Выбор модели срочной структуры процентных ставок на основе ее свойств

Лапшин Виктор Александрович

Кандидат физико-математических наук, доцент, научный сотрудник Научно-учебной лаборатории по финансовой инженерии и риск-менеджменту
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Москва, ул. Шаболовка, д. 26, стр. 3, каб. 3104

E-mail: vlapshin@hse.ru

Терещенко Мария Юрьевна

Стажер-исследователь Научно-учебной лаборатории по финансовой инженерии и риск-менеджменту
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Москва, ул. Шаболовка, д. 26, стр. 3, каб. 3104

E-mail: myutereschenko@edu.hse.ru

Аннотация

Статья посвящена выбору подходящей модели для построения срочной структуры процентных ставок из наиболее популярных: бутстрэпа, различных сплайнов и параметрических моделей Нельсона – Зигеля и Свенссона. Изложены особенности их применения на финансовых рынках стран мира.

Задача моделирования срочной структуры процентных ставок имеет долгую историю и продолжает привлекать повышенное внимание ученых-теоретиков и специалистов-практиков. В разное время этой проблемой интересовались Дж. М. Кейнс, П. Самуэльсон, Р. Мертон, Ф. Модильяни, М. Шоулз, Е. Фама и др. Однако, несмотря на серьезное продвижение в данной области, вопрос построения моделей, адекватных реальным условиям, все так же далек от окончательного решения и требует продолжения работы по их изучению.

Срочную структуру широко применяют для анализа цен и доходности облигаций, используют при оценке справедливости рыночных прогнозов. Кривые срочной структуры процентных ставок чрезвычайно важны при изучении процессов, происходящих в экономической сфере, поэтому они нуждаются в адекватных моделях оценки. В действительности процентные ставки по кредитам и займам в произвольный момент времени не наблюдаемы. А поскольку это так, то остается только смоделировать их, опираясь на имеющиеся данные по государственным или корпоративным облигациям, по другим доступным финансовым инструментам, исходя из поставленной перед исследователем задачи.

Все модели имеют свои достоинства и недостатки, поэтому специалисту необходимо определить цель исследования и под нее подбирать модель, учитывая ее свойства. Модели рассматриваются в той хронологии, в какой они были разработаны. Каждая последующая модель из каждого класса была призвана устранить недостатки предыдущей версии, но это не всегда удавалось, и в новой модели или усиливались слабые стороны предшествующей, или появлялись новые.

Предложен алгоритм выбора модели, исходя из ее основных свойств, которые могут стать наиболее важными для успешного решения поставленной перед специалистом проблемы.

Ключевые слова: кривая доходности, срочная структура процентных ставок, бутстрэп, сплайны, параметрические модели, облигации

JEL: E43

Введение

Правильно выбранная модель построения срочной структуры процентных ставок с учетом ее характерных черт и специфики рынка является основным помощником при принятии инвестиционных и других решений в финансовой сфере. Построение качественной структуры процентных ставок имеет чрезвычайно важное значение для бесперебойного функционирования всего рынка, а не только его отдельных элементов.

На современном этапе мирового экономического развития особое значение приобрел тот факт, что кривая бескупонной доходности по государственным ценным бумагам может лежать в основе успешного прогнозирования надвигающихся финансово-экономических кризисов, а также помочь в выявлении рисков их реализации. На развитых рынках оценка кривой бескупонной доходности по рыночным данным не составляет большого труда: есть достаточное количество облигаций, они ликвидны, а их биржевые котировки достоверны. Но для рынков государственных облигаций многих развивающихся стран эти свойства пока не выполняются. Поэтому очень важно выбрать подходящую для каждого конкретного случая модель, наиболее полно отражающую все интересующие исследователя явления. Этому посвящена данная статья.

В статье рассматриваются только статические модели, в то же время сам термин «модель» стоит понимать в контексте аппроксимации и интерполяции данных, поскольку речь идет о способах подгонки кривых доходности (*fitting yield curves*).

1. Сфера применения моделей

Разработка достоверных методов моделирования срочной структуры процентных ставок и их корректное применение имеет особое значение для участников финансового рынка. Срочная структура используется центральными банками для целей прогнозирования и практиками для целей оценки.

Так, кривая доходности облигаций является индикатором рыночных ожиданий относительно грозящей инфляции, служит инструментом для оценки нынешних и будущих экономических условий. Следовательно, точные оценки кривой доходности помогают при прогнозировании инфляции и мониторинге экономической стабильности, а, значит, незаменимы для центральных банков, нацеленных на проведение эффективной денежно-кредитной политики. Кроме того, срочная структура помогает представить сложившуюся экономическую ситуацию в контексте стоимости кредитования, позволяет оценить доступность кредитных ресурсов, состояние ликвидности в банковском секторе и т.д.

Кривые доходности *лежат в основе теории оценки активов с фиксированным доходом и* применяются для принятия инвестиционных решений, поскольку являются основой для изучения доходности портфеля ценных бумаг. Срочная структура процентных ставок служит и для оценки справедливой стоимости облигаций, вычисления кредитных спредов, актуарного оценивания и других целей риск-менеджмента и финансовой инженерии. Кроме прочего, она применяется для разработки инвестиционных стратегий с учетом срочности заимствования, уровня риска, хеджирования, оценки спекулятивных стратегий, для анализа осуществимости арбитража во времени. Таким образом, с помощью срочной структуры процентных ставок можно успешно исследовать состояние финансового рынка.

2. Порядок выбора подходящей модели

В финансовой сфере часто необходимо оценивать риск и доходность актива в будущем, исходя из текущих условий. Проблема моделирования срочной структуры состоит в том, чтобы как можно лучше описать кривую доходности с учетом рыночных цен финансовых инструментов и обещанных денежных потоков по ним. Эта задачу довольно трудно выполнить для условий, близких к реальности. Одним из препятствий для подобной оценки является отсутствие достаточного объема данных.

Для построения кривой бескупонной доходности обычно используются облигации с нулевым купоном и ставки денежного рынка. Если на рынке нет желаемого количества бескупонных облигаций, то они могут быть искусственно сконструированы, когда каждая купонная облигация рассматривается как портфель бескупонных облигаций. А на рынках, где в краткосрочной перспективе недостаточно ликвидности, используются и ставки межбанковского денежного рынка. На практике может также возникнуть необходимость в извлечении спот-ставок из более сложных ценных бумаг, например, свопов и соглашений о форвардной ставке (*FRA*) [du Preez, Maré, 2013]. Прибегают и к таким рыночным инструментам, как денежные депозиты и фьючерсы [Pienaar, Choudhry, 2010].

После определения выборки облигаций, нужной для построения срочной структуры процентных ставок, инвестор может воспользоваться одним из подходов к ее построению. Так, методы оценки срочной структуры можно разделить на три больших класса: «инженерные», параметрические и сплайновые методы.

«Инженерные» методы не имеют четкого обоснования и в основном представляют собой определенную последовательность действий, которая должна приводить к результату, похожему на искомую кривую бескупонной доходности. Такие методы обычно не обладают теоретической базой, но они часто применяются в силу своей простоты. К ним относится

метод последовательного определения процентных ставок – бутстрэп.

Параметрические методы предполагают, что кривая бескупонной доходности принадлежит к некоторому заранее выбранному классу параметрических функций. К ним прибегали еще в 1960-х гг., а в настоящее время это наиболее распространенный метод построения срочной структуры спот-ставок. Благодаря своей простоте широко используется модель Нельсона – Зигеля и ее расширение, предложенное Свенссоном.

Сплайновые методы предполагают, что истинная функция дисконтирования обладает некоторым свойством экстремума. Обычно это интерпретируется как максимальная гладкость по отношению к некоторому классу функций. Решение предстает в виде сплайна некоторой формы – функции, область определения которой разбита на конечное число отрезков, и на каждом она совпадает с некоторым алгебраическим многочленом. Эти методы сейчас также применяются очень часто.

Выбор модели оценки срочной структуры регулируется требованиями пользователя. Для этого **необходимо определить ключевые критерии выбора модели**. На данный момент не существует единых, общепринятых критериев для сравнения моделей оценки срочной структуры процентных ставок. Исследователи этой проблемы производят анализ по тем параметрам, которые считают наиболее подходящими в каждом конкретном случае. Будем исходить из того, что сравнение моделей вполне можно осуществлять по следующему набору критериев:

1) точность (величина стандартной ошибки);
2) гладкость (критерий максимума гладкости);
3) возникновение отрицательных форвардных ставок (наличие арбитража);
4) простота реализации (количество параметров);
5) гибкость (возможность включать дополнительные параметры, фиксируя изменения структуры);
6) стабильность (небольшие изменения в данных для одного срока погашения не оказывают непропорционального влияния на ставки для других сроков).

Два первых критерия – количественные, они определяются по данным рынка, а оставшиеся – качественные, отражают характеристики выбранной модели. Критерии 1–4 взяты из статьи Г. Гамбарова, И. Шевчука и А. Балабушкина «Оценка срочной структуры процентных ставок» [Гамбаров и др., 2004]. Критерии 5–6 отражены в заметке Дж. Слиса “New Estimates of the UK Term Structure of Interest Rates” [Sleath, 2001].

Выбранная модель обязательно должна отвечать требованиям *точности и гладкости*, что определяется экономическими соображениями. Точность имеет первостепенное значение для изучения ценообразования инструмента, но степень точности часто оказывается обратно пропорциональной уровню полезности полученной модели. Свойство гладкости основное при анализе рыночных ожиданий: определенная степень гладкости дает возможность исследовать форвардные процентные ставки на предмет ожидаемой динамики краткосрочной ставки и инфляции. Самой оптимальной будет такая срочная структура, которая максимально сочетает в себе эти два показателя. Однако на практике между ними чаще всего обнаруживается обратная связь.

Учитывая вышесказанное, можно попытаться подобрать такую модель, которая в наибольшей степени будет соответствовать поставленной перед исследователем задаче. Для наглядности представим полученный алгоритм в виде блок-схемы (см. Приложение), а подробнее о свойствах каждой модели расскажем ниже.

3. Используемые модели и их свойства

Сейчас еще нет таких моделей, которые одновременно с одинаково высокой степенью удовлетворяли бы всем вышеперечисленным критериям. Каждая модель имеет свои сильные и слабые стороны, поэтому при ее выборе надо точно знать, что модель должна отразить в первую очередь, что в данный момент является самым важным показателем для исследования.

Существование разнообразных методов оценки и отсутствие единого критерия выбора моделей сформировали у практиков общий взгляд на необходимость их тестирования на рынке ценных бумаг каждой страны в отдельности с учётом его специфики и структуры.

Существует огромное количество работ, посвященных данной тематике. Исследователи проводили сравнение популярных моделей, строя кривые доходности для рынков разных стран с применением различных инструментов, выделяя их характерные качества. Рассмотрим некоторые из этих моделей подробнее.

3.1. Бутстрэп

На рынках, где торгуется ограниченное число облигаций с нулевым купоном, обычно хватает купонных облигаций для применения стандартных процедур бутстрэпа. Так, по данным [Smit, 2000], в Южной Африке на рынке облигаций имеется очень мало ликвидных инструментов для построения кривой бескупонной доходности. При наличии на рынке страны достаточно большого разнообразия инструментов с различными сроками до погашения задачу построения кривой доходности можно решить с помощью бутстрэпа.

Практическая реализация бутстрэпа принципиально зависит от того, считаются ли доходности инструментов зависимыми или нет. Если предполагается их независимость, то используется стандартный бутстрэп (*standard bootstrap*). В противном случае применяют блочный бутстрэп (*block bootstrap*).

А. Стандартный бутстрэп

Стандартный бутстрэп – это достаточно простой метод, когда кривая бескупонной доходности рассчитывается рекуррентно, т.е. в порядке увеличения срока до погашения облигаций. Для каждого последующего шага верно:

$$P_i = \sum_{i=1}^{n} \left(CF_i \times e^{-r_i \times t_i} \right), \quad (1)$$

где P_i – фактическая цена i-й облигации;

CF_i – выплата по облигации в году t_i;

r_i – процентная ставка (доходность) по облигации в году t_i.

Схематично эта идея может быть показана таким образом [Берзон, 2016]:

$$P_1 = CF_1 \times e^{-r_1 \times t_1}$$

$$P_2 = CF_1 \times e^{-r_1 \times t_1} + CF_2 \times e^{-r_2 \times t_2}$$

$$P_3 = CF_1 \times e^{-r_1 \times t_1} + CF_2 \times e^{-r_2 \times t_2} + CF_3 \times e^{-r_3 \times t_3}. \quad (2)$$

Отсюда поочередно находим ставки r_1, r_2, r_3 и т.д.

Один из вариантов этого метода описали в своей работе Е. Фама и Р. Блисс [Fama, Bliss, 1987]. Данный метод не позволяет построить всю кривую целиком, но он дает возможность найти отдельные спот-ставки, необходимые для дальнейшей оценки.

Наибольшая эффективность бутстрэпа достигается, когда эмиссия облигаций происходит согласно долгосрочным программам выпусков, что присуще главным образом государственным и крупным институциональным заемщикам. Тогда облигации эмитируются регулярно в одни и те же даты, и купоны по облигациям, выпущенным в рамках одной программы, выплачиваются в один и тот же день. Этот метод можно применять для оценки облигаций с малым сроком до погашения только тогда, когда на рынке есть много сопоставимых ценных бумаг, которые выпускаются с определенной регулярностью [Берзон, 2016].

Чаще всего бутстрэп применяют для получения кривых доходности облигаций и свопов. Этот метод используется для ежедневного расчета кривых бескупонной доходности по казначейским облигациям США (*US Treasuries*) [Hull, 2015].

Финансовые инструменты, используемые при построении кривой, можно применить для хеджирования других инструментов [Hagan, West, 2008]. Изначально трейдер держит портфель более сложных инструментов. Тогда он будет иметь возможность хеджировать их против движений кривой доходности с помощью ликвидно торгуемых инструментов.

Б. Блочный бутстрэп

Если доходности инструментов взаимозависимы, то, чтобы при применении бутстрэпа эта зависимость не разрушилась, П. Халл в 1985 г. предложил находить решение, используя блоки данных вместо отдельных наблюдений. Тут возможен один из двух подходов к решению в зависимости от того, перекрывают ли эти блоки друг друга.

Неперекрывающийся блочный бутстрэп (*non-overlapping block bootstrap*) используется редко из-за малого количества доступных блоков, что делает точность оценки параметра очень низкой. Например, на интервале в 20 лет доступных 5-летних неперекрывающихся блоков всего 4, а независимых наблюдений как минимум 20. Количество отдельных наблюдений значительно больше, чем число доступных непересекающихся блоков, поэтому предполагается, что точность оценки, найденной с помощью стандартного бутстрэпа, значительно выше [Cogneau, Zakamouline, 2010].

Более популярен перекрывающийся (движущийся) блочный бутстрэп (*overlapping or moving block bootstrap*). Он помогает сохранить зависимость данных при оценке конкретного параметра, представляющего интерес на длинных временных горизонтах. Так, на горизонте в 20 лет можно получить от 5 до 16 штук 5-летних блоков данных. Здесь точность оценки также довольно низкая: она хуже по сравнению с полученной стандартным бутстрэпом, но лучше, чем при неперекрывающемся блочном методе [Cogneau, Zakamouline, 2010].

Блочный бутстрэп используется намного реже, чем стандартный, поскольку требует корректировки из-за смещения оценок. Один из методов корректировки – поиск оптимальной длины блока, которая минимизирует смещение. Но этот выбор не может быть произвольным и зависит от целей исследования.

В. Итеративный бутстрэп

Как возможное решение проблемы аппроксимации был внедрен метод итеративного бутстрэпа (*IBS*). Он был разработан специально для южноафриканского рынка, так как другие модели (в частности полиномы и сплайны) не подходили для построения кривой доходности южноафриканских облигаций из-за структурной неэффективности рынка инструментов с фиксированным доходом и полученной дисперсии данных [Smit, 2000]. Стандартный бутстрэп предполагает постепенность нахождения всех нужных ставок, а итеративный бутстрэп требует, чтобы весь набор данных загружался сразу, с использованием подразумеваемых ставок, полученных на каждом предыдущем шаге.

Если кривая доходности изначально негладкая, то в случае применения стандартного бутстрэпа при сглаживании может произойти потеря важной информации о рыночных ценах. Итеративный бутстрэп обладает тем преимуществом, что при каждой итерации денежные потоки дисконтируются согласно одной и той же гладкой кривой, в то время как при стандартном бутстрэпе на каждом последующем этапе берется новая кривая, что приводит ко все большему отклонению от реальных данных. Итеративный метод также значительно ускоряет процесс расчета.

Эмпирические результаты исследования, проведенного на южноафриканском рынке, показывают, что итеративный бутстрэп дает лучшие результаты, чем альтернативные методы. С его помощью получена гладкая срочная структура, гладкая кривая форвардных ставок, а также наблюдается высокая точность вычислений. Поэтому Л. Смит сделала в своей работе вывод о том, что итеративный бутстрэп можно применять на нестабильных и неликвидных развивающихся рынках инструментов с фиксированным доходом, чтобы выявлять их недооценку и возможности арбитража. Кроме того, метод итеративного бутстрэпа может использоваться для оценки всех «ванильных» финансовых инструментов с фиксированным доходом [Smit, 2000].

3.1. Параметрические модели

Параметрический метод применяется для моделирования срочной структуры процентных ставок с помощью одной параметрической функции. Модели этого класса основаны на возможных формах кривых процентных ставок. Параметрические модели достаточно просты и дают хорошие практические результаты. Но они не имеют теоретической основы, а лишь учитывают стандартные формы кривых [Берзон, 2016].

Такие модели выводят неплохую общую форму кривой, но подходят лишь там, где не нужна высокая точность [Pienaar, Choudhry, 2010]. Полученная кривая не всегда подходит для целей ежедневной переоценки активов и может привести к крайне неустойчивым оценкам срочной структуры, поэтому финансовые учреждения, занимающиеся торговлей ценными бумагами с фиксированным доходом, предпочитают не полагаться только на параметрические модели [du Preez, Maré, 2013].

Параметрические модели имеют меньше параметров, чем сплайны, и это позволяет получить более гладкую строчную структуру, но в то же время они не такие гибкие и обладают меньшей способностью к аппроксимации сложных форм кривых доходности [Гамбаров и др., 2004].

Кроме того, из-за взаимосвязи между долгосрочными и краткосрочными процентными ставками (а, значит, и секторами фондового рынка), предполагаемой параметрическими моделями, при их использовании отдельные участки кривой не могут меняться при неизменности остальных, а это не обязательно верно на практике, поскольку может иметь место сильная рыночная сегментация [Берзон, 2016]. Так, при использовании параметрических моделей изменение данных в любой точке может повлиять на всю кривую [Anderson, Sleath, 2001].

А. Модель Нельсона – Зигеля

Одна из самых популярных на практике моделей была предложена Ч. Нельсоном и Э. Зигелем в 1987 г. Она хорошо интерпретирует параметры с экономической точки зрения, достаточно точно описывает имеющиеся данные, имеет мало параметров, поэтому очень компактна. Нельсон и Зигель поставили перед собой цель ввести в обращение как можно более простую модель с минимальным количеством параметров, которая была бы настолько гибкой, чтобы описать типичные в зависимости от рыночной ситуации формы кривой доходности: монотонную, выпуклую и *S*-образную [Nelson, Siegel, 1987].

Кривая форвардных ставок $f(t)$ задается с помощью следующего уравнения:

$$f(t)=\beta_0+\beta_1\times\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)+\beta_2\times\frac{t}{\tau_1}\times\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right), \quad (3)$$

где t – срок до погашения облигации;

β_0, β_1, β_2, τ_1 – подлежащие оценке неизвестные параметры.

Первый член уравнения – константа $\beta_0 > 0$, которую можно рассматривать как уровень кривой доходности. Вторая составляющая – экспоненциальный член $\beta_1\times\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)$, который задает наклон кривой доходности (кривая монотонно убывает при $\beta_1 > 0$ и возрастает при $\beta_1 < 0$). Третья составляющая – $\beta_2\times\frac{t}{\tau_1}\times\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)$, которая определяет форму кривой доходности («горб» при $\beta_2 > 0$ и *U*-образная форма при $\beta_2 < 0$). Константа $\tau_1 > 0$ показывает, при каком сроке до погашения «горб» функции достигает максимума [Svensson, 1994; Берзон, 2016].

В итоге получается семейство кривых форвардных ставок, которые принимают разные формы в зависимости от значений β_1 и β_2, а также имеют асимптоту $(\beta_0 + \beta_1)$ при $t \to 0$ и β_0 при $t \to \infty$ [Nelson, Siegel, 1987]. Такая горизонтальная асимптота позволяет избежать проблем с неустойчивыми оценками форвардных ставок большого срока погашения, которые часто наблюдаются при сплайн-методах [Svensson, 1995].

Важным преимуществом модели Нельсона – Зигеля является прямая трактовка ее параметров. Экономически интерпретировать коэффициенты модели можно как кратко-, средне- и долгосрочные компоненты кривой форвардных ставок, а, значит, и кривой доходности [Nelson, Siegel, 1987].

Путем интегрирования кривой форвардных ставок получают кривую непрерывно начисляемых спот-ставок $r(t)$:

$$r(t)=\beta_0+(\beta_1+\beta_2)\times\frac{1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)}{\frac{t}{\tau_1}}-\beta_2\times\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right).$$

(4)

Получившуюся регрессию лучше всего оценивать с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Параметры модели определяются путем минимизации квадратов отклонения теоретических цен от наблюдаемых, и целевая функция принимает следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{N}\left(P_k-\sum_{i=0}^{n}CF_{i,k}\times d_i\left(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\tau_1\right)\right)^2\to\min_{\beta_0,\beta_1,\beta_2,\tau_1}, \quad (5)$$

где N – количество облигаций;

k – порядковый номер облигации;

P_k – рыночная цена облигации;

n – количество денежных потоков по облигации;

i – порядковый номер такого денежного потока [Lapshin, 2012].

Авторы хотели создать такую модель, которая подходила бы для описания соотношения между доходностью и сроком погашения казначейских векселей США для последующего определения цен долгосрочных казначейских облигаций США. С помощью модели удалось объяснить 96% изменения доходности отобранных векселей, а также были отражены и подтверждены перемены в денежно-кредитной политики ФРС в этот период [Nelson, Siegel, 1987].

Модель имеет всего четыре регрессора и предполагает достаточно быструю оценку кривой доходности, но она нелинейна по параметру τ_1. Отсюда возникают проблемы при оценке из-за сложности численных расчетов [Корнев, 2010; Steeley, 2008]. Модель может идеально подогнать кривую доходности только исходя из данных по четырем инструментам, в противном случае точность оценки будет гораздо меньше, а некоторые формы кривой доходности такая модель вовсе будет не в состоянии изобразить [van Deventer, 2009].

Гладкие кривые доходности обладают недостаточной степенью гибкости, но в то же время получаются очень стабильными в отличие от полиномиальных сплайнов. Стабильность достигается благодаря наличию постоянного асимптотического предела. Это ограничение основано на предположении, что форвардные ставки отражают ожидания относительно будущих краткосрочных процентных ставок, поэтому на длинном конце форвардные ставки, как и ожидания, постоянны [Anderson, Sleath, 2001]. Кроме того, из-за невысокой точности модели могут проявиться отрицательные форвардные ставки, а также и относительно высокая межвременная корреляция оценок в отдельных сегментах кривой процентных ставок.

Согласно данным Банка международных расчетов за 2005 г. метод Нельсона – Зигеля очень распространен в Центральных банках стран Европы. Он использовался для оценки срочной структуры процентных ставок в Бельгии, Финляндии, Франции, Италии и до 1995 г. в Испании [BIS Paper № 25, 2005]. Модель успешно зарекомендовала себя и на российском рынке.

Б. G-кривая

У модели Нельсона – Зигеля есть много модификаций, которые были предложены для разных целей. Так, в России для расчета срочной структуры процентных ставок на Московской бирже применяют кривую бескупонной доходности по государственным ценным бумагам (*G*-кривую) [Гамбаров и др., 2006].

Она была получена при помощи добавления к модели Нельсона – Зигеля трех корректирующих членов для более точного описания начального участка кривой спот-ставок:

$$r_G(t)=\beta_0+(\beta_1+\beta_2)\times\frac{1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)}{\frac{t}{\tau_1}}-$$
$$-\beta_2\times\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)+g_1\times\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)+ \quad (6)$$
$$+g_2\times\exp\left(-\frac{(t-1)^2}{2}\right)+g_3\times\exp\left(-\frac{(t-2)^2}{2}\right)$$

В большинстве случаев эти добавки численно малы и *G*-кривая может быть хорошо описана с помощью модели Нельсона – Зигеля, но иногда они привносят заметное улучшение. Получившаяся модель полудинамическая, поскольку состоит из двух частей: статическая осталась от базовой модели, а динамическая необходима для учета исторических данных из предыдущих периодов (t–1) и (t–2). В этом случае неизвестные параметры оцениваются посредством фильтра Калмана.

G-кривая – один из главных индикаторов состояния финансового рынка и базовый эталон для оценки различных облигаций и других финансовых инструментов. В настоящее время разработан проект новой, уточненной *G*-кривой. С 2018 г. расчеты будут производиться именно по ней.

В. Модель Свенссона

Среди всех модификаций и улучшений модели Нельсона – Зигеля наиболее известна модель Свенссона. Л. Свенссон обобщил оригинальную модель, расширив ее с целью повышения гибкости и улучшения точности подгонки моделей к эмпирическим данным, но сохранив при этом гладкость кривой доходности [Svensson, 1994].

Кривая форвардных ставок $f(t)$ для этой модели предстает в следующем виде:

$$f(t)=\beta_0+\beta_1\times\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)+\beta_2\times\frac{t}{\tau_1}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)+\beta_3\times\frac{t}{\tau_2}\times\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right), \quad (7)$$

где t – срок до погашения облигации;

β_0, β_1, β_2, β_3, τ_1, τ_2 – подлежащие оценке неизвестные параметры.

Новый член уравнения – $\beta_3 \times \frac{t}{\tau_2} \times \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)$,

который так же, как и предшествующий ей член, отвечает за кривизну и добавляет к кривой второй «горб», введен для лучшего описания ее начального участка. Два «горба» могут создавать гораздо более разнообразные формы кривой форвардных ставок, но по этой же причине модель Нельсона – Зигеля оказывается более стабильной, чем модель Свенссона. Новая константа $\tau_2 > 0$ показывает, при каком сроке до погашения второй «горб» функции достигает своего максимума [Svensson, 1994].

В этом случае также получается семейство кривых форвардных ставок, которые принимают разные формы в зависимости от значений β_1, β_2 и β_3, а также имеют асимптоту ($\beta_0 + \beta_1$) при $t \to 0$ и β_0 при $t \to \infty$.

Тогда кривая непрерывно начисляемых спот-ставок выглядит так:

$$r(t) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \times \frac{1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)}{\frac{t}{\tau_1}} - \beta_2 \times \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + \beta_3 \times \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)}{\frac{t}{\tau_2}} - \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\right). \quad (8)$$

Модель Свенссона, как и модель Нельсона – Зигеля, обычно оценивают методом наименьших квадратов. Применять ее следует, когда очень важна точность приближения к рыночным данным или кривая форвардных ставок в некоторые промежутки времени (особенно на начальном участке) имеет сложную структуру, которую не способна описать модель Нельсона – Зигеля. Но поскольку такие структуры проявляются недолго, то в большинстве случаев можно ограничиться моделью Нельсона – Зигеля [Корнев, 2011]. В то же время модель Свенссона предполагает использование функциональной формы, которая обладает большей гибкостью, чем способна обеспечить оригинальная модель [Svensson, 1995].

Это очень удобный метод оценки кривой форвардных ставок: он относительно простой и надежный и, как полагает сам Свенссон, даже имеет точность намного выше той, что необходима для целей денежно-кредитной политики. Этот вывод был сделан после анализа форвардных процентных ставок в Швеции за период 1992–1994 гг. [Svensson, 1994, 1995].

В то же время модель Свенссона имеет ряд недостатков, самыми важными из которых являются [Marciniak, 2006]:

- ограниченная способность приспосабливаться к нестандартным формам кривой доходности;
- низкая гибкость на коротком конце кривой доходности;
- высокая степень нестабильности и тенденция принимать экстремальные значения на коротком конце кривой доходности;
- неединственность оценок в зависимости от исходной точки оценки.

Как и ее прототип, модель Свенссона широко используется профессионалами и центральными банками. Так, по данным на 2005 г. с помощью модели Свенссона срочную структуру процентных ставок оценивали центральные банки Бельгии, Франции, Германии, Норвегии, Испании, Швеции и Швейцарии [BIS Paper № 25, 2005].

Однако такие преимущества модели Свенссона, как низкая сложность и вычислительные требования, со временем стали менее важны, и ряд учреждений перешли на расчет кусочно-полиномиальных моделей *VRP* [Marciniak, 2006]. Но *VRP* менее полезен на практике, так как он отражает волатильность процентных ставок на коротком конце кривой доходности. Поэтому в качестве модели выбора для ценообразования финансовых инструментов и для анализа денежно-кредитной политики модель Свенссона будет предпочтительнее [Kovachev, Simeonov, 2014].

3.2. Сплайны

Этот метод подразумевает разбивку всего временного интервала на отдельные сегменты, каждый из которых содержит собственную аппроксимирующую функцию. Вместо того, чтобы указывать одну функциональную форму для всего временного отрезка, как это происходит у параметрических моделей, сплайны моделируют кривую доходности в виде кусочно-линейных многочленов (полиномов) *n*-й степени, соединенных в заданных узловых точках. Впервые моделировать кривую доходности таким образом предложил Дж. МакКаллох [McCulloch, 1971].

Есть случаи, когда рекомендуется использовать полиномиальные сплайны. Например, при аппроксимации часто лучше иметь достаточно общую функциональную форму срочной структуры, чтобы потом не проверять какие-либо конкретные гипотезы. В этом отношении сплайны лучше многих других методов [Shea, 1984].

Сплайновые методы не всегда являются самыми подходящими. Как показало проведенное исследование, имея аналогичную с параметрическими моделями точность, они содержат больше параметров, что приводит к сравнительно меньшей гладкости кривой [Корнев, 2010]. В то же время сплайны способны аппроксимировать более сложные формы срочных структур, что возможно благодаря их большой локальной гибкости. Но сплайны не очень удобны для экономической интерпретации, так как содержат

узловые точки, которые необходимо задавать заранее, т.е. изначально обосновывать их наличие [Корнев, 2011].

Основной целью применения сплайнов является получение непрерывной гладкой кривой, максимально приближенной к рыночным ставкам. Пытаясь создать гладкую и точную в узлах кривую, можно столкнуться со значительными колебаниями на ней, поэтому в некоторых случаях практики предпочитают гладкость всей кривой точности в узловых точках. Но точность в узлах может быть важным фактором, когда применяется методология ценообразования, основанная на отсутствии арбитража [Pienaar, Choudhry, 2010].

Основное преимущество сплайнового подхода по сравнению с параметрическими методами состоит в том, что отдельные сегменты сплайна могут корректироваться практически независимо друг от друга, что является причиной более высокой степени гибкости сплайнов. Это также способствует тому, что отдельные сегменты кривой процентных ставок не будут сильно реагировать на колебание ставок в близлежащих сегментах [Anderson, Sleath, 2001].

В настоящее время различные кубические сплайны используются в программном обеспечении по управлению корпоративным риском более чем в 30 странах мира [van Deventer, 2009].

Методология кубических сплайнов может быть успешно реализована на рынках долгового капитала. Их рекомендуется использовать, когда кривые доходности имеют положительный наклон. Кроме того, для целей разработки денежно-кредитной политики (например, в центральных банках), а также для оценок некоторых рыночных инструментов может возникнуть необходимость в форвардных ставках с минимальным колебанием, что сплайны также в состоянии обеспечить [Pienaar, Choudhry, 2010].

Необходимо также помнить, что сплайны не всегда подходят для построения кривой доходности в стране, где имеет место структурная неэффективность рынка инструментов с фиксированным доходом [Smit, 2000], о чем уже говорилось выше.

Согласно статистике Базельского комитета, сплайновые методы пользуются значительной популярностью у центральных банков развитых стран. Центральные банки Канады, Японии, Швеции, Великобритании и США применяют различные виды сплайнов для оценки безрисковых инструментов [BIS Paper № 25, 2005; Корнев, 2011].

Кубические сплайны очень часто применяются на практике. Существует множество моделей оценки срочной структуры процентных ставок, основанных на них.

А. Кубические сплайны МакКаллоха

Идея построения функции дисконтирования с помощью полиномиальных сплайнов принадлежит Дж. МакКаллоху. В статье 1975 г. он разработал регрессионный кубический сплайн (*regression cubic spline*) и использовал его для приближения функций дисконтирования и кривых доходности, скорректированных с учетом налогов.

Общая функциональная форма функции дисконтирования для каждого из k сегментов срока до погашения может быть записана в виде:

$$d_t = 1 + a_1 \times t + a_2 \times t^2 + a_3 \times t^3 + \sum_{j=4}^{k} a_j \times \left(t - t_j\right)^3 \times f_j\left(t\right),$$

(9)

где d_t – коэффициент дисконтирования;

t – срок до погашения;

t_j – узловая точка;

$f_j(t) = 1$ при $t \geq t_j$ и $f_j(t) = 0$ при $t < t_j$; число параметров a_j определяется числом узловых точек.

Поскольку модель является линейной по функции дисконтирования, то выбор наилучшего подходящего многочлена осуществляется с помощью МНК. Тогда функция дисконтирования выбирается как кубический сплайн с минимизацией целевой функции вида:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(P_i - \hat{P}_i\left(d_t\right)\right)^2 \to \min_{d_t}, \quad (10)$$

где P_i – наблюдаемая (фактическая) цена i-й облигации;

$\hat{P}_i\left(d_t\right)$ – прогнозируемая цена i-й облигации.

Обычные кубические сплайны являются простейшим методом в этом классе функций и позволяют получить гладкую функцию форвардных ставок. Они довольно гибкие, поскольку количество узловых точек можно выбрать сколь угодно большим. Кубические сплайны и в пределах, и вне выборки достаточно точно оценивают облигации [Waggoner, 1997].

Недостатком этой модели является возможность появления отрицательных форвардных ставок [Stander, 2005]. Кривые форвардных ставок, полученные методом МакКаллоха, часто имеют тенденцию сильно колебаться [Shea, 1985].

Б. Экспоненциальные сплайны Васичека и Фонга

Идею Дж. МакКаллоха развили О. Васичек и Х. Г. Фонг. Они рекомендовали использовать экспоненциальные сплайны (*exponential splines*) вместо полиномиальных на том основании, что функция дисконтирования изначально имеет экспоненциальный вид, а поэтому невозможно адекватно сопоставить экспоненциальную форму функции дисконтирования с моделью кубических сплайнов [Vasicek, Fong, 1982].

В таком случае функция дисконтирования описывается следующим образом:

$$d_t = a_0 + a_1 \times e^{-\acute{a}t} + a_2 \times e^{-2\acute{a}t} + a_3 \times e^{-3\acute{a}t}, \quad (11)$$

где α – некоторая константа.

Авторы заявили о том, что новая модель имеет желаемые асимптотические свойства для длительных сроков погашения, чего не наблюдалось у кубических

сплайнов, а также обладает достаточной гибкостью и позволяет получить гладкие стабильные кривые форвардных ставок.

Однако Г. Шей, сравнив эти две методологии, обнаружил, что экспоненциальные сплайны подвержены тем же недостаткам, что и полиномиальные [Shea, 1985]. Кроме того, он эмпирически установил, что:

- срочная структура процентных ставок, полученных в экспоненциальной модели, не стабильнее, чем в полиномиальной модели;
- преобразования данных, проделанные в экспоненциальной модели, в итоге часто приводят к недостоверным результатам;
- асимптотические свойства экспоненциальной модели часто нереалистичны.

Отсюда сделан вывод, что экспоненциальные сплайны не более удобны, чем полиномиальные. Шей рекомендует использовать полиномиальные сплайны, поскольку в этих двух случаях получаются идентичные срочные структуры процентных ставок, но отпадает необходимость в оценке сложной нелинейной модели вместо линейной.

В. Метод «максимальной гладкости» Адамса и ван Девентера

На основе модели кубических сплайнов К. Адамс и Д. ван Девентер предложили новый подход к сглаживанию кривой доходности. Они ввели собственный метод «максимальной гладкости» (*maximum smoothness*) [Adams, van Deventer, 1994].

Этот метод был разработан в Японии для построения кривой форвардных ставок в условиях рынка, находящегося на ранних стадиях своего развития, где количество данных невелико [van Deventer, 2009].

МакКаллох и Васичек и Фонг старались найти и построить такую гладкую функцию с относительно небольшим числом параметров, которая как можно больше была бы похожа на кривую доходности казначейских облигаций США. Адамс и ван Девентер решили сделать по-другому и подогнать к наблюдаемым точкам на кривой доходности такую функцию времени, которая создает наиболее плавную возможную кривую форвардных ставок. Однако критерий максимальной гладкости не имеет смысла без опоры на наблюдаемые точки на кривой доходности.

Авторы постарались определить максимально гладкую срочную структуру для всех возможных функциональных форм. Для этого срочная структура $f(t)$ форвардных ставок должна удовлетворять критерию максимума гладкости:

$$\int_0^T \left[f''(t) \right]^2 dt \to \min . \quad (12)$$

Авторы сравнили свой подход с альтернативными методами сглаживания кривой доходности (кубические сплайны МакКаллоха, экспоненциальные сплайны Васичека и Фонга, метод линейного сглаживания), использовав данные по процентным свопам в иенах и ставкам доллара США. В итоге оказалось, что метод максимальной гладкости работает лучше остальных, если судить по двойственным критериям точности и гладкости, несмотря на то, что эмпирические результаты весьма чувствительны к выбранным периоду времени и типу данных.

Г. Сглаживающие сплайны Фишера – Нички – Зервоса

Традиционные методы на основе кубических сплайнов могут оказаться слишком гибкими, чтобы адекватно сгенерировать кривые доходности с уровнем гладкости, требуемым для исследования рыночных цен на облигации или для целей денежно-кредитной политики. Чтобы решить эту проблему, М. Фишер, Д. Ничка и Д. Зервос разработали метод сглаживающих сплайнов (*smoothing splines*), который является расширением традиционного метода кубических сплайнов [Fisher et al., 1994].

Эта модель на основе *B*-сплайнов позволяет уменьшить колебания и повысить гладкость кривых форвардных ставок. Сглаживающие сплайны содержат штраф за излишнюю «шероховатость» функции, имея параметр λ, который определяет размер этого штрафа, а увеличение значения штрафа уменьшает эффективное число параметров [Fisher et al., 1994]. Таким образом, авторы могут использовать большое количество узловых точек, но ограничивают колебательное поведение функции дисконтирования.

Размер штрафа определен так:

$$\lambda \times \int_0^T \left[f''(t) \right]^2 dt , \quad (13)$$

где значение λ определяется обобщенным методом кросс-валидации (*GCV*).

Кривая форвардных ставок выбрана как кубический сплайн, который минимизирует следующее выражение:

$$\left[\sum_{i=1}^{N} \left(P_i - \hat{P}_i(f) \right)^2 + \lambda \times \int_0^T \left[f''(t) \right]^2 dt \right] \to \min_{f(t)} . \quad (14)$$

Модель имеет единый параметр, контролирующий гладкость всей кривой, поэтому она не учитывает различия в степени волатильности и гладкости различных сегментов кривой доходности, а выбирает «среднюю» гладкость. Это часто приводит к недостаточному уровню точности для инструментов с коротким сроком до погашения и сильным колебаниям процентных ставок на длинном конце кривой [Marciniak, 2006].

Д. Сглаживающий сплайн Ваггонера (VRP)

Очень популярной моделью является *VRP* (*variable roughness penalty*), предложенный Д. Ваггонером [Waggoner, 1997]. По сути *VRP* – это модифицированный сглаживающий сплайн Фишера – Нички – Зервоса. Ваггонер сделал предшествующий метод более

гибким путем применения штрафа, зависящего от срока погашения облигации.

Инвесторы, скорее всего, будут более информированы о виде срочной структуры при коротких и средних сроках до погашения (когда процентные ставки определяются денежно-кредитной политикой и условиями бизнес-цикла), чем при более длительных сроках до погашения. Таким образом, кривая может оказаться слишком жесткой на коротком конце и (или) слишком гибкой на длинном конце [Anderson, Sleath, 2001].

Ваггонер минимизирует такую функцию:

$$\left[\sum_{i=1}^{N}\left(P_i-\hat{P}_i(f)\right)^2+\int_0^T\lambda(t)\times\left[f''(t)\right]^2dt\right]\to\min_{f(t)}. \quad (15)$$

Эта процедура является компромиссом между минимизацией первого члена, который измеряет точность подгонки, и второго члена, который измеряет гладкость. Ваггонер утверждает, что так волатильность на долгосрочном конце кривой уменьшится, и он станет более плавным, а нужная гибкость на краткосрочном конце кривой сохранится [Stander, 2005].

Размер штрафа уточняется следующим образом:

$$\lambda(t)=\begin{cases}0.1, & 0\le t\le 1\\ 100, & 1\le t\le 10\\ 100\,000, & t>10\end{cases} \quad (16)$$

Значит, ставя размер штрафа в зависимость от срока погашения, *VRP* позволяет довольно точно оценивать краткосрочные ценные бумаги, не отказываясь от желаемого затухания колебаний на длинном конце кривой [Waggoner, 1997].

Сравнивая кубический сплайн МакКаллоха и *VRP*, Ваггонер пришел к выводу, что эти два метода очень похожи по точности и гладкости полученных результатов. Кубические сплайны являются линейными, поэтому их легче реализовать, чем нелинейный *VRP*. Первый метод быстрее и проще в использовании, но второй позволяет явно контролировать степень сглаживания [Waggoner, 1997].

Е. Экспоненциально-синусоидальные сплайны

С. Смирнов и А. Захаров предложили новый подход для подгонки кривой доходности [Smirnov, Zakharov, 2003], названный экспоненциально-синусоидальными сплайнами (*exponential-sinusoidal splines*). Он позволяет удовлетворить следующие требования к аппроксимации кривой:

- неотрицательность форвардных ставок;
- достаточная гладкость функции дисконтирования;
- малая разница между оцененными и наблюдаемыми ценами облигаций;
- учет *bid-ask* спреда в качестве показателя рыночной ликвидности.

Оптимальная функция $f(t)$ представлена в виде сплайна с такими компонентами:

$$f(t)=\begin{bmatrix}C_i^1\times\sin(\gamma_i\times t)+C_i^2\times\cos(\gamma_i\times t)\\ C_i^1\times\sinh(\gamma_i\times t)+C_i^2\times\cosh(\gamma_i\times t)\\ C_i^1\times t+C_i^2\end{bmatrix}, \quad (17)$$

где $t\in[t_i;\ t_{i+1}]$.

Недостатком этого вида сплайнов является большая сложность используемых формул, их трудно понять, могут возникнуть проблемы с расчетами. Нелинейная задача оптимизации также требует очень большого числа переменных (порядка 600–1000), поэтому процесс ее решения может занять долгое время [Lapshin, 2012].

Этот подход можно использовать для мгновенной оценки кривой доходности при условии надлежащего качества набора данных, когда *bid-ask* спреды действительно отражают состояние рынка. Поэтому экспоненциально-синусоидальные сплайны могут быть полезным инструментом оценки при торговле облигациями. А если нужно описать усредненное поведение рынка за определенный период времени (один час, один день и т.д.), то этот метод подойдет для управляющего фондом [Smirnov, Zakharov, 2003].

Ж. Сплайны со свободными узлами

Выбор оптимального местоположения и количества узловых точек для регрессионных сплайнов является очень сложной задачей, которая часто отклоняется как численно неразрешимая. Такой выбор носит субъективный характер, а требуемая кривая может оказаться чувствительной к нему.

Пытаясь решить эту проблему, Ф. Фернандес-Родригес разработал новую методологию оценки срочной структуры процентных ставок на основе сплайнов со свободными узлами (*free-knot splines*) [Fernández-Rodríguez, 2006]. Этот подход базируется на методах эвристической оптимизации, называемых генетическими алгоритмами (*GA*). Целью этого процесса является создание последовательных решений, которые лучше подходят для оптимизации, чем те решения, из которых они были получены.

Сплайны со свободными узлами в 80% случаев обеспечивают значительно лучшую подгонку, чем сплайны МакКаллоха с фиксированными узлами. Аппроксимация функций с помощью сплайнов со свободными узлами увеличивает гибкость, улучшая мощность сплайнов. Кроме того, даже когда число свободных параметров поддерживается постоянным, в большинстве случаев новый метод явно превосходит модель МакКаллоха, хотя в ряде случаев он незначительно хуже.

3.3. Монотонные сплайны

Иногда форвардные ставки получаются отрицательными, что в рамках большинства моделей означает арбитражные возможности. Поэтому П. Хаган и Г. Вест ввели новую модель сплайна – монотонный

выпуклый сплайн для построения кривой форвардных ставок (*forward monotone convex spline*) [Hagan, West, 2006, 2008].

Этот сплайн построен, чтобы сохранить нужные свойства: кривая будет локально монотонна и выпукла, если исходные данные обладают аналогичными дискретными свойствами [Hagan, West, 2006]. Кроме того, в случае необходимости (например, для кривых доходности) можно гарантировать, что мгновенные форвардные ставки будут положительны всякий раз, когда дискретные форвардные ставки положительны [Hagan, West, 2008].

Однако позднее было замечено, что этот метод не всегда способен обеспечить непрерывность кривых форвардных ставок, и при определенных обстоятельствах он приводит к разрывам в них [du Preez, Maré, 2013].

3.4. Модель Смита – Уилсона

В заключение нужно уделить внимание еще одному методу – модели, представленной А. Смитом и Т. Уилсоном в 2001 г. [Smith, Wilson, 2001]. Этот чисто технический метод разрабатывался авторами как для интерполяции, так и для экстраполяции процентных ставок [Wahlers, 2013].

Согласно данной модели функция дисконтирования для бескупонной облигации предстает в виде суммы двух факторов: долгосрочного коэффициента дисконтирования со ставкой *UFR* и линейной комбинации функций Уилсона $W(t, u_j)$ [Wahlers, 2013]:

$$d(t) = e^{-UFR \times t} + \sum_{j=1}^{N} \zeta_j \times W(t, u_j), \quad (18)$$

где *UFR* – конечная форвардная ставка;

t и u_j – сроки до погашения облигации;

N – количество используемых облигаций;

ζ_i – подлежащие оценке параметры.

Причем

$$m_i = d(t) = e^{-R_t \times t}, \quad (19)$$

где m_i – рыночная цена i-й облигации;

R_t – спот-ставка [QIS 5, 2010].

Ставки *UFR* принимают конкретные значения в зависимости от валюты финансового инструмента, используемого при расчете кривой доходности [EIOPA, 2017]:

- 4,2% для стран, входящих в Европейскую экономическую зону, и стран, не входящих в ЕЭЗ, кроме нижеперечисленных;
- 3,2% для Швейцарии и Японии;
- 5,2% для Бразилии, Индии, Мексики, Турции и ЮАР.

Симметричные функции Уилсона $W(t, u_j)$ задаются следующим образом [QIS 5, 2010]:

$$W(t,u_j) = e^{-UFR \times (t+u_j)} \times \left\{ \alpha \times \min(t,u_j) - 0,5 \right. \quad (20)$$
$$\left. - 0,5 e^{-\alpha \times \max(t,u_j)} \times (e^{\alpha \times \min(t,u_j)} - e^{-\alpha \times \min(t,u_j)} \right\},$$

где $\alpha \geq 0,05$ – параметр, определяющий скорость сходимости оцененных форвардных ставок к ставке *UFR*.

Изначально модель Смита – Уилсона предназначалась для расчетов по бескупонным облигациям, но в обобщенном виде она также успешно применяется для оценки купонных облигаций и свопов [Lagerås, Lindholm, 2016].

К достоинствам модели Смита – Уилсона относится легкость реализации, поскольку нужные расчеты могут быть произведены даже в *Excel*. Модель не предполагает сглаживания кривой доходности, полученная с ее помощью срочная структура почти идеально соответствует рыночным данным [QIS 5, 2010]. Решение системы уравнений находится аналитически, что является преимуществом по сравнению с моделями, основанными на МНК, так как достигается стабильность параметров, а, значит, гарантируется отсутствие арбитража. Кроме того, модель обеспечивает стабильные долгосрочные форвардные ставки [Wahlers, 2013].

Однако нужно отметить, что полученная функция дисконтирования не всегда является строго убывающей, и на интерполируемом участке кривой она может начать расти [QIS 5, 2010]. Отсутствие соответствующих ограничений также может стать причиной возникновения отрицательного коэффициента дисконтирования на экстраполируемом участке при условии, что последние известные рыночные форвардные ставки достаточно высоки [Lagerås, Lindholm, 2016]. Неудобно и то, что параметр α должен задаваться вне модели [QIS 5, 2010].

Несмотря на недостатки метода Смита – Уилсона, он был утвержден Европейским страховым и профессиональным пенсионным управлением (*EIOPA*) в качестве основного метода для расчета безрисковой процентной ставки в рамках *Solvency II*, в частности, при оценке долгосрочных гарантий (*LTGA*) [EIOPA, 2017].

Заключение

Существует множество разнообразных моделей оценки срочной структуры процентных ставок, разработанных для разных целей. Все они обладают своей спецификой, требуют тщательного изучения и апробации в различных условиях на рынках разных стран, чтобы иметь возможность судить о достоинствах и недостатках каждой из них. Мы рассмотрели некоторые часто применяемые модели и систематизировали информацию об их областях применимости из статей отечественных и зарубежных ученых, занимавшихся этим вопросом. В приложении

представлен возможный алгоритм выбора модели для оценки срочной структуры на основе собранной информации.

Благодарности

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2017 г.

Список литературы

Авдеева О.А., Цыплаков А.А. Метод адаптивного оценивания срочной структуры процентных ставок // Экономический журнал ВШЭ. 2015. Т. 19. № 4. С. 609–639.

Берзон Н.И. и др. Рынок ценных бумаг: учебник для академического бакалавриата / под общ. ред. Н.И. Берзона. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт, 2016. – 443 с.

Гамбаров Г.М., Шевчук И.В., Балабушкин А.Н. Оценка срочной структуры процентных ставок // Рынок ценных бумаг. 2004. № 13. С. 44–52.

Гамбаров Г.М., Шевчук И.В., Балабушкин А.Н., Никитин А.В. Кривая бескупонной доходности на рынке ГКО-ОФЗ // Рынок ценных бумаг. 2006. № 3. С. 68–77.

Ивлиев С.В., Лапшин В.А. Моделирование срочной структуры процентных ставок российского рынка // Cbonds Review. 2011. № 4. С. 53–57.

Корнев К.В. Кривые временной структуры процентных ставок на рынке корпоративных облигаций // Управление финансовыми рисками. 2011. № 4 (28). С. 246–263.

Корнев К.В. Моделирование динамики ненаблюдаемых факторов временной структуры процентных ставок // Вестник НГУ. Серия: Социально-экономические науки. 2011. Т. 11. Вып. 1. С. 54–69.

Корнев К.В. Оценка кривых временной структуры процентных ставок российского рынка облигаций различных групп кредитного риска // Вестник НГУ. Серия: Социально-экономические науки. 2010. Т. 10. Вып. 1. С. 119–132.

Кривая бескупонной доходности // Сайт Московской Биржи. 2017. URL: http://www.moex.com/a80

Лапшин В.А., Каушанский В.Я., Курбангалеев М.З. Оценка кривой бескупонной доходности на российском рынке облигаций // Экономический журнал ВШЭ. 2015. Т. 19. № 1. С. 9–29.

Лукасевич И.Я. Моделирование временной структуры процентных ставок // Экономика. Налоги. Право. 2016. № 1. С. 43–51.

Парфёнов А.А. Кривая бескупонной доходности как индикатор кризисных явлений на российском финансовом рынке // Вестник Омского университета. Серия: Экономика. 2012. № 4. С. 159–164.

Adams K.J., and van Deventer D.R. Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves with Maximum Smoothness // The Journal of Fixed Income. 1994. Vol. 4. No. 1. P. 52–62.

Anderson N., and Sleath J. New Estimates of the UK Real and Nominal Yield Curves. Bank of England Working Paper, 2001. 44 p.

Bliss R.R. Testing Term Structure Estimation Methods. Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper, 1996. 44 p.

Cogneau P., and Zakamouline V. Bootstrap Methods for Finance: Review and Analysis. University of Agder Working Paper, 2010. 31 p.

du Preez P.F., and Maré E. Interpolating Yield Curve Data in a Manner that Ensures Positive and Continuous Forward Curves // South African Journal of Economic and Management Sciences. 2013. Vol. 16. No. 4. P. 395–406.

Fama E.F., and Bliss R.R. The Information in Long-Maturity Forward Rates // The American Economic Review. 1987. Vol. 77. No. 4. P. 680–692.

Fernández-Rodríguez F. Interest Rate Term Structure Modeling Using Free-Knot Splines // The Journal of Business. 2006. Vol. 79. No. 6. P. 3083–3099.

Fisher M., Nychka D., and Zervos D. Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines // Federal Reserve Board Working Paper, 1994. 32 p.

Hagan P.S., and West G. Interpolation Methods for Curve Construction // Applied Mathematical Finance. 2006. Vol. 13. No. 2. P. 89–129.

Hagan P.S., and West G. Methods for Constructing a Yield Curve // Wilmott Magazine. 2008. Vol. 2008. No. 3. P. 70–81.

Hull J.C. Options, Futures, and Other Derivatives", Boston: Pearson, 2015, 869 p.

Kovachev Y., and Simeonov D. Yield Curve Fitting with Data from Sovereign Bonds // Bulgarian National Bank Discussion Papers, 2014. 27 p.

Lagerås A., and Lindholm M. Issues with the Smith-Wilson method. Research Report in Mathematical Statistics, Stockholm University, 2016. 19 p.

Lapshin V.A. Term Structure Models. In: Market Risk and Financial Markets Modeling. Berlin: Springer, 2012. P. 115–127.

Litzenberger R.H., and Rolfo J. An International Study of Tax Effects on Government Bonds // The Journal of Finance. 1984. Vol. 39. No. 1. P. 1–22.

Marciniak M. Yield Curve Estimation at the National Bank of Poland Spline Based Methods, Curve Smoothing and Market Dynamics // Bank I Kredyt. 2006. Vol. 37. No. 10. P. 52–74.

McCulloch J.H. Measuring the Term Structure of Interest Rates // Journal of Business. 1971. Vol. 44. No. 1. P. 19–31.

McCulloch J.H. The Tax-Adjusted Yield Curve // The Journal of Finance. 1975. Vol. 30. No. 3. P. 811–830.

Nelson C.R., and Siegel A.F. Parsimonious Modeling of Yield Curves // The Journal of Business. 1987. Vol. 60. No. 4. P. 473–489.

Pienaar R., and Choudhry M. Fitting the Term Structure of Interest Rates: The Practical Implementation of Cubic

Spline Methodology // Deutsche Bank Research Report, 2010. URL: http://yieldcurve.com/mktresearch/files/PienaarChoudhry_CubicSpline2.pdf

QIS 5: Risk Free Interest Rates – Extrapolation Method // CEIOPS Technical report. 2010. 27 p. URL: https://eiopa.europa.eu/Publications/QIS/ceiops-paper-extrapolation-risk-free-rates_en-20100802.pdf

Shea G.S. Interest Rate Term Structure Estimation with Exponential Splines: A Note // The Journal of Finance. 1985. Vol. 40. No. 1. P. 319–325.

Shea G.S. Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data: Equilibrium Models and Spline Approximations // The Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1984. Vol. 19. No. 3. P. 253–269.

Sleath J. New Estimates of the UK Term Structure of Interest Rates. Bank of England, 2001. URL: http://www.bankofengland.co.uk/statistics/Documents/ms/articles/artag200.pdf

Smirnov S., and Zakharov A. A Liquidity-Based Robust Spline Fitting of Spot Yield Curve Providing Positive Forward Rates // European Bond Commission Working Paper. 2003. 38 p.

Smit L. An Analysis of the Term Structure of Interest Rates and Bond Options in the South African Capital Market. University of Pretoria, PhD Thesis, 2000. URL: http://repository.up.ac.za/handle/2263/27546

Smith A., and Wilson T. Fitting Yield Curves with Long Term Constraints. Research Notes, London: Bacon & Woodrow, 2001.

Stander Y.S. Yield Curve Modeling. Hampshire: Palgrave Macmillan, 2005. 188 p.

Steeley J.M. Testing Term Structure Estimation Methods: Evidence from the UK STRIPs Market // Journal of Money, Credit and Banking. 2008. Vol. 40. No. 7. P. 1489–1512.

Svensson L.E.O. Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–1994. International Monetary Fund Working Paper, 1994. 76 p.

Svensson L.E.O. Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson & Siegel Method // Sveriges Riksbank Quarterly Review. 1995. No. 3. P. 13–26.

Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures. EIOPA, 2017. 135 p.

van Deventer D.R. Yield Curve Smoothing: Nelson-Siegel versus Spline Technologies. Kamakura Blog. 2009. URL: http://www.kamakuraco.com/DonaldRvanDeventerPHD.aspx

Vasicek O.A. An Equilibrium Characterization of the Term Structure", Journal of Financial Economics. 1977. Vol. 5. No. 2. P. 177–188.

Vasicek O.A., and Fong H.G. Term Structure Modeling Using Exponential Splines // The Journal of Finance. 1982. Vol. 37. No. 2. P. 339–348.

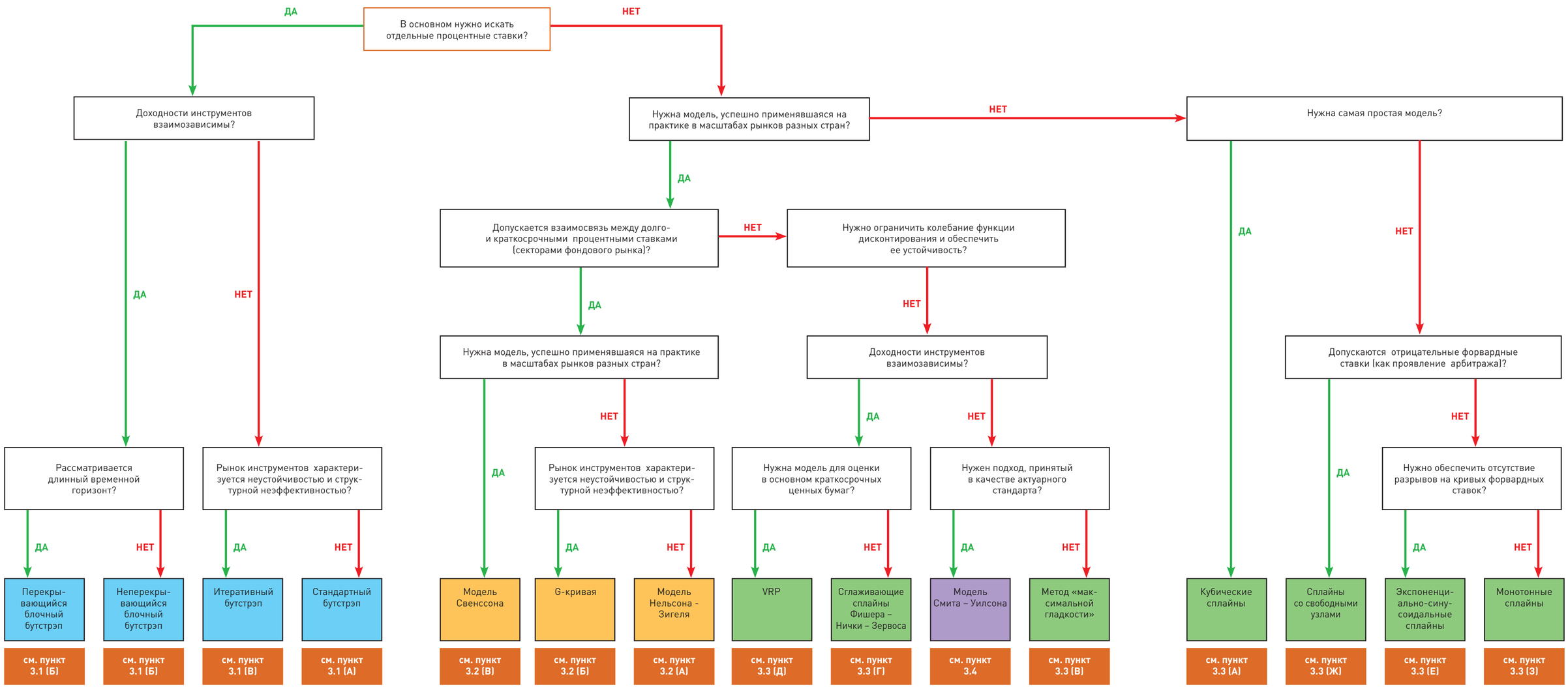
Waggoner D.F. Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices. Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper, 1997. 23 p.

Wahlers M. Valuation of Long-Term Liabilities under Solvency II – Extrapolation Methods for the European Interest Rate Market // Master Thesis in Financial Economics. Maastricht University, 2013. 64 p.

Zero-coupon yield curves: technical documentation // Bank for International Settlements (BIS) Paper. 2005. No. 25. 37 p.

Приложение.

Алгоритм выбора модели для оценки срочной структуры процентных ставок



The Choice of the Model of the Term Structure of Interest Rates on the Basis of Its Properties

Lapshin Victor Aleksandrovich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Scientific Employee of the Scientific and Educational Laboratory for Financial Engineering and Risk Management
National Research University Higher School of Economics
3104 office, 3 building, 26, Shabolovka street, Moscow, Russia

E-mail: vlapshin@hse.ru

Tereshchenko Maria Yurievna

Trainee Researcher of the Scientific and Educational Laboratory for Financial Engineering and Risk Management
National Research University Higher School of Economics
3104 office, 3 building, 26, Shabolovka street, Moscow, Russia

E-mail: myutereschenko@edu.hse.ru

Abstract

The article is devoted to the choice of a suitable model for construction the term structure of interest rates from the most popular ones: bootstrap, various splines, parametric Nelson-Siegel and Svensson models. The peculiarities of their use in the financial markets of different countries are described.

The problem of modeling the term structure has a long history and continues to attract increased attention of theoretical scientists and practitioners. At different times this problem was of interest to J.M. Keynes, P. Samuelson, R. Merton, F. Modigliani, M. Scholes, E. Fama, etc. Despite the serious progress in this area the question of constructing adequate to real conditions models is still far from the final decision and requires continuation of work on their study.

Term structure is widely used to analyze prices and bond yields, assess the fairness of market forecasts. Term structure curves are extremely important in studying processes in economic sphere, so they need adequate models of their evaluation. In reality credits and loans interest rates are not observable at an arbitrary time moment. It remains only to model them relying on the available data on the government or corporate bonds, on other available financial instruments.

All models have some advantages and disadvantages, so specialist needs to determine the purpose of the study and select a model taking into account its properties. Models are considered in chronology they were developed. Each subsequent model from each class was designed to eliminate disadvantages of the previous version, but this was not always possible and the new model either reinforced weaknesses of the previous one, or produces new ones.

A model choosing algorithm based on its main properties, which could become the most important for the successful solution of the problem assigned to the expert, is proposed.

Keywords: yield curve, term structure of interest rates, bootstrap, splines, parametric models, bonds.

JEL: E43

References

Adams, K.J., and van Deventer, D.R. (1994) Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves with Maximum Smoothness. *The Journal of Fixed Income*, vol. 4, no. 1, pp. 52–62.

Anderson, N., and Sleath, J. (2001) New Estimates of the UK Real and Nominal Yield Curves. *Bank of England Working Paper*, 44 p.

Avdeeva, O.A., Tsyplakov, A.A. (2015) Metod adaptivnogo otsenivaniya srochnoy struktury protsentnykh stavok [A Method for Adaptive Estimation of the Term Structure of Interest Rates [In Russian]]. *Ekonomicheskiy Zhurnal Vysshey Shkoly Ekonomiki*, vol. 19, no. 4, pp. 609–639.

Berson N.I. et al. (2016) Rynok tsennykh bumag: uchebnik dlya akademicheskogo bakalavriata [Securities market: a textbook for academic baccalaureate [In Russian]] / pod obshch. red. N.I. Berzona. 4-ye izd., pererab. i dop. M.: Izdatel'stvo Yurayt. 443 p.

Bliss, R.R. (1996) Testing Term Structure Estimation Methods. *Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper*, 44 p.

Cogneau, P., and Zakamouline, V. (2010) Bootstrap Methods for Finance: Review and Analysis. *University of Agder Working Paper*, 31 p.

du Preez, P. F., and Maré, E. (2013) Interpolating Yield Curve Data in a Manner that Ensures Positive and Continuous Forward Curves. *South African Journal of Economic and Management Sciences*, vol. 16, no. 4, pp. 395–406.

Fama, E.F., and Bliss, R.R. (1987) The Information in Long-Maturity Forward Rates. *The American Economic Review*, vol. 77, no. 4, pp. 680–692.

Fernández-Rodríguez, F. (2006) Interest Rate Term Structure Modeling Using Free-Knot Splines. *The Journal of Business*, vol. 79, no. 6, pp. 3083–3099.

Fisher, M., Nychka, D., and Zervos, D. (1994) Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines. *Federal Reserve Board Working Paper*, 32 p.

Gambarov, G.M., Shevchuk, I.V., Balabushkin, A.N. (2004) Otsenka srochnoy struktury protsentnykh stavok [Estimation of the Term Structure of Interest Rates [In Russian]]. *Rynok Tsennykh Bumag*, no. 13, pp. 44–52.

Gambarov, G.M., Shevchuk, I.V., Balabushkin, A.N., Nikitin, A.V. (2006) Krivaja beskuponnoj dohodnosti na rynke GKO-OFZ [Zero-Coupon Yield Curve on the GKO-OFZ Market [In Russian]]. *Rynok Tsennykh Bumag*, no. 3, pp. 68–77.

Hagan, P.S., and West, G. (2006) Interpolation Methods for Curve Construction. *Applied Mathematical Finance*, vol. 13, no. 2, pp. 89–129.

Hagan, P.S., and West, G. (2008) Methods for Constructing a Yield Curve. *Wilmott Magazine*, vol. 2008, no. 3, pp. 70–81.

Hull, J.C. (2015) *Options, Futures, and Other Derivatives*. Boston: Pearson, 869 p.

Ivliev, S.V., Lapshin, V.A. (2011) Modelirovaniye srochnoy struktury protsentnykh stavok rossiyskogo rynka [Modeling the Term Structure of the Russian Market Interest Rates [In Russian]]. *Cbonds Review*, no. 4, pp. 53–57.

Kornev, K.V. (2011) Krivyye vremennoy struktury protsentnykh stavok na rynke korporativnykh obligatsiy [Curves of the Term Structure of Interest Rates on the Corporate Bond Market [In Russian]]. *Upravleniye Finansovymi Riskami*, no. 4(28), pp. 246–263.

Kornev, K.V. (2011) Modelirovaniye dinamiki nenablyudayemykh faktorov vremennoy struktury protsentnykh stavok [Modeling the Dynamics of Unobservable Variables Term Structure of Interest Rates [In Russian]]. *Vestnik NGU. Seriya: Sotsial'no-Ekonomicheskiye Nauki*, vol. 11, iss. 1, pp. 54–69.

Kornev, K.V. (2010) Otsenka krivykh vremennoy struktury protsentnykh stavok rossiyskogo rynka obligatsiy razlichnykh grupp kreditnogo riska [Estimation of Yield Curves for Russian Bonds with Different Group of Credit Risk [In Russian]]. *Vestnik NGU. Seriya: Sotsial'no-Ekonomicheskiye Nauki*, vol. 10, iss. 1, pp. 119–132.

Kovachev, Y., and Simeonov, D. (2014) Yield Curve Fitting with Data from Sovereign Bonds. *Bulgarian National Bank Discussion Papers*, 27 p.

Krivaya beskuponnoy dokhodnosti [Zero-coupon yield curve [In Russian]] (2017) *Site of the Moscow Stock Exchange*. URL: http://www.moex.com/a80

Lagerås, A., and Lindholm, M. (2016) Issues with the Smith-Wilson method. *Research Report in Mathematical Statistics*, Stockholm University, 19 p.

Lapshin, V.A. (2012) *Term Structure Models. In: Market Risk and Financial Markets Modeling*. Berlin: Springer, pp. 115–127.

Lapshin, V.A., Kaushansky V.Ya., Kurbangaleev M.Z. (2015) Otsenka krivoy beskuponnoy dokhodnosti na rossiyskom rynke obligatsiy [Fitting Zero-coupon Yield Curve in the Russian Bond Market [In Russian]]. *Ekonomicheskiy Zhurnal Vysshey Shkoly Ekonomiki*, vol. 19, no. 1, pp. 9–29.

Litzenberger, R.H., and Rolfo, J. (1984) An International Study of Tax Effects on Government Bonds. *The Journal of Finance*, vol. 39, no. 1, pp. 1–22.

Lukasevich, I.Ya. (2016) Modelirovaniye vremennoy struktury protsentnykh stavok [Modeling the Time Structure of Interest Rates [In Russian]]. *Ekonomika. Nalogi. Pravo*, no. 1, pp. 43–51.

Marciniak, M. (2006) Yield Curve Estimation at the National Bank of Poland Spline Based Methods, Curve Smoothing and Market Dynamics. *Bank I Kredyt*, vol. 37, no. 10, pp. 52–74.

McCulloch, J.H. (1971), "Measuring the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Business*, vol. 44, no. 1, pp. 19–31.

McCulloch, J.H. (1975) The Tax-Adjusted Yield Curve. *The Journal of Finance*, vol. 30, no. 3, pp. 811–830.

Nelson, C.R., and Siegel, A.F. (1987) Parsimonious Modeling of Yield Curves. *The Journal of Business*, vol. 60, no. 4, pp. 473–489.

Parfenov, A.A. (2012) Krivaya beskuponnoy dokhodnosti kak indikator krizisnykh yavleniy na rossiyskom finansovom rynke [Zero-coupon yield curve as an indicator of crises on Russian financial market [In Russian]]. *Vestnik Omskogo Universiteta*. Seriya: Ekonomika, no. 4, pp. 159–164.

Parfenov, A.A. (2012) Krivaya beskuponnoy dokhodnosti kak indikator krizisnykh yavleniy na rossiyskom finansovom rynke [Zero-coupon yield curve as an indicator of crises on Russian financial market [In Russian]]. *Vestnik Omskogo Universiteta*. Seriya: Ekonomika, no. 4, pp. 159–164.

Pienaar, R., and Choudhry, M. (2010) *Fitting the Term Structure of Interest Rates: The Practical Implementation of Cubic Spline Methodology*. Deutsche Bank Research Report. URL: http://yieldcurve.com/mktresearch/files/PienaarChoudhry_CubicSpline2.pdf

QIS 5: Risk Free Interest Rates – Extrapolation Method (2010). *CEIOPS Technical report*, 27 p. URL: https://eiopa.europa.eu/Publications/QIS/ceiops-paper-extrapolation-risk-free-rates_en-20100802.pdf

Shea, G.S. (1985) Interest Rate Term Structure Estimation with Exponential Splines: A Note. *The Journal of Finance*, vol. 40, no. 1, pp. 319–325.

Shea, G.S. (1984) Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data: Equilibrium Models and Spline Approximations. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 19, no. 3, pp. 253–269.

Sleath, J. (2001). *New Estimates of the UK Term Structure of Interest Rates*. Bank of England. URL: http://www.bankofengland.co.uk/statistics/Documents/ms/articles/artag200.pdf

Smirnov, S., and Zakharov, A. (2003) A Liquidity-Based Robust Spline Fitting of Spot Yield Curve Providing Positive Forward Rates. *European Bond Commission Working Paper*, 38 p.

Smit, L. (2000) *An Analysis of the Term Structure of Interest Rates and Bond Options in the South African Capital Market*. University of Pretoria, PhD Thesis. URL: http://repository.up.ac.za/handle/2263/27546

Smith, A., and Wilson, T. (2001) Fitting Yield Curves with Long Term Constraints. *Research Notes*, London: Bacon & Woodrow.

Stander, Y.S. (2005) *Yield Curve Modeling*. Hampshire: Palgrave Macmillan, 188 p.

Steeley, J.M. (2008) Testing Term Structure Estimation Methods: Evidence from the UK STRIPs Market. *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 40, no. 7, pp. 1489–1512.

Svensson, L.E.O. (1994) Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–1994. *International Monetary Fund Working Paper*, 76 p.

Svensson, L.E.O. (1995) Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson & Siegel Method. *Sveriges Riksbank Quarterly Review*, no. 3, pp. 13–26.

Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures (2017). *EIOPA*, 135 p.

van Deventer, D.R. (2009) Yield Curve Smoothing: Nelson-Siegel versus Spline Technologies. Kamakura Blog. URL: http://www.kamakuraco.com/DonaldRvanDeventerPHD.aspx

Vasicek, O.A. (1977) An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, vol. 5, no. 2, pp. 177–188.

Vasicek, O.A., and Fong, H.G. (1982) Term Structure Modeling Using Exponential Splines. *The Journal of Finance*, vol. 37, no. 2, pp. 339–348.

Waggoner, D.F. (1997) Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices. *Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper*, 23 p.

Wahlers, M. (2013) Valuation of Long-Term Liabilities under Solvency II – Extrapolation Methods for the European Interest Rate Market. *Master Thesis in Financial Economics*, Maastricht University, 64 p.

Zero-coupon yield curves: technical documentation (2005). *Bank for International Settlements (BIS) Paper*, no. 25, 37 p.