В. З. Гринес, Е. В. Жужома, О. В. Починка, Динамические системы и топология магнитных полей в проводящей среде, *СМФН*, 2017, том 63, выпуск 3, 455–474

DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2017-63-3-455-474

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 3 (2017). С. 455–474

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-455-474 УДК 517.938

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ТОПОЛОГИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

© 2017 г. В. З. ГРИНЕС, Е. В. ЖУЖОМА, О. В. ПОЧИНКА

Аннотация. В обзоре обсуждается применение современных методов теории динамических систем с регулярной и хаотической гиперболической динамикой к исследованию топологической структуры магнитных полей в проводящих средах. Для содержательных классов магнитных полей рассматриваются известные физические модели, позволяющие редуцировать исследование таких полей к изучению векторных полей и диффеоморфизмов Морса—Смейла, а также диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A, введенной С. Смейлом, обладающих нетривиальными базисными множествами. Для точечно-зарядной модели магнитного поля рассматриваются вопросы существования сепараторов, играющих важную роль в процессах пересоединения, а также изучаются соотношения между его особенностями. Приводится класс магнитных полей в короне Солнца, внутри которого решается вопрос о топологической эквивалентности двух полей. Приводится топологическая конструкция модификации веревочной модели Я. Б. Зельдовича недиссипативного кинематического динамо, заключающаяся в построении гиперболического диффеоморфизма с хаотической динамикой и консервативного в окрестности своего транзитивного инвариантного множества.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Изучение топологической структуры магнитных полей в проводящих движущихся средах является одной из важнейших задач естествознания. Основным и наиболее актуальным примером сильно проводящей и движущейся среды является плазма. Исследование магнитных полей в проводящих средах образует часть раздела физики, которая называется «магнитная гидродинамика» (основные определения и понятия магнитной гидродинамики см. в книгах [1, 15, 16] и обзоре [24]). Ее теоретический фундамент составляют классические уравнения электромагнитного поля и гидродинамические уравнения движения сплошной среды (мы приводим эти уравнения в разделе 2). Имеется много теоретических методов исследования указанной системы уравнений, которые составляют золотой фонд математической физики. В последнее время появляются работы, где изучение свойств решений проводится с помощью методов геометрической (или, иногда говорят, качественной) теории динамических систем, основы которой восходят к классическим работам А. Пуанкаре и А. Ляпунова. Настоящий обзор посвящен изложению некоторых методов геометрической теории динамических систем в применении к исследованию топологической структуры магнитного поля проводящей среды.

Движение хорошо проводящей среды воздействует на ее электромагнитное поле, и специфика такой среды состоит в том, что возникновение электрического поля в ней довольно быстро нивелируется возникающими токами. Поэтому основную роль в изучении свойств хорошо проводящих сред играет исследование взаимодействия среды и ее магнитного поля. Большое значение для теоретических исследований и приложений имела теорема Альвена [1, 26] о «вмороженности» магнитных силовых линий в движущуюся идеально проводящую среду. Эта теорема утверждает, что силовые линии магнитного поля движутся так, как если бы они были «вморожены» в проводящую среду (плазму). Как следствие, при несложных и малых по времени движениях идеально проводящей среды топологическая структура магнитного поля не меняется. Вмороженность силовых линий приводит по прошествии достаточно длительного промежутка времени к возможности появления областей с конфликтующими частями магнитного поля, то есть областей, границы которых в некоторых точках пространства близки, а магнитные поля областей вблизи этих границ имеют различные направления. Это приводит к образованию новых нулевых точек, то есть точек, где магнитная индукция $\vec{\boldsymbol{B}} = 0$.

Кроме этого, в такой хорошо проводящей среде, как фотосфера и корона Солнца, регулярно возникают локальные области с интенсивным магнитным полем, которые с глобальной точки зрения выглядят как локальные источники или стоки векторного поля. Для качественного изучения топологии такого магнитного поля иногда применяется идеализированная модель с точечными положительными и отрицательными магнитными зарядами, которые являются ретракциями в точки таких областей.

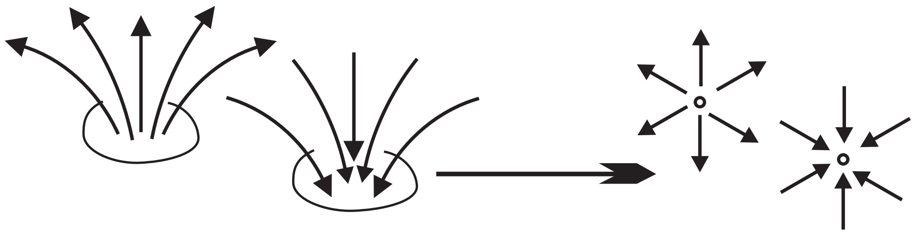

Рис. 1. Идеализация магнитного заряда

Несмотря на то, что магнитных зарядов в природе не обнаружено, эта *точечно-зарядная модель* успешно применялась при изучении структуры магнитного поля и его бифуркаций для солнечных вспышек с небольшим числом ретракционных зарядов, см. например [5, 28–30, 33, 35, 46–49, 51, 55, 58]. С точки зрения теории динамических систем данная идеализированная модель может рассматриваться как векторное поле Морса—Смейла, стоковые и источниковые состояния равновесия которого соответствуют идеализированным (ретракционным) зарядам, а седловые состояния равновесия соответствуют нулевым точкам магнитного поля, при этом одномерные сепаратрисы седлового состояния равновесия соответствуют силовым линиям магнитного поля с противоположным направлением, а двумерная сепаратриса принадлежит границе конфликтующих частей магнитного поля.

Класс таких динамических систем (векторных полей и потоков Морса—Смейла) является одним из наиболее изученных в современной теории динамических систем (см., например, обзоры [2, 62] и книги [9, 39]). Они появились в связи важнейшим понятием теории динамических систем — понятием грубых систем, введенных в 1937 году А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным для двумерных автономных векторных полей на плоскости. Грубые векторные поля обладают свойством сохранения фазового портрета при их достаточно малых C^1-возмущениях. При этом гомеоморфизм, преобразующий траектории исходного векторного поля в траектории возмущенного поля, является близким к тождественному. В 1959 году М. Пейшото обобщил понятие грубости на потоки, заданные на замкнутых поверхностях, и заменил понятие грубости понятием структурной устойчивости, отказавшись от требования, чтобы гомеоморфизм, переводящий траектории C^1 близкого векторного поля в траектории исходного поля, был близок к тождественному. Как и в случае векторного поля, заданного в ограниченной части плоскости, векторные поля на поверхностях образуют открытое и всюду плотное множество в пространстве всех векторных полей, снабженных C^1-топологией.

В 1960 году С. Смейл по аналогии с двумерным случаем ввел класс векторных полей на многообразиях размерности большей двух, неблуждающее множество которых состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и замкнутых траекторий и таких, что пересечение их устойчивых и неустойчивых многообразий является трансверсальным. Как оказалось, такие векторные поля являются структурно устойчивыми, и они получили название *векторных полей Морса—Смейла* (однако, как выяснилось, эти поля не образуют всюду плотного множества среди всех полей и не совпадают с множеством всех структурно устойчивых полей). Векторные поля Морса—Смейла описывают процессы с регулярной динамикой, в отличие от структурно устойчивых потоков со счетным множеством седловых периодических траекторий, являющихся моделями процессов с хаотическим поведением.

Геометрическая теория динамических систем Морса—Смейла позволила авторам данного обзора получить новые количественные соотношения между числом зарядов разных знаков и числом нулевых точек магнитного поля. Эти соотношения приводятся в разделе 3.

Нулевые точки трехмерного магнитного поля разбиваются на два типа следующим образом. С точки зрения теории динамических систем Морса—Смейла, фиксированная нулевая точка представляет собой седловое гиперболическое состояние равновесия (или просто седло), одна сепаратриса которого одномерна, а вторая — двумерна. Нулевая точка имеет *тип один* (*два*) если размерность неустойчивой сепаратрисы равна единице (двум). В теории динамических систем эта размерность называется *индексом Морса* седлового состояния равновесия.

Структурно устойчивое трехмерное векторное поле может допускать пересечения двумерных устойчивых и неустойчивых сепаратрис разных седловых состояний равновесия. Траектория, принадлежащая этому пересечению, называются *гетероклинической траекторией*. Такие траектории соответствуют силовым линиям, которые соединяют две нулевые точки магнитного поля. В астрофизике принято называть такие магнитные линии *сепараторами*. Ясно, что сепараторы играют большую роль в определении топологической структуры магнитного поля. В настоящий момент накоплен значительный материал, связанный с вопросами существования или отсутствия гетероклинических траекторий у динамических систем Морса—Смейла, который может быть редуцирован к вопросу существования или отсутствия сепараторов в магнитных полях.

Одним из общепринятых положений современной астрофизики, касающихся объяснения природы солнечных вспышек, является утверждение о том, что выделение энергии при солнечных вспышках происходит в результате *магнитного пересоединения*, то есть бифуркаций, связанных с появлением и исчезновением сепараторов магнитного поля. При этом меняется топологическая структура магнитного поля так, что новая топологическая конфигурация обладает меньшей энергией [21, 56, 60]. Высвобождающийся при этой бифуркации избыток энергии расходуется на интенсивное излучение электромагнитных волн в различных диапазонах спектра, нагрев плазмы, ускорение заряженных частиц до высоких энергий и т.п. В связи с этим информация о количестве и расположении нулевых точек и сепараторов магнитного поля является принципиально важной при анализе процессов магнитного пересоединения. Обсуждению этих вопросов посвящены разделы 3, 4. Кроме того, в разделе 4 приводятся необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности специального класса магнитных полей в короне Солнца.

Отметим, что в разделах 3, 4 рассматривается топологическая структура магнитного поля в фиксированный момент времени. При таком рассмотрении не учитывается влияние движения проводящей среды (плазмы) на изменение топологии магнитного поля. Однако при объяснении природы важных бифуркаций топологии магнитного поля, связанных с рождением и исчезновением сепараторов, пересоединением и т. п., необходимо учитывать движение среды. В разделе 5 дается изложение следующего, предложенного авторами, подхода. В движущейся плазме выделяется исследуемая область V, и движение этой области доопределяется на трехмерное замкнутое многообразие M_V так, чтобы полученное преобразование многообразия M_V было диффеоморфизмом Морса—Смейла. Несмотря на то, что при таком подходе теряется информация о поведении магнитного поля вне области V, удается получить условия, гарантирующие существование или отсутствие сепараторов исходного магнитного поля в области V. На самом деле полученные условия являются следствием глубоких результатов о диффеоморфизмах Морса—Смейла, заданных на замкнутых трехмерных многообразиях [7–9, 31, 39].

Известно, что Земля и Солнце обладают собственным магнитным полем. Достаточно давно методами радиоастрономии были обнаружены магнитные поля других планет и звезд. Более того, оказалось, что магнитные поля в планетах и звездах, в галактиках и межгалактическом пространстве нередко играют первостепенную роль в динамике различных астрофизических процессов.

Естественный вопрос о происхождении этих магнитных полей лежит в русле теории, которая называется теорией *кинематического динамо* [4]. Одной из проблем этой теории является решение задачи о поведении магнитного поля при заданном течении проводящей среды [16, 19, 50].

Различные аспекты теории кинематического динамо рассматривались Паркером [52] и Эльзассаром [25, 37] (см. обзоры [22, 34]). При этом теоретические исследования наталкивались на серьезные математические трудности вследствие существенной нелинейности задачи. Важной частью теории кинематического динамо является теория быстрого кинематического динамо, которая исследует существование такого движения среды, которое вызывает экспоненциальный рост так называемого затравочного магнитного поля (или магнитной энергии) при малой магнитной диффузии [3, 13, 18]. Общепринятая точка зрения состоит в том, что эффект быстрого кинематического динамо является причиной существования магнитных полей в космических масштабах. Несмотря на многочисленные попытки, до настоящего времени в лабораторных условиях не удалось получить стабильного эксперимента, дающего ожидаемый эффект, который с полной уверенностью можно было бы считать точным аналогом природного [23].

В связи с большими теоретическими трудностями проблемы быстрого кинематического динамо стали разрабатываться различные геометрические и топологические конструкции движений проводящей среды, которые приводят к многократному усилению затравочного магнитного поля. Грубо говоря, основная идея сводилась к построению консервативного отображения, которое, с учетом вмороженности силовых линий, приводит к многократному увеличению плотности силовых линий магнитного поля. Наибольшую известность получили конструкции, предложенные в 70-х годах 20-го века Х. Альвеном (*расщепление магнитной трубки*) и Я. Б. Зельдовичем (так называемая *восьмерка Зельдовича*). Обе конструкции соответствуют известным конструкциям современной теории динамических систем. Например, конструкция Альвена [27] соответствует так называемому *преобразованию пекаря*, в то время как конструкция Зельдовича соответствует *отображению Смейла* построения гиперболического соленоида [2, 14, 43, 62]. В идейном плане конструкция Зельдовича, которую иногда называют *веревочным динамо*, легла в основу достаточно большого числа конструкций трехмерных моделей быстрого динамо [3, 4]. С точки зрения современной теории динамических систем конструкция Зельдовича представляет собой Ω-устойчивое отображение полнотория в себя, введенное Смейлом [62]. Неблуждающее множество этого отображения является топологическим соленоидом и растягивающимся аттрактором [14, 43, 62]. Как отмечалось в [3] (см. обсуждение в гл. V), с точки зрения теории кинематического динамо указанная конструкция имеет существенный недостаток, состоящий в том, что предложенное отображение не является консервативным. В разделе 6 мы приводим модификацию конструкции Зельдовича, лишенную этого недостатка в окрестности неблуждающего множества.

Благодарности. Обзор написан при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01041).

2. Основные положения магнитной гидродинамики

Как известно, магнитная гидродинамика (МГД) изучает взаимодействие электромагнитного поля с жидким или газообразным движущимся проводником, рассматриваемым как сплошная среда. Уравнения МГД представляют собой совокупность уравнений Максвелла для электромагнитного поля и обычных гидродинамических уравнений, описывающих движение сплошной среды (плазмы, жидкости или газа). Сперва приведем уравнения Максвелла:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{H}} = \frac{4\pi}{c_0} \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + \frac{\varepsilon_0}{c_0} \cdot \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}, \tag{2.1}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{1}{c_0} \cdot \frac{\partial \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t}, \tag{2.2}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{H}} = 0, \tag{2.3}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{4\pi}{c_0} \cdot \rho_e. \tag{2.4}$$

Здесь ρ_e — плотность электрического заряда, $\vec{j}$ — плотность тока, c_0 — электродинамическая постоянная (скорость света в вакууме). Иногда в уравнениях Максвелла участвует магнитная индукция $\vec{B}$, однако мы для простоты в уравнениях (2.1)–(2.4) не делаем различия между напряженностью магнитного поля $\vec{H}$ и вектором магнитной индукции $\vec{B} = \mu\vec{H}$, полагая $\mu \approx 1$.

Если обозначить через $\vec{v}$ гидродинамическое поле скоростей сплошной среды, то плотность тока $\vec{j}$ складывается из так называемого *конвекционного тока* $\rho_e\vec{v}$, *тока проводимости* $\sigma\vec{E}$, и *индукционного тока*, который возникает при движении электропроводящей среды со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле $\vec{H}$, где σ — проводимость среды. Таким образом,

$$\vec{j} = \rho_e\vec{v} + \sigma\vec{E} + \frac{\sigma}{c_0} \cdot \vec{v} \times \vec{H}. \tag{2.5}$$

Теперь приведем гидродинамические уравнения. Первое из них есть *гидродинамическое уравнение Эйлера*, а второе — *уравнение неразрывности* (или непрерывности):

$$\varrho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}P + \vec{F_e} + \eta \cdot \Delta\vec{v} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\varrho\vec{v}) = 0 \tag{2.7}$$

Здесь ϱ — плотность среды, P — давление, η — вязкость, и $\vec{F_e}$ — электромагнитная сила. Отметим, что левая часть уравнения (2.6) чаще пишется в виде

$$\varrho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \varrho \cdot \left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{v}\right] = \varrho \cdot \left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v}\right].$$

Классическая МГД разделяется на нерелятивистскую и релятивистскую МГД. В нерелятивистской МГД, в рамках которой мы далее будем находиться, рассматриваются скорости $|\vec{v}| \ll c_0$. Поэтому в уравнении (2.1) можно пренебречь вторым слагаемым $\frac{\varepsilon_0}{c_0} \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. Исключим из уравнений Максвелла электрическую напряженность $\vec{E}$ и плотность тока $\vec{j}$. Тогда получим следующее уравнение индукции:

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = rot\ \left[\vec{v}\vec{H}\right] + \nu\nabla^2\vec{H}, \tag{2.8}$$

которое является одним из основных уравнений МГД, где ν — магнитная вязкость, обратная магнитному числу Рейнольдса [3, 16].

Теория кинематического динамо в основном основывается на уравнении индукции (2.8), в котором скорость среды $\vec{v}$ предполагается заданной функцией координат и времени.

Имеются большой ряд работ, в которых при дополнительных предположениях найдены точные решения уравнений МГД с различными начальными условиями (см. например классическую работу [36]). Кроме того, отсылаем читателя к одной из последних работ [59], где имеется обширная библиография.

3. Модель одноточечных зарядов

В векторных полях Морса—Смейла, моделирующих магнитные поля $\vec{H}$, порождаемые совокупностью так называемых магнитных (ретракционных) зарядов, состояния равновесия разбиваются на два класса. К первому классу относятся все состояния равновесия векторного поля, соответствующие нулевым точкам магнитного поля. Эти точки отвечают за непрерывность векторного поля, моделирующего магнитное поле с конфликтующими областями. Ко второму классу относятся все стоковые и источниковые состояния равновесия векторного поля. Они соответствуют отрицательным и положительным магнитным ретракционным зарядам.

Пусть p_0 — состояние равновесия векторного поля, соответствующее нулевой точке магнитного поля $\vec{H}$, и λ_1, λ_2, λ_3 — собственные числа матрицы Якоби системы уравнений, задающих поле $\vec{H}$ в окрестности точки p_0. По предположению вне объединения достаточно малых окрестностей стоков и источников векторного поля $\vec{H}$ имеет место равенство $\nabla \cdot \vec{H} = 0$, см. (2.3). Отсюда следует, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Так как состояния равновесия потоков Морса—Смейла являются гиперболическими, то действительные части всех собственных значений отличны от нуля. Отсюда вытекает, что с точки зрения теории динамических систем нулевая точка магнитного поля является седловым состоянием равновесия с двумя одномерными и одной двумерной сепаратрисами. В физической литературе одномерную сепаратрису называют *шипом* (*spine*), а двумерную — *веерной поверхностью* (*fan*) [21, 54, 56], см. рис. 3 (a). Если силовая магнитная линия одномерной сепаратрисы направлена из нулевой точки, то все магнитные линии на сепаратрисной поверхности направлены к нулевой точке, и наоборот.

Таким образом, первый класс состояний равновесия векторного поля $\vec{\boldsymbol{H}}$ состоит из седловых состояний равновесия. Напомним, что *индексом Морса* состояния равновесия p называется число, равное размерности $\dim W^u(p)$ неустойчивого многообразия $W^u(p)$ состояния равновесия p, а *топологическим индексом* — число, равное $(-1)^{\dim W^u(p)}$. Для седлового состояния равновесия p_0 возможны (с точностью до переобозначений собственных чисел) лишь следующие варианты: 1) $\lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2$, $\operatorname{Re}\lambda_3 < 0$; 2) $\lambda_1 < 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2$, $\operatorname{Re}\lambda_3 > 0$. В первом случае нулевая точка p_0 называется *положительной*, поскольку $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$. С точки зрения теории динамических систем положительная нулевая точка является седловым состоянием равновесия с индексом Морса, равным 1, и топологическим индексом, равным -1. Это состояние равновесия имеет две одномерные неустойчивые сепаратрисы и одну двумерную устойчивую сепаратрису, см. рис. 2 (a). Во втором случае точка p_0 называется *отрицательной*, поскольку $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$. Она является седловым состоянием равновесия с индексом Морса, равным 2, и топологическим индексом, равным 1, и имеет две одномерные устойчивые сепаратрисы и одну двумерную неустойчивую сепаратрису см. рис. 2 (b).

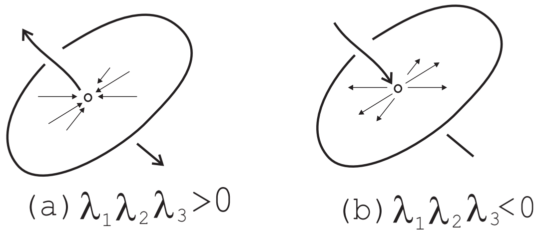

Рис. 2. Положительные и отрицательные нулевые точки.

Для формулировки основных результатов этого раздела уточним понятия отрицательных и положительных зарядов магнитного поля $\vec{\boldsymbol{H}}$ (согласно точечно-зарядной модели). Заряд $\vec{\boldsymbol{H}}$ поля называется *положительным*, если его можно заключить в сколь угодно малый шар, на границе которого магнитное поле направлено наружу. Аналогично определяется отрицательный заряд. С точки зрения теории динамических систем Морса—Смейла положительный заряд является источниковым, а отрицательный — стоковым состоянием равновесия векторного поля.

Во всех известных авторам работах, в которых применялась точечно-зарядная модель, рассматривалось конечное и достаточно малое число зарядов. Например, в работах [55, 57] рассматривались группы из двух и трех зарядов. В работах [5, 17, 28, 48, 63] рассматривались группы из четырех зарядов. Наконец, в работе [47] рассматривалась группа из шести зарядов. Во всех работах конкретизировались координаты зарядов. Также предполагалась потенциальность поля магнитной индукции $\vec{\boldsymbol{B}}$, для определения которой применялась конкретная формула. С помощью непосредственных вычислений находились нуль-точки поля $\vec{\boldsymbol{B}}$ и сепараторы, которые играют существенную роль в описании топологической структуры магнитного поля. Формула Эйлера—Пуанкаре применялась для проверки наличия нуль-точек. Отметим, что основной упор в указанных работах был направлен на исследование перестроек магнитного поля при изменении положения зарядов.

Магнитное поле будем называть *квазитипичным*, если все его нуль-точки и заряды (рассматриваемые как состояния равновесия векторного поля) являются гиперболическими, двумерные сепаратрисы нуль-точек пересекаются трансверсально (если пересекаются), любая одномерная сепаратриса не имеет пересечений с двумерными сепаратрисами, и нет одномерных сепаратрис, соединяющих нулевые точки (включая одну и ту же нулевую точку). Отметим, что одномерные сепаратрисы в общем случае либо не пересекаются, либо совпадают. Далее, мы будем рассматривать только квазитипичные магнитные поля.

Поскольку Солнце излучает энергию, то большое практическое значение имеет изучение так называемых положительно несбалансированных групп зарядов. Группа зарядов $\mathcal{C}$ называется *положительно несбалансированной*, если ее можно заключить в шар B, на границе которого магнитное поле направлено наружу, а внутри шара магнитное поле квазитипично и нет замкнутых магнитных линий. Указанный шар $B = B(\mathcal{C})$ будем называть *источниковой областью группы* $\mathcal{C}$. Более того, мы будем предполагать, что внутри источниковой области любая силовая линия, не образующая одномерную сепаратрису и не принадлежащая двумерной сепаратрисе нуль-точки, либо стремится к особенности магнитного поля, либо покидает источниковую область. Аналогично определяется отрицательно несбалансированная группа зарядов, и в этом случае говорят о стоковой области группы зарядов. Изучение отрицательно несбалансированных групп также важно, поскольку внутри положительно несбалансированной группы могут быть семейства отрицательно несбалансированных групп, бифуркации которых могут быть причиной вспышки [54].

Введем для области, содержащей несбалансированную группу зарядов, следующие обозначения: S^+ — число положительных нуль-точек, S^- — число отрицательных нуль-точек, N^+ — число положительных зарядов, N^- — число отрицательных зарядов. Из формулы Эйлера—Пуанкаре вытекает равенство

$$1 + N^- - S^+ + S^- - N^+ = 0.$$

Однако, как показывает следующий результат, не все неотрицательные числа S^+, S^-, N^+, N^-, удовлетворяющие этой формуле, могут быть реализованы.

Напомним, что следуя [21, 54, 56], мы будем называть магнитную линию, соединяющую две нулевые точки, *сепаратором* (*separator*). С точки зрения теории динамических систем сепаратор является гетероклинической траекторией, принадлежащей пересечению сепаратрисных поверхностей разных седловых состояний равновесия, см. рис. 3 (b).

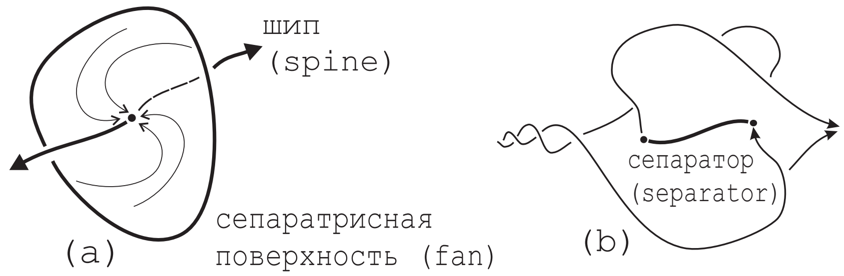

Рис. 3. Структура нулевой точки (a), и гетероклинический сепаратор (b).

Сформулированные ниже результаты данного раздела доказаны в работах [12].

Теорема 3.1. *Пусть положительно несбалансированная группа* $\mathcal{C}$ *содержит* $N^+ \geqslant 1$ *положительных зарядов и* $N^- \geqslant 0$ *отрицательных зарядов. Тогда в источниковой области* $B(\mathcal{C})$ *этой группы имеется по крайней мере* $N^+ - 1$ *отрицательных нулевых точек и* N^- *положительных нулевых точек,*

$$S^- \geqslant N^+ - 1, \qquad S^+ \geqslant N^-.$$

Если группа $\mathcal{C}$ *состоит из* $N^+ \geqslant 2$ *положительных зарядов и в* $B(\mathcal{C})$ *содержится ровно* $N^+ - 1$ *нулевых точек, то все нулевые точки являются отрицательными нулевыми точками, и сепараторы в* $B(\mathcal{C})$ *отсутствуют. Более того, магнитное поле в области* $B(\mathcal{C})$ *имеет единственную с точностью до топологической эквивалентности структуру.*

Следствие 3.1. *Пусть имеется отрицательно несбалансированная группа* $\mathcal{C}$, *содержащая* $N^- \geqslant 2$ *отрицательных зарядов. Тогда в стоковой области* $B(\mathcal{C})$ *этой группы имеется по крайней мере* $N^- - 1$ *положительных нулевых точек. Если группа* $\mathcal{C}$ *состоит из* $N^- \geqslant 2$ *отрицательных зарядов и в* $B(\mathcal{C})$ *содержится ровно* $N^- - 1$ *нулевых точек, то все эти точки являются положительными нулевыми точками, и сепараторы в* $B(\mathcal{C})$ *отсутствуют.*

При минимально возможных количествах как положительных, так и отрицательных нулевых точек (эти минимальные числа определяются в силу теоремы 3.1) сепараторов может не быть.

Однако, как показывает следующая теорема, как только появляется хотя бы одна «лишняя» нулевая очка, то необходимо появляется хотя бы один сепаратор. Тип лишней нулевой точки роли не играет (она может быть как положительной, так и отрицательной). Мы для определенности формулируем утверждение, когда лишняя нулевая точка является отрицательной.

Теорема 3.2. *Пусть положительно несбалансированная группа $\mathcal{C}$ содержит $N^+ \geqslant 2$ положительных и $N^- \geqslant 0$ отрицательных зарядов. Если $B(\mathcal{C})$ содержит ровно N^+ отрицательных нулевых точек, то в $B(\mathcal{C})$ существует хотя бы один сепаратор.*

Доказательства приведенных теорем 3.1, 3.2 основано на том, что квазитипичное магнитное поле положительно несбалансированных групп зарядов можно продолжить на трехмерную сферу до векторного поля Морса—Смейла, и к таким векторным полям применить технику, развитую в работах, посвященных классификации динамических систем Морса—Смейла на многообразиях (см. обзоры и книги [8–10, 39, 41]).

4. Топология магнитных полей

Одна из современных точек зрения состоит в том, что магнитное поле в короне Солнца порождается большим числом диполей, расположенных внутри Солнца (см., например, [21, 56]). Эти диполи порождают потоковые трубки магнитного поля, пересекающие фотосферу Солнца и выходящие в ее корону. Места, где потоковые трубки прорываются сквозь фотосферу и возвращаются на нее, моделируются (согласно точечно-зарядной модели) как точечные источники и стоки (положительные и отрицательные заряды) на фотосфере (см. рис. 4). Следуя [29] для модели магнитного поля $\mathbf{B}$ с точечными источниками, двумерная сфера $P = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 \mid w = 0\}$ в трехмерной сфере $\mathbb{S}^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$ используется как фотосфера и область $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 \mid w > 0\}$ как солнечная корона. Более того, мы предполагаем, что $\mathbf{B}$ симметрично распространяется на область $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 \mid w < 0\}$, называемую зеркалом короны, и, следовательно, оно определено на $M = \mathbb{S}^3 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} q_i$, где $q_1, \ldots, q_k$ — точки на фотосфере, в которых расположены заряды.

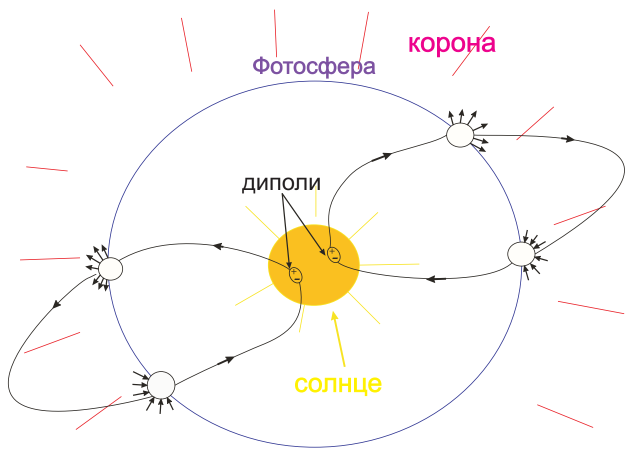

Рис. 4. Диполи внутри солнца.

Корональное магнитное поле часто считается безвихревым. Для простоты (поскольку мы изучаем лишь топологию поля) в этом разделе предполагается, что поле $\mathbf{B}$ потенциально, то есть $\mathbf{B} = -\nabla\Phi$, где Φ — скалярный потенциал. Естественно предположить, что потенциал Φ является функцией Морса. Напомним, что C^2-функция ϕ, заданная на n-многообразии, называется *функцией Морса*, если для каждой ее критической точки p существует открытая окрестность V_p с системой координат $X = (x_1, \ldots, x_n)$ и целое число $\lambda_p \in [0, n]$ — *индекс* p такие, что $\phi(x)|_{V_p} = \phi(p) - \sum\limits_{i=1}^{\lambda_p} x_i^2 + \sum\limits_{i=\lambda_p+1}^{n} x_i^2$.

Из-за того, что $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, три собственных значения λ_1, λ_2, λ_3 нуля магнитного поля удовлетворяют равенству $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Так как $\mathbf{B}$ является потенциалом, то все собственные значения являются вещественными числами. Так как Φ — функция Морса, то каждое собственное значение отличается от 0. Нуль называется *положительным* (*отрицательным*), если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$ ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$). Нуль, принадлежащий фотосфере, называется *фотосферическим*. Фотосферический нуль, чье одномерное инвариантное многообразие лежит в фотосфере, называется *горизонтальным*, тогда как фотосферический нуль с одномерным инвариантным многообразием, направленным вертикально, называется *вертикальным*. *Корональный нуль* — это нуль, лежащий в короне солнца [30].

Когда двумерные инвариантные многообразия нулевых точек имеют пересечение, они образуют *сепаратор*, который соединяет два противоположных по знаку нуля. Двумерные многообразия делят корону на разные области, которые называются *куполами*. Появление и исчезновение сепараторов изменяет топологию разбиения на купола. Такая ситуация называется *сепараторным пересоединением* и является одним из основных механизмов перераспределения энергии в короне солнца [58]. Простейшее пересоединение известно как *пересекающееся состояние* [29] (см. рис. 5).

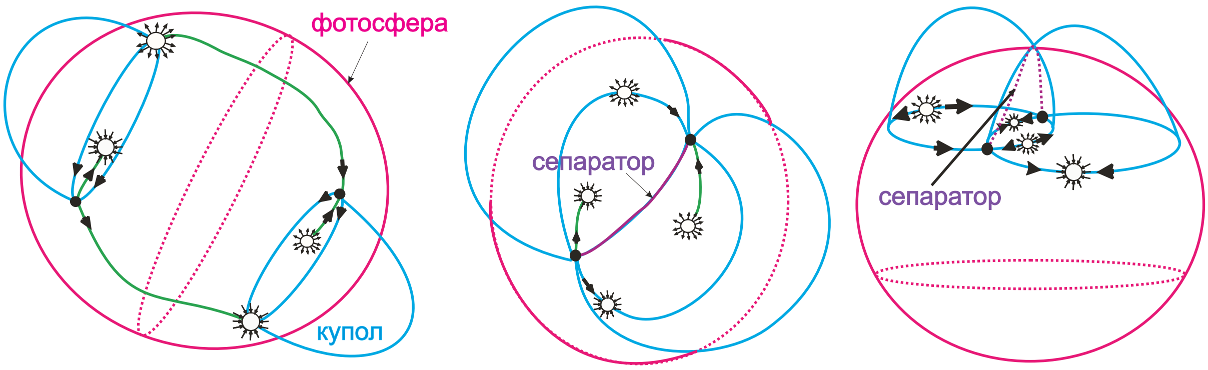

Рис. 5. Пересекающееся состояние.

Большое количество статей [35, 46, 48, 49] было посвящено классификации конфигураций куполов магнитного поля, возникающих из таких точечных источников. Естественно ввести следующее определение, которое восходит к классической работе [53], см. также [62].

Определение 4.1. Говорят, что два корональных магнитных поля $\mathbf{B}, \mathbf{B}'$ являются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $H : M \to M'$, переводящий магнитные линии $\mathbf{B}$ в магнитные линии $\mathbf{B}'$ с сохранением ориентации на линиях.

Известно (см., например, книгу [38]), что градиентное векторное поле ξ, порожденное функцией Морса ϕ, обладает так называемой *самоиндексирующейся энергетической функцией* φ, то есть функцией Морса со следующими свойствами:

1. множества критических точек ϕ и φ совпадают;
2. для каждой критической точки p имеет место равенство $\varphi(x) = \phi(x) + \mathrm{const}$ для $x \in V_p$ и $\varphi(p) = \lambda_p$;
3. $\xi(\varphi) < 0$ вне критических точек.

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество магнитных полей $\mathbf{B}$, обладающих энергетической функцией φ. В настоящем разделе мы решаем задачу о существовании сепараторов в зависимости от типа нулей магнитного поля $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$ и находим взаимосвязь между числом нулей и числом зарядов. Также мы получаем классификацию магнитных полей из $\mathcal{B}$ с точностью до топологической эквивалентности.

Для нуля p магнитного поля $\mathbf{B}$ обозначим через F_p его двумерное инвариантное многообразие и через S_p — одномерное. Положим $T_p = F_p \cap P$, то есть T_p — след пересечения F_p с фотосферой P.

Сформулированные ниже результаты данного раздела доказаны в работе [42].

Теорема 4.1. *Для любого магнитного поля* $\mathbf{B}$ *верны следующие утверждения*:

1. *если* p — *нуль магнитного поля* $\mathbf{B}$ *и* l_p *является компонентой связности множества* $S_p \setminus p$, *то множество* $cl\ l_p \setminus (l_p \cup p)$ *состоит в точности из одного заряда* q_i *для некоторого* $i \in \{1, \dots, k\}$;
2. *если* p — *нуль магнитного поля* $\mathbf{B}$, *то двумерное многообразие* F_p *не содержит сепаратора тогда и только тогда, когда* $cl\ F_p \setminus F_p$ *является ровно одним зарядом* q_i *для некоторого* $i \in \{1, \dots, k\}$;
3. *если существуют нули* $p_1, \dots, p_n$ *магнитного поля* $\mathbf{B}$ *такие, что* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} cl\ S_{p_i}$ — *простая замкнутая кривая, тогда* F_{p_i} *содержит хотя бы один сепаратор для каждого* $i \in \{1, \dots, n\}$.

Теорема 4.2. *Для произвольного коронального магнитного поля* $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$ *выполняются следующие утверждения*:

1. *двумерное многообразие* F_p *каждой корональной или вертикальной нулевой точки* p *содержит хотя бы один сепаратор*;
2. *двумерное многообразие* F_p *горизонтальной нулевой точки* p *не содержит сепараторов тогда и только тогда, когда* $cl\ T_p \setminus T_p$ *является ровно одним зарядом* q_i *для некоторого* $i \in \{1, \dots, k\}$.

Обозначим через m число нулей поля $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$. Положим

$$g = \frac{m - k + 2}{2}.$$

Теорема 4.3. *Для произвольного коронального магнитного поля* $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$ *справедливы следующие утверждения*:

1. g — *целое число и* $g \geqslant 0$;
2. *векторное поле* $\mathbf{B}$ *имеет не менее* $2g$ *нулей, чьи двумерные инвариантные многообразия содержат по крайней мере один сепаратор*;
3. *множество уровня* $\Sigma = \varphi^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ *является ориентируемой поверхностью рода* g.

Обозначим через N_+ (N_-) множество положительных (отрицательных) нулей магнитного поля $\mathbf{B}$. Положим $F_+ = \bigcup\limits_{p \in N_+} F_p$ ($F_- = \bigcup\limits_{p \in N_-} F_p$).

Определение 4.2. Говорят, что самоиндексирующиеся энергетические функции φ, φ' магнитных полей $\mathbf{B}, \mathbf{B}'$ *согласованно эквивалентны*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $H : M \to M'$ такой, что:

1. $\varphi' H = \varphi$;
2. $H(\Sigma \cap F_+) = \Sigma' \cap F'_+$, $H(\Sigma \cap F_-) = \Sigma' \cap F'_-$.

Теорема 4.4. *Магнитные поля* $\mathbf{B}, \mathbf{B}'$ *топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их самоиндексирующиеся энергетические функции* φ, φ' *согласованно эквивалентны.*

5. Условия существования сепараторов в движущейся плазме

В разделах 3, 4 были приведены некоторые условия существования сепараторов. Однако в них не учитывалось движение плазмы. В этом разделе приводятся ряд условий, учитывающих это движение.

В работе [40] был предложен подход к решению данной проблемы, состоящий в том, что в плазме выделяется трехмерное тело специального вида и рассматривается движение, при котором все граничные компоненты тела сдвигаются внутрь или наружу так, что после окончания движения все граничные компоненты параллельны исходным граничным компонентам (см. ниже точные определения). Поскольку в процессе движения топологическая структура магнитного поля не меняется, то для простоты предполагается, что внутри выделенного тела скелет магнитного поля инвариантен относительно движения плазмы. Отметим, что не требуется, чтобы все точки скелета были неподвижны, но движение внутри тела оставляет точки скелета на скелете. Предполагается (и это единственное содержательное ограничение), что нулевые точки являются гиперболическими точками не только поля, но и движения плазмы, которое будет моделироваться диффеоморфизмом с гиперболическими неподвижными точками. Важно заметить, что согласно теореме Купки—Смейла из теории динамических систем у любого типичного диффеоморфизма все периодические точки, включая неподвижные, являются гиперболическими [20]. Таким образом, можно считать, предложенная модель описывает класс типичных движений плазмы. Перейдем к точным определениям.

Пусть M_p^2 — гладко вложенная в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ ориентируемая замкнутая поверхность рода $p \geqslant 0$. В силу ориентируемости, M_p^2 разбивает $\mathbb{R}^3$ на ограниченную область (внутренность) и неограниченную область (внешность). Объединение внутренности с границей M_p^2 обозначается через M_p^3 и называется *телом рода* $p \geqslant 0$. Простейшим примером является замкнутый трехмерный шар $M_0^3 \overset{\text{def}}{=} D^3$, ограниченный двумерной сферой S^2. Тело $M_1^3 \overset{\text{def}}{=} P^3$ является *полноторием*, то есть множеством $D^2 \times S^1$, гомеоморфным произведению двумерного замкнутого диска D^2 на окружность S^1.

Две гладко вложенные поверхности $M_{p_1}^2$ и $M_{p_2}^2$ называются *параллельными*, если $p_1 = p_2 = p$ и эти поверхности ограничивают в пространстве $\mathbb{R}^3$ область, гомеоморфную $M_p^2 \times (0;1)$. Как следствие, $M_{p_1}^2 \cap M_{p_2}^2 = \varnothing$.

Пусть тело M_p^3 содержит внутри себя попарно непересекающиеся тела $M_{p_1}^3, \ldots, M_{p_k}^3$. Положим

$$M_p^3 \setminus \left(\operatorname{int} M_{p_1}^3 \cup \ldots \cup \operatorname{int} M_{p_k}^3\right) \overset{\text{def}}{=} M_{p(p_1,\ldots,p_k)}^3.$$

В частности, $M_{0(0)}^3 = \mathcal{S}$ есть замкнутый шаровой слой, то есть множество $\mathcal{S} = S^2 \times [-1;+1]$, гомеоморфное произведению сферы S^2 на замкнутый промежуток $[-1;+1]$. Ясно, что топологический тип тела $M_{p(p_1 \cdots p_k)}^3$ зависит от вложения $M_{p_1}^3, \ldots, M_{p_k}^3$ в M_p^3. Одним из вариантов $M_{p(p)}^3$ является так называемая *толстая поверхность*, то есть тело, гомеоморфное произведению двумерной поверхности M_p^2 рода $p \geqslant 1$ на отрезок $[0;1]$. Обозначим через $\mathcal{M}^3$ тело типа $M_{p(p,0,0)}^3$, являющееся толстой поверхностью с двумя дырами.

Рассмотрим тело $M_{p(p_1,\ldots,p_k)}^3$, гладко вложенное в пространство $\mathbb{R}^3$. Тело $M_{p(p_1,\ldots,p_k)}^3$ представляет собой часть плазмы некоторого астрофизического объекта с магнитным полем $\vec{\boldsymbol{B}}$. Обозначим через $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ ограничение поля $\vec{\boldsymbol{B}}$ на $M_{p(p_1,\ldots,p_k)}^3$, то есть $\vec{\boldsymbol{B}}_0 = \vec{\boldsymbol{B}}|_{M_{p(p_1,\ldots,p_k)}^3}$, и будем считать, что поле $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ является квазитипичным (см. раздел 3). Как следствие получаем, что $M_{p(p_1,\ldots,p_k)}^3$ содержит только конечное число нулевых точек. Мы будем предполагать далее, что 1) сепаратрисы нулевых точек пересекаются (если пересекаются) трансверсально; 2) сепаратрисы пересекают (если пересекают) трансверсально компоненты $M_{p_1}^2, \ldots, M_{p_k}^2$ тела $M_{p(p_1,\ldots,p_k)}^3$. Отображение

$$f_0 : M_{p(p_1,\ldots,p_k)}^3 \to f_0\left(M_{p(p_1,\ldots,p_k)}^3\right) \subset \mathbb{R}^3$$

называется (a-d)-*движением*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

a) f_0 является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом на свой образ, причем неблуждающее множество диффеоморфизма f_0 состоит из неподвижных гиперболических точек, которые совпадают с нулями магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$;

b) граничные компоненты тела $f_0\left(M_{p(p_1,\ldots,p_k)}^3\right)$ попарно не пересекаются с граничными компонентами тела $M_{p(p_1,\ldots,p_k)}^3$;

c) имеется хотя бы одна граничная компонента $M_{p_i}^2$, которая отображается внутрь $M_{p(p_1,\ldots,p_k)}^3$, и имеется хотя бы одна граничная компонента $M_{p_j}^2$, которая отображается наружу $M_{p(p_1,\ldots,p_k)}^3$, то есть

$$f_0(M_{p_i}^2) \subset M_{p(p_1,\ldots,p_k)}^3, \quad f_0(M_{p_j}^2) \cap M_{p(p_1,\ldots,p_k)}^3 = \varnothing;$$

d) веерные поверхности и шипы инвариантны относительно f_0, а неподвижные точки диффеоморфизма f_0 имеют одинаковый тип с нулями поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$.

Отметим, что здесь не требуется трансверсального пересечения силовых линий магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ с граничными компонентами. Поэтому веерные поверхности и шипы могут, вообще говоря, пересекать граничные компоненты тела $M^3_{p(p_1\cdots p_k)}$ по нескольким компонентам связности. Предложенная математическая модель с физической точки зрения означает, что рассматривается движение плазмы за промежуток времени, в течение которого сохраняются особые точки с веерными поверхностями и шипами. Из приведенных свойств вытекает, что сепараторы (если они существуют) инвариантны относительно f_0 и их число (включая нуль) не меняется в течение наблюдаемого промежутка времени.

Для замкнутого шарового слоя $\mathcal{S}$ условия a)–d) означают следующее. Договоримся, что сфера $S^2\times\{-1\}=S_{int}$, которая называется *внутренней*, ограничивает в $\mathbb{R}^3$ шар B^3, не содержащий шаровой слой. Сферу $S^2\times\{+1\}=S_{ext}$ назовем *внешней*. Тогда компоненты пересечения шипов и веерных поверхностей со сферами S_{int}, S_{ext} суть точки и кривые (замкнутые или незамкнутые). Не уменьшая общности, можно считать, что условие d) принимает вид: $f_0(S_{int})\subset\mathcal{S}$ и $f_0(S_{ext})\subset\mathbb{R}^3\setminus\big(\mathcal{S}\cup B^3\big)$ так, что $f_0(S_{int})$ разбивает $\mathcal{S}$ на два шаровых кольца, см. рис. 6. Сформулируем первые два результаты статьи [40] для (a-d)-движений шарового слоя плазмы.

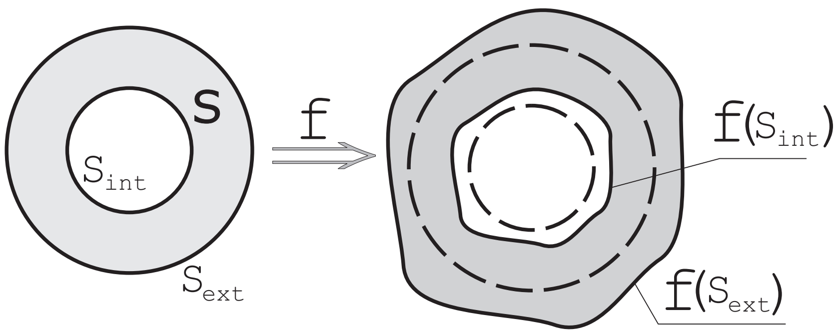

Рис. 6. Движение шарового слоя $\mathcal{S}$.

Доказательства следующих утверждений основаны на применении результатов о топологической взаимосвязи динамики диффеоморфизмов Морса—Смейла и топологии объемлющих многообразий (см, например, монографию [9]). Это применение основано на том, что введенные выше движения можно продолжить до диффеоморфизмов Морса—Смейла, заданных на замкнутых трехмерных многообразиях с известной топологической структурой.

Теорема 5.1. *Пусть $f_0:\mathcal{S}\to f_0(\mathcal{S})\subset\mathbb{R}^3$ есть (a-d)-движение шарового слоя $\mathcal{S}$ плазмы с магнитным полем $\vec{\boldsymbol{B}}_0$. Предположим, что $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ в $\mathcal{S}$ имеет нулевые точки. Тогда их число четное* (*следовательно, нулевых точек не менее двух*). *Более того, их сепаратрисные поверхности пересекаются и имеется конечное ненулевое число гетероклинических сепараторов.*

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1*, и предположим, что шипы и веерные поверхности нулевых точек магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ в $\mathcal{S}$ не пересекаются. Тогда сепаратрисная поверхность каждой нулевой точки в $\mathcal{S}$ содержит хотя бы один гетероклинический сепаратор.*

Толстая поверхность с двумя дырами $\mathcal{M}^3$ имеет четыре граничных компоненты: две 2-сферы S_1, S_2 и две двумерные поверхности T_1, T_2 рода $p\geqslant 1$. Для движения тела $\mathcal{M}^3$ конкретизируем условие d) следующим образом:

d) одна сфера, скажем S_1, отображается внутрь тела $\mathcal{M}^3$, а другая S_2 — наружу; одна поверхность, скажем T_1, отображается внутрь $\mathcal{M}^3$, а другая T_2 — наружу. Более того, ограничение $f_0|_{T_i}:T_i\to f_0(T_i)$ гомотопически тривиально для каждого $i=1,2$.

Поясним понятие гомотопической тривиальности. В отличие от сферы, для которой с гомотопической точки зрения существует только один класс сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов, для поверхностей ненулевого рода существует счетное семейство таких классов. Поверхности T_i, $f_0(T_i)$ для каждого $i=1,2$ параллельны. Поэтому образующие их фундаментальных групп можно считать естественным образом изоморфными. Гомотопическая тривиальность означает, что ограничения $f_0|_{T_i}$ гомотопически тождественны. Для (a-d)-движений тела $\mathcal{M}^3$ имеют место следующие утверждения.

Теорема 5.3. *Пусть $f_0 : \mathcal{M}^3 \to f_0(\mathcal{M}^3) \subset \mathbb{R}^3$ есть (a-d)-движение тела $\mathcal{M}^3$, принадлежащего некоторой области плазмы с магнитным полем $\vec{\boldsymbol{B}}_0$. Тогда поле $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ в $\mathcal{M}^3$ имеет не менее двух нулевых точек таких, что их сепаратрисные поверхности пересекаются и имеется конечное ненулевое число гетероклинических сепараторов.*

Теорема 5.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.3*, и предположим, что шипы и веерные поверхности нулевых точек магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ в $\mathcal{M}^3$ не пересекаются. Тогда сепаратрисная поверхность каждой нулевой точки в $\mathcal{M}^3$ содержит хотя бы один гетероклинический сепаратор.*

Отметим работу [6], в которой приводится близкое по духу теоремы 5.4 условие существования сепаратора.

6. Модель кинематического динамо веревочного типа

В этом разделе дается модификация конструкции Зельдовича, состоящая в построении диффеоморфизма и векторного поля, которое имеет экспоненциальный рост под действием итераций этого диффеоморфизма.

Рассмотрим на декартовой плоскости $\mathbb{R}^2$ круг $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ и отображение $w : D^2 \to \mathbb{R}^2$, образующее *подкову Смейла* [61, 62]. Именно, отображение w есть композиция сжатия вдоль оси Ox, растяжения вдоль оси Oy, сгибания (непринципиально, в какую сторону) полученного эллипса и сдвига так, чтобы пересечение $D^2 \cap w(D^2)$ представляло собой объединение двух непересекающихся полос, симметричных относительно оси Oy.

Известно [2, 61], что w можно продолжить до отображения всей плоскости $\mathbb{R}^2$ так, чтобы это продолжение было тождественным вне некоторой окрестности круга D^2. Ясно, что за счет сжатия и растяжения можно добиться того, чтобы якобиан $J(w)$ отображения w на D^2 равнялся $\dfrac{1}{2}$. Далее мы будем предполагать эти условия выполненными.

Обозначим через $sh_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ сдвиг $(x; y) \longrightarrow \left(x + \dfrac{1}{2}; y\right)$ вдоль оси Ox, и через $S_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — центральную симметрию относительно начала координат $(0; 0)$, $S_0(x; y) = (-x; -y)$. Снова за счет сжатия-растяжения и сгиба можно добиться выполнения следующих условий:

1. пересечение $D^2 \cap sh_0 \circ w(D^2)$ состоит из двух непересекающихся полос;
2. $w(D^2) \cap \big(S_0 \circ w(D^2)\big) = \varnothing$.

Первое условие означает, что отображение $sh_0 \circ w = w_0$ образует подкову Смейла. Второе условие означает, что подкова $w(D^2)$ не пересекается со своим образом относительно центральной симметрии S_0. Отметим, что $S_0 \circ w(D^2)$ также образует конфигурацию подковы.

Обозначим через $R_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращение

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \bar{x} & = & x \cos \pi t - y \sin \pi t \\ \bar{y} & = & x \sin \pi t + y \cos \pi t \end{array} \right.$$

плоскости $\mathbb{R}^2$ на угол πt против часовой стрелки. Положим

$$w_t = R_{2t} \circ w_0 \circ R_{-t} : D^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Это отображение можно интерпретировать как образование подковы в направлении, перпендикулярном прямой $y = \operatorname{tg} \pi t \cdot x$, с последующим поворотом R_t на угол πt против часовой стрелки.

Пусть $S^1 = [0; 1]/(0 \sim 1)$ — окружность, наделенная естественной параметризацией $[0; 1] \to [0; 1]/(0 \sim 1) = S^1$. Отображение $E_2 : S^1 \to S^1$ вида $t \to 2t \bmod 1$ является растягивающимся эндоморфизмом окружности степени два. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ вложенный полноторий $S^1 \times D^2 \subset \mathbb{R}^3$ и отображение $F : S^1 \times D^2 \to \mathbb{R}^3$ вида

$$(t; (x; y)) \longmapsto (E_2(t); w_t(x; y)), \qquad t \in S^1, \quad (x; y) \in D^2.$$

Положим $D_t = \{t\} \times D^2 \subset S^1 \times D^2$, $\mathbb{R}^2_t = \{t\} \times \mathbb{R}^2$. В силу определения отображения F

$$F(D_t) \subset \mathbb{R}^2_{E_2(t)} = \mathbb{R}^2_{2t \bmod 1}.$$

Отображение $F : S^1 \times D^2 \to F(S^1 \times D^2)$ является диффеоморфизмом на свой образ.

Отметим, что поскольку якобиан $J(w)$ отображениям w на D^2 равен $\dfrac{1}{2}$, то якобиан отображения F равен $J(F) = J(w) \cdot DE_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Поэтому F является консервативным диффеоморфизмом на свой образ. Стандартным образом пополним пространство $\mathbb{R}^3$ бесконечно удаленной точкой $\{\infty\}$ так, что объединение $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ отождествляется с 3-мерной сферой S^3.

Из техники, развитой в работах [11, 32], вытекает, что f продолжается до диффеоморфизма сферы $f : S^3 \to S^3$, причем можно продолжение осуществить так, чтобы сохранялось свойство консервативности в некоторой окрестности полнотория $S^1 \times D^2$.

Полноторий $S^1 \times D^2$, вложенный в S^3, будем называть *базовым*, и обозначим через $\mathcal{B}$. Положим

$$\Omega = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f(\mathcal{B}).$$

Множество Ω инвариантно относительно f [2] и не пусто, поскольку содержит в $D_0 = \{0\} \times D^2 \subset \mathcal{B}$ инвариантное нетривиальное (нульмерное) множество Ω_0 подковы Смейла [2,61,62]. Обозначим через $Diff^1(S^3)$ пространство диффеоморфизмов 3-сферы S^3, наделенное C^1 топологией.

Множество Ω гиперболическое, и ограничение $f|_\Omega$ диффеоморфизма f на Ω имеет положительную (топологическую) энтропию. Более того, в пространстве $Diff^1(S^3)$ имеется окрестность $U(f)$ диффеоморфизма f такая, что любой диффеоморфизм $g \in U(f)$ имеет гиперболическое инвариантное множество $\Omega_g \subset \mathcal{B}$, причем диффеоморфизмы $f|_\Omega$, $g|_{\Omega_g}$ сопряжены и ограничение $g|_{\Omega_g}$ имеет положительную энтропию.

Рассмотрим теперь на $S^1 \times D^2$ магнитное поле $\vec{\boldsymbol{B}}$, образованное единичными векторами, которые являются касательными векторами к кривым $S^1 \times \{z\}$, $z \in D^2$. Кривые $S^1 \times \{z\}$ считаются ориентированными в направлении возрастания параметра. Ясно, что $\vec{\boldsymbol{B}}$ можно продолжить на всю сферу S^3 до единичного (и, следовательно, бездивергентного) векторного поля. Мы предполагаем, что $\vec{\boldsymbol{B}}$ имеет нулевую диффузию (то есть рассеивания магнитной энергии не происходит). Так как эти кривые $S^1 \times \{z\}$ под действием f растягиваются в два раза, то под действием f поле $\vec{\boldsymbol{B}}$ переходит в поле $f_*(\vec{\boldsymbol{B}})$ со следующим свойством: существует постоянная $\lambda > 1$ такая, что векторы поля $f_*(\vec{\boldsymbol{B}})$ имеют длину, не менее чем в λ раз большую, нежели длина векторов поля $\vec{\boldsymbol{B}}$. Аналогичное свойство имеет место для длин векторов поля $f_*^{n+1}(\vec{\boldsymbol{B}})$ относительно поля $f_*^n(\vec{\boldsymbol{B}})$. Если не учитывать диссипацию энергии, то отсюда следует, что энергия векторного поля $f_*^n(\vec{\boldsymbol{B}})$ растет экспоненциально с показателем $\ln \lambda > 0$. Таким образом, диффеоморфизм $f : S^3 \to S^3$ является быстрым недиссипативным кинематическим динамо относительно магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г.* Космическая электродинамика. — М.: Мир, 1967.
2. *Аносов Д. В., Солодов В. В.* Гиперболические множества// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1991. — *66*. — С. 12–99.
3. *Арнольд В. И., Хесин Б. А.* Топологические методы в гидродинамике. — М.: МЦНМО, 2007.
4. *Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б.* О происхождении магнитных полей в астрофизике (Турбулентные механизмы «динамо»)// Усп. физ. наук. — 1972. — *106*. — С. 431–457.
5. *Горбачев В. С., Кельнер С. Р., Сомов Б. В., Шварц А. С.* Новый топологический подход к вопросу о тригггере солнечных вспышек// Астрон. журн. — 1988. — *65*. — С. 601–612.
6. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Жужома Е. В., Зинина С. Х.* Гетероклинические кривые диффеоморфизмов Морса—Смейла и сепараторы в магнитном поле плазмы// Нелин. динамика. — 2014. — *10*. — С. 427–438.
7. *Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С.* Новые соотношения для потоков и диффеоморфизмов Морса—Смейла// Докл. РАН. — 2002. — *382*, № 6. — С. 730–733.
8. *Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С., Починка О. В.* Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса—Смейла// Тр. МИАН. — 2010. — *271*. — С. 111–133.
9. *Гринес В. З., Починка О. В.* Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. — М.–Ижевск: НИЦ «Регул. и хаот. динамика», 2011.
10. *Гринес В. З., Починка О. В.* Каскады Морса—Смейла на 3-многообразиях// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 1. — С. 129–188.

11. *Жужома Е. В., Исаенкова Н. В.* О нульмерных соленоидальных базисных множествах// Мат. сб. — 2011. — *202*, № 3. — С. 47–68.
12. *Жужома Е. В., Исаенкова Н. В., Медведев В. С.* О топологической структуре магнитного поля областей фотосферы// Нелин. динамика. — 2017. — *13*, № 3. — С. 399–412.
13. *Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А.* Гидромагнитное динамо как источник планетарного, солнечного и галактического магнетизма// Усп. физ. наук. — 1987. — *152*. — С. 263–284.
14. *Каток А., Хасселблат Б.* Введение в теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999.
15. *Каулинг Т.* Магнитная гидродинамика. — М.: ИЛ, 1959.
16. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика в 10 томах. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматлит, 2005.
17. *Молоденский М. М., Сыроватский С. И.* Магнитные поля активных областей и их нулевые точки// Астрон. журн. — 1977. — *54*. — С. 1293–1304.
18. *Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д.* Кинематическое динамо в случайном потоке// Усп. физ. наук. — 1985. — *145*. — С. 593–628.
19. *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. — М.: Мир, 1980.
20. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975.
21. *Прист Э. Р., Форбс Т.* Магнитное пересоединение: магнитогидродинамическая теория и приложения. — М.: ФМЛ, 2005.
22. *Соколов Д. Д.* Проблемы магнитного динамо// Усп. физ. наук. — 2015. — *185*. — С. 643–648.
23. *Соколов Д. Д., Степанов Р. А., Фрик П. Г.* Динамо: на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту// Усп. физ. наук. — 2014. — *184*. — С. 313–335.
24. *Сыроватский С. И.* Магнитная гидродинамика// Усп. физ. наук. — 1957. — *62*, № 3. — С. 247–303.
25. *Эльзассер В. М.* Магнитная гидродинамика// Усп. физ. наук. — 1958. — *64*. — С. 529–588.
26. *Alfven H.* On sunspots and the solar cycle// Arc. F. Mat. Ast. Fys. — 1943. — *29A*. — С. 1–17.
27. *Alfven H.* Electric currents in cosmic plasmas// Rev. Geophys. Space Phys. — 1977. — *15*. — С. 271.
28. *Baum P., Bratenahl A.* Flux linkages of bipolar sunspot groups: a computer study// Solar Phys. — 1980. — *67*. — С. 245–258.
29. *Beveridge C., Priest E. R., Brown D. S.* Magnetic topologies due to two bipolar regions// Solar Phys. — 2002. — *209*, № 2. — С. 333–347.
30. *Beveridge C., Priest E. R., Brown D. S.* Magnetic topologies in the solar corona due to four discrete photospheric flux regions// Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. — 2004. — *98*, № 5. — С. 429–445.
31. *Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E.* Three-dimensional manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves// Topology Appl. — 2002. — *117*. — С. 335–344.
32. *Bothe H.* The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds// Math. Nachr. — 1983. — *112*. — С. 69–102.
33. *Brown D. S., Priest E. R.* The topological behaviour of 3D null points in the Sun's corona// Astron. Astrophys. — 2001. — *367*. — С. 339.
34. *Childress S., Gilbert A. D.* Stretch, Twist, Fold: the Fast Dynamo. — Berlin—Heidelberg–N.Y.: Springer, 1995.
35. *Close R. M., Parnell C. E., Priest E. R.* Domain structures in complex 3D magnetic fields// Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. — 2005. — *99*, № 6. — С. 513–534.
36. *Duvaut G., Lions J. L.* Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1972. — *46*. — С. 241–279.
37. *Elsasser W. M.* Magnetohydrodynamics// Am. J. Phys. — 1955. — *23*. — С. 590.
38. *Fomenko A. T.* Differential Geometry and Topology. — N.Y.—London: Plenum Publ. Corp., 1987.
39. *Grines V., Medvedev T., Pochinka O.* Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. — Cham: Springer, 2016.
40. *Grines V., Medvedev T., Pochinka O., Zhuzhoma E.* On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids// Phys. D: Nonlinear Phenom. — 2015. — *294*. — С. 1–5.
41. *Grines V. Z., Pochinka O. V.* Morse—Smale cascades on 3-manifolds// Russ. Math. Surv. — 2013. — *68*, № 1. — С. 117–173.
42. *Grines V., Pochinka O.* Topological classification of global magnetic fields in the solar corona// Dyn. Syst. — 2017. — сдано в печать.
43. *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. — Cambridge—N.Y.: Cambridge University Press, 1995.
44. *Klapper I., Young L.-S.* Rigorous bounds of the fast dynamo growth rate involving topological entropy// Commun. Math. Phys. — 1995. — *173*. — С. 623–646.
45. *Longcope D. W.* Topological and current ribbons: a model for current, reconnection anf flaring in a complex, evolving corona// Solar Phys. — 1996. — *169*. — С. 91–121.

46. *Maclean R. C., Beveridge C., Hornig G., Priest E. R.* Coronal magnetic topologies in a spherical geometry, I. Two bipolar flux sources// Solar Phys. — 2006. — *235*, № 1-2. — C. 259–280.
47. *Maclean R., Beveridge C., Longcope D., Brown D., Priest E.* A topological analysis of the magnetic breakout model for an eruptive solar flare// Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 2005. — *461*. — C. 2099.
48. *Maclean R., Beveridge C., Priest E.* Coronal magnetic topologies in a spherical geometry, II. Four balanced flux sources// Solar Phys. — 2006. — *238*. — C. 13–27.
49. *Maclean R. C., Priest E. R.* Topological aspects of global magnetic field behaviour in the solar corona// Solar Phys. — 2007. — *243*, № 2. — C. 171–191.
50. *Moffatt H.* Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fields. — Cambridge: Cambridge University Press, 1978.
51. *Oreshina A. V., Oreshina I. V., Somov B. V.* Magnetic-topology evolution in NOAA AR 10501 on 2003 November 18// Astron. Astrophys. — 2012. — *538*. — C. 138.
52. *Parker E. N.* Hydromagnetic dynamo models// Astrophys. J. — 1955. — *122*. — C. 293–314.
53. *Poincare H.* Sur les courbes definies par une equation differentielles, III// J. Math. Pures Appl. — 1882. — *4*, № 1. — C. 167–244.
54. *Priest E. R.* Solar Magnetohydrodynamics. — Dordrecht: Springer, 1982.
55. *Priest E., Bungey T., Titov V.* The 3D topology and interaction of complex magnetic flux systems// Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. — 1997. — *84*. — C. 127–163.
56. *Priest E., Forbes T.* Magnetic Reconnection: MHD Theory and Applications. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
57. *Priest E., Schriver C.* Aspects of three-dimensional magnetic reconnection// Solar Phys. — 1999. — *190*. — C. 1–24.
58. *Priest E. R., Titov V. S.* Magnetic reconnection at three-dimensional null points// Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1996. — *354*. — C. 2951–2992.
59. *Shu-Guang Shao, Shu Wang, Wen-Qing Xu, Yu-Li Ge.* On the local $C^{1,\alpha}$ solution of ideal magneto-hydrodynamical equations// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2007. — *37*, № 4. — C. 2103–2118.
60. *Somov B. V.* Plasma Astrophysics, Part II: Reconnection and Flares. — N.Y.: Springer, 2013.
61. *Smale S.* Diffeomorphisms with many periodic points// Matematika. — 1967. — *11*, № 4. — C. 88–106.
62. *Smale S.* Differentiable dynamical systems// Bull. Am. Math. Soc. — 1967. — *73*. — C. 741–817.
63. *Sweet P. A.* The production of high energy particles in solar flares// Nuovo Cimento Suppl. — 1958. — *8*, Ser. X. — C. 188–196.

В. З. Гринес
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
603155, Н. Новгород, Б. Печерская, 25/12
E-mail: `vgrines@yandex.ru`

Е. В. Жужома
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
603155, Н. Новгород, Б. Печерская, 25/12
E-mail: `ezhuzhoma@hse.ru`

О. В. Починка
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
603155, Н. Новгород, Б. Печерская, 25/12
E-mail: `olga-pochinka@yandex.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-455-474 UDC 517.938

Dynamical Systems and Topology of Magnetic Fields in Conducting Medium

© 2017 **V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, O. V. Pochinka**

Abstract. We discuss application of contemporary methods of the theory of dynamical systems with regular and chaotic hyperbolic dynamics to investigation of topological structure of magnetic fields in conducting media. For substantial classes of magnetic fields, we consider well-known physical models allowing us to reduce investigation of such fields to study of vector fields and Morse—Smale diffeomorphisms as well as diffeomorphisms with nontrivial basic sets satisfying the A axiom introduced by Smale. For the point-charge magnetic field model, we consider the problem of separator playing an important role in the reconnection processes and investigate relations between its singularities. We consider the class of magnetic fields in the solar corona and solve the problem of topological equivalency of fields in this class. We develop a topological modification of the Zeldovich funicular model of the nondissipative cinematic dynamo, constructing a hyperbolic diffeomorphism with chaotic dynamics that is conservative in the neighborhood of its transitive invariant set.

REFERENCES

1. H. Alfvén and C.-G. Fälthammar, *Kosmicheskaya elektrodinamika* [Cosmical Electrodynamics], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
2. D. V. Anosov and V. V. Solodov, "Giperbolicheskie mnozhestva" [Hyperbolic sets], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math. Fundam. Direct.], 1991, **66**, 12–99 (in Russian).
3. V. I. Arnol'd and B. A. Khesin, *Topologicheskie metody v gidrodinamike* [Topological Methods in Hydrodynamics], MTsNMO, Moscow, 2007 (in Russian).
4. S. I. Vaynshteyn and Ya. B. Zel'dovich, "O proiskhozhdenii magnitnykh poley v astrofizike (Turbulentnye mekhanizmy «dinamo»)" [On genesis of magnetic fields in astrophysics (Turbulent mechanisms «dynamo»)], *Usp. fiz. nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1972, **106**, 431–457 (in Russian).
5. V. S. Gorbachev, S. R. Kel'ner, B. V. Somov, and A. S. Shvarts, "Novyy topologicheskiy podkhod k voprosu o trigggere solnechnykh vspyshek" [New topological approach to the problem of trigger of solar flares], *Astron. zhurn.* [Astron. J.], 1988, **65**, 601–612 (in Russian).
6. V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, E. V. Zhuzhoma, and S. Kh. Zinina, "Geteroklinicheskie krivye diffeomorfizmov Morsa–Smeyla i separatory v magnitnom pole plazmy" [Heteroclinic curves of Morse–Smale diffeomorphisms and separators in the plasma magnetic field], *Nelin. dinamika* [Nonlinear Dynamics], 2014, **10**, 427–438 (in Russian).
7. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, and V. S. Medvedev, "Novye sootnosheniya dlya potokov i diffeomorfizmov Morsa–Smeyla" [New relations for flows and Morse–Smale diffeomorphisms], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2002, **382**, No. 6, 730–733 (in Russian).
8. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, and O. V. Pochinka, "Global'nye attraktor i repeller diffeomorfizmov Morsa–Smeyla" [Global attractor and repeller of Morse–Smale diffeomorphisms], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **271**, 111–133 (in Russian).
9. V. Z. Grines and O. V. Pochinka, *Vvedenie v topologicheskuyu klassifikatsiyu kaskadov na mnogoobraziyakh razmernosti dva i tri* [Introduction to Topological Classification of Cascades on Manifolds of Dimension Two and Three], NITs "Regul. i khaot. dinamika," Moscow–Izhevsk, 2011 (in Russian).
10. V. Z. Grines and O. V. Pochinka, "Kaskady Morsa–Smeyla na 3-mnogoobraziyakh" [Morse–Smale cascades on 3-manifolds], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2013, **68**, No. 1, 129–188 (in Russian).
11. E. V. Zhuzhoma and N. V. Isaenkova, "O nul'mernykh solenoidal'nykh bazisnykh mnozhestvakh" [On zero-measure solenoidal basic sets], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2011, **202**, No. 3, 47–68 (in Russian).
12. E. V. Zhuzhoma, N. V. Isaenkova, and V. S. Medvedev, "O topologicheskoy strukture magnitnogo polya oblastey fotosfery" [On topological structure of magnetic field of areas], *Nelin. dinamika* [Nonlinear Dynamics], 2017, **13**, No. 3, 399–412 (in Russian).

13. Ya. B. Zel'dovich and A. A. Ruzmaykin, "Gidromagnitnoe dinamo kak istochnik planetarnogo, solnechnogo i galakticheskogo magnetizma" [Hydromagnetic dynamo as a source of planetary, solar, and galactic magnetism], *Usp. fiz. nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1987, **152**, 263–284 (in Russian).
14. A. Katok and B. Khasselblat, *Vvedenie v teoriyu dinamicheskikh sistem* [Introduction to the Theory of Dynamical Systems], Faktorial, Moscow, 1999 (in Russian).
15. T. G. Cowling, *Magnitnaya gidrodinamika* [Magnetohydrodynamics], IL, Moscow, 1959 (Russian translation).
16. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *Teoreticheskaya fizika v 10 tomakh. T. VIII. Elektrodinamika sploshnykh sred* [Theoretical Physics in 10 Volumes. Vol. VIII. Continuum Electrodynamics], Fizmatlit, Moscow, 2005 (in Russian).
17. M. M. Molodenskiy and S. I. Syrovatskiy, "Magnitnye polya aktivnykh oblastey i ikh nulevye tochki" [Magnetic fields of active areas and their zero points], *Astron. zhurn.* [Astron. J.], 1977, **54**, 1293–1304 (in Russian).
18. S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaykin, and D. D. Sokolov, "Kinematicheskoe dinamo v sluchaynom potoke" [Cinematic dynamo in random flow], *Usp. fiz. nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1985, **145**, 593–628 (in Russian).
19. G. Moffat, *Vozbuzhdenie magnitnogo polya v provodyashchey srede* [Excitation of Magnetic Field in Conductive Medium], Mir, Moscow, 1980 (in Russian).
20. Z. Nitecki, *Vvedenie v differentsial'nuyu dinamiku* [Differential Dynamics: An Introduction to the Orbit Structure of Diffeomorphisms], Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).
21. E. Priest and T. Forbes, *Magnitnoe peresoedinenie: magnitogidrodinamicheskaya teoriya i prilozheniya* [Magnetic Reconnection: MHD Theory and Applications], FML, Moscow, 2005 (Russian translation).
22. D. D. Sokolov, "Problemy magnitnogo dinamo" [Problems of magnetic dynamo], *Usp. fiz. nauk* [Progr. Phys. Sci.], 2015, **185**, 643–648 (in Russian).
23. D. D. Sokolov, R. A. Stepanov, and P. G. Frik, "Dinamo: na puti ot astrofizicheskikh modeley k laboratornomu eksperimentu" [Dynamo: from astrophysic models to laboratory experiment], *Usp. fiz. nauk* [Progr. Phys. Sci.], 2014, **184**, 313–335 (in Russian).
24. S. I. Syrovatskiy, "Magnitnaya gidrodinamika" [Magnetohydrodynamics], *Usp. fiz. nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1957, **62**, No. 3, 247–303 (in Russian).
25. W. M. Elsässer, "Magnitnaya gidrodinamika" [Magnetohydrodynamics], *Usp. fiz. nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1958, **64**, 529–588 (in Russian).
26. H. Alfven, "On sunspots and the solar cycle," *Arc. F. Mat. Ast. Fys.*, 1943, **29A**, 1–17.
27. H. Alfven, "Electric currents in cosmic plasmas," *Rev. Geophys. Space Phys.*, 1977, **15**, 271.
28. P. Baum and A. Bratenahl, "Flux linkages of bipolar sunspot groups: a computer study," *Solar Phys.*, 1980, **67**, 245–258.
29. C. Beveridge, E. R. Priest, and D. S. Brown, "Magnetic topologies due to two bipolar regions," *Solar Phys.*, 2002, **209**, No. 2, 333–347.
30. C. Beveridge, E. R. Priest, and D. S. Brown, "Magnetic topologies in the solar corona due to four discrete photospheric flux regions," *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 2004, **98**, No. 5, 429–445.
31. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, and E. Pecou, "Three-dimensional manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves," *Topology Appl.*, 2002, **117**, 335–344.
32. H. Bothe, "The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds," *Math. Nachr.*, 1983, **112**, 69–102.
33. D. S. Brown and E. R. Priest, "The topological behaviour of 3D null points in the Sun's corona," *Astron. Astrophys.*, 2001, **367**, 339.
34. S. Childress and A. D. Gilbert, *Stretch, Twist, Fold: the Fast Dynamo*, Springer, Berlin–Heidelberg–N.Y., 1995.
35. R. M. Close, C. E. Parnell, and E. R. Priest, "Domain structures in complex 3D magnetic fields," *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 2005, **99**, No. 6, 513–534.
36. G. Duvaut and J. L. Lions, "Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1972, **46**, 241–279.
37. W. M. Elsasser, "Magnetohydrodynamics," *Am. J. Phys.*, 1955, **23**, 590.
38. A. T. Fomenko, *Differential Geometry and Topology*, Plenum Publ. Corp., N.Y.–London, 1987.
39. V. Grines, T. Medvedev, and O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer, Cham, 2016.
40. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, and E. Zhuzhoma, "On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids," *Phys. D. Nonlinear Phenom.*, 2015, **294**, 1–5.

41. V. Z. Grines and O. V. Pochinka, "Morse–Smale cascades on 3-manifolds," *Russ. Math. Surv.*, 2013, **68**, No. 1, 117–173.
42. V. Grines and O. Pochinka, "Topological classification of global magnetic fields in the solar corona," *Dyn. Syst.*, 2017, submitted.
43. A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge–N.Y., 1995.
44. I. Klapper and L.-S. Young, "Rigorous bounds of the fast dynamo growth rate involving topological entropy," *Commun. Math. Phys.*, 1995, **173**, 623–646.
45. D. W. Longcope, "Topological and current ribbons: a model for current, reconnection anf flaring in a complex, evolving corona," *Solar Phys.*, 1996, **169**, 91–121.
46. R. C. Maclean, C. Beveridge, G. Hornig, and E. R. Priest, "Coronal magnetic topologies in a spherical geometry, I. Two bipolar flux sources," *Solar Phys.*, 2006, **235**, No. 1-2, 259–280.
47. R. Maclean, C. Beveridge, D. Longcope, D. Brown, and E. Priest, "A topological analysis of the magnetic breakout model for an eruptive solar flare," *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2005, **461**, 2099.
48. R. Maclean, C. Beveridge, and E. Priest, "Coronal magnetic topologies in a spherical geometry, II. Four balanced flux sources," *Solar Phys.*, 2006, **238**, 13–27.
49. R. C. Maclean and E. R. Priest, "Topological aspects of global magnetic field behaviour in the solar corona," *Solar Phys.*, 2007, **243**, No. 2, 171–191.
50. H. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
51. A. V. Oreshina, I. V. Oreshina, and B. V. Somov, "Magnetic-topology evolution in NOAA AR 10501 on 2003 November 18," *Astron. Astrophys.*, 2012, **538**, 138.
52. E. N. Parker, "Hydromagnetic dynamo models," *Astrophys. J.*, 1955, **122**, 293–314.
53. H. Poincare, "Sur les courbes definies par une equation differentielles, III," *J. Math. Pures Appl.*, 1882, **4**, No. 1, 167–244.
54. E. R. Priest, *Solar Magnetohydrodynamics*, Springer, Dordrecht, 1982.
55. E. Priest, T. Bungey, and V. Titov, "The 3D topology and interaction of complex magnetic flux systems," *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1997, **84**, 127–163.
56. E. Priest and T. Forbes, *Magnetic Reconnection*: *MHD Theory and Applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
57. E. Priest and C. Schriver, "Aspects of three-dimensional magnetic reconnection," *Solar Phys.*, 1999, **190**, 1–24.
58. E. R. Priest and V. S. Titov, "Magnetic reconnection at three-dimensional null points," *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1996, **354**, 2951–2992.
59. Shao Shu-Guang, Wang Shu, Xu Wen-Qing, and Ge. Yu-Li, "On the local $C^{1,\alpha}$ solution of ideal magnetohydrodynamical equations," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2007, **37**, No. 4, 2103–2118.
60. B. V. Somov, *Plasma Astrophysics, Part II*: *Reconnection and Flares*, Springer, N.Y., 2013.
61. S. Smale, "Diffeomorphisms with many periodic points," *Matematika*, 1967, **11**, No. 4, 88–106.
62. S. Smale, "Differentiable dynamical systems," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1967, **73**, 741–817.
63. P. A. Sweet, "The production of high energy particles in solar flares," *Nuovo Cimento Suppl.*, 1958, **8**, Ser. X, 188–196.

V. Z. Grines
National Research University — Higher School of Economics
25/12 Bolshaya Pecherskaya str., 603155 Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: vgrines@yandex.ru

E. V. Zhuzhoma
National Research University — Higher School of Economics
25/12 Bolshaya Pecherskaya str., 603155 Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: ezhuzhoma@hse.ru

O. V. Pochinka
National Research University — Higher School of Economics

25/12 Bolshaya Pecherskaya str., 603155 Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru