# Предисловие

Особенность преподавания будущим экономистам
математического анализа состоит в том, что более подробно рассматриваются его отдельные разделы, широко и продуктивно используемы при решении экономических задач. При этом другие разделы освещаются в объеме, необходимом будущим специалистам для восприятия математического анализа как целостной науки, опирающейся на тщательно разработанный теоретический фундамент. Так, чтобы в дальнейшем они,
используя приобретенные знания, умения, навыки и компетенции, смогли эффективно решать разнообразные задачи
в рамках избранной профессии и самостоятельно осваивать усложняющийся математический аппарат.

Учебник и практикум соответствует требованиям федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика» (уровень бакалавриата) и действующих программ дисциплины «Математический анализ» ведущих экономических вузов. В результате изучения дисциплин обучающиеся должны:

***знать***

* основные понятия и утверждения математического анализа;
* интегральное исчисление функции одной и двух переменных;
* основные виды и методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений;
* теорию числовых и функциональных рядов;
* алгоритмы применения понятий и утверждений математического анализа к решению экономических задач;

***уметь***

* выбирать метод решения математической задачи;
* решать типовые задачи математического анализа;
* использовать аппарат математического анализа для построения экономических моделей, их теоретического и экспериментального исследования;

***владеть***

* методикой построения, анализа, применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов;
* математическими методами решения типовых экономических задач;
* навыками применения современного инструментария математического анализа для решения экономических задач.

Данный учебник и практикум предназначен для студентов бакалавриата, изучающих математический анализ. Цель издания — в простой и наглядной форме изложить базовые математические понятия дисциплины, ее методы и подходы
к решению задач, а также создать дидактический комплекс заданий для организации самостоятельной работы студентов.

Учебник и практикум представляет учебно-методи–ческий комплекс, необходимый для изучения второй части дисциплины, он состоит из двух разделов «Интегральное исчисление», «Дифференциальные уравнения и ряды», в которые включены главы: неопределенный интеграл, определенный интеграл, двойные интегралы, обыкновенные дифференциальные уравнения, числовые ряды, степенные ряды. Каждая глава содержит необходимый систематизированный теоретический материал, сопровождаемый выводами и доказательствами части утверждений, иллюстрированный большим количеством примеров. Отдельные параграфы разделов посвящены экономическим приложениям рассмотренных математических понятий и методов. Главы завершаются комплексами заданий для самостоятельного решения. Ответы к заданиям приведены в конце учебника.

Учебник и практикум подготовлен на основе лекций, читаемых автором для студентов направления «Экономика» в Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики» (г. Пермь), а предлагаемый банк заданий для самостоятельного решения апробирован в ходе многолетней практической деятельности преподавателями кафедры высшей математики НИУ ВШЭ – Пермь и других вузов г. Перми.

Данное издание предназначено для студентов бакалавриата экономических направлений, оно также будет полезно студентам других специальностей и направлений, магистрам, аспирантам, изучающим «Математический анализ», «Высшую математику», и преподавателям этих дисциплин.

# Введение

Интегральное исчисление — это раздел математического анализа, в котором изучаются интегралы, их свойства, способы вычисления и приложения. Вместе с дифференциальным исчислением оно составляет основу аппарата математического анализа.

Считается, что интегральное исчисление возникло из потребности создания общего метода нахождения площадей, объемов и центров тяжести. Его зачатки можно найти в трудах Архимеда (287–212 гг. до н.э.). Основы классического интегрального исчисления были заложены в работах И. Ньютона (1643–1727) и Г. Лейбница (1646–1716), которые отвлеклись от частных прикладных задач и установили связь между интегральным и дифференциальным исчислением, что позволило разработать технику интегрирования. В дальнейшем развитием методов интегрального исчисления занимались Л. Эйлер (1707–1782), М.В. Остроградский (1801–1861), П.Л. Чебышев (1821–1894) и другие всемирно известные математики.

Двойные и тройные интегралы, являющиеся обобщением определенного интеграла на случай функций двух и трех переменных, были введены Л. Эйлером и Ж. Лагранжем (1736–1813) во второй половине XVIII века, а общая теория кратных интегралов разработана в XIX веке К. Гауссом (1777–1855), М.В. Остроградским, Дж. Грином (1793–1841) и другими выдающимися математиками.

В конце XVII начале XVIII веков на основе дифференциального и интегрального исчисления из потребности решения задач механики начала развиваться теория дифференциальных уравнений. Строгое определение ифференциального уравнения и сам термин «дифференциальное уравнение» были даны Г. Лейбницем. Из огромного числа работ по дифференциальным уравнениям того времени особенно выделяются работы Л. Лагранжа и Ж. Лагранжа.

Дифференциальные уравнения описывают не только разнообразные механические и физические процессы, но характеризуют химические, биологические, экономические и др. системы, состояние которых меняется с течением времени. Этим и объясняется высокая актуальность теории дифференциальных уравнений, являющейся одним из ведущих разделов современного математического анализа.

С давних времен математики использовали представление величин в виде бесконечных сумм — рядов. Так, в XVII веке Х. Гюйгенс (1629–1695), У. Броункер (1620–1684), Н. Меркатор (1620–1687) использовали ряды для вычисления значений обратных тригонометрических и логарифмических функций. В XVIII веке И. Ньютон, Г. Лейбниц, Б. Тейлор (1685–1731), Л. Эйлер получили разложение некоторых функций в степенные ряды. В XVIII–XIX веках Х. Даламбер (1717–1783), О. Коши (1789–1857), К. Гаусс, Х. Абель (1802–1829), Ж. Фурье (1768–1830), П. Дирихле (1805–1859), Б. Риман (1826–1866) изучали проблему сходимости рядов. Существенный вклад в решение вопросов приложения рядов внесли российские математики М.В. Келдыш (1911–1978), А.Н. Колмогоров (1903–1987), С.А. Чаплыгин (1869–1842) и др.

Современные экономические исследования, решения задач управления, анализа и оптимизации деятельности невозможны без использования интегрального исчисления, дифференциальных уравнений и рядов. Поэтому знание основных понятий, методов этих разделов математического анализа, а также их приложение к решению практических задач составляют основу фундаментальной подготовки будущих экономистов.