ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 10. № 2 (2018). С. 43-56.

УДК 514.7

ВЛИЯНИЕ СТРАТИФИКАЦИИ НА ГРУППЫ КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ОРБИФОЛДОВ

Н.И. ЖУКОВА

Аннотация. Исследуются группы конформных преобразований n-мерных псевдоримановых орбифолдов при $n \geq 3$. Метод Алексеевского исследования групп конформных преобразований римановых многообразий распространен нами на псевдоримановы орбифолды. Показано, что на каждой страте положительной размерности такого орбифолда индуцируется конформная псевдориманова структура. Благодаря этому при $k \in \{0, 1\} \cup \{3, ..., n-1\}$ получены точные оценки размерности полных существенных групп конформных преобразований n-мерных псевдоримановых орбифолдов, имеющих k-мерные страты, на которых индуцируются существенные группы конформных преобразований. При получении указанных оценок ключевым фактом является то, что любая связная группа преобразований орбифолда сохраняет каждую связную компоненту любой его страты.

В работе также исследуется влияние стратификации n-мерного псевдориманова орбифолда на группу преобразований подобия этого орбифолда при $n \geq 2$.

Точность полученных оценок размерности полных существенных групп конформных преобразований и групп подобий n-мерных псевдоримановых орбифолдов доказана с помощью построения соответствующих примеров локально плоских псевдоримановых орбифолдов.

Ключевые слова: орбифолд, конформная псевдориманова геометрия, конформное преобразование, группа Ли.

1. Введение

Исследование псевдоримановых многообразий с существенной группой конформных преобразований является актуальным и интенсивно развивающимся направлением современной глобальной дифференциальной геометрии. Об этом свидетельствуют работы Алексеевского [1], Подоксенова [2], Франса [3]-[4], Зегхиба и Франса [5], Мельник и Франса [6] и других авторов, а также обзоры в монографии [7].

Подчеркнем, что в отличие от римановой метрики, псевдориманова метрика существует не на каждом n-мерном орбифолде $\mathcal{N}$. Следовательно, существование конформной псевдоримановой геометрии на $\mathcal{N}$ накладывает условия на топологию орбифолда.

N.I. Zhukova, The influence of stratification on the groups of conformal transformations of pseudo-Riemannian orbifolds.

Публикация подготовлена в ходе работы (проект No 16-01-0010) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2016–2017 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100".

Поступила 08 мая 2017 г.

Современная теоретическая физика использует геометрию на сингулярных, стратифицированных пространствах, к которым относятся и орбифолды. Они используются физиками как пространства распространения струн. Орбифолды оказались полезными и в конформной теории поля. Обзор приложений орбифолдов можно найти в [8].

Орбифолды возникают в теории слоений как «хорошие» пространства слоев [9]. Известные результаты Терстона о классификации замкнутых трехмерных многообразий используют классификацию двумерных компактных орбифолдов [10].

Группы автоморфизмов геометрических структур на орбифолдах исследовались в [11]-[13]. В [14] получена классификация двумерных компактных лоренцевых орбифолдов с некомпактными группами изометрий.

Основные понятия об орбифолдах описаны в разделе 2, более подробную информацию об орбифолдах можно найти в [8].

Мы рассматриваем гладкие орбифолды $\mathcal{N}$ произвольной размерности n, допускающие псевдориманову метрику g произвольной сигнатуры (p,q), где $p+q=n$. Пара $(\mathcal{N},g)$ называется *псевдоримановым орбифолдом.*

Определение 1. *Пусть $(\mathcal{N}_1,g_1)$ и $(\mathcal{N}_2,g_2)$ — два псевдоримановых орбифолда. Гладкое отображение орбифолдов $f:\mathcal{N}_1\to\mathcal{N}_2$ называется конформным, если $f^*g_2=\lambda g_1$, где f^* — кодифференциал отображения f, а λ — гладкая положительная функция на $\mathcal{N}_1$. Если λ константа, то отображение $f:\mathcal{N}_1\to\mathcal{N}_2$ называется подобием псевдоримановых орбифолдов $(\mathcal{N}_1,g_1)$ и $(\mathcal{N}_2,g_2)$.*

Конформный диффеоморфизм псевдориманова орбифолда $(\mathcal{N},g)$ на себя называется конформным преобразованием. Диффеоморфизм $(\mathcal{N},g)$ на себя, являющийся подобием, называется преобразованием подобия.

Определение 2. *Две псевдоримановы метрики g_1 и g_2 на орбифолде $\mathcal{N}$ называются конформно эквивалентными (или подобными), если существует такая гладкая положительная функция (соответственно, константа) λ на $\mathcal{N}$, что $g_2=\lambda g_1$.*

Класс конформно эквивалентных метрик называется конформной псевдоримановой геометрией (или конформной псевдоримановой структурой) на $\mathcal{N}$ и обозначается через $[g]$, если метрика g принадлежит этому классу. Класс псевдоримановых метрик, подобных метрике g, обозначается через $[|g|]$.

Группа всех конформных преобразований псевдориманова орбифолда $(\mathcal{N},g)$ называется полной группой и обозначается через $C(\mathcal{N},g)$. Группа всех преобразований подобия псевдориманова орбифолда $(\mathcal{N},g)$ называется полной группой подобий и обозначается через $Sim(\mathcal{N},g)$.

Определение 3. *Группа конформных преобразований $C(\mathcal{N},g)$ псевдориманова орбифолда называется несущественной, если она совпадает с группой изометрий псевдориманова орбифолда $(\mathcal{N},h)$, где $h\in[g]$. В противном случае группа $C(\mathcal{N},g)$ называется существенной.*

Аналогично определяется существенная группа подобий псевдориманова орбифолда.

Целью данной работы является исследование влияния стратификации псевдоримановых n-мерных орбифолдов на полную группу их конформных преобразований (при $n\geq 3$) и на полную группу подобий (при $n\geq 2$).

Случай $n=2$ мы не рассматриваем, так как он существенно отличается от конформной геометрии при $n\geq 3$. Например при $n=2$ конформная группа $CO(2)$ изоморфна группе $GL(1,\mathbb{C})$ отличных от нуля комплексных чисел по умножению, и каждый конформный риманов 2-мерный орбифолд имеет нулевую конформную кривизну.

Существует другой эквивалентный подход к конформной псевдоримановой геометрии – с точки зрения G-структур. Поскольку конформная псевдориманова геометрия является

G-структурой второго порядка в терминологии [17], то к ней применима Теорема 2 из [11]. Используя указанную теорему и Теорему VI из [15], мы получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Полная группа конформных преобразований $C(\mathcal{N}, g)$ n-мерного псевдориманова орбифолда $(\mathcal{N}, g)$ при любом $n \geq 3$ является группой Ли относительно компактно-открытой топологии, причем структура группы Ли в $C(\mathcal{N}, g)$ единственная, а размерность удовлетворяет неравенству*

$$\dim C(\mathcal{N}, g) \leqslant \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Если эта группа несущественная, то

$$\dim C(\mathcal{N}, g) \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

В обоих неравенствах равенство достигается только в случае, когда орбифолд является многообразием, на котором группа $C(\mathcal{N}, g)$ действует транзитивно.

Пусть $(\mathbb{S}^k, g_{\mathbb{S}^k})$ — стандартная k-мерная сфера с индуцированной римановой метрикой в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^{k+1}$. Рассмотрим произведение стандартных сфер $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$, где $1 \leqslant p \leqslant q$, снабженное псевдоримановой метрикой $-g_{\mathbb{S}^p} \oplus g_{\mathbb{S}^q}$. Псевдориманово многообразие $(\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q, -g_{\mathbb{S}^p} \oplus g_{\mathbb{S}^q})$ называется вселенной Эйнштейна и обозначается $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Как известно, полная группа конформных преобразований $\mathbf{Ein}^{p,q}$ является существенной, равной $O(p+1, q+1)$ и имеет размерность $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, где $n = p+q$. Заметим, что при смене знака у метрики $\mathbf{Ein}^{p,q}$ группа конформных преобразований заменяется изоморфной группой Ли. Подчеркнем, что псевдориманово многообразие $\mathbf{Ein}^{p,q}$ является конформно плоским. В [4] при $n \geq 4$ конструктивным методом доказано существование бесконечного множества конформных псевдоримановых метрик различных сигнатур на $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$ с существенными группами конформных преобразований, которые не являются конформно плоскими.

Мы распространили метод Алексеевского [16], примененный им при исследовании групп конформных преобразований римановых многообразий, на группы конформных преобразований псевдоримановых орбифолдов. Это позволило нам получить оценки размерности группы конформных преобразований n-мерного псевдориманова орбифолда, имеющего k-мерную страту, на которой индуцируется существенная группа конформных преобразований, указанные в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть $(\mathcal{N}, g)$ — n-мерный, $n \geq 3$, псевдориманов орбифолд с существенной полной группой конформных преобразований $C(\mathcal{N}, g)$. Тогда:*

(*i*) *На каждой компоненте связности Δ_k^c k-мерной страты орбифолда $\mathcal{N}$ при $k \geq 1$ индуцируется конформная псевдориманова структура $[g|_{\Delta_k^c}]$.*

(*ii*) *Если орбифолд $\mathcal{N}$ имеет нульмерную страту, то*

$$\dim C(\mathcal{N}, g) \leqslant \frac{n^2 - n + 2}{2}.$$

(*iii*) *Если орбифолд $\mathcal{N}$ имеет одномерную страту, то*

$$\dim C(\mathcal{N}, g) \leqslant \frac{n^2 - 3n + 6}{2}.$$

(*iv*) *Если на k-мерной страте Δ_k при $3 \leqslant k \leqslant (n-1)$ индуцируется существенная группа конформных преобразований, то*

$$\dim C(\mathcal{N}, g) \leqslant \frac{n(n-1)}{2} + (k+1)^2 - nk.$$

Существуют орбифолды, для которых в оценках (ii)–(iv) достигаются равенства.

Следствие 1. *Если при $n \geq 4$ n-мерный псевдориманов орбифолд $(\mathcal{N}, g)$ имеет $(n-1)$-мерную страту, на которой индуцируется существенная группа конформных преобразований, то*

$$\dim C(\mathcal{N}, g) \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

Следствие 2. *Если $2m$-мерный псевдориманов орбифолд $(\mathcal{N}, g)$ имеет m-мерную страту, $m \geq 3$, на которой индуцируется существенная группа конформных преобразований, то*

$$\dim C(\mathcal{N}, g) \leqslant m^2 + m + 1.$$

Следствие 3. *Если $(2m-1)$-мерный, псевдориманов орбифолд $(\mathcal{N}, g)$ имеет m-мерную страту, $m \geq 3$, на которой индуцируется существенная группа конформных преобразований, то*

$$\dim C(\mathcal{N}, g) \leqslant m^2 + 2.$$

Замечание 1. *Оценки, полученные в Теореме 2 верны и для групп конформных преобразований римановых орбифолдов. Они усиливают оценки, полученные в Теореме 5.1 работы* [11].

Далее мы исследуем влияние стратификации n-мерного псевдориманова орбифолда $(\mathcal{N}, g)$ на группу подобий $Sim(\mathcal{N}, g)$ при $n \geq 2$, которая является замкнутой подгруппой Ли группы Ли его конформных преобразований $C(\mathcal{N}, g)$.

Теорема 3. *Пусть $(\mathcal{N}, g)$ — n-мерный, $n \geq 2$, псевдориманов орбифолд с существенной полной группой подобий $Sim(\mathcal{N}, g)$. Тогда:*

(i) *Группа $Sim(\mathcal{N}, g)$ допускает единственную структуру группы Ли размерности*

$$\dim Sim(\mathcal{N}, g) \leqslant \frac{n^2+n+2}{2}$$

(ii) *На каждой компоненте связности Δ_k^c k-мерной страты орбифолда $\mathcal{N}$ при $k \geq 1$ индуцируется класс подобных псевдоримановых метрик $[|g|_{\Delta_k^c}|]$.*

(iii) *Если орбифолд $\mathcal{N}$ имеет нульмерную страту, то*

$$\dim Sim(\mathcal{N}, g) \leqslant \frac{n^2-n+2}{2}.$$

(iv) *Если на k-мерной страте Δ_k при $2 \leqslant k \leqslant (n-1)$ индуцируется существенная группа конформных преобразований, то*

$$\dim Sim(\mathcal{N}, g) \leqslant \frac{n(n-1)}{2} + k^2 + k + 1 - nk.$$

Существуют орбифолды, для которых в оценках (iii) и (iv) достигаются равенства.

В Разделе 7 построены примеры псевдоримановых орбифолдов произвольной размерности n, $n \geq 3$, в которых достигаются равенства в оценках, указанных в пунктах (ii)-(iv) Теоремы 2, а также в пунктах (iii) и (iv) Теоремы 3. Равенство в оценке (i) Теоремы 3 достигается только в случае многообразия.

2. Категория орбифолдов

Задание орбифолда атласом. Пусть $\mathcal{N}$ — связное паракомпактное хаусдорфово топологическое пространство. Предположим, что Γ_U — конечная группа диффеоморфизмов открытого связного подмножества $\widetilde{U}$ пространства $\mathbb{R}^n$. Будем считать, что группа Γ_U эффективно действует на $\widetilde{U}$. Обозначим через $p_U \colon \widetilde{U} \to \mathcal{N}$ композицию $q_U \circ r_U$ фактор-отображения $r_U \colon \widetilde{U} \to \widetilde{U}/\Gamma_U$ и гомеоморфизма $q_U \colon \widetilde{U}/\Gamma_U \to U$ на открытое подмножество

U топологического пространства $\mathcal{N}$. Тройка $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$ называется орбифолдной картой на $\mathcal{N}$ с координатной окрестностью U.

Рассмотрим две орбифолдные карты $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$ и $(\widetilde{V}, \Gamma_V, p_V)$ с окрестностями U и V, где $U \subset V$. Гладкое вложение $\phi_{VU} \colon \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ такое, что $p_U = p_V \circ \phi_{VU}$, называется вложением карты $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$ в карту $(\widetilde{V}, \Gamma_V, p_V)$.

Говорят, что две карты $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$ и $(\widetilde{V}, \Gamma_V, p_V)$ с координатными окрестностями U и V удовлетворяют когерентному условию, если для любой точки $x \in U \cap V$ существует карта $(\widetilde{W}, \Gamma_W, p_W)$ с координатной окрестностью W такая, что $x \in W \subset U \cap V$, для которой существуют вложения $\phi_{UW} \colon \widetilde{W} \to \widetilde{U}$ и $\phi_{VW} \colon \widetilde{W} \to \widetilde{V}$.

Определение 4. *Семейство карт $\mathcal{A} = \{(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)\}$ называется гладким атласом на $\mathcal{N}$, если оно обладает следующими двумя свойствами:*

1) координатные окрестности карт из $\mathcal{A}$ образуют открытое покрытие $\mathcal{N}$;

2) любые две карты из $\mathcal{A}$ удовлетворяют когерентному условию.

Связное паракомпактое хаусдорфово топологическое пространство $\mathcal{N}$, наделенное максимальным (по включению) гладким атласом $\mathcal{A}$, называется (эффективным) n-мерным орбифолдом и по-прежнему обозначается через $\mathcal{N}$.

Гладкие отображения орбифолдов. Пусть $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$ — гладкие орбифолды с атласами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$, соответственно. Непрерывное отображение $f \colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ называется гладким, если для любой точки $x \in \mathcal{N}$ найдутся такие карты $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U) \in \mathcal{A}$ и $(\widetilde{U}', \Gamma_{U'}, p_{U'}) \in \mathcal{A}'$, что $x \in U = p_U(\widetilde{U})$, $f(U) \subset U' = p_{U'}(\widetilde{U'})$, и существует гладкое отображение $f_{U'U} \colon \widetilde{U} \to \widetilde{U'}$, удовлетворяющее равенству $p_{U'} \circ f_{U'U} = f|_U \circ p_U$. Отображение $f_{U'U}$ называется представителем f в картах $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$ и $(\widetilde{U}', \Gamma_{U'}, p_{U'})$, причем $f_{U'U}$ определено с точностью до композиции с элементами из групп Γ_U и $\Gamma_{U'}$, соответственно.

Обозначим через $\mathfrak{Orb}$ категорию орбифолдов, объектами которой являются гладкие орбифолды, а морфизмами — гладкие отображения орбифолдов. Заметим, что категория гладких многообразий является полной подкатегорией в $\mathfrak{Orb}$.

Псевдориманова метрика на орбифолде. Задание псевдоримановой метрики g на орбифолде $\mathcal{N}$ означает, что для каждой карты $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$ на $\widetilde{U}$ задана Γ_U-инвариантная псевдориманова метрика $g_{\widetilde{U}}$, причем для любой инъекции $\phi_{VU} \colon \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ карты $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$ в карту $(\widetilde{V}, \Gamma_V, p_V)$ выполняется равенсво $\phi^*_{VU} g_{\widetilde{V}} = g_{\widetilde{U}}$. Сигнатура метрики $g_{\widetilde{U}}$ не зависит от выбора карты из отбифолдного атласа и называется сигнатурой псевдоримановой метрики g на $\mathcal{N}$.

Стратификация орбифолдов. Для любой точки x орбифолда $\mathcal{N}$ существует карта $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$, координатная окрестность U которой содержит x. Возьмем $y \in p_U^{-1}(x)$ и обозначим через $(\Gamma_U)_y$ стационарную подгруппу группы Γ_U в точке y. Подчеркнем, что для данной точки x абстрактная группа $(\Gamma_U)_y$ не зависит от выбора карты $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$ и $y \in p_U^{-1}(x)$. Абстрактная группа $(\Gamma_U)_y$ называется орбифолдной группой точки x [11]. Точка x называется регулярной, если ее орбифолдная группа тривиальна.

Пусть $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ — n-мерный гладкий орбифолд. Говорят, что точки x и y из $\mathcal{N}$ имеют один и тот же орбифолдный тип, если существуют окрестности этих точек, изоморфные в категории орбифолдов $\mathfrak{Orb}$. Подмножество точек одного и того же орбифолдного типа с индуцированной топологией имеет естественную структуру гладкого многообразия, которое, вообще говоря, не связно. Многообразия точек различных типов могут иметь одну и ту же размерность. Обозначим через Δ_k объединение указанных многообразий размерности k. Возможно $\Delta_k = \emptyset$ для $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Семейство

$$\Delta(\mathcal{N}) = \{\Delta_k \,|\, k \in \{0, \ldots, n\}\}$$

называется *стратификацией* орбифолда $\mathcal{N}$, а Δ_k называется его *стратой.*

Как известно (см., например, [13]), имеют место следующие свойства стратификации $\Delta(\mathcal{N}) = \{\Delta_k \,|\, k \in \{0, \ldots, n\}\}$ n-мерного орбифолда $\mathcal{N}$.

- Каждая компонента связности Δ_k^c страты Δ_k образована точками одного орбифолдного типа.
- На замыкании $\overline{\Delta_k^c}$ страты Δ_k^c индуцируется структура k-мерного орбифолда, относительно которой Δ_k^c является множеством регулярных точек.
- Страта Δ_n, образованная регулярными точками, представляет собой связное, открытое, всюду плотное подмножество в $\mathcal{N}$. Более того, Δ_n с индуцированной гладкой структурой является n-мерным многообразием.

Обозначим через $\mathrm{Diff}(\mathcal{N})$ группу всех диффеоморфизмов орбифолда $\mathcal{N}$. Подчеркнем, что стратификация орбифолда $\mathcal{N}$ инвариантна относительно группы $\mathrm{Diff}(\mathcal{N})$.

Отметим, что топологическое пространство n-мерного орбифолда $\mathcal{N}$ при $n \geq 3$, вообще говоря, не является локально евклидовым ([12], Пример 1).

3. Доказательство Теоремы 1

Выбрав подходящий базис псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}_q^n$, всегда можно добиться того, чтобы скалярное произведение этого пространства имело вид

$$g(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \ldots - x_n y_n,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{E}_q^n$, $q + p = n$. Пара чисел (p, q) не зависит от выбора ортонормированного базиса и называется сигнатурой псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}_q^n$.

Пусть $O(p, q)$ — псевдо-ортогональная группа, определенная квадратичной формой $x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2$ сигнатуры (p, q). Группа Ли $CO(p, q) = \mathbb{R}^+ O(p, q)$, где $\mathbb{R}^+$ — мультипликативная группа положительных чисел, называется *конформной группой*, соответствующей $O(p, q)$.

Положим $H := CO(p, q) \ltimes \mathbb{R}^n$, где $n = p + q$, — полупрямое произведение конформной группы $CO(p, q) = R^+ O(p, q)$ и нормальной векторной подгруппы $\mathbb{R}^n$. Группу Ли H будем рассматривать как полную группу конформных преобразований псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}_q^n$. Элементы группы H будем обозначать через $< tA, a >$, где $t \in \mathbb{R}^+$, $A \in O(p, q)$, $a \in \mathbb{R}^n$. При этом групповая операция в H определена равенством

$$< t_1 A_1, a_1 >< t_2 A_2, a_2 >=< t_1 t_2 A_1 A_2,\, t_1 A_1 a_2 + a_1 >$$

для любых $< t_1 A_1, a_1 >, < t_2 A_2, a_2 > \in H$.

Пусть $(\mathcal{N}, [g])$ — гладкий конформный псевдориманов орбифолд размерности n, где $n \geq 3$ и метрика $h \in [g]$ имеет сигнатуру (p, q).

Имеется естественное биективное соответствие между псевдоримановыми метриками сигнатуры (p, q) на орбифолде $\mathcal{N}$ и $O(p, q)$-структурами на $\mathcal{N}$, то есть, задание конформной геометрии $[g]$ на орбифолде $\mathcal{N}$ эквивалентно заданию $CO(p, q)$-структуры на $\mathcal{N}$. Подчеркнем, что при указанной эквивалентности существует изоморфизм $C(\mathcal{N}, g) \to \mathfrak{A}$ полной группы конформных преобразований $C(\mathcal{N}, g)$ и полной группы автоморфизмов $\mathfrak{A}$ соответствующей $CO(p, q)$-структуры на $\mathcal{N}$ (определение этого изоморфизма дано в [11]).

Как известно [17], алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{co}(p, q)$ группы Ли $CO(p, q)$ имеет порядок 2 и ее первое продолжение $\mathfrak{g}_1$ естественно изоморфно дуальному пространству $\mathbb{R}^{n*}$ векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Следовательно, $CO(p, q)$-структура является G-структурой второго порядка и к ней применима основная теорема из [11]. Согласно этой теореме полная группа автоморфизмов $\mathfrak{A} \cong C(\mathcal{N}, g)$ — группа Ли, причем $\dim C(\mathcal{N}, g) = \dim \mathfrak{A} \leq n + \dim(\mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1)$. Так как $\dim CO(p, q) = \dim \mathfrak{co}(p, q) = \frac{n(n-1)}{2} + 1$, а $\dim \mathfrak{g}_1 = \dim(\mathbb{R}^{n*}) = n$, то

$$\dim C(\mathcal{N}, g) = \dim \mathfrak{A} \leq n + \frac{n(n-1)}{2} + 1 + n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Обозначим через $\mathcal{R}$ пространство G-структуры на $\mathcal{N}$, $G = CO(p,q)$. Пусть $\mathcal{R}^1$ — пространство G_1-структуры на $\mathcal{R}$, где G_1 — первое продолжение группы G. Пусть $\pi_0 : \mathcal{R} \to \mathcal{N}$ — $CO(p,q)$ расслоение, соответствующее конформной G-структуре на $(\mathcal{N}, g)$, а $\pi_1 : \mathcal{R}^1 \to \mathcal{R}$ — проекция первого продолжения этой G-структуры. Тогда $\pi = \pi_0 \circ \pi_1 : \mathcal{R}^1 \to \mathcal{N}$ — главное H-расслоение над $\mathcal{N}$, где $H := CO(p,q) \ltimes \mathbb{R}^n$. Это означает, что на многообразии $\mathcal{R}^1$ определено локально свободное гладкое правое действие группы H такое, что пространство орбит $\mathcal{R}^1/H$ есть орбифолд $\mathcal{N}$, причем π является субмерсией орбифолдов.

Пусть ω есть $\mathfrak{so}(p+1, q+1)$-значная 1-форма на $\mathcal{R}^1$, задающая e-структуру, соответствующую первому продолжению конформной G-структуры на $(\mathcal{N}, g)$. Так как псевдориманова конформная структура на $\mathcal{N}$ является G-структурой второго порядка, то группа Ли ее автоморфизмов $\mathfrak{A}$ равна

$$\mathfrak{A} = \{f \in \mathrm{Diff}(\mathcal{R}^1) \mid f^*\omega = \omega,\ R_a \circ f = f \circ R_a, a \in H\}.$$

Следовательно, $\mathfrak{A}$ — группа Ли преобразований как замкнутая подгруппа группы автоморфизмов параллелизуемого многообразия $\mathcal{R}^1$. Поэтому, согласно Теореме VI из [15], группа $\mathfrak{A}$ наделена компактно-открытой топологией и допускает единственную структуру группы Ли. Используя это, согласно Предложению 1 из [12] мы получаем, что в группе $C(\mathcal{N}, g)$ существуют единственная топология и единственная гладкая структура, относительно которых она является группой Ли, причем эта топология является компактно-открытой.

Если группа $C(\mathcal{N}, g)$ несущественная, то она совпадает с группой изометрий $Iso(\mathcal{N}, h)$ некоторой псевдоримановой метрики $h \in [g]$. Поскольку псевдориманова геометрия является G-структурой первого порядка, то из [11, Теорема 2] следует оценка

$$\dim C(\mathcal{N}, g) \leqslant n + \dim CO(p,q) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Последнее утверждение Теоремы 1 вытекает из [13, Теорема 3.1].

4. Представление изотропии группы конформных преобразований

Каждая компонента связности Δ_k^c k-мерной страты любого орбифолда образована точками одного орбифолдного типа, поэтому в каждой точке $z \in \Delta_k^c$ существует такая карта $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$, что все точки из $U \cap \Delta_k^c$ имеют одну и ту же группу орбифолдности Γ_U. Используя это, мы получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть Δ_k^c — компонента связности k-мерной страты псевдориманова орбифолда $(\mathcal{N}, g)$. Тогда в любой точке $z \in \Delta_k^c$ существует орбифолдная карта $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$, обладающая следующими свойствами: 1) $\widetilde{U} = \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, причем $z = p_U(v)$, где $v := 0_n$ — ноль в $\mathbb{R}^n$; 2) группа Γ_U является подгруппой группы $O(p) \times O(q) \subset O(p,q)$; 3) $\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\} = Fix\Gamma_U$ — множество фиксированных точек группы Γ_U.*

Такая карта $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$ назывется линеаризированной картой в точке z.

Везде далее мы используем линеаризированную карту $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$ в точке $z \in \widetilde{U}$. В касательном векторном пространстве $T_v\widetilde{U}$, где $p_U(v) = z$, рассматриваем ортонормированный базис из неизотропных векторов.

Возьмем любую точку $z \in \mathcal{N}$ и карту $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$ в точке $z \in U = p_U(\widetilde{U})$. Пусть φ — произвольный элемент стационарной подгруппы $C_z(\mathcal{N}, g)$, $z \in \mathcal{N}$, полной группы конформных преобразований псевдориманова орбифолда $(\mathcal{N}, g)$. Рассмотрим произвольный представитель $\bar{\varphi}$ преобразования φ в карте $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$. Если $v \in \widetilde{U}$, $p_U(v) = z$, то $\bar{\varphi}(v) = v$, то есть $\bar{\varphi} \in C_v(\widetilde{U}, g_{\widetilde{U}})$.

Так как $\bar{\varphi}$ — конформное преобразование, то существует гладкая положительная Γ_U-инвариантная функция λ, удовлетворяющая равенству $\bar{\varphi}^* g_{\widetilde{U}} = e^{\lambda} g_{\widetilde{U}}$. Пусть $\bar{\varphi}_{*v} = \tau A \in CO(p,q)$ и $\xi = d\lambda|_v$. Мы будем рассматривать ξ как n-мерный вектор. Тогда определено отображение

$$j : C_v(\widetilde{U}, g_{\widetilde{U}}) \to H : \varphi \mapsto < \tau A, \xi >$$

Аналогично Теореме 7 статьи [16] мы доказываем следующее утверждение.

Теорема 4. *Отображение $j : C_v(\widetilde{U}, g_{\widetilde{U}}) \to H$ является изоморфизмом группы $C_v(\widetilde{U}, g_{\widetilde{U}})$ на замкнутую подгруппу группы H, причем для любого элемента $\bar{\varphi}$ из $C_v(\widetilde{U}, g_{\widetilde{U}})$ выполняется равенство $j(\bar{\varphi}) \cdot j(\Gamma_U) = j(\Gamma_U) \cdot j(\bar{\varphi})$.*

Отображение j, определенное в Теореме 4 будем называть *представлением изотропии* группы $C_v(\widetilde{U}, g_{\widetilde{U}})$.

Будем обозначать через E_k, $k \in \mathbb{N}$, k-мерную единичную матрицу. Сохраняя обозначения Теоремы 4, мы получаем следующее утверждение.

Следствие 4. *Пусть $z \in \Delta_k^c$ и $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$ — карта в точке z. Тогда размерность стационарной подгруппы $C_z(\mathcal{N}, g)$ удовлетворяет неравенству*

$$\dim C_z(\mathcal{N}, g) \leqslant \dim(N(\Gamma_U)/\Gamma_U) \leqslant \frac{n^2 - n + 2}{2} + k,$$

где $N(\Gamma_U)$ — нормализатор подгруппы Γ_U в группе Ли H.

Доказательство. Так как Γ_U — конечная группа, то в линеаризованной карте она реализуется как подгруппа группы $O(p,q)$. Отождествим Γ_U с $j(\Gamma_U)$ посредством изоморфизма j. Найдем нормализатор $N(\Gamma_U)$ в H. Заметим, что $< \tau A, a > \in N(\Gamma_U)$ тогда и только тогда, когда A принадлежит нормализатору $N_0(\Gamma_U)$ группы Γ_U в $CO(p,q)$ и $Ba = a$ для любого элемента $< B, 0 > \in \Gamma_U$. Согласно Лемме 1 $a \in \mathbb{R}^k$. Следовательно, $\dim(N(\Gamma_U)/\Gamma_U) \leqslant \dim N(\Gamma_U) \leqslant \dim CO(p,q) + k \leqslant \frac{n^2-n+2}{2} + k$, поскольку $p + q = n$. □

Далее мы будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть $\bar{\varphi}$ — представитель $\varphi \in C_z(\mathcal{N}, g)$ в карте $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$. Если $j(\bar{\varphi}) = < A, \eta >$, то существует Γ_U-инвариантная метрика $h \in [g]$ на $\widetilde{U}$, относительно которой изотропное представление $\bar{\varphi}$ в той же карте имеет вид $< A, \xi >$, где $A\xi = \xi$.*

Доказательство. Сохраним введенные выше обозначения. Предположим, что $j(\bar{\varphi}) =< A, \theta >$ для представителя $\bar{\varphi}$ элемента $\varphi \in C_z(\mathcal{N}, g)$ в Γ_U-инвариантной псевдоримановой метрике g на $\widetilde{U}$, где $\bar{\varphi}^* g = e^{\lambda} g$, $\bar{\varphi}_{*v} = A$, $d\lambda_v = \theta$. Подчеркнем, что λ — Γ_U-инвариантная функция. Как показано при доказательстве Леммы 1 в [16], при переходе к другой конформной метрике $h = e^{\mu} g$ на $\widetilde{U}$, имеет место равенство $\bar{\varphi}^* h = e^{\beta} h$, где $d\beta_v = A\eta - \eta + \theta$, $\eta = d\mu_v$. Обозначая $\xi = A\eta - \eta + \theta$, нетрудно показать, что всегда существет Γ_U-инвариантная функция μ, обеспечивающая с $\eta = d\mu_v$ равенство $A\xi = \xi$. При этом выполняется равенство $< A, \xi >=< E, -\eta >< A, \theta >< E, \eta >$. В силу Γ_U-инвариантности метрики g и функции μ новая псевдориманова метрика $h = e^{\mu} g$ является Γ_U-инвариантной. □

5. Доказательство Теоремы 2

(i). Докажем сначала следующее утверждение.

Лемма 3. *На каждой компоненте связности Δ_k^c k-мерной страты Δ_k псевдориманова орбифолда $(\mathcal{N}, g)$ индуцируется псевдориманова метрика $g|_{\Delta_k^c}$.*

Доказательство. Рассмотрим линеаризированную карту $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$ в произвольной точке $z \in \Delta_k^c$, пусть $z = p_U(v)$, где $v = 0_n$. Обозначим $V := p_U(\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\})$. Поскольку сужение $p_U|_{\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}} : \mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\} \to V$ является гомеоморфизмом, определен обратный гомеоморфизм $\psi : V \to \mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$. Пара (V, ψ) — карта многообразия Δ_k^c. Положим по определению $g_V := \psi^* g_{\widetilde{U}}$. Покажем, что g_V — псевдориманова метрика на V. Симметричность g_V вытекает их симметричности $g_{\widetilde{U}}$. Проверим невырожденность g_V. Предположим, что существует вектор $Z \in T_z\Delta_k^c$ такой, что $g_V(X, Z) = 0$ для любого вектора $X \in T_z\Delta_k^c$. Достаточно показать, что $Z = 0$.

Обозначим через $|\Gamma|$ число элементов в группе Γ_U. Заметим, что для любого вектора $Y \in T_v\mathbb{R}^n$ вектор $\widehat{Y} := \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma_U} \gamma(Y)$ неподвижен относительно каждого элемента $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_U$ и, следовательно, принадлежит $Fix\Gamma_U = \mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$, поэтому $p_{U*v}\widehat{Y} \in T_z\Delta_k^c$. Действительно,

$$\widetilde{\gamma}(\widehat{Y}) = \widetilde{\gamma}(\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma_U} \gamma(Y)) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma_U} \widetilde{\gamma}\circ\gamma(Y) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma_U} \gamma(Y) = \widehat{Y}.$$

Рассмотрим векторы $\widetilde{Z} := \psi_{*z}Z$ и произвольный вектор $Y \in T_v\mathbb{R}^n$, где $y = \psi(z)$. Применяя линейность преобразований $\gamma \in \Gamma$, Γ_U-инвариантность $g_{\widetilde{U}}$, неподвижность векторов $\widehat{Y}$ и $\widetilde{Z}$ относительно Γ_U, а также билинейность метрики, мы получаем цепочку равенств

$$g_{\widetilde{U}}(Y, \widetilde{Z}) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma_U} \gamma^* g_{\widetilde{U}}(Y, \widetilde{Z}) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma_U} g_{\widetilde{U}}(\gamma(Y), \gamma(\widetilde{Z})) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma_U} g_{\widetilde{U}}(\gamma(Y), \widetilde{Z}) =$$

$$= g_{\widetilde{U}}(\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma_U} \gamma(Y), \widetilde{Z}) = g_{\widetilde{U}}(\widehat{Y}, \widetilde{Z}) = g_V(p_{U*z}(\widehat{Y}), Z) = 0.$$

Отсюда, в силу невырожденности псевдоримановой метрики $g_{\widetilde{U}}$, вытекает $\widetilde{Z} = 0$, следовательно, $Z = 0$ и g_V — псевдориманова метрика.

Согласованность псевдоримановых метрик g_V в различных картах (V, φ) на Δ_k^c является следствием согласованности метрик $g_{\widetilde{U}}$ в различных картах орбифолда $\mathcal{N}$. □

Согласно Лемме 3, если псевдориманов орбифолд $(\mathcal{N}, g)$ допускает k-мерную страту Δ_k, то на каждой компоненте связности этой страты Δ_k^c индуцируется псевдориманова метрика $g|_{\Delta_k^c}$, превращающая ее в псевдориманово многообразие, которое обозначается через (Δ_k^c, g). Следовательно, класс конформно эквивалентных метрик $[g]$ на $\mathcal{N}$ определяет класс конформно эквивалентных метрик $[g|_{\Delta_k^c}]$ на Δ_k^c. Таким образом, на каждой страте орбифолда индуцируется конформная псевдориманова структура. Не исключается случай, когда эта структура является римановой. Например, на любой одномерной страте, если такая существует, индуцируется конформная риманова структура.

(ii). Предположим, что орбифолд $\mathcal{N}$ имеет нульмерную страту Δ_0 и $z = \Delta_0^c$. Так как диффеоморфизмы орбифолдов являются изоморфизмами в категории $\mathfrak{Orb}$, то любая связная группа Ли диффеоморфизмов орбифолда сохраняет компоненты страт. Поскольку компонента единицы $C^0(\mathcal{N}, [g])$ является связной группой Ли и оставляет точку z на месте, то из Следствия 4 при $k = 0$ вытекает, что $\dim C^0(\mathcal{N}, g) \leqslant \frac{n^2-n+2}{2}$. Таким образом, утверждение (ii) доказано.

Мы рассматриваем псевдориманов орбифолд $(\mathcal{N}, g)$ с полной группой конформных преобразований $C(\mathcal{N}, g)$.

Пусть $\varphi \in C_z(\mathcal{N}, g)$ — конформное преобразование, некоторый представитель $\bar{\varphi}$ которого в карте $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$ имеет изотропное представление $< A, \xi >$. Согласно Лемме 1 не нарушая общности, можно считать, что $A\xi = \xi$ в метрике $g_{\widetilde{U}}$ из указанного класса конформно эквивалентных метрик на $\widetilde{U}$, инвариантных относительно группы Γ_U. Пусть $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$ — линеаризованная карта в точке $z \in \mathcal{N}$.

Для краткости обозначим метрику $g_{\widetilde{U}}$ через g. Выберем геодезическую систему координат относительно связности Леви-Чивита псевдориманова многообразия $(\widetilde{U}, g)$. Поскольку мы рассматриваем линеаризованную карту в точке z, не нарушая общности, будем считать что геодезические координаты заданы в $\widetilde{U}$, где $\widetilde{U}$ — достаточно малая окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$, инвариантная относительно группы Γ_U. Напомним, что Γ_U — конечная подгруппа псевдо-ортогональной группы $O(p,q)$.

Разложим функции $\bar{\varphi}^i$ и g_{ij} в ряд Тейлора в геодезических координатах x^i в окрестности точки $v = 0_n$:

$$\bar{\varphi}^i(x) = A^i_j x^j + \frac{1}{2} A^i_{jk} x^j x^k + ... = Ax + \frac{1}{2} A_x x + ..., \tag{1}$$

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{2} g_{ij,kl} x^k x^l + \dots . \tag{2}$$

В силу конформности $\bar{\varphi}$ необходимо $\bar{\varphi}^* g = e^{\lambda(x)} g$, следовательно, имеет место тождество

$$g_{ij}(\bar{\varphi}^k(x)) \frac{\partial \bar{\varphi}^i(x)}{\partial x^m} \frac{\partial \bar{\varphi}^j(x)}{\partial x^n} = e^{\lambda(x)} g_{mn}(x). \tag{3}$$

Подставим разложения (1) и (2) в (3) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x^i. Затем, повторяя рассуждения из §2 статьи Алексеевского [16], мы получаем следующее выражение

$$\bar{\varphi}(x) = Ax + g(x,\xi)Ax - \frac{1}{2} g(x,x)\xi + o(g(x,x)). \tag{4}$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть $\bar{\varphi}$ — представитель конформного преобразования φ из группы $C_z(\mathcal{N}, g)$, который имеет изотропное представление $< A, \xi >$, где $A\xi = \xi$ Тогда в геодезических координатах в некоторой окрестности нуля преобразование $\bar{\varphi}$ может быть записано в виде* (4).

Пусть $(\mathcal{N}, g)$ — псевдориманов орбифолд размерности $n \geq 3$. Обозначим через $C^0(\mathcal{N}, g)$ компоненту единицы группы Ли $C(\mathcal{N}, g)$. Поскольку размерность группы $C^0(\mathcal{N}, g)$ равна размерности $C(\mathcal{N}, g)$, то для оценки размерности группы автоморфизмов, мы будем рассматривать только компоненту единицы $C^0(\mathcal{N}, g)$. Предположим, что $\mathcal{N}$ имеет k-мерную страту при $k \geq 3$, и Δ^c_k — ее компонента связности. Так как любая связная группа Ли диффеоморфизмов орбифолда сохраняет компоненты страт, то $C^0(\mathcal{N}, g)$ сохраняет Δ^c_k.

Согласно Лемме 3 на Δ^c_k индуцируется псевдориманова метрика, которую обозначим через g. Определим гомоморфизм групп

$$\chi : C^0(\mathcal{N}, g) \to C(\Delta^c_k, g) : f \mapsto f|_{\Delta^c_k}.$$

Тогда $\dim C(\mathcal{N}, g) = \dim C^0(\mathcal{N}, g) \leq \dim C(\Delta^c_k, g) + \dim Ker(\chi)$, где $Ker(\chi)$ — ядро гомоморфизма χ. Используя оценку размерности полной группы конформных преобразований k-мерного псевдориманова многообразия (Δ^c_k, g), где $k \geq 3$, мы получаем

$$\dim C(\Delta^c_k, g) \leq \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

В следующей лемме мы находим оценку для размерности ядра $Ker(\chi)$.

Лемма 5. *Пусть на компоненте связности Δ^c_k k-мерной страты индуцируется псевдориманова метрика типа (p_1, q_1), где $p_1 + q_1 = k$. Тогда ядро $Ker(\chi)$ гомоморфизма*

$$\chi : C^0(\mathcal{N}, g) \to C(\Delta^c_k, g) : f \mapsto f|_{\Delta^c_k}$$

обладает следующими свойствами:

1) представитель любого элемента $f \in Ker\chi$ имеет точное изотропное представление в подгруппе $\{E_k\} \times O(p-p_1, q-q_1)$ псевдо-ортогональной группы $O(p,q) \subset H$, где $p+q=n$;

2) размерность $Ker(\chi)$ удовлетворяет неравенству

$$\dim Ker(\chi) \leqslant \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}.$$

Доказательство. Обозначим через 0_m ноль в $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Возьмем любой элемент $\varphi \in Ker(\chi)$, тогда $\varphi|_{\Delta_k^c} = id_{\Delta_k^c}$. В линеаризированной карте $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$ в произвольной точке $z \in \Delta_k^c$ представитель $\bar{\varphi}$ преобразования φ удовлетворяет равенству $\bar{\varphi}|_{\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}} = id_{\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}}$, где $p_U(0,0) = z$, $(0,0) = (0_k, 0_{n-k}) = 0_n$. Отождествим касательное пространство $T_{(0,0)}(\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\})$ с $\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$, а $T_{(0,0)}(\{0_k\} \times \mathbb{R}^{n-k})$ с $\{0_k\} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Согласно Лемме 4 на $\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$ индуцирована псевдориманова метрика. Не нарушая общности, будем полагать, что $\{0_k\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$. Поскольку конформные преобразования сохраняют углы между векторами, $\{0_k\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ инвариантно относительно $\bar{\varphi}_{*(0,0)}$.

Предположим, что $\bar{\varphi}_{*(0,0)} = \tau A \in CO(p,q)$. Так как $\varphi \in Ker(\chi)$, то выполняется равенство $\bar{\varphi}_{*(0,0)}(e) = \tau A(e) = e$ для любого вектора $e \in \mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$. Следовательно, $\tau = 1$ и $A \in \{E_k\} \times O(p-p_1, q-q_1)$. Таким образом, $\bar{\varphi}$ имеет изотропное представление $j(\bar{\varphi}) =< A, \xi >$. В силу Леммы 2, не нарушая общности, можно считать, что $A\xi = \xi$. Поэтому, согласно Лемме 4, в геодезических координатах в некоторой окрестности нуля $\widetilde{U}$ представитель $\bar{\varphi}$ элемента φ удовлетворяет уравнению (4).

Пусть e_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, — базис векторного пространства $\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$, не содержащий изотропных векторов. Поскольку $A \in \{E_k\} \times O(p-p_1, q-q_1)$, необходимо, чтобы $Ax = x$ для любого вектора x из $\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$. Возьмем произвольное сколь угодно малое действительное число α, отличное от нуля, и подставим $x = \alpha e_i$ в (4). Учитывая, что $Ae_i = e_i$, получим $\alpha[\alpha g(e_i, \xi)e_i - \frac{\alpha}{2} g(e_i, e_i)\xi + o(\alpha g(e_i e_i))] = 0$, что равносильно

$$g(e_i, \xi)e_i - \frac{1}{2} g(e_i, e_i)\xi + \frac{o(\alpha g(e_i e_i))}{\alpha} = 0. \tag{5}$$

Так как $\frac{o(\alpha g(e_i e_i))}{\alpha} \to 0$ при $\alpha \to 0$, то из (5) вытекает

$$g(e_i, \xi)e_i = \frac{1}{2} g(e_i, e_i)\xi. \tag{6}$$

В силу выбора базиса e_i, $g(e_i, e_i) \neq 0$, поэтому из (6) следует, что векторы ξ и e_i коллениарны. В этом случае $\xi = ce_i$. Подставив это в (6), мы получаем $c = 0$ и $\xi = 0$

Таким образом мы доказали, что $\varphi \in Ker(\chi)$ имеет изотропное представление вида $< A, 0 >$, где $A \in \{E_k\} \times O(p-p_1, q-q_1)$. Отсюда следует доказываемое утверждение 1) и требуемая оценка 2). □

Итак, применяя Леммы 2 и 4, мы получаем цепочку неравенств

$$\dim C(\mathcal{N}, g) \leq \dim C(\Delta_k^c, g) + \dim Ker(\chi) \leqslant$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + (k+1)^2 - nk,$$

что завершает доказательство утверждения (iv) Теоремы 2.

Утверждение (iii) Теоремы 2 при $k = 1$ доказывается аналогично утверждению (iv) с учетом неравенства $\dim(C(\Delta_1^c, g)) \leqslant 2$. □

6. Группы подобий псевдоримановых орбифолдов

Доказательство Теоремы 3. Так как каждое подобие является конформным преобразованием, и $Sim(\mathcal{N}, g)$ — замкнутая подгруппа Ли группы Ли $C(\mathcal{N}, g)$, то все доказанное для групп конформных преобразований псевдоримановых орбифолдов справедливо и для групп подобий. Поэтому в $Sim(\mathcal{N}, g)$ существует единственная структура группы Ли. Так как $Sim(\mathcal{N}, g)$ является группой автоморфизмов G-структуры 1-го порядка в терминологии [17], то из [11] вытекает оценка

$$\dim(Sim(\mathcal{N}, g)) \leqslant n + \dim CO(p, q) = n + \frac{n^2 - n + 2}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2},$$

причем равенство имеет место только в случае транзитивного действия группы подобий на $\mathcal{N}$, то есть, только для многообразий. Таким образом, выполняется утверждение (i).

Утверждение (ii) Теоремы 3 легко получить, применяя Лемму 3.

Рассмотрим любое преобразование подобия $\varphi \in Sim_z(\mathcal{N}, g)$, оставляющее некоторую точку $z \in \mathcal{N}$ на месте. Пусть $\bar{\varphi}$ — представитель φ в некоторой карте $(\widetilde{U}, \Gamma_U, p_U)$ орбифолда в точке z. Тогда существует положительное число λ, удовлетворяющее равенству $\bar{\varphi}^* g = e^{\lambda} g$. Пусть $\bar{\varphi}_{*z} = \tau A \in CO(p, q)$. Подчеркнем, что в данном случае $\xi = d\lambda|_z = 0$. Из Теоремы 4 вытекает, что представление изотропии для $\bar{\varphi}$ имеет вид

$$j : Sim_v(\widetilde{U}, g) \to H = CO(p, q) : \bar{\varphi} \mapsto < \tau A, 0 >,$$

где $v \in p_U^{-1}(z)$, причем j является изоморфизмом группы $Sim_v(\widetilde{U}, [g])$ на замкнутую подгруппу группы $H = CO(p, q)$. Учитывая, что $\dim(H) = \frac{n^2-n+2}{2}$, повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве утверждений (ii) и (iv) Теоремы 2, мы получаем оценки (iii) и (iv) в Теореме 3. □

7. Примеры

Напомним, что n-мерное псевдоевклидово пространство $\mathbb{E}^n_q$ сигнатуры (p, q), $p+q = n$, со стандартной псевдоримановой метрикой g_0 определяет конформную структуру $[g_0]$, соответствующую G-структуре первого порядка. Поэтому полная группа конформных преобразований $C(\mathbb{E}^n_q, g_0)$ совпадает с полной группой подобий $Sim(\mathbb{E}^n_q, g_0)$ и равна полупрямому произведению $CO(p, q) \ltimes \mathbb{R}^n$.

Пример 1. Согласно определению, принятому нами в Разделе 3, сигнатура $\mathbf{Ein}^{p,q}$ равна (q, p). Стационарная подгруппа $C_v(\mathbf{Ein}^{n-1,1})$ группа конформных преобразований $C(\mathbf{Ein}^{p,q})$ в точке v изоморфна группе $H = CO(p, q) \ltimes \mathbb{R}^n$. Согласно Теореме 4 представление изотропии $j : C_v(\mathbf{Ein}^{p,q}) \to H$ является изоморфизмом групп. Следовательно, конформное преобразование $\gamma \in C_v(\mathbf{Ein}^{p,q})$ однозначно определено своим образом $j(\gamma) = (-E_n) \in H$, где E_n — единичная n-мерная матрица. Рассмотрим орбифолд $\mathcal{N} = \mathbf{Ein}^{p,q}/\Gamma$, где Γ — группа с образующей γ, изоморфная $\mathbb{Z}_2$. Обозначим через g_0 индуцированную метрику на $\mathcal{N}$. Лоренцев орбифолд $(\mathcal{N}, g_0)$ имеет стратификацию $\{\Delta_n, \Delta_0\}$. Пусть $r : \mathbf{Ein}^{p,q} \to \mathcal{N}$ — фактор-отображение и $z = r(v)$. Так как группа конформных преобразований $C(\mathcal{N}, g_0)$ сохраняет стратификацию орбифолда $\mathcal{N}$, то она совпадает со стационарной подгруппой $C_z(\mathcal{N}, g_0)$. Учитывая это и применяя Следствие 4, мы получаем, что группа конформных преобразований $C(\mathcal{N}, g_0)$ лоренцева орбифолда $(\mathcal{N}, g_0)$ изоморфна фактор-группе $N(\Gamma)/\Gamma$, где $N(\Gamma)$ — нормализатор подгруппы Γ в группе Ли H. Прямая проверка показывает, что $N(\Gamma) = CO(p, q)$. Так как

$$\dim(\mathbb{R}^+ O(p, q)/\{\pm E_n\}) = \frac{n^2 - n + 2}{2},$$

то $\dim(C(\mathcal{N}, g_0)) = (n^2 - n + 2)/2$, и в оценке размерности полной конформной группы $C(\mathcal{N}, g_0)$ в утверждении (ii) Теоремы 2 имеет место равенство.

Пример 2. Рассмотрим орбифолд $\mathcal{N} = \mathbb{E}^n_q/\Gamma$, где Γ — группа, изоморфная $\mathbb{Z}_2$, имеющая образующую γ, определенную равенством $\gamma(x) = -x$, $x \in \mathbb{E}^n_q$. Обозначим через g_0 индуцированную псевдоевклидову метрику на $\mathcal{N}$. Тогда псевдоевклидов орбифолд $(\mathcal{N}, g_0)$ имеет стратификацию $\{\Delta_n, \Delta_0\}$, и полная группа его конформных преобразований $C(\mathcal{N}, g_0)$ совпадает с полной группой подобий $Sim(\mathcal{N}, g_0)$ и равняется фактор-группе $\mathbb{R}^+O(p,q)/\{\pm E_n\}$, поэтому $\dim(C(\mathcal{N}, g_0)) = (n^2 - n + 2)/2$, и мы имеем равенство в оценке размерности полной группы подобий $Sim(\mathcal{N}, g_0)$ в утверждении (iii) Теоремы 3.

Пример 3. Напомним, что, согласно определению, принятому нами в разделе 3, сигнатура $\mathbf{Ein}^{q_1,p_1}$ равна (p_1, q_1). Пусть $p_1 + q_1 = k \geq 3$. Рассмотрим орбифолд $\mathcal{N}_1 = \mathbb{E}^{n-k}_{q_2}/\Gamma$ сигнатуры (p_2, q_2), где $p_2 + q_2 = n - k \geq 2$, построенный в Примере 2. Пусть $\{\Delta^{(1)}_{n-k}, \Delta^{(1)}_0\}$ — стратификация $\mathcal{N}_1$.

Вычислим полную группу конформных преобразований псевдориманова орбифолда $\mathcal{N} = \mathbf{Ein}^{q_1,p_1} \times \mathcal{N}_1$ с метрикой g, равной сумме соответствующих метрик. Заметим, что $\mathcal{N}$ имеет стратификацию $\{\Delta_n, \Delta_k\}$, причем $\Delta_k = \mathbf{Ein}^{q_1,p_1} \times \Delta^{(1)}_0$. Так как группа $C(\mathcal{N}, g)$ сохраняет связную страту Δ_k, то, принимая во внимание Лемму 5, мы получаем, что группа Ли $C(\mathcal{N}, g)$ изоморфна произведению групп Ли $C(\mathbf{Ein}^{q_1,p_1}) \times O(p_2, q_2)$. Следовательно, имеет место цепочка равенств

$$\dim C(\mathcal{N}, g) = \dim C(\mathbf{Ein}^{q_1,p_1}) + \dim O(p_2, q_2) = \dim O(q_1 + 1, p_1 + 1) + \dim O(p_2, q_2),$$

поэтому

$$\dim C(\mathcal{N}, g) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + (k+1)^2 - nk.$$

Таким образом, в оценке размерности группы $C(\mathcal{N}, g)$ в утверждении (iv) Теоремы 2 выполняется равенство.

Замечание 2. *Для группы подобий $Sim(\mathcal{N}, g)$ утверждение Леммы 5 справедливо для компоненты связности Δ^0_k k-мерной страты при любом фиксированном $k \geq 1$.*

Пример 4. Зафиксируем произвольную пару натуральных чисел (n, k) такую, что $n > k \geq 1$. Пусть $(\mathcal{N}_1, g_0)$ — псевдоевклидов орбифолд, построенный в Примере 2 размерности $n - k$ и сигнатуры (p_1, q_1), где $p_1 + q_1 = n - k$. Орбифолд $\mathcal{N}_1$ имеет стратификацию $\{\Delta^{(1)}_{n-k}, \Delta^{(1)}_0\}$. Пусть $(\mathbb{E}^k_{q_2}, g_2)$ — псевдоевклидово пространство размерности k и сигнатуры (p_2, q_2), где $p_2 + q_2 = k$. Произведение орбифолдов $\mathcal{N} := \mathcal{N}_1 \times \mathbb{E}^k_{q_2}$ с метрикой $g := g_0 \oplus g_2$ является n-мерным псевдоевклидовым орбифолдом сигнатуры (p, q), $p + q = n$, где $p = p_1 + p_2$, $q = q_1 + q_2$. Орбифолд $\mathcal{N}$ имеет стратификацию $\{\Delta_n, \Delta_k = \Delta^{(1)}_0 \times \mathbb{E}^k_{q_2}\}$. Заметим, что полная группа конформных преобразований $C(\mathcal{N}, g)$, совпадает с полной группой подобий $Sim(\mathcal{N}, g)$. Так как группа $Sim(\mathcal{N}, g)$ сохраняет связную страту Δ_k, то, учитывая Лемму 5 и Замечание 2, мы получаем существование изоморфизма между группой Ли $Sim(\mathcal{N}, g)$ и произведением групп Ли $Sim(\mathbb{E}^k_{q_2}, g_2) \times O(p_1, q_1)$. Следовательно имеет место цепочка равенств

$$\dim Sim(\mathcal{N}, g) = \dim Sim(\mathbb{E}^k_{q_2}, g_2) + \dim O(p_1, q_1) =$$

$$\frac{k^2 + k + 2}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + k^2 + k + 1 - nk,$$

поэтому

$$\dim Sim(\mathcal{N}, g) = \frac{n(n-1)}{2} + k^2 + k + 1 - nk.$$

Таким образом, мы имеем равенство в утверждении (*iii*) Теоремы 3

Пусть $k = 1$, тогда из предыдущего равенства мы получаем

$$\dim(C(\mathcal{N}, g)) = \frac{n^2 - 3n + 6}{2},$$

и для оценки размерности полной группы подобий $C(\mathcal{N}, g)$ в утверждении (*iii*) Теоремы 2 выполняется равенство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D.V. Alekseevskii *Lorentzian manifolds with transitive conformal group* // Note di Matematica. V. 37, no 1. 2017.
2. Подоксенов М.Н. *Лоренцево многообразие с группой конформных преобразований, обладающей нормальной однопараметрической подгруппой гомотетий* // Сиб. Матем. журнал. Т. 38, № 6. 1997. С. 1356–1359.
3. C. Frances *Sur les variétés lorentziennes dont le group conforme est essentiel* // Math. Ann. V. 332, no 1. 2005. P. 103–119.
4. C. Frances *About pseudo-Riemannian Lichnerovitcz conjecture* // Transformation Groups. V. 29, Issue 4. 2015. P. 1015–1022.
5. C. Frances, A. Zeghib *Some remarks on pseudo-Riemannian conformal actions of simple Lie groups* // Math. Res. Lett. V. 12, no 1. 2005. P. 49–56.
6. C. Frances, K. Melnick *Conformal actions of nilpotent groups on pseudo-Riemannian manifolds* // Duke Math J. V. 153, no 3. 2010. P. 511–550.
7. *Resent development in pseudo-Riemannian geometry.* ESI Lect. Math. Phys. Ed.: V. Alekseevsky, H. Baom. Zurich: Eur. Math. Soc. 2008. 549 p.
8. A. Adem, J. Leida and Y. Ruan *Orbifolds and stringy topology*, Cambridge Tracts in Mathematics. V. 171. New York: Cambridge University Press. 2007. 170 p.
9. N.I. Zhukova *Local and global stability of compact leaves and foliations* // J. of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. V. 9, no 3. 2013. P. 40–420.
10. W.P. Thurston *The geometry and topology of* 3*-manifolds.* Princeton: Princeton Univ. Press. 1978. 360 p.
11. Багаев А.В., Жукова Н.И. *Группы автоморфизмов G-структур конечного типа на орбиобразиях* // Сиб. Матем. журнал. Т. 44, № 2. 2003. С. 263–278.
12. Багаев А.В., Жукова Н.И. *Группы изометрий римановых орбифолдов* // Сиб. матем. журнал. Т. 48, № 4. 2007. С. 723–741.
13. A.V. Bagaev, N.I. Zhukova *The automorphism group of some geometric structures on orbifolds*, Chap 16. P. 447–483 in: *Lie groups: New Research.* New York: Nova Science Publishers. 2009.
14. Жукова Н.И., Рогожина Е.А. *Классификация компактных лоренцевых* 2*-орбифолдов с некомпактной полной группой изометрий* // Сиб. Матем. журнал. Т. 53, № 6. 2012. С. 1292–1309.
15. R.S. Palais *A global formulation of the Lie theory of transformation groups* // Memoirs of AMS. V. 22. 1957. P. 1–129.
16. Алексеевский Д.В. *Группы конформных преобразований римановых пространств* // Мвтем. сб. Т. 18, № 2. 1972. С. 280–296.
17. S. Kobayashi *Transformation groups in differential geometry*, New York: Springer-Verlag. 1995. 190 p.

Нина Ивановна Жукова,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Большая Печерская ул., 25/12,
603155, Нижний Новгород, Нижегородская обл., Россия
E-mail: nzhukova@hse.ru