frac{A^{(1)}}{(M^{(0)})^2} \right] dr.$$

Видно, что если в качестве постоянной интегрирования взять s , то получится равенство (3.2).

На рис. 2 и 3 представлены результаты расчетов распределения числа Маха $M(t)$ и угла $\vartheta(t)$ вдоль характеристик первого семейства. Расчеты выполнены для углов $\vartheta_{w_1} = 3^\circ, 6^\circ$ и 9° (кривые 1, 2 и 3 соответственно). Число Маха в сдвиговом слое до взаимодействия плавно меняется от $M_1 = 3$ до $M_2 = 3,3$ ($\delta = 0,1$) по кубическому закону. Сплошные кривые соответствуют значениям, рассчитанным численно с помощью метода характеристик, а пунктирные — данным, полученным с использованием первых двух членов асимптотического разложения. На рис. 4 кривые 2 из рис. 3 показаны в увеличенном масштабе. Как видно из рисунков, уже первое приближение дает неплохое совпадение с точным расчетом — максимальная относительная погрешность в определении числа Маха составляет величину порядка 10^{-4} .

4. Построение решения в области за замыкающей характеристикой волны.

За последней характеристикой OB_3 волны w_1 имеет место взаимодействие слабо завихренного слоя $B_1E_1B_2E_2$ со слабо искривленным течением в простой нецентрированной волне $F_1C_1B_2D_2$ (рис. 5). Интенсивность вихревого слоя характеризует функция P_3 , а интенсивность простой волны — функция P_2 . При этом на характеристике $F_1B_1B_2$ эти функции имеют порядок δ , так что

$$P_3P_2 = O(\delta^2), \quad \delta \rightarrow 0.$$

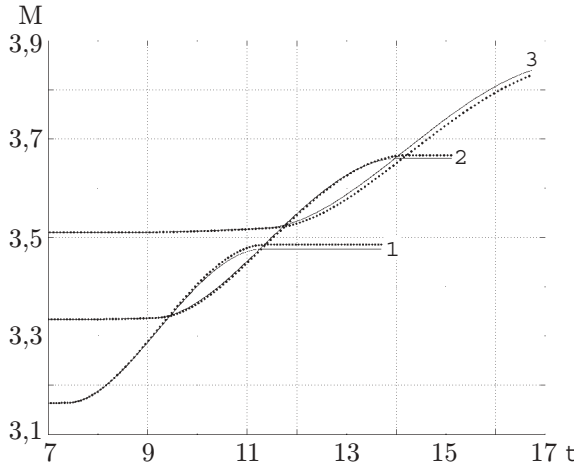


Рис. 2

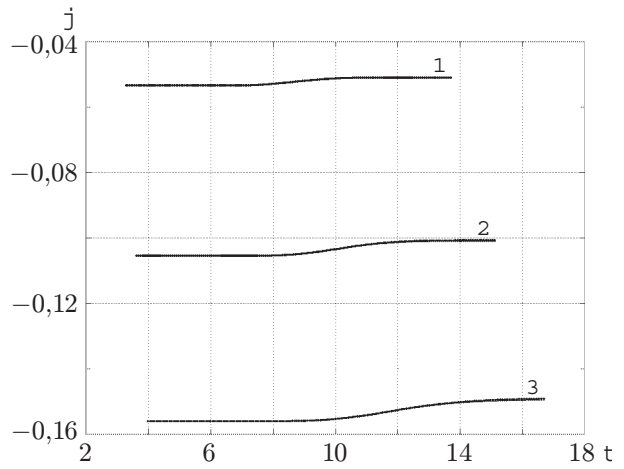


Рис. 3

Рис. 2. Распределение числа Маха вдоль характеристик первого семейства
Рис. 3. Распределение угла наклона вектора скорости вдоль характеристик первого семейства

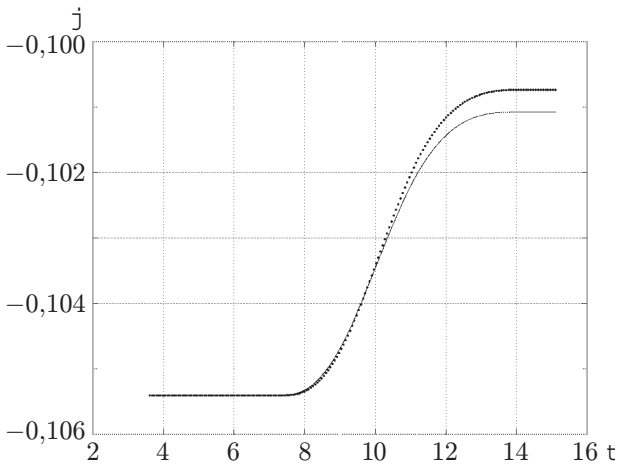


Рис. 4

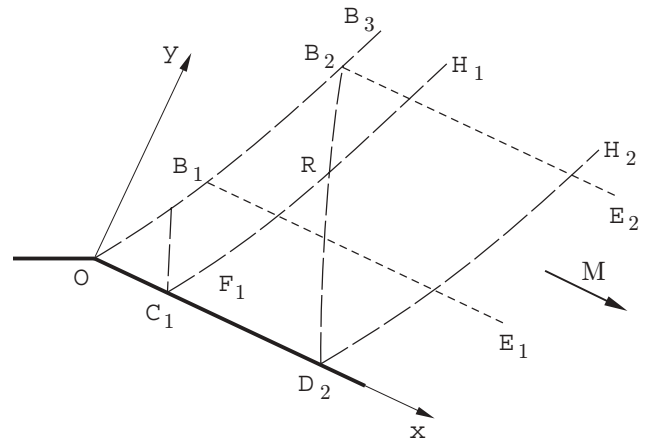


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость $\vartheta(t)$ при $M_1 = 3, M_2 = 3,3$ (сравнение аналитических и численных данных)

Рис. 5. Схема течения за замыкающей характеристикой централизованной волны

Следовательно, в рассматриваемой области течение в нулевом приближении представляет собой плоскопараллельный безвихревой поток, газодинамические параметры $M^{(0)}$ и $\vartheta^{(0)}$ в котором совпадают с числом Маха M_{w1} и углом ϑ_{w1} за простой волной w_1 . При этом функции $P_i^{(0)}, i = 1, 2, 3$ равны нулю.

Для построения первого приближения рассмотрим несколько более общую задачу, в которой все P_i имеют один порядок малости δ , так что

$$P_i P_j = o(P_i) = o(P_j) \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad \delta \rightarrow 0.$$

В этом случае правые части уравнений (1.1) для P_i имеют порядок $O(\delta^2)$. Следовательно, $P_i^{(1)}$ постоянны вдоль характеристик i -го семейства. Перейдем к системе координат

(x, y) , ось абсцисс которой направлена параллельно стенке (см. рис. 5). Общие решения уравнений для $P_i^{(1)}$ в такой системе координат имеют вид

$$P_1^{(1)} = f_1(x - A_{w1}y), \quad P_2^{(1)} = f_2(x + A_{w1}y), \quad P_3^{(1)} = f_3(y). \quad (4.1)$$

Стоящие в правых частях этих соотношений функции f_i определяются из соответствующих граничных условий.

Используя выражения (4.1), несложно записать общий вид функций $\vartheta^{(1)}$ и $A^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \vartheta^{(1)} &= -\frac{1}{2\gamma M_{w1}^2} [F_1(x - A_{w1}y) + F_2(x + A_{w1}y)], \\ A^{(1)} &= \frac{\mu_{w1}}{(1 + \varepsilon)A_{w1}} \left[F_3(y) + \frac{F_1(x - A_{w1}y) - F_2(x + A_{w1}y)}{2A_{w1}} \right], \\ F_i &= \int_{\xi_{0i}}^{\xi_i} f_i(s) ds, \quad \xi_1 = x - A_{w1}y, \quad \xi_2 = x + A_{w1}y, \quad \xi_3 = y. \end{aligned}$$

Возвращаясь к рассматриваемой задаче, заметим, что функции $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$ и $P_3^{(1)}$ отличны от нуля в областях $C_1H_1D_2H_2$, $F_1C_1B_2D_2$ и $B_1E_1B_2E_2$ соответственно. При этом функции $P_2^{(1)}$ и $P_3^{(1)}$, не меняющие своих значений вдоль характеристик второго и третьего семейств соответственно, определяются из начальных условий на участках F_1B_2 и B_1B_2 замыкающей характеристики волны w_1 . Значения функции $P_1^{(1)}$ в области $C_1H_1D_2H_2$ определяются из условия равенства нулю угла ϑ на стенке:

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{y=0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad P_1^{(1)}(x) = -P_2^{(1)}(x) \quad \Longrightarrow \quad P_1^{(1)}(\xi_1) = -P_2^{(1)}(\xi_2).$$

Как следствие функция $\vartheta^{(1)}$ равна нулю в треугольнике OF_1C_1 , а также в области за характеристикой D_2H_2 и постоянна вдоль характеристик второго и первого семейств в областях $F_1C_1B_2R$ и $RH_1D_2H_2$ соответственно. В области $B_2B_3RH_1$ она имеет постоянное значение, а в треугольнике C_1RD_2 меняется вдоль любого направления. Аналогично рассматривается поведение функции $A^{(1)}$ в указанных областях. В частности, над слабым разрывом B_2E_2 эта функция постоянна вдоль характеристик первого семейства, а за слабым разрывом D_2H_2 — вдоль линий $y = \text{const}$.

До сих пор решение строилось на основе формального разложения функций в ряды по малому параметру задачи. Полученные в результате такого разложения решения оказываются непригодными на значительном удалении от области взаимодействия. Для доказательства данного утверждения запишем уравнение для $\vartheta^{(2)}$, получающееся после подстановки в систему (1.1) рядов (2.1) и сохранения членов при δ^2 :

$$\frac{\partial \vartheta^{(2)}}{\partial y} + A_{w1} \frac{\partial \vartheta^{(2)}}{\partial x} = -\frac{M_{w1}^2}{A_{w1}} \vartheta^{(1)} + \frac{1}{A_{w1}} A^{(1)}.$$

Учитывая, что правая часть этого уравнения постоянна в рассматриваемой области, получим

$$\vartheta^{(2)} = \left[-\frac{M_{w1}^2}{A_{w1}} \vartheta^{(1)} + \frac{1}{A_{w1}} A^{(1)} \right] y + \tilde{f}(x - A_{w1}y).$$

Наличие секулярного слагаемого в правой части свидетельствует о неравномерности по y полученного разложения.

Следует заметить, что область взаимодействия неограниченна как по y , так и по x . Однако по x разложение является равномерным. Это следует из того, что за характеристикой D_2H_2 угол ϑ равен нулю как в нулевом, так и в первом приближении, так что при интегрировании вдоль линий тока стоящие в левой части производные $df/d\nu_3$ секулярных членов не содержат.

Учитывая вышесказанное, введем деформированные координаты s и t по формулам

$$x - A_{w1}y = s + \delta\varphi_2(s, t) + \dots, \quad A_{w1}y = t.$$

Тогда для функции ϑ в первом и во втором приближениях получим

$$\begin{aligned} \delta^1: \quad & \frac{\partial\vartheta^{(1)}}{\partial t} = 0 \implies \vartheta^{(1)} = \vartheta^{(1)}(s), \\ \delta^2: \quad & \frac{\partial\vartheta^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial\vartheta^{(1)}}{\partial s} \frac{1}{A_{w1}} \left[A_{w1} \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \vartheta^{(1)} M_{w1}^2 - A^{(1)} \right] = 0. \end{aligned}$$

Выбирая $\varphi_2(s, t)$ из условия

$$A_{w1} \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = -\vartheta^{(1)} M_{w1}^2 + A^{(1)}$$

так, что

$$\varphi_2 = f(s) - \frac{1}{A_{w1}} \int_0^t [\vartheta^{(1)} M_{w1}^2 - A^{(1)}] dt, \quad (4.2)$$

имеем

$$\frac{\partial\vartheta^{(2)}}{\partial t} = 0 \implies \vartheta^{(2)} = \vartheta^{(2)}(s).$$

Как было отмечено выше, за линией тока B_2E_2 функции $\vartheta^{(1)}$ и $A^{(1)}$ не меняются вдоль характеристик первого семейства, т. е. зависят только от одной переменной s . Обозначим

$$g(s) := \frac{1}{A_{w1}} \int_0^{t_0} [\vartheta^{(1)} M_{w1}^2 - A^{(1)}] dt,$$

где t_0 — значение t на линии тока B_2E_2 , и выберем функцию $f(s)$ в формуле (4.2) так, чтобы $f(s) = g(s)$. При таком выборе $f(s)$ функция $\varphi(s)$ над линией B_2E_2 равна

$$\varphi(s) = \Phi(s)(t - t_0), \quad \Phi(s) = \frac{A^{(1)}(s) - \vartheta^{(1)}(s) M_{w1}^2}{A_{w1}} = \frac{M_{w1}^2 F_1^{(1)}(s)}{2(1 + \varepsilon)A_{w1}^3},$$

а связь между новыми и старыми переменными принимает следующий вид:

$$y = t/A_{w1}, \quad x = t + s + \delta\Phi(s)(t - t_0). \quad (4.3)$$

5. Образование скачка уплотнения в отраженной от стенки волне. При определенных распределениях завихренности отраженная волна $F_1C_1B_2D_2$ может быть волной сжатия. Отражение от стенки не поменяет тип волны, так что отраженная волна $C_1H_1D_2H_2$ также окажется волной сжатия. При этом на расстоянии от стенки порядка $1/\delta$ соседние характеристики первого семейства пересекутся и в потоке образуется скачок уплотнения. В точке пересечения характеристик якобиан отображения (4.3) равен нулю. Используя (4.3), несложно получить условие равенства нулю якобиана:

$$t = t_0 - \frac{2(1 + \varepsilon)A_{w1}^3}{\delta M_{w1}^2 F_1'(s)} = t_0 - \frac{2(1 + \varepsilon)A_{w1}^3}{\delta M_{w1}^2 F_1^{(1)}(s)}. \quad (5.1)$$

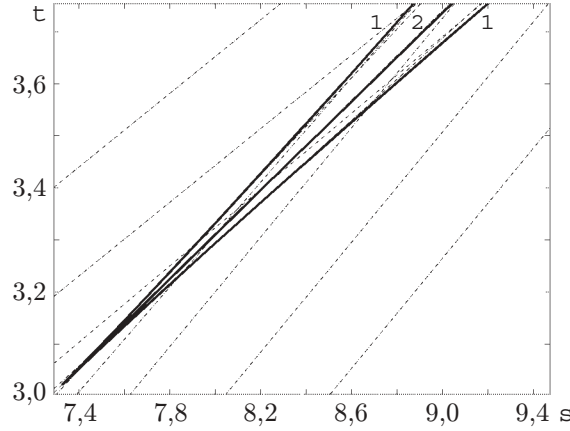


Рис. 6. Образование скачка уплотнения в отраженной от стенки волне

Соотношение (5.1) задает на плоскости (s, t) некоторую кривую $t = t_d(s)$ (кривая 1 на рис. 6), форма которой определяется функцией $P_1^{(1)}(s)$. Последняя функция непрерывна и в области $[s_1, s_2]$, ограниченной характеристиками C_1H_1 и D_2H_2 , отлична от нуля. Следовательно, эти характеристики являются наклонными асимптотами для кривой $t_d(s)$. Если у функции $P_1^{(1)}(s)$ имеются корни во внутренних точках промежутка (s_1, s_2) , то у кривой $t_d(s)$ имеется несколько ветвей, разделенных наклонными асимптотами, параллельными C_1H_1 и D_2H_2 . При этом нас интересуют только те части кривой, которые лежат в полуплоскости $t > 0$, т. е. те промежутки изменения s , для которых $P_1^{(1)}(s) < 0$. Точкам глобального максимума функции $P_1^{(1)}(s)$ на этих промежутках отвечают точки кривой, наименее удаленные от стенки. В этих точках происходит зарождение скачка уплотнения.

Предположим, что функция $P_1^{(1)}(s) \in C^1$ в окрестности одной из таких точек — точки (s_c, t_c) — и имеет там вторую производную. Покажем, что в этом случае кривая $t_d(s)$ имеет в окрестности (s_c, t_c) форму полукубической параболы. Действительно, локально

$$\Phi(s) = \Phi(s_c) + \Phi'(s)(s - s_c) + \Phi'''(s)(s - s_c)^3/6.$$

Подставим это выражение в (4.3):

$$x = t + s + \delta(t - t_0)(\Phi(s_c) + \Phi'(s)(s - s_c) + \Phi'''(s)(s - s_c)^3/6). \tag{5.2}$$

Последнее равенство задает на плоскости (x, t) семейство прямых, зависящих от s как от параметра. Уравнение огибающей этого семейства можно получить, дифференцируя (5.2) по s :

$$0 = 1 + \delta(t - t_0)(\Phi'(s) + \Phi'''(s)(s - s_c)^2/2). \tag{5.3}$$

Исключая из системы (5.2), (5.3) параметр s , получим искомое уравнение огибающей. Перейдем в этой системе к новым переменным

$$t_* = t - t_0 + 1/(\delta\Phi'(s_c)), \quad x_* = x - t - s_c - \delta\Phi(s_c)(t - t_0), \quad s_* = s - s_c.$$

В этих переменных система преобразуется к виду

$$t_* = \frac{cs_*^2}{b(b + cs_*^2)}, \quad x_* = \frac{2}{3}bt_*s_*, \quad b = \delta\Phi'(s_c), \quad c = \frac{1}{2}\delta\Phi'''(s_c).$$

При малых s_* последние равенства можно переписать так:

$$t_* = \frac{c}{b^2}s_*^2 + O(s_*^4), \quad x_* = \frac{1}{3}\frac{\Phi'''(s_c)}{\Phi'(s_c)}s_*^3 + O(s_*^5).$$

Следовательно, в окрестности точки максимума огибающая семейства прямых действительно имеет вид полукубической параболы.

Перейдем теперь к построению функции $g(t)$, описывающей форму скачка (кривая 2 на рис. 6). В любой точке скачка с координатами $(t, g(t))$ справедливы равенства (4.3). Следовательно,

$$g(t) = t + s_1 + \delta\Phi(s_1)(t - t_0) = t + s_2 + \delta\Phi(s_2)(t - t_0). \quad (5.4)$$

Здесь s_1 и s_2 — значения параметра s на сторонах разрыва. Несложно показать, что в случае слабого скачка угол σ наклона скачка к линии тока набегающего потока связан с углом β поворота потока на скачке, а также с углами $\alpha_{1,2}$ наклона характеристик в потоке до скачка и за ним следующим соотношением:

$$\operatorname{ctg} \sigma = (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} (\alpha_2 + \beta))/2 = (A_1 + \operatorname{ctg} (\alpha_2 + \beta))/2.$$

Действительно, можно показать, что

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \sigma &= A_1 - \frac{A_1^2 + 1}{2(1 + \varepsilon)A_1} z + \frac{(A_1^2 + 1)(3A_1^2 - 1)}{8(1 + \varepsilon)^2 A_1^3} z^2 + O(z^3), \quad z \rightarrow 1, \\ \operatorname{ctg} (\alpha_2 + \beta) &= A_1 - \frac{A_1^2 + 1}{(1 + \varepsilon)A_1} z + \frac{(A_1^2 + 1)(3A_1^2 - 1)}{2(1 + \varepsilon)^2 A_1^3} z^2 + O(z^3), \quad z \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Следовательно, с точностью до членов второго порядка по z скачок уплотнения делит угол между характеристиками пополам:

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{dx(s_1)}{dt} + \frac{dx(s_2)}{dt} \right] = 1 + \frac{\delta}{2} [\Phi(s_1) + \Phi(s_2)]. \quad (5.5)$$

Соотношения (5.4), (5.5) позволяют определить искомые функции $g(t)$, $s_1(t)$ и $s_2(t)$ [20]. Действительно, продифференцируем (5.4) по t и приравняем полученные выражения к (5.5):

$$\begin{aligned} \frac{dg(t)}{dt} &= 1 + \frac{\delta}{2} [\Phi(s_1) + \Phi(s_2)] = 1 + s_1'(t) + \delta\Phi(s_1) + \delta\Phi'(s_1)s_1'(t)(t - t_0) = \\ &= 1 + s_2'(t) + \delta\Phi(s_2) + \delta\Phi'(s_2)s_2'(t)(t - t_0). \end{aligned}$$

Возьмем для сохранения симметрии среднее арифметическое последних двух выражений и исключим из них $t - t_0$ с помощью вытекающего из (5.4) соотношения

$$t - t_0 = -\frac{s_2 - s_1}{\delta(\Phi(s_2) - \Phi(s_1))}. \quad (5.6)$$

В результате получим равенство

$$(s_1' + s_2')(\Phi(s_2) - \Phi(s_1)) = (s_2 - s_1)(\Phi'(s_1)s_1' + \Phi'(s_2)s_2'),$$

которое можно переписать так:

$$\frac{s_2 - s_1}{2} (\Phi(s_2) + \Phi(s_1)) = \int_{s_1}^{s_2} \Phi(s) ds = G(s_2) - G(s_1), \quad G(s) = \int_{s_{\min}}^s \Phi(s) ds. \quad (5.7)$$

Формула (5.7) позволяет найти $s_2 = s_2(s_1)$, а затем с учетом (5.6) и искомую функцию $g(t)$.

Авторы благодарят В. Р. Мешкова за полезные обсуждения и помощь в проведении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Медведев А. Е., Фомин В. М.** Приближенно-аналитический расчет маховской конфигурации стационарных ударных волн в плоском сужающемся канале // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 3. С. 52–58.
2. **Омельченко А. В., Усков В. Н., Чернышов М. В.** Об одной приближенной аналитической модели течения в первой бочке перерасширенной струи // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29, № 6. С. 56–62.
3. **Li H., Ven-Dor G.** Oblique shock-expansion fan interaction — analytical solution // AIAA J. 1996. V. 34, N 2. P. 418–421.
4. **Мешков В. Р., Омельченко А. В., Усков В. Н.** Взаимодействие скачка уплотнения со встречной волной разрежения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2002. Вып. 2 (№ 9). С. 99–106.
5. **Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф.** Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
6. **Черный Г. Г.** Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.
7. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
8. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. **Олвер П.** Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
10. **Ван-Дайк М.** Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
11. **Найфэ А.** Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
12. **Lighthill M. J.** A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid // Phil. Mag. 1949. N 40. P. 1179–1201.
13. **Lighthill M. J.** The shock strength in supersonic “conical fields” // Ibid. P. 1202–1223.
14. **Lighthill M. J.** A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid // Z. Flugwiss. 1961. N 9. S. 267–275.
15. **Witham G. B.** The flow pattern of a supersonic projectile // Comm. Pure Appl. Math. 1952. N 5. P. 301–348.
16. **Witham G. B.** The propagation of weak spherical shocks in stars // Comm. Pure Appl. Math. 1953. N 6. P. 397–414.
17. **Lin C. C.** On a perturbation theory based on the method of characteristics // J. Math. Phys. 1954. N 33. P. 117–134.
18. **Fox P. A.** Perturbation theory of wave propagation based on the method of characteristics // J. Math. Phys. 1955. N 34. P. 133–151.
19. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
20. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

Поступила в редакцию 24/X 2003 г.