УДК 519.862.6, 519.6

Д.А. Борзых[1], *М.А. Хасыков*[1], *А.А. Языков*[1,2]

[1]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
[2]Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН

Численное сравнение V-MLR- и CUSUM-методов обнаружения структурных сдвигов для кусочно-заданных GARCH-моделей

Предложен новый метод обнаружения структурных сдвигов для GARCH-моделей, названный авторами V-MLR. С помощью двух численных экспериментов, состоящих из 10 000 испытаний каждый, предлагаемый нами V-MLR-метод сопоставляется с хорошо известным CUSUM-методом. В первом эксперименте с одним структурным сдвигом V-MLR-метод обнаружил правильное число структурных сдвигов в 91 % случаев, а CUSUM-метод — в 85 % случаев. При этом точность обнаружения самого структурного сдвига обоими методами оказалась сопоставимой. Во втором эксперименте без структурных сдвигов V-MLR-метод указал на отсутствие структурных сдвигов в 99 % случаев, в то время как CUSUM-метод — лишь в 91 % случаев. Таким образом, проведенные численные эксперименты указывают на то, что при сопоставимой точности обнаружения моментов структурных сдвигов предлагаемый V-MLR-метод обладает большей чувствительностью к структурным сдвигам по сравнению с CUSUM-методом.

Ключевые слова: GARCH, структурные сдвиги, волатильность, статистика отношения правдоподобия, CUSUM.

D.A. Borzykh[1], *M.A. Khasykov*[1], *A.A. Yazykov*[1,2]

[1]National Research University Higher School of Economics
[2]Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS

Numerical comparison of V-MLR- and CUSUM-methods of structural breaks detection for piecewise-specified GARCH-models

In this paper, we propose a new method of structural breaks detection for GARCH-models called V-MLR. We use two numerical experiments consisting of 10 000 simulations to compare our V-MLR method with the well-known CUSUM method. In the first experiment with a single structural break, the V-MLR method finds the correct number of structural breaks in 91 % cases, and CUSUM — in 85 % cases. The accuracy of the structural break detection by both methods was proved to be comparable. In the second experiment without any structural breaks the V-MLR method indicates the absence of structural breaks in 99 % cases, while CUSUM — in 91 % cases only. Thus, the numerical experiments suggest that V-MLR and CUSUM methods have comparable accuracy of structural breaks moment detection, but the proposed V-MLR method has a greater sensitivity to structural breaks as compared to CUSUM.

Key words: GARCH, structural breaks, volatility, likelihood ratio statistics, CUSUM.

1. Введение

Для получения более точных оценок коэффициентов эконометрических моделей требуется большее количество наблюдений. Однако при расширении выборки исследователи зачастую сталкиваются с проблемой, называемой *структурными сдвигами* или *разладками* случайного процесса. Как известно, игнорирование структурных сдвигов при оценивании модели приводит к некорректным результатам.

В работе рассматривается задача обнаружения структурных сдвигов в рамках семейства кусочно-заданных GARCH-моделей. Некоторые подходы к решению этой задачи можно найти, например, в [1–5]. В данной статье мы предлагаем новый метод обнаружения структурных сдвигов, который состоит из двух шагов. На первом шаге с помощью введенной нами скользящей статистики отношения правдоподобия (MLR — Moving Likelihood Ratio) алгоритм обнаруживает точки возможных структурных сдвигов. На втором шаге выполняется процедура валидации (Validation) — найденные на первом шаге точки подвергаются перепроверке. В связи с указанными шагами данный метод был нами назван V-MLR (Validated Moving Likelihood Ratio).

Опишем структуру дальнейшей части работы. Во втором разделе данной работы приводится описание предлагаемого V-MLR-метода. Третий раздел посвящен выяснению статистических свойств V-MLR-метода. С помощью численных экспериментов по методу Монте-Карло V-MLR-метод сопоставляется с хорошо известным CUSUM-методом (см., например, [3]). Показано, что при сопоставимой точности обнаружения моментов структурных сдвигов предлагаемый V-MLR-метод обладает большей чувствительностью к структурным сдвигам по сравнению с CUSUM-методом.

2. Описание V-MLR-метода

Пусть $k \geq 0$ — неизвестное число структурных сдвигов временного ряда длины T, а $\tau_1, \ldots, \tau_k$ — моменты структурных сдвигов, разделяющие исходный ряд на $k+1$ сегмент. Будем предполагать, что j-й фрагмент временного ряда описывается соотношениями

$$Y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t, \quad \sigma_t^2 = \omega_j + \delta_j \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma_j \cdot \varepsilon_{t-1}^2, \quad \text{где } \tau_{j-1} \leq t \leq \tau_j - 1,$$

$j = 1, \ldots, k+1$, $\tau_0 := 1$, $\tau_{k+1} := T+1$, $\theta_j := (\omega_j, \delta_j, \gamma_j)$ — неизвестные параметры модели, принадлежащие множеству $\Theta := \big\{(\omega, \delta, \gamma)\colon\ \omega > 0,\, \delta \geq 0,\, \gamma \geq 0,\, \delta + \gamma < 1\big\}$, а $(\xi_t)_{t=-\infty}^{+\infty}$ — последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин.

Определим *скользящую статистику отношения правдоподобия* (*MLR — Moving Likelihood Ratio*). Для этого зафиксируем параметр $h > 0$, отвечающий за ширину «скользящего окна», и положим по определению

$$MLR_\tau := -2\Bigg(\max_{\substack{\theta_1,\,\theta_2 \in \Theta,\\ \theta_1 = \theta_2}} l\big(\theta_1, \theta_2, \tau, [\tau - h;\, \tau + h]\big) - \max_{\theta_1,\,\theta_2 \in \Theta} l\big(\theta_1, \theta_2, \tau, [\tau - h;\, \tau + h]\big)\Bigg),$$

где $\tau \in [h+1;\, T-h]$, $\theta_1 := (\omega_1, \delta_1, \gamma_1)$, $\theta_2 := (\omega_2, \delta_2, \gamma_2)$ и

$$l\big(\theta_1, \theta_2, \tau, [a;\, b]\big) := -\frac{1}{2}\sum_{t=a}^{\tau-1}\left(\ln 2\pi + \ln \sigma_t^2(\theta_1) + \frac{\varepsilon_t^2(\theta_1)}{\sigma_t^2(\theta_1)}\right) - \\ -\frac{1}{2}\sum_{t=\tau}^{b}\left(\ln 2\pi + \ln \sigma_t^2(\theta_2) + \frac{\varepsilon_t^2(\theta_2)}{\sigma_t^2(\theta_2)}\right)$$

— логарифмическая функция правдоподобия, соответствующая модели

$$\begin{cases} Y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t, \quad \sigma_t^2 = \omega_1 + \delta_1 \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2, \quad t \in [a;\, \tau - 1], \\ Y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t, \quad \sigma_t^2 = \omega_2 + \delta_2 \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma_2 \cdot \varepsilon_{t-1}^2, \quad t \in [\tau;\, b], \end{cases} \tag{1}$$

допускающей структурный сдвиг в момент времени τ.

Идея предлагаемого метода состоит в том, что в случае отсутствия структурного сдвига в точке τ статистика MLR_τ в среднем принимает сравнительно небольшие значения, в то время как при наличии структурного сдвига в точке τ данная статистика принимает достаточно высокие значения. Таким образом, для реализации данного подхода нам потребуется критическая точка, указывающая на то, приняла ли статистика MLR_τ «достаточно большое» или «достаточно маленькое» значение.

Проведенные испытания по методу Монте-Карло в предположении отсутствия структурных сдвигов показали, что распределение статистики MLR_τ достаточно сильно зависит от параметров модели ω, δ и γ. По этой причине мы ограничили множество Θ допустимых значений параметров до множества

$$\Omega := \left\{(\omega,\, \delta,\, \gamma)\colon\ \underline{\omega} \le \omega \le \overline{\omega},\ \underline{\delta} \le \delta,\ \underline{\gamma} \le \gamma,\ \delta + \gamma < 1\right\},$$

где $\underline{\omega} = 0,0001$, $\overline{\omega} = 0,031$, $\underline{\delta} = 0,7$, $\underline{\gamma} = 0$.

Анализ литературы (см., например, [6, гл. 7, § 4, с. 156, табл. 7.4], [7–15]) показывает, что данное множество Ω является достаточно широким для приложений при изучении реальных финансово-экономических временных рядов.

Далее, на введенном выше множестве Ω мы задали сетку Ξ:

- параметр ω пробегает все значения из отрезка $[\underline{\omega};\, \overline{\omega}]$ с шагом $\Delta\omega = 0,001$;
- параметр δ пробегает все значения из отрезка $[\underline{\delta};\, 1 - \Delta\delta]$ с шагом $\Delta\delta = 0,03$;
- при каждом фиксированном значении параметра δ параметр γ пробегает все значения из отрезка $[\underline{\gamma};\, (1 - \Delta\gamma) - \delta]$ с шагом $\Delta\gamma = 0,03$.

Для каждого узла $(\omega,\, \delta,\, \gamma)$ сетки Ξ с помощью модели (1) с $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $h = 200$, $a = \tau - h$ и $b = \tau + h$ мы провели серию из 10 000 симуляций, в каждой из которых была рассчитана статистика MLR_τ. На основе вычисленных значений статистики MLR_τ мы получили 99 % выборочные квантили $q_{MLR}(\omega,\, \delta,\, \gamma)$, где $(\omega,\, \delta,\, \gamma) \in \Xi$, и определили верхнюю критическую точку:

$$\overline{q}_{MLR} := \max_{(\omega,\, \delta,\, \gamma) \in \Xi} q_{MLR}(\omega,\, \delta,\, \gamma) = 17,78.$$

Теперь опишем V-MLR-алгоритм обнаружения структурных сдвигов.

Шаг 1 (обнаружение). Пусть в некоторой точке $\tau^* \in \mathbb{Z}$ функция MLR_τ имеет h-локальный максимум $(\forall t \in [\tau^* - h;\, \tau^* + h] \setminus \{\tau^*\}\colon\ MLR_t < MLR_{\tau^*})$. Если $MLR_{\tau^*} > \overline{q}_{MLR}$, считаем точку τ^* *точкой возможного структурного сдвига*; в противном случае считаем, что в точке τ^* структурного сдвига нет.

Шаг 2 (перепроверка). Пусть на предыдущем шаге алгоритм обнаружил $k > 0$ возможных структурных сдвигов $\tau_1,\, \ldots,\, \tau_k$. Для каждого возможного структурного сдвига τ_j, $j = 1,\, \ldots,\, k$, рассчитываем статистику

$$LR(\tau_j) := -2\left(\max_{\substack{\theta_1,\, \theta_2 \in \Theta,\\ \theta_1 = \theta_2}} l\big(\theta_1, \theta_2, \tau_j, [\tau_{j-1};\, \tau_{j+1} - 1]\big) - \max_{\theta_1,\, \theta_2 \in \Theta} l\big(\theta_1, \theta_2, \tau_j, [\tau_{j-1};\, \tau_{j+1} - 1]\big)\right).$$

Тогда если $LR(\tau_j) > \overline{q}_{MLR}$, то точка τ_j объявляется структурным сдвигом, в противном случае — считаем, что в точке τ_j структурного сдвига нет.

3. Сопоставление V-MLR- и CUSUM-методов

Данный раздел посвящен изучению статистических свойств V-MLR-метода. Для этого нами проведено два численных эксперимента по методу Монте-Карло, в каждом из которых V-MLR-метод сравнивался с хорошо известным CUSUM-методом [3]. В первом эксперименте с одним структурным сдвигом получено, что при сопоставимой точности обнаружения моментов структурных сдвигов V-MLR-метод чаще обнаруживает правильное число структурных сдвигов. Во втором эксперименте, не содержащем структурных сдвигов, V-MLR-метод указал на отсутствие структурных сдвигов в 99 % случаев, в то время как CUSUM-метод — лишь в 91 % случаев.

Численный эксперимент 1. Данный эксперимент состоял из 10 000 симуляций, в каждой из которых генерировался ряд $(Y_t)_{t=1}^T$ согласно модели

$$\begin{cases} Y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t, \quad \sigma_t^2 = 0,001 + 0,8 \cdot \sigma_{t-1}^2 + 0,1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2, \qquad t \in [1;\, 1000], \\ Y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t, \quad \sigma_t^2 = 0,006 + 0,8 \cdot \sigma_{t-1}^2 + 0,1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2, \qquad t \in [1001;\, 2000], \end{cases}$$

содержащей структурный сдвиг в точке $\tau_1 = 1001$. Для каждого из сгенерированных рядов были применены V-MLR- и CUSUM-методы обнаружения структурных сдвигов. В результате получено, что V-MLR-метод обнаружил правильное число структурных сдвигов в 91,00 % случаев, в то время как CUSUM-метод — только в 84,97 % случаев. Для подвыборок, в которых указанные методы обнаружили правильное число структурных сдвигов, были рассчитаны характеристики, отражающие точность обнаружения структурных сдвигов: $\mathrm{Mean}(\widehat{\tau}_1) := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \widehat{\tau}_1^j$ — среднее и $\mathrm{MAE}(\widehat{\tau}_1) := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N |\widehat{\tau}_1^j - \tau_1|$ — среднее абсолютное отклонение (см. табл. 1).

Таблица 1

Mean и MAE для V-MLR- и CUSUM-методов

	V-MLR	CUSUM
Mean	1001,44	1010,94
MAE	11,54	10,92

Как видно из табл. 1, CUSUM-метод имеет несколько меньшее среднее абсолютное отклонение по сравнению с V-MLR-методом, однако V-MLR-метод практически не имеет смещения в отличие от CUSUM-метода.

Таким образом, получено, что при сопоставимой точности оценивания моментов структурных сдвигов предлагаемый нами V-MLR-метод чаще обнаруживает правильное число структурных сдвигов по сравнению с CUSUM-методом.

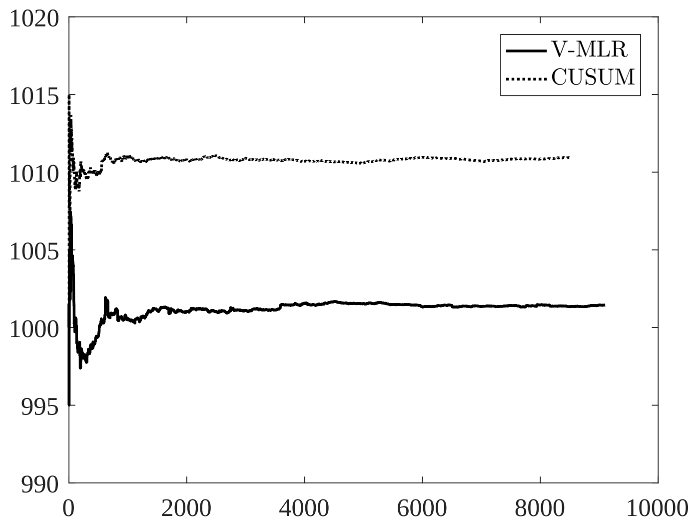

Рис. 1. График Mean для V-MLR- и CUSUM-методов в зависимости от числа проводимых симуляций

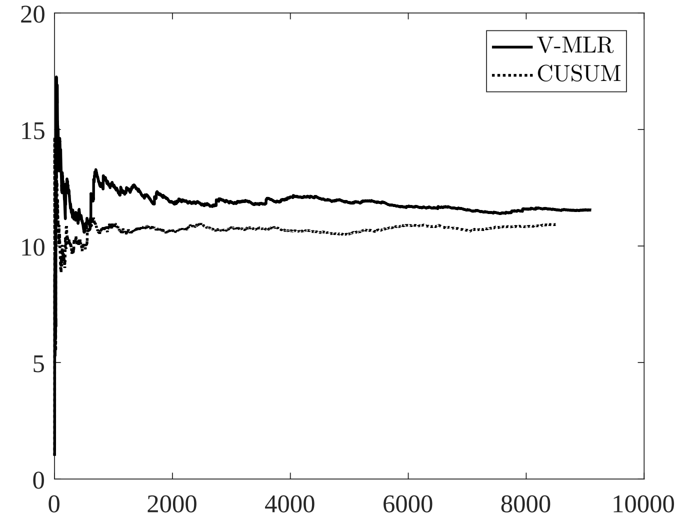

Рис. 2. График MAE для V-MLR- и CUSUM-методов в зависимости от числа проводимых симуляций

На рис. 1 и 2 приведены графики Mean и MAE для V-MLR- и CUSUM-методов в зависимости от числа проводимых симуляций. Графики показывают, что результат, приведенный в табл. 1, является достаточно стабильным и практически не будет меняться при дальнейшем увеличении числа проводимых симуляций.

Численный эксперимент 2. Во втором эксперименте также было проведено 10 000 испытаний. В отличие от предыдущего эксперимента, модель, порождающая данные

$$Y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t, \quad \sigma_t^2 = 0,001 + 0,8 \cdot \sigma_{t-1}^2 + 0,1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2, \quad t \in [1;\, 2000],$$

не содержала структурных сдвигов. Получены следующие результаты: V-MLR-метод указал на отсутствие структурных сдвигов в 99,45 % случаев, в то время как CUSUM-метод — только в 90,65 % случаев.

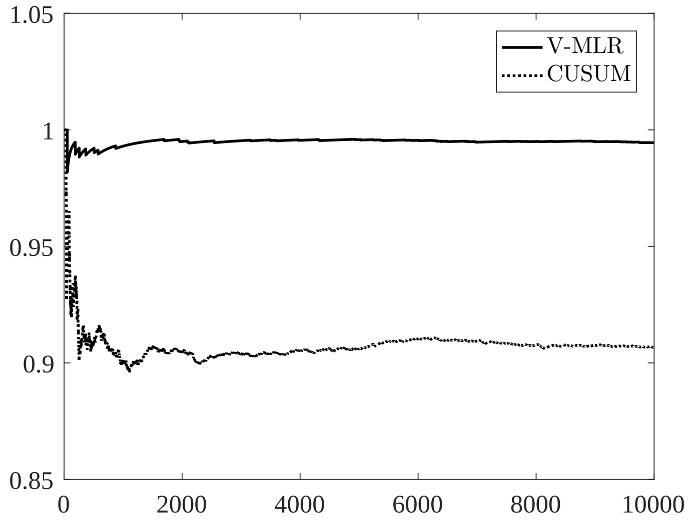

Рис. 3. График доли правильного определения числа структурных сдвигов для V-MLR- и CUSUM-методов в зависимости от числа проводимых симуляций при условии отсутствия структурных сдвигов

На рис. 3 приведен график доли правильного определения числа структурных сдвигов для V-MLR- и CUSUM-методов в зависимости от числа проводимых симуляций при условии отсутствия структурных сдвигов.

Приведенный график говорит о том, что полученный выше результат является стабильным, т. е. практически не будет меняться при дальнейшем увеличении числа проводимых симуляций.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00432).

Литература

1. *Lee S., Kim S., Cho S.* On the CUSUM test for parameter changes in GARCH(1,1) Models // Communications in Statistics — Theory and Methods. 2000. V. 29, N 2. P. 445–462.
2. *Lee S., Tokutsu Y., Maekawa K.* The CUSUM test for parameter change in regression models with ARCH errors // Journal of the Japanese Statistical Society. 2004. V. 34, N 2. P. 173–188.
3. *Kokoszka P., Leipus R.* Change-point estimation in ARCH models // Bernoulli. 2000. V. 6, N 3. P. 513–539.
4. *Davis R., Lee T., Rodriguez-Yam G.* Break detection for a class of nonlinear time series models // Journal of Time Series Analysis. 2008. V. 29, N 5. P. 834–867.
5. *Ross G.J.* Modeling Financial Volatility in the Presence of Abrupt Changes // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2013. V. 192, N 2. P. 350–360.
6. *Francq C., Zakoian J.-M.* GARCH models: structure, statistical inference and financial applications. John Wiley & Sons, 2010.
7. *Bollerslev T.* Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity // Journal of Econometrics. 1986. V. 31. P. 307–327.
8. *Bollerslev T.* A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return // The Review of Economics and Statistics. 1987. V. 69, N 3. P. 542–547.
9. *Bollerslev T., Wooldridge J.* Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time-Varying Covariances // Econometric Reviews. 1992. V. 11, N 2. P. 143–172.
10. *Bollerslev T., Mikkelsen H.O.* Modeling and pricing long memory in stock market volatility // Journal of econometrics. 1996. V. 73, N 1. P. 151–184.
11. *Andersen T.G., Bollerslev T.* Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts // International economic review. 1998. V. 39, N 4. P. 885–905.
12. *Engle R.* GARCH 101: The use of ARCH/GARCH models in applied econometrics // The Journal of Economic Perspectives. 2001. V. 15, N 4. P. 157–168.
13. *Tse Y.K.* The conditional heteroscedasticity of the yen-dollar exchange rate // Journal of Applied Econometrics. 1998. V. 13, N. 3. P. 49–55.
14. *Bera A.K., Higgins M.L.* ARCH models: Properties, Estimation and Testing // Journal of Economic Surveys. 1993. V. 7, N 4. P. 305–366.
15. *Peresetsky A., Ivanter A.* Interactions of the Russian Financial Markets // Economics of Planning. 2000. V. 33. P. 103–140.

References

1. *Lee S., Kim S., Cho S.* On the CUSUM test for parameter changes in GARCH(1,1) Models. Communications in Statistics — Theory and Methods. 2000. V. 29, N 2. P. 445–462.
2. *Lee S., Tokutsu Y., Maekawa K.* The CUSUM test for parameter change in regression models with ARCH errors. Journal of the Japanese Statistical Society. 2004. V. 34, N 2. P. 173–188.
3. *Kokoszka P., Leipus R.* Change-point estimation in ARCH models. Bernoulli. 2000. V. 6, N 3. P. 513–539.
4. *Davis R., Lee T., Rodriguez-Yam G.* Break detection for a class of nonlinear time series models. Journal of Time Series Analysis. 2008. V. 29, N 5. P. 834–867.
5. *Ross G.J.* Modeling Financial Volatility in the Presence of Abrupt Changes. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2013. V. 192, N 2. P. 350–360.
6. *Francq C., Zakoian J.-M.* GARCH models: structure, statistical inference and financial applications. John Wiley & Sons, 2010.
7. *Bollerslev T.* Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. Journal of Econometrics. 1986. V. 31. P. 307–327.
8. *Bollerslev T.* A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return. The Review of Economics and Statistics. 1987. V. 69, N 3. P. 542–547.
9. *Bollerslev T., Wooldridge J.* Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time-Varying Covariances.Econometric Reviews. 1992. V. 11, N 2. P. 143–172.
10. *Bollerslev T., Mikkelsen H.O.* Modeling and pricing long memory in stock market volatility. Journal of econometrics. 1996. V. 73, N 1. P. 151–184.
11. *Andersen T.G., Bollerslev T.* Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. International economic review. 1998. V. 39, N 4. P. 885–905.
12. *Engle R.* GARCH 101: The use of ARCH/GARCH models in applied econometrics. The Journal of Economic Perspectives. 2001. V. 15, N 4. P. 157–168.
13. *Tse Y.K.* The conditional heteroscedasticity of the yen-dollar exchange rate. Journal of Applied Econometrics. 1998. V. 13, N. 3. P. 49–55.
14. *Bera A.K., Higgins M.L.* ARCH models: Properties, Estimation and Testing. Journal of Economic Surveys. 1993. V. 7, N 4. P. 305–366.
15. *Peresetsky A., Ivanter A.* Interactions of the Russian Financial Markets. Economics of Planning. 2000. V. 33. P. 103–140.

Поступила в редакцию 03.07.2017