

УДК 512.711+512.745

И. В. Аржанцев, С. А. Гайфуллин

Кольца Кокса, полугруппы и автоморфизмы аффинных многообразий

Изучается реализация Кокса аффинного многообразия, т.е. каноническое задание нормального аффинного многообразия с конечно порожденной группой классов дивизоров в виде фактора однородно факториального аффинного многообразия по действию квазитор Нерона–Севери. Такая реализация описана для факторпространства по линейному действию конечной группы. Доказано универсальное свойство реализации Кокса, а также изучены возникающие в этой связи свойства теории дивизоров абстрактной полугруппы. Показано, что каждый автоморфизм аффинного многообразия поднимается до автоморфизма кольца Кокса, нормализующего градуировку. Это позволяет доказать, что группа автоморфизмов аффинного торического многообразия размерности ≥ 2 без непостоянных обратимых регулярных функций бесконечномерна, а также предъявить дикий автоморфизм трехмерного квадратичного конуса, полученный спуском известного автоморфизма Аника алгебры многочленов от четырех переменных.

Библиография: 22 названия.

Ключевые слова: аффинное многообразие, фактор, теория дивизоров для полугруппы, торическое многообразие, дикий автоморфизм.

§ 1. Введение

Пусть X – неприводимое нормальное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль со свободной конечно порожденной группой классов дивизоров $\text{Cl}(X)$ и без непостоянных обратимых функций. Обозначим через $\text{WDiv}(X)$ группу дивизоров Вейля многообразия X и зафиксируем подгруппу $K \subset \text{WDiv}(X)$, которая проектируется на $\text{Cl}(X)$ изоморфно. Следуя известной конструкции Кокса из торической геометрии (см. [1], а также [2; определение 2.6]), определим кольцо Кокса, или тотальное координатное кольцо многообразия X , как

$$R(X) = \bigoplus_{D \in K} \mathcal{O}(X, D), \quad \text{где } \mathcal{O}(X, D) = \{f \in \mathbb{K}(X) \mid \text{div}(f) + D \geq 0\}.$$

Умножение на однородных компонентах кольца $R(X)$ совпадает с умножением в поле рациональных функций $\mathbb{K}(X)$, а на неоднородные элементы продолжается по дистрибутивности. Несложно показать, что кольцо $R(X)$ с точностью до изоморфизма не зависит от выбора подгруппы K . Как показано в [3] и [4], $R(X)$ является кольцом с однозначным разложением на простые множители.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №09-01-00648-а) и гранта Пьера Делиня.

В работе [5] было предложено доказательство этого факта, основанное на понятии однородной факториальности, т.е. однозначности разложения на простые множители в полугруппе $\text{Ass}(R(X))$ классов ассоциированности ненулевых однородных элементов кольца $R(X)$. Эта полугруппа естественно отождествляется с полугруппой $\text{WDiv}(X)_+$ эффективных дивизоров Вейля на многообразии X и потому свободна.

В случае, когда группа $\text{Cl}(X)$ конечно порождена, но не свободна, определение кольца Кокса $R(X)$ требует дополнительных усилий (см. § 2). Здесь кольцо $R(X)$ также $\text{Cl}(X)$ -градуировано и однородно факториально, однако факториальность может утратиться (см. [5; пример 4.2] или пример 3.4 ниже).

Квазитором Нерона–Севери N многообразия X называют квазитор (т.е. замкнутую подгруппу линейного алгебраического тора), группа характеров которого отождествлена с группой $\text{Cl}(X)$. Предположим, что кольцо $R(X)$ конечно порождено. Квазитор N естественно действует на спектре $\bar{X}$ кольца $R(X)$ и X совпадает с категорным фактором для этого действия. Морфизм факторизации $q: \bar{X} \rightarrow X$ мы называем *реализацией Кокса* для многообразия X . Эта конструкция уже использовалась в задачах аффинной алгебраической геометрии. Так, в работе [6] вычисление колец Кокса позволило охарактеризовать те аффинные $\text{SL}(2)$ -вложения, которые имеют структуру торического многообразия, а в [7] показано, что реализация Кокса приводит к замечательному единообразному описанию всех аффинных $\text{SL}(2)$ -вложений, которое не было известно ранее. Отметим, что реализацию Кокса можно определить для широкого класса нормальных (не обязательно аффинных) многообразий. В предположении конечной порожденности кольца Кокса эта реализация приводит к комбинаторному описанию многообразий (теория колец со связками), которое позволяет охарактеризовать многие их геометрические свойства (см. [8] и [9]).

Мы строим реализацию Кокса для факторпространства по линейному действию конечной группы. В качестве следствия описаны те факторпространства, которые являются торическими многообразиями. В § 4 доказано следующее универсальное свойство: морфизм факторизации однородно факториального аффинного многообразия по действию квазитора, который не стягивает дивизоров, пропускается через реализацию Кокса для фактора.

Для аффинного многообразия X вложение алгебры регулярных функций $\mathbb{K}[X]$ в $R(X)$ в качестве нулевой компоненты определяет вложение полугруппы Γ главных эффективных дивизоров на X в $\text{WDiv}(X)_+$. Это вложение является теорией дивизоров для полугруппы Γ в смысле [10; гл. III] и [11]. Тем самым, ряд задач о кольцах Кокса и соответствующих им многообразиях можно переформулировать и решить в терминах теории полугрупп. Обратно, геометрическая интуиция подсказывает утверждения о полугруппах, которые представляют самостоятельный интерес. Одна из целей работы – показать эффективность этого соответствия. Так, указанное выше универсальное свойство реализации Кокса приводит к следующему результату: вложение полугруппы Γ в свободную полугруппу S , удовлетворяющее определенным условиям, продолжается до вложения теории дивизоров полугруппы Γ в S (теорема 7.3). Все определения и результаты, касающиеся полугрупп, собраны в § 7.

Одним из основных результатов работы [1] является описание группы автоморфизмов полного симплициального торического многообразия, использующее однородные автоморфизмы его кольца Кокса. Затем Д. Бюлер [12] обоб-

пил этот результат на произвольные полные торические многообразия. Мы доказываем, что каждый автоморфизм нормального аффинного многообразия поднимается до автоморфизма его кольца Кокса, нормализующего градуировку (теорема 5.1). Известно, что кольцо Кокса торического многообразия является кольцом многочленов (см. [1]). Это позволяет доказать, что группа автоморфизмов аффинного торического многообразия размерности ≥ 2 без непостоянных обратимых регулярных функций бесконечномерна (теорема 5.4).

Определим *ручной автоморфизм* аффинного торического многообразия X как автоморфизм, который можно представить в виде композиции автоморфизмов, индуцирующих элементарные автоморфизмы кольца Кокса в смысле теории автоморфизмов кольца многочленов (см. определение 5.3). Все прочие автоморфизмы будем называть *дикими*. В § 6 мы приводим пример дикого автоморфизма трехмерного квадратичного конуса. Заметим, что здесь не используется результат работы И. П. Шестакова и У. Умирбаева [13]. Наш автоморфизм получен спуском известного автоморфизма Аника (см. [14; с. 49, 96] и [15]). Автоморфизм Аника является одним из кандидатов на роль дикого автоморфизма алгебры многочленов от четырех переменных. Мы показываем, что этот автоморфизм нельзя представить в виде композиции элементарных автоморфизмов, сохраняющих определенную градуировку.

В работе использованы стандартные обозначения из теории инвариантов. Так, для действия редуктивной группы G на аффинном многообразии X через $X//G$ обозначено аффинное многообразие, являющееся спектром алгебры инвариантов $\mathbb{K}[X]^G$, а через $q: X \rightarrow X//G$ – морфизм факторизации, отвечающий естественному вложению $\mathbb{K}[X]^G \subseteq \mathbb{K}[X]$. Если морфизм факторизации определяет геометрический фактор для данного действия, то вместо $X//G$ используется обозначение X/G . Отметим, что морфизм факторизации автоматически определяет геометрический фактор, если группа G конечна.

Авторы выражают благодарность Э. Б. Винбергу, обратившему их внимание на связь понятия однородной факториальности с теорией дивизоров для полугрупп, А. ван ден Эссену, указавшему на работы об автоморфизме Аника, и Ю. Хаузену за плодотворные обсуждения теории колец Кокса.

§ 2. Кольцо Кокса аффинного многообразия

Рассмотрим неприводимое нормальное многообразие X с конечно порожденной группой классов дивизоров $\text{Cl}(X)$, группа обратимых функций которого совпадает с $\mathbb{K}^\times$. Пусть $K \subset \text{WDiv}(X)$ – конечно порожденная подгруппа, сюръективно проектирующаяся на $\text{Cl}(X)$. Рассмотрим кольцо $T_K(X) = \bigoplus_{D \in K} \mathcal{O}(X, D)$. Пусть $K^0 \subset K$ – ядро проекции $K \rightarrow \text{Cl}(X)$. Выберем согласованные базисы $D_1, \dots, D_s$ в K и $D_1^0 = d_1 D_1, \dots, D_r^0 = d_r D_r$ в K^0 , $r \leq s$. Назовем набор рациональных функций $\mathcal{F} = \{F_D \in \mathbb{K}(X)^\times : D \in K^0\}$ *согласованным*, если главный дивизор $\text{div}(F_D)$ совпадает с D и $F_{D+D'} = F_D F_{D'}$. Ясно, что набор $\{F_D\}$ определяется функциями $F_{D_i^0}$, $i = 1, \dots, r$: если $D = a_1 D_1^0 + \dots + a_r D_r^0$, то $F_D = F_{D_1^0}^{a_1} \cdots F_{D_r^0}^{a_r}$. Зафиксируем некоторый согласованный набор $\mathcal{F}$.

Пусть $D_1, D_2 \in K$ и $D_1 - D_2 \in K^0$. Отображение $f \rightarrow F_{D_1 - D_2} f$ задает изоморфизм векторных пространств $\mathcal{O}(X, D_1)$ и $\mathcal{O}(X, D_2)$. Легко видеть, что

линейная оболочка элементов вида $f - F_{D_1 - D_2}f$ по всем D_1, D_2 с $D_1 - D_2 \in K^0$ и всем $f \in \mathcal{O}(X, D_1)$ есть идеал $I(K, \mathcal{F}) \triangleleft T_K(X)$. Определим кольцо Кокса многообразия X как

$$R_{K, \mathcal{F}}(X) = T_K(X) / I(K, \mathcal{F}).$$

Кольцо $R_{K, \mathcal{F}}(X)$ с точностью до изоморфизма не зависит от выбора K и $\mathcal{F}$ (см., например, [5; предложение 3.2]) и далее будет обозначаться $R(X)$. Поскольку $K/K^0 \cong \text{Cl}(X)$, то кольцо $R(X)$ несет естественную $\text{Cl}(X)$ -градуировку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть M – конечно порожденная абелева группа и $R = \bigoplus_{u \in M} R_u$ – M -градуированная коммутативная ассоциативная алгебра с единицей. Ненулевой однородный элемент $a \in R \setminus R^\times$ называется *однородно неприводимым*, если из условия $a = bc$, где b и c однородны, вытекает, что либо b , либо c обратим. Алгебра R называется *однородно факториальной*, если R не содержит однородных обратимых элементов, отличных от констант, каждый ее ненулевой необратимый однородный элемент представим в виде произведения однородно неприводимых элементов и это представление единственно с точностью до ассоциированности и порядка множителей.

Напомним, что два однородных элемента $a, b \in R$ называются *ассоциированными*, если $a = bc$ и c обратим. Множество $\text{Ass}(R)$ классов ассоциированности ненулевых однородных элементов алгебры R является полугруппой относительно поэлементного умножения классов. Однородная факториальность алгебры R равносильна тому, что полугруппа $\text{Ass}(R)$ свободна. В случае, когда $R = R(X)$ и $M = \text{Cl}(X)$, полугруппа $\text{Ass}(R(X))$ естественным образом отождествляется с полугруппой $\text{WDiv}(X)_+$. Отсюда следует, что алгебра $R(X)$ не содержит ни однородных делителей нуля, ни непостоянных однородных обратимых функций и является однородно факториальной.

Напомним, что *квазитор* – это аффинная алгебраическая группа, изоморфная прямому произведению тора и конечной абелевой группы. Группа характеров квазитора является конечно порожденной абелевой группой, ранг которой совпадает с размерностью квазитора. Легко проверить, что каждая конечно порожденная абелева группа реализуется как группа характеров некоторого квазитора, и квазитор определяется своей группой характеров с точностью до изоморфизма. Определим *квазитор Нерона–Севери* многообразия X как квазитор N , группа характеров которого изоморфна $\text{Cl}(X)$. Квазитор N действует автоморфизмами алгебры $R(X)$: однородная компонента $R(X)_u$ является u -весовым подпространством, отвечающим весу u . Подалгебра инвариантов такого действия $R(X)^N$ совпадает с $R(X)_0 = \mathbb{K}[X]$.

Далее мы предполагаем, что многообразие X аффинно и его кольцо Кокса $R(X)$ конечно порождено. Рассмотрим спектр $\bar{X} = \text{Spec}(R(X))$ этого кольца. На аффинном многообразии $\bar{X}$ индуцировано регулярное действие квазитора N . Поскольку $X \cong \text{Spec}(R(X)^N)$, многообразие X реализуется как фактор многообразия $\bar{X}$ по действию N . Морфизм факторизации $q: \bar{X} \rightarrow X \cong \bar{X} // N$ будем называть *реализацией Кокса* для многообразия X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Многообразие $\bar{X}$ неприводимо и нормально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X^{reg} – множество гладких точек многообразия X . Это открытое подмножество, дополнение к которому имеет в X коразмерность ≥ 2 . Зафиксируем, как и выше, конечно порожденную подгруппу $K \subset \text{WDiv}(X)$, сюръективно проектирующуюся на $\text{Cl}(X)$, и построим кольцо $T_K(X)$. Это кольцо не имеет однородных делителей нуля, а потому и делителей нуля вообще (см. [5; лемма 2.1]). У каждой точки из X^{reg} есть аффинная окрестность V , в которой любой дивизор является главным. Значит, спектр алгебры $T_K(V)$ изоморфен прямому произведению $V \times T$, где T – тор, решетка характеров которого отождествлена с K . Известно, что такой спектр изоморфен прообразу окрестности V в спектре кольца $T_K(X)$ (см., например, [8; доказательство теоремы 4.3]). Следовательно, проекция прообраза W многообразия X^{reg} определяет локально тривиальное расслоение $p: W \rightarrow X^{\text{reg}}$ со слоем T (см. также [9; предложение 2.2]). Факторизация по идеалу $I(K, \mathcal{F})$ означает переход к подмногообразию $U = q^{-1}(X^{\text{reg}}) \subseteq W$. Поскольку $\text{Cl}(X) \cong K/K_0$, пересечение этого подмногообразия с $p^{-1}(V) \cong V \times T$ отождествляется с $V \times N$.

Достаточно показать, что многообразие U неприводимо. В самом деле, из соображений размерности U попадает в неприводимую компоненту многообразия $\bar{X}$, совпадающую с замыканием U . Тогда эта компонента N -инвариантна. Объединение других компонент также N -инвариантно, и если оно непусто, мы получаем в кольце $R(X)$ однородные делители нуля.

Подмногообразие $q^{-1}(V)$ задано в $p^{-1}(V) = V \times T$ уравнениями $t_i^{d_i} = F_{D_i^0}$, где функции $F_{D_i^0}$ неприводимы в кольце $\mathbb{K}[X]$. Это показывает, что $q^{-1}(V)$ неприводимо и поэтому лежит в одной компоненте многообразия U . Такие компоненты N -инвариантны и покрывают все многообразие U . Из неприводимости X^{reg} и того факта, что образ замкнутого N -инвариантного подмножества относительно морфизма q замкнут, следует, что многообразие U неприводимо.

Доказательство целозамкнутости алгебры $R(X)$ можно найти в [5; предложение 2.7, замечание 2.8] и в [9; предложение 2.2(i)].

Предложение 2.2 доказано.

Легко проверить, что однородная факториальность алгебры $R(X)$ равносильна тому, что каждый N -инвариантный дивизор Вейля на многообразии $\bar{X}$ является главным. Каждому N -линеаризованному линейному расслоению на $\bar{X}$ можно сопоставить N -инвариантный дивизор Картье, отвечающий N -полуинвариантному регулярному сечению этого расслоения. Это показывает, что N -линеаризованные линейные расслоения на $\bar{X}$ – это в точности N -линеаризации тривиального расслоения.

Следующее предложение содержит необходимое и достаточное условие для того, чтобы морфизм факторизации аффинного многообразия по действию квазитора являлся реализацией Кокса для фактора. Это условие возникало в нескольких предыдущих работах (см., например, [16; замечание 4.2] и [7; теорема 2.2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $q: \bar{X} \rightarrow X$ – реализация Кокса аффинного многообразия X , Q – некоторый квазитор, действующий на неприводимом аффинном многообразии Z , однородно факториальном относительно этого действия, $\pi: Z \rightarrow Z//Q$ – морфизм факторизации и задан изоморфизм $\varphi: X \rightarrow Z//Q$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) *имеется открытое Q -инвариантное подмножество $U \subseteq Z$, для которого $\text{codim}_Z(Z \setminus U) \geq 2$, действие Q на U свободно и каждый слой морфизма π , пересекающий U , состоит из одной Q -орбиты;*
- (ii) *имеются изоморфизм $\mu: Q \rightarrow N$ и изоморфизм $\xi: Z \rightarrow \bar{X}$ такие, что $\xi(gz) = \mu(g)\xi(z)$ для любых $g \in Q, z \in Z$, и коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\xi} & \bar{X} \\ \downarrow \pi & & \downarrow q \\ Z//Q & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для реализации Кокса $q: \bar{X} \rightarrow X$ в качестве открытого подмножества U можно взять $q^{-1}(X^{\text{reg}})$ (см. доказательство предложения 2.2).

Обратно, рассмотрим ограничение морфизма π на подмножество U :

$$\pi: U \rightarrow U_0 \subset Z//Q.$$

Уменьшая U , можно считать, что U_0 состоит из гладких точек многообразия $Z//Q$. Каждый дивизор D в пересечении с U_0 является локально главным и определяет линейное расслоение L_D . Подъем этого расслоения на U определяет Q -линеаризацию тривиального расслоения на U , а значит, и на Z . Обратно, каждая Q -линеаризация тривиального расслоения на Z происходит из некоторого дивизора на U_0 , и это определяет изоморфизм решетки характеров квазиторa Q и группы Пикара многообразия U_0 , совпадающей с $\text{Cl}(X)$ (см. [17; предложение 4.2]). Пространство инвариантных сечений линеаризации тривиального расслоения на Z , отвечающей характеру ξ квазиторa Q , естественно отождествляется с полуинвариантами веса $-\xi$ в алгебре $\mathbb{K}[Z]$. Алгебра $\mathbb{K}[Z]$ есть прямая сумма подпространств Q -полуинвариантов, и это определяет однородный изоморфизм между $\mathbb{K}[Z]$ и $R(X)$.

Предложение 2.3 доказано.

Приведем пример аффинного многообразия, кольцо Кокса которого не конечно порождено. Заметим, что если $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ — неприводимое проективно нормальное проективное подмногообразие и $X \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ — аффинный конус над Y , то $R(Y)$ и $R(X)$ изоморфны как абстрактные кольца (градуировки на них различны). В самом деле, для каждого дивизора D на Y морфизм факторизации $\pi: X \setminus \{0\} \xrightarrow{//\mathbb{K}^\times} Y$ определяет изоморфизм пространства $\mathcal{O}(Y, D)$ и весовой компоненты относительно действия тора $\mathbb{K}^\times$ в пространстве $\mathcal{O}(X, D')$, где D' отвечает образу класса дивизора D в точной последовательности $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \text{Cl}(Y) \rightarrow \text{Cl}(X) \rightarrow 0$. Остается заметить, что $\mathcal{O}(X, D')$ есть прямая сумма весовых компонент, отвечающих дивизорам D , переходящим в D' (см. [17; предложение 4.2]).

Рассмотрим в качестве Y результат раздутия проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ в девяти точках общего положения. Как следует из результатов работы [18] (см. также [4; замечание 3.2]), кольцо $R(Y)$ не является конечно порожденным.

§ 3. Реализация Кокса для факторпространств

Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ и $G \subset \mathrm{GL}(V)$ – конечная подгруппа. Опишем реализацию Кокса для факторпространства $V/G := \mathrm{Spec} \mathbb{K}[V]^G$. Напомним, что линейный оператор конечного порядка $A \in \mathrm{GL}(V)$ называется *псевдоотражением*, если подпространство A -неподвижных точек V^A является гиперплоскостью. Согласно классической теореме Шевалле–Шепарда–Тодда алгебра инвариантов $\mathbb{K}[V]^H$ конечной подгруппы $H \subset \mathrm{GL}(V)$ свободна тогда и только тогда, когда подгруппа H порождена псевдоотражениями. Обозначим через H подгруппу в G , порожденную всеми содержащимися там псевдоотражениями. Ясно, что H нормальна в G . Пусть $\varphi: G \rightarrow F := G/H$ – гомоморфизм проекции, $[F, F]$ – коммутант группы F , $N := F/[F, F]$ и $\tilde{H} := \varphi^{-1}([F, F])$. Положим $Z := \mathrm{Spec} \mathbb{K}[V]^{\tilde{H}}$. Конечная абелева группа N естественно действует на многообразии Z .

ТЕОРЕМА 3.1. *Морфизм факторизации $Z \xrightarrow{/N} V/G$ является реализацией Кокса для пространства V/G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через W пространство $\mathrm{Spec} \mathbb{K}[V]^H$. Несложно проверить, что группа F действует на W линейно. Пусть $\tilde{F} \subseteq F$ – подгруппа, порожденная псевдоотражениями. Тогда алгебра инвариантов $\mathbb{K}[W]^{\tilde{F}} \cong \mathbb{K}[V]^{\varphi^{-1}(\tilde{F})}$ свободна. Это показывает, что F не содержит псевдоотражений. Значит, имеется открытое F -инвариантное подмножество $U \subseteq W$, для которого $\mathrm{codim}_W(W \setminus U) \geq 2$ и действие F на U свободно. Пусть

$$\zeta: W \rightarrow W/[F, F] \cong Z$$

– морфизм факторизации. Тогда $\mathrm{codim}_Z(Z \setminus \zeta(U)) \geq 2$ и действие N на $\zeta(U)$ свободно. Согласно предложению 2.3 достаточно доказать, что N -многообразие Z однородно факториально. Пусть D – это N -инвариантный дивизор Вейля на Z и $\zeta^{-1}(D)$ – его прообраз в W . Тогда дивизор $\zeta^{-1}(D)$ совпадает с $\mathrm{div}(f)$, где f – это F -полуинвариантная функция на W . Значит, $f \in \mathbb{K}[W]^{[F, F]}$ и $D = \mathrm{div}(f)$ на Z .

Теорема 3.1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Многообразие V/G является торическим тогда и только тогда, когда группа G/H коммутативна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кольцо Кокса торического многообразия является кольцом многочленов (см. [1]), откуда следует, что группа $[F, F]$ порождается псевдоотражениями и поэтому единична. Обратное утверждение следует из диагностируемости действия конечной абелевой группы G/H на W .

Следствие 3.2 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Предположим, что $R(X)$ является кольцом многочленов. Естественно выяснить, является ли многообразие X торическим. В общем случае ответ отрицательный: достаточно рассмотреть торическое многообразие размерности ≥ 2 , из которого удален подходящий конечный набор точек. Тем не менее это верно для полных многообразий со свободной конечно порожденной группой классов (см. [8; следствие 4.4]). Вопрос о том, верно ли это для

аффинных многообразий, упирается в проблему линеаризации для действий квазитором (см., например, [19]), которая в настоящий момент не решена.

ПРИМЕР 3.4. Пусть $V = \mathbb{K}^2$ и

$$G = Q_8 = \left\{ \pm E, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

где $i^2 = -1$. Здесь $H = \{e\}$, $\tilde{H} = \{\pm E\}$ и многообразие Z есть двумерный квадратичный конус. Следовательно, кольцо Кокса для многообразия V/G не факториально.

Теорема 3.1 допускает частичное обобщение на случай бесконечных групп. С каждой аффинной алгебраической группой G свяжем ее группу характеров $\Xi(G)$ и пересечение ядер характеров $G_1 := \bigcap_{\xi \in \Xi(G)} \text{Ker}(\xi)$. Ясно, что G_1 – нормальная подгруппа в G и $N := G/G_1$ – квазитор. Если G редуктивна, то G_1 также редуктивна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть G – редуктивная алгебраическая группа и Y – неприводимое нормальное аффинное G -многообразие такое, что:

- (i) $\mathbb{K}[Y]^\times = \mathbb{K}^\times$;
- (ii) любой G -инвариантный дивизор Вейля на Y является главным;
- (iii) для морфизма факторизации $\pi: Y \rightarrow Y//G := \text{Spec } \mathbb{K}[Y]^G$ найдется открытое подмножество $U \subseteq Y//G$ такое, что $\text{codim}_Y(Y \setminus \pi^{-1}(U)) \geq 2$ и действие G на $\pi^{-1}(U)$ свободно.

Положим $Z = \text{Spec } \mathbb{K}[Y]^{G_1}$. Тогда морфизм факторизации $p: Z \xrightarrow{//N} Y//G$ является реализацией Кокса для $Y//G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $\text{codim}_Z(Z \setminus p^{-1}(U)) \geq 2$ и действие N на $p^{-1}(U)$ свободно. Поэтому достаточно доказать, что каждый N -инвариантный дивизор D на Z является главным. Прообраз $\zeta^{-1}(D)$ дивизора D при морфизме факторизации $\zeta: Y \xrightarrow{//G_1} Z$ является G -инвариантным дивизором на Y , и поэтому $\zeta^{-1}(D) = \text{div}(f)$ для некоторого G -полуинварианта $f \in \mathbb{K}[Y]$. Тогда $f \in \mathbb{K}[Y]^{G_1}$ и $D = \text{div}(f)$ на Z .

Предложение 3.5 доказано.

ПРИМЕР 3.6 (см. [20; гл. 3] и [5; теорема 4.1]). Пусть $\hat{G}$ – полупростая связная односвязная алгебраическая группа и $G \subseteq \hat{G}$ – редуктивная подгруппа. Хорошо известно, что $\hat{G}$ является факториальным многообразием, $\mathbb{K}[\hat{G}]^\times = \mathbb{K}^\times$ и однородное пространство $\hat{G}/G$ аффинно. Тем самым, отображение $\hat{G}/G_1 \xrightarrow{//N} \hat{G}/G$ является реализацией Кокса.

Более общо, рассмотрим реализацию Кокса для многообразия двойных смежных классов. Пусть G и G' – редуктивные подгруппы в односвязной полупростой группе $\hat{G}$ и $G \times G'$ действует на $\hat{G}$ как $(g, g')\hat{g} = g\hat{g}g'^{-1}$. Обозначим через $G \backslash \hat{G}/G'$ категорный фактор для этого действия. Для того чтобы показать, что отображение $G_1 \backslash \hat{G}/G'_1 \rightarrow G \backslash \hat{G}/G'$ есть реализация Кокса, нужно проверить условие (iii) предложения 3.5.

ПРИМЕР 3.7. Пусть $\widehat{G} = \mathrm{SL}(3)$, $G' = \mathrm{SO}(3)$ и

$$G = T^2 = \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3 : t_1 t_2 t_3 = 1).$$

Здесь $Z = G_1 \backslash \widehat{G} / G'_1 = \mathrm{SL}(3) / \mathrm{SO}(3)$ есть многообразие симметрических матриц (a_{ij}) , $i, j = 1, 2, 3$, с определителем 1, а $N = T^2$ действует на Z как $a_{ij} \rightarrow t_i t_j a_{ij}$ и $X = G' \backslash \widehat{G} / G' = Z // T^2$ – трехмерная гиперповерхность. В качестве подмножества $\pi^{-1}(U)$ можно взять прообраз в $\mathrm{SL}(3)$ множества симметрических матриц, у которых не более чем один элемент a_{ij} , $i \geq j$, равен нулю. Итак, спектр кольца Кокса гиперповерхности X

$$2x_1^3 + x_2 x_3 x_4 - x_1^2 - x_1^2 x_2 - x_1^2 x_3 - x_1^2 x_4 = 0$$

есть гиперповерхность Z :

$$y_1 y_2 y_3 + 2y_4 y_5 y_6 - y_1 y_4^2 - y_2 y_5^2 - y_3 y_6^2 = 1.$$

ПРИМЕР 3.8. Положим $\widehat{G} = \mathrm{SL}(4)$, $G' = \mathrm{Sp}(4)$ и

$$G = T^3 = \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3, t_4 : t_1 t_2 t_3 t_4 = 1).$$

Здесь $Z = \mathrm{SL}(4) / \mathrm{Sp}(4)$ есть многообразие кососимметрических матриц (b_{ij}) , $i, j = 1, 2, 3, 4$, у которых пфаффиан $\mathrm{Pf} = b_{12} b_{34} - b_{13} b_{24} + b_{14} b_{23}$ равен 1. Условие (iii) предложения 3.5 здесь не выполнено: замыкание T^3 -орбиты любой точки дивизора $\{b_{12} = 0\}$ содержит точку, у которой $b_{34} = 0$. Несложно проверить, что $X = T^3 \backslash \mathrm{SL}(4) / \mathrm{Sp}(4) \cong \mathbb{K}^2$, поэтому спектр кольца Кокса не может быть реализован как однородное пространство группы $\mathrm{SL}(4)$.

§ 4. Универсальное свойство реализации Кокса

Пусть Z – неприводимое аффинное многообразие с действием квазиторa Q . Назовем это действие *нестягивающим*, если для любого простого дивизора $D \subset Z$ замыкание его образа $\pi(\overline{D})$ при морфизме факторизации $\pi: Z \rightarrow Z//Q$ имеет в $Z//Q$ коразмерность ≤ 1 . Заметим, что если Q – конечная абелева группа, то любое действие является нестягивающим.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть Z – неприводимое нормальное аффинное многообразие с нестягивающим действием квазиторa Q и морфизмом факторизации $\pi: Z \rightarrow Z//Q$. Предположим, что Q -многообразие Z однородно факториально и что фактор $X = Z//Q$ допускает реализацию Кокса $q: \overline{X} \rightarrow X$. Тогда существуют сюръективный гомоморфизм $\mu: Q \rightarrow N$ и доминантный морфизм $\nu: Z \rightarrow \overline{X}$ такие, что $\nu(gz) = \mu(g)\nu(z)$ для всех $g \in Q$, $z \in Z$, и коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\nu} & \overline{X} \\ & \searrow \pi \quad \swarrow q & \\ & X & \end{array}$$

Этими условиями гомоморфизм μ определен однозначно, а морфизм ν определен с точностью до композиции с автоморфизмом Z , определяемым действием элемента квазиторa Q .

Этот результат можно доказать, используя ограничение дивизоров на подмножество X^{reg} и подъем соответствующих линейных расслоений на Z (см. доказательство предложения 2.3). Детали этого доказательства мы оставляем читателю.

Сейчас мы приведем доказательство теоремы 4.1 в терминах полугрупп классов ассоциированности однородных элементов. В § 7 будет дано независимое доказательство теоремы 7.3, которую можно считать полугрупповой версией теоремы 4.1. Наша ближайшая цель – показать, что теорема 7.3 влечет теорему 4.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Существование. Пусть $A = \mathbb{K}[Z]$ и $A = \bigoplus_{u \in M} A_u$ – градуировка, определенная действием квазитора Q . По условию имеется изоморфизм $\delta: \mathbb{K}[X] \rightarrow A_0$. Нужно доказать, что существует однородное вложение ψ кольца Кокса $R(X)$ в A , совпадающее с δ на нулевой компоненте и отправляющее разные однородные компоненты $R(X)$ в разные компоненты A . Пусть $S = \text{Ass}(A)$ – полугруппа классов ассоциированности ненулевых однородных элементов алгебры A с операцией умножения, $\Gamma = \text{Ass}(\mathbb{K}[X])$ и $D = \text{WDiv}(X)_+$. Тогда вложение τ полугруппы Γ в D в качестве полугруппы главных эффективных дивизоров определяет теорию дивизоров для полугруппы Γ . Изоморфизм δ определяет вложение α полугруппы Γ в S , и это вложение удовлетворяет условиям (i) и (ii) теоремы 7.3. В самом деле, условие (i) следует из наличия градуировок, а условие (ii) гарантируется условием нестягиваемости. Следовательно, существует вложение β полугруппы D , которая отождествляется с $\text{Ass}(R(X))$, в полугруппу S , продолжающее вложение α . Остается “поднять” это вложение до однородного вложения алгебр.

Пусть группа $\text{Cl}(X)$ имеет ранг r , а $C_1, \dots, C_r, B_1, \dots, B_s$ – дивизоры Вейля на X , классы которых порождают $\text{Cl}(X)$, и определяющие соотношения имеют вид $d_1[B_1] = \dots = d_s[B_s] = 0$, $d_i \in \mathbb{N}$. Фиксируем ненулевые элементы кольца Кокса $f_1, \dots, f_r, h_1, \dots, h_s$, $f_i \in R(X)_{[C_i]}$, $h_j \in R(X)_{[B_j]}$, и ненулевые однородные элементы $a_1, \dots, a_r, a'_1, \dots, a'_s$ алгебры A такие, что классы f_i (соответственно h_j) в D переходят при вложении β в классы a_i (соответственно a'_j) в S . Заметим, что $h_j^{d_j} = F_j \in \mathbb{K}[X]$ и нужно, чтобы изоморфизм δ отправлял F_j в $(a'_j)^{d_j}$. Этого можно добиться, заменяя элемент a'_j на пропорциональный.

Изоморфизм δ можно продолжить до изоморфизма полей частных $\delta: \mathbb{K}(X) \rightarrow Q A_0$. Рассмотрим элемент $u \in \text{Cl}(X)$,

$$u = u_1[C_1] + \dots + u_r[C_r] + v_1[B_1] + \dots + v_s[B_s], \quad u_i \in \mathbb{Z}, \quad v_j \in \{0, \dots, d_j - 1\},$$

и элемент $f_u := f_1^{u_1} \dots f_r^{u_r} h_1^{v_1} \dots h_s^{v_s} \in (QR(X))_u$. Тогда для любого $f \in R(X)_u$ имеем $f = \frac{f}{f_u} f_u$ и $\frac{f}{f_u} \in (QR(X))_0 = \mathbb{K}(X)$. Положим

$$\psi(f) = \delta\left(\frac{f}{f_u}\right) \psi(f_u) = \delta\left(\frac{f}{f_u}\right) a_1^{u_1} \dots a_r^{u_r} (a'_1)^{v_1} \dots (a'_s)^{v_s}.$$

Несложно проверить, что отображение ψ линейно на каждой однородной компоненте $R(X)_u$ и продолжает вложение полугрупп β . В частности, образ ψ попадает в A . Градуировка определяет гомоморфизм полугруппы D (соответственно S) в полугруппу $\text{Cl}(X)$ (соответственно M), и ядром этого гомоморфизма является полугруппа Γ (соответственно $\alpha(\Gamma)$). Полугруппа D проецируется на

$\text{Cl}(X)$ сюръективно. Продолжая указанные гомоморфизмы до гомоморфизмов групп, порожденных данными полугруппами, легко проверить, что корректно определен инъективный гомоморфизм $\text{Cl}(X) \rightarrow M$. Это доказывает утверждение теоремы, касающиеся однородных компонент.

Далее нужно проверить что для $f \in R(X)_u$ и $f' \in R(X)_{u'}$ верно равенство $\psi(ff') = \psi(f)\psi(f')$. Проверка сводится к случаю $f = f_u$, $f' = f_{u'}$, и здесь равенство следует из того факта, что $\psi(F_j) = \delta(F_j)$ для любого $j = 1, \dots, s$.

Таким образом, отображение ψ линейно при ограничении на любую однородную компоненту $R(X)_u$ и мультипликативно на однородных элементах. Остается продолжить его по дистрибутивности до однородного вложения алгебр $\psi: R(X) \rightarrow A$.

Единственность. По теореме 7.3 вложение полугрупп $\beta: D \rightarrow S$ определено однозначно. Поэтому два вложения алгебр ψ и ψ' могут отличаться только за счет замены элементов $a_1, \dots, a_r, a'_1, \dots, a'_s$ на пропорциональные, причем коэффициент пропорциональности для a'_j должен быть корнем степени d_j из 1. Поскольку группа $\text{Cl}(X)$ вложена в группу M , указанное преобразование реализуется действием некоторого элемента $g_0 \in Q$ на алгебре A .

Теорема 4.1 доказана.

Условие однородной факториальности Z в теореме 4.1 существенно: без него в качестве Z можно было бы взять фактор $\bar{X}$ по собственной подгруппе $Q \subset N$. Следующие примеры показывают, что условие нестягиваемости также существенно.

ПРИМЕР 4.2. Пусть $Z = \mathbb{K}^3$, $Q = \mathbb{K}^\times$ и $t(z_1, z_2, z_3) = (tz_1, tz_2, t^{-2}z_3)$. Здесь $Z//Q$ изоморфно двумерному квадратичному конусу X и тор Q не допускает сюръективного гомоморфизма на квазитор Нерона–Севери N , состоящий из двух элементов. Аналогичный пример для многообразия X со свободной группой классов дает конус $X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1^2 x_2 - x_3 x_4 = 0\}$, реализованный как фактор $Z//Q$, где $Z = \mathbb{K}^5$, $Q = (\mathbb{K}^\times)^2$ и

$$(t_1, t_2)(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = (t_1 z_1, t_2 z_2, t_1^{-1} t_2 z_3, t_1 t_2^{-1} z_4, t_1^{-1} t_2^{-1} z_5).$$

ПРИМЕР 4.3. Положим $Z = \mathbb{K}^5$, $Q = (\mathbb{K}^\times)^2$ и

$$(t_1, t_2)(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = (t_1 z_1, t_1 z_2, t_2 z_3, t_2 z_4, t_1^{-1} t_2^{-1} z_5).$$

Факторпространство $Z//Q$ есть трехмерный квадратичный конус X . Для последнего $\bar{X} = \mathbb{K}^4$, $N = \mathbb{K}^\times$ и действие задано как

$$s(y_1, y_2, y_3, y_4) = (s y_1, s y_2, s^{-1} y_3, s^{-1} y_4).$$

В этом случае согласованное вложение кольца Кокса $\mathbb{K}[y_1, y_2, y_3, y_4]$ в $\mathbb{K}[Z]$ возможно, но нарушается единственность; можно определить вложение как

$$y_1 \rightarrow z_1, \quad y_2 \rightarrow z_2, \quad y_3 \rightarrow z_3 z_5, \quad y_4 \rightarrow z_4 z_5,$$

а можно как

$$y_1 \rightarrow z_1 z_5, \quad y_2 \rightarrow z_2 z_5, \quad y_3 \rightarrow z_3, \quad y_4 \rightarrow z_4.$$

§ 5. Подъем автоморфизмов

Пусть $R = \bigoplus_{u \in M} R_u$ – коммутативная ассоциативная алгебра с единицей, градуированная конечно порожденной группой M . Определим подгруппу $\widetilde{\text{Aut}}(R)$ группы автоморфизмов алгебры R как

$$\widetilde{\text{Aut}}(R) = \{\varphi \in \text{Aut}(R) \mid \exists \varphi_0 \in \text{Aut}(M) : \varphi(R_u) = R_{\varphi_0(u)} \forall u \in M\}.$$

Будем говорить, что элементы подгруппы $\widetilde{\text{Aut}}(R)$ *нормализуют градуировку* на алгебре R .

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть X – неприводимое нормальное аффинное многообразие с конечно порожденной группой классов дивизоров $\text{Cl}(X)$, квазиторм Нерона–Севери N и $\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K}^\times$. Тогда имеется следующая точная последовательность:*

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{\alpha} \widetilde{\text{Aut}}(R(X)) \xrightarrow{\beta} \text{Aut}(X) \rightarrow 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый автоморфизм $\varphi \in \widetilde{\text{Aut}}(R(X))$ индуцирует автоморфизм алгебры $R(X)_0 = \mathbb{K}[X]$, и это определяет отображение β . Квазиторм N действует однородными автоморфизмами алгебры $R(X)$, которые тождественны на $R(X)_0$. Это определяет α и показывает, что композиция $\beta \circ \alpha$ переводит элементы N в тождественный автоморфизм X .

ЛЕММА 5.2. *Пусть $u \in \text{Cl}(X)$ – ненулевой элемент. Тогда $R(X)_0$ -модуль $R(X)_u$ не является циклическим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что найдется $f \in R(X)_u$ такой, что для любого $g \in R(X)_u$ имеем $g = fh$ для некоторого $h \in R(X)_0$. Пусть D – дивизор из фиксированной системы представителей, класс которого равен u . Тогда разность $(D + \text{div}(g)) - (D + \text{div}(f)) = \text{div}(h)$ эффективна. Положим

$$D + \text{div}(f) = \sum_i a_i D_i, \quad a_i \in \mathbb{N}.$$

Найдется рациональная функция $F \in \mathbb{K}(X)$, имеющая на D_1 полюс порядка 1. Умножая ее на подходящую регулярную функцию, можно считать, что $\text{div}(F) = -D_1 + \sum_j b_j D_j$, $b_j \in \mathbb{N}$. Тогда $fF \in R(X)_u$, однако разность $\text{div}(fF) - \text{div}(f)$ не является эффективной.

Лемма 5.2 доказана.

Покажем, что $\text{Ker } \beta = \text{Im } \alpha$. Пусть $\varphi \in \text{Ker } \beta$ и f – простой однородный элемент кольца $R(X)$. Если $f \in R(X)_0$, то по условию $\varphi(f) = f$. Пусть $f \in R(X)_u$, $u \neq 0$, и $g \in R(X)_u$ – элемент, который не делится на f . Автоморфизм φ индуцирует автоморфизм поля частных $QR(X)$, тождественный на $QR(X)_0$. Но $f/g \in QR(X)_0$, откуда $f\varphi(g) = g\varphi(f)$. В силу однородной факториальности f делит $\varphi(f)$. Элемент $\varphi(f)$ также прост и, значит, $\varphi(f) = \lambda f$, $\lambda \in \mathbb{K}^\times$. Итак, φ действует умножением на скаляр на всех простых однородных, а значит, и на всех однородных элементах. Более того, $\varphi|_{R(X)_u}$ – скалярный оператор, а значит, φ определяет гомоморфизм из $\text{Cl}(X)$ в $\mathbb{K}^\times$, т.е. лежит в $\alpha(N)$.

Осталось показать, что отображение β сюръективно. Пусть $\psi \in \text{Aut}(X)$. Тогда ψ индуцирует автоморфизмы групп $\text{WDiv}(X)$ и $\text{Cl}(X)$. Пусть K – подгруппа в $\text{WDiv}(X)$, использованная в определении $R(X)$ (см. § 2), и $\psi(K)$ – ее образ.

Поскольку кольцо $R(X)$ с точностью до изоморфизма не зависит от выбора K и согласованного набора $\mathcal{F}$, мы можем зафиксировать изоморфизм τ между кольцами Кокса $R_{\psi(K), \psi^*(\mathcal{F})}(X)$ и $R_{K, \mathcal{F}}(X)$, который действует на $R(X)_0 = \mathbb{K}[X]$ тождественно. Тогда композиция $\psi^*: R_{K, \mathcal{F}}(X) \rightarrow R_{\psi(K), \psi^*(\mathcal{F})}(X)$ и τ является элементом подгруппы $\widetilde{\text{Aut}}(R(X))$, который индуцирует на компоненте $R(X)_0$ автоморфизм ψ^* .

Теорема 5.1 доказана.

Пусть X – аффинное торическое многообразие. Известно (см. [1]), что кольцо Кокса $R(X)$ является кольцом многочленов, причем порождающие его элементы однородны. Тем самым, описание группы автоморфизмов $\text{Aut}(X)$ сводится к описанию группы автоморфизмов кольца многочленов, нормализующих некоторую градуировку. При изучении автоморфизмов кольца многочленов важную роль играют понятия ручного и дикого автоморфизмов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. (i) Автоморфизм алгебры $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_m]$ называется *элементарным*, если это либо линейное преобразование, либо преобразование вида

$$(y_1, \dots, y_m) \mapsto (y_1, \dots, y_{i-1}, y_i + f, y_{i+1}, \dots, y_m),$$

где $f \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_m]$.

(ii) Автоморфизм называется *ручным*, если его можно представить в виде композиции элементарных автоморфизмов.

(iii) Автоморфизм, не являющийся ручным, называется *диким*.

Определим *элементарный* автоморфизм алгебры $\mathbb{K}[X]$ как образ при отображении β элементарного автоморфизма алгебры $R(X)$, лежащего в подгруппе $\widetilde{\text{Aut}}(R(X))$. Соответственно, автоморфизм алгебры $\mathbb{K}[X]$ назовем *ручным*, если он представим в виде композиции элементарных автоморфизмов, и *диким* в противном случае. В § 6 мы проиллюстрируем эти понятия на примере квадратичного конуса.

Напомним, что для любого аффинного многообразия X группа $\text{Aut}(X)$ обладает структурой бесконечномерной аффинной алгебраической группы в смысле работы [21]. Эта группа конечномерна, если на $\text{Aut}(X)$ имеется структура аффинной алгебраической группы, относительно которой естественное действие $\text{Aut}(X) \times X \rightarrow X$ является алгебраическим (эквивалентное определение конечномерной группы автоморфизмов дано в [22]).

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть X – аффинное торическое многообразие размерности ≥ 2 и $\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K}^\times$. Тогда группа $\text{Aut}(X)$ не является конечномерной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R(X) = \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m]$ – кольцо Кокса с заданной $\text{Cl}(X)$ -градуировкой. Компонента $R(X)_0$ содержит моном h , в который не входит y_1 , поскольку иначе реализация Кокса $q: \mathbb{K}^m \rightarrow X$ стягивала бы дивизор $y_1 = 0$, что противоречит предложению 2.3. По лемме 5.2 однородная компонента, содержащая y_1 , содержит моном f , в который не входит y_1 . Рассмотрим однородные автоморфизмы кольца $R(X)$, которые переводят y_1 в $y_1 + fF(h)$, где $F(t) \in \mathbb{K}[t]$, а переменные $y_2, \dots, y_m$ оставляют на месте. Они индуцируют автоморфизмы алгебры $R(X)_0$, при которых образы любого монома, содержащего y_1 , не содержатся ни в каком конечномерном подпространстве, что исключает для $\text{Aut}(X)$ возможность быть аффинной алгебраической группой.

Теорема 5.4 доказана.

§ 6. Дикий автоморфизм квадратичного конуса

Рассмотрим квадратичный конус

$$X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1x_4 - x_2x_3 = 0\}.$$

Многообразие X можно реализовать как конус вырожденных матриц порядка 2. Здесь $R(X)$ есть кольцо многочленов $\mathbb{K}[y_1, y_2, y_3, y_4]$ с $\mathbb{Z}$ -градуировкой $\deg(y_1) = \deg(y_2) = 1$, $\deg(y_3) = \deg(y_4) = -1$ и $x_1 = y_1y_3$, $x_2 = y_1y_4$, $x_3 = y_2y_3$, $x_4 = y_2y_4$.

Рассмотрим автоморфизм τ конуса X , определенный формулой

$$\tau: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + x_1(x_3 - x_2) \\ x_3 + x_1(x_3 - x_2) & x_4 + (x_3 + x_2)(x_3 - x_2) + x_1(x_3 - x_2)^2 \end{pmatrix}.$$

Обратный к нему задается как

$$\tau^{-1}: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 - x_1(x_3 - x_2) \\ x_3 - x_1(x_3 - x_2) & x_4 - (x_3 + x_2)(x_3 - x_2) + x_1(x_3 - x_2)^2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, подъем τ на кольцо Кокса определен формулой

$$\zeta: (y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto (y_1, y_2 + y_1(y_1y_4 - y_2y_3), y_3, y_4 + y_3(y_1y_4 - y_2y_3))$$

и известен как *автоморфизм Аника* кольца многочленов от четырех переменных.

ТЕОРЕМА 6.1. *Автоморфизм τ является диким.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементарный автоморфизм φ алгебры $R(X)$, сохраняющий градуировку, либо умножает переменные на ненулевые константы, либо переводит (y_1, y_2, y_3, y_4) в один из наборов

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2H_1(y_2y_3, y_2y_4), y_2, y_3, y_4), & \quad (y_1, y_2 + y_1H_2(y_1y_3, y_1y_4), y_3, y_4), \\ (y_1, y_2, y_3 + y_4H_3(y_1y_4, y_2y_4), y_4), & \quad (y_1, y_2, y_3, y_4 + y_3H_4(y_1y_3, y_2y_3)). \end{aligned}$$

Следовательно, группа ручных автоморфизмов порождается этими автоморфизмами и автоморфизмом транспонирования $(y_1, y_2, y_3, y_4) \rightarrow (y_3, y_4, y_1, y_2)$, обращающим градуировку. Предположим, что автоморфизм Аника равен композиции элементарных автоморфизмов, нормализующих градуировку:

$$\zeta = \varphi_n \circ \cdots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1.$$

Поскольку ζ сохраняет градуировку и сопряжение элементарного автоморфизма, сохраняющего градуировку, с помощью транспонирования равно элементарному автоморфизму, сохраняющему градуировку, то можно считать, что все φ_i сохраняют градуировку.

Заменим в указанном разложении все нелинейные автоморфизмы, изменяющие y_3 или y_4 , на их линейные части, и композицию новых автоморфизмов обозначим через ρ . Поскольку линейные части у ζ и у тождественного автоморфизма совпадают, мы получаем $\rho(y_3) = y_3$, $\rho(y_4) = y_4$. Пусть $f = \zeta(y_1) - \rho(y_1)$ и $g = \zeta(y_2) - \rho(y_2)$. Тогда

$$\rho: (y_1, y_2, y_3, y_4) \rightarrow (y_1 - f, y_2 + y_1(y_1y_4 - y_2y_3) - g, y_3, y_4).$$

Рассмотрим идеал $I = (y_1, y_2) \triangleleft \mathbb{K}[y_1, y_2, y_3, y_4]$.

ЛЕММА 6.2. *Многочлены f и g лежат в идеале I^3 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ζ_j есть $\varphi_j \circ \dots \circ \varphi_1$ и ρ_j получено как композиция тех же автоморфизмов с заменой автоморфизмов, изменяющих y_3 и y_4 , на их линейные части. Обозначим $f_j = \zeta_j(y_1) - \rho_j(y_1)$, $g_j = \zeta_j(y_2) - \rho_j(y_2)$, $h_j = \zeta_j(y_3) - \rho_j(y_3)$, $s_j = \zeta_j(y_4) - \rho_j(y_4)$.

Докажем индукцией по j что $f_j, g_j \in I^3$ и $h_j, s_j \in I$. База индукции при $j = 1$ легко проверяется. При переходе от $j = k$ к $j = k + 1$ изменяется только один из многочленов f_j, g_j, h_j, s_j . Мы рассмотрим случаи, когда изменяются f_j и h_j ; остальные случаи аналогичны.

1) Пусть изменился многочлен f_j . Тогда φ_{k+1} имеет вид

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto (y_1 + y_2 H_1(y_2 y_3, y_2 y_4), y_2, y_3, y_4).$$

Тем самым,

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= \zeta_{k+1}(y_1) - \rho_{k+1}(y_1) \\ &= \zeta_k(y_1) + \zeta_k(y_2) H_1(\zeta_k(y_2) \zeta_k(y_3), \zeta_k(y_2) \zeta_k(y_4)) \\ &\quad - \rho_k(y_1) - \rho_k(y_2) H_1(\rho_k(y_2) \rho_k(y_3), \rho_k(y_2) \rho_k(y_4)) \\ &= f_k + g_k H_1(\zeta_k(y_2) \zeta_k(y_3), \zeta_k(y_2) \zeta_k(y_4)) \\ &\quad + \rho_k(y_2) (H_1(\zeta_k(y_2) \zeta_k(y_3), \zeta_k(y_2) \zeta_k(y_4)) - H_1(\rho_k(y_2) \rho_k(y_3), \rho_k(y_2) \rho_k(y_4))). \end{aligned}$$

По предположению индукции f_k и g_k лежат в I^3 . Остается доказать, что последнее слагаемое лежит в I^3 . Достаточно это сделать в случае, когда H_1 — моном. Пусть $H_1(u, v) = u^l v^r$. Автоморфизмы ζ_k и ρ_k сохраняют градуировку, поэтому $\zeta_k(y_2) \in I$ и $\rho_k(y_2) \in I$. Следовательно, если $l + r \geq 2$, то

$$\rho_k(y_2) (H_1(\zeta_k(y_2) \zeta_k(y_3), \zeta_k(y_2) \zeta_k(y_4)) - H_1(\rho_k(y_2) \rho_k(y_3), \rho_k(y_2) \rho_k(y_4))) \in I^3.$$

Если же $l + r < 2$, то либо $l + r = 0$, и тогда $H_1 = \text{const}$ и

$$H_1(\zeta_k(y_2) \zeta_k(y_3), \zeta_k(y_2) \zeta_k(y_4)) - H_1(\rho_k(y_2) \rho_k(y_3), \rho_k(y_2) \rho_k(y_4)) = 0,$$

либо $l + r = 1$, и тогда без ограничения общности можно считать, что $l = 1$, $r = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} &\rho_k(y_2) (H_1(\zeta_k(y_2) \zeta_k(y_3), \zeta_k(y_2) \zeta_k(y_4)) - H_1(\rho_k(y_2) \rho_k(y_3), \rho_k(y_2) \rho_k(y_4))) \\ &= \rho_k(y_2) (\zeta_k(y_2) \zeta_k(y_3) - \rho_k(y_2) \rho_k(y_3)) \\ &= \rho_k(y_2) ((\rho_k(y_2) + g_k)(\rho_k(y_3) + h_k) - \rho_k(y_2) \rho_k(y_3)) \\ &= \rho_k(y_2) (\rho_k(y_2) h_k + g_k \rho_k(y_3) + g_k h_k). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\rho_k(y_2), h_k \in I$ и $g_k \in I^3$, получаем, что все выражение лежит в I^3 . Итак, $f_{k+1} \in I^3$.

2) Пусть изменился многочлен h_j . Тогда φ_{k+1} имеет вид

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto (y_1, y_2, y_3 + \mu y_4 + y_4 F(y_1 y_4, y_2 y_4), y_4),$$

где F — многочлен без свободного члена. Значит,

$$\begin{aligned} h_{k+1} &= \zeta_{k+1}(y_3) - \rho_{k+1}(y_3) \\ &= \zeta_k(y_3) + \mu \zeta_k(y_4) + \zeta_k(y_4) F(\zeta_k(y_1) \zeta_k(y_4), \zeta_k(y_2) \zeta_k(y_4)) - \rho_k(y_3) - \mu \rho_k(y_4) \\ &= h_k + \mu s_k + \zeta_k(y_4) F(\zeta_k(y_1) \zeta_k(y_4), \zeta_k(y_2) \zeta_k(y_4)). \end{aligned}$$

Так как $h_k \in I$, $s_k \in I$, $\zeta_k(y_1) \in I$ и $\zeta_k(y_2) \in I$, то мы получаем, что $h_{k+1} \in I$. Лемма 6.2 доказана.

Вычислим матрицу Якоби J автоморфизма ρ . Поскольку частная производная многочлена из I^3 лежит в I^2 , получаем

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2y_1y_4 - y_2y_3 & 1 - y_1y_3 & -y_1y_2 & y_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + Q,$$

где Q – матрица с элементами из I^2 . Отсюда

$$\det(J) = 1 - y_1y_3 + c, \quad c \in I^2.$$

Итак, определитель отличен от константы и, значит, ρ не является автоморфизмом. Полученное противоречие завершает доказательство.

Теорема 6.1 доказана.

Интересно отметить, что если добавить пятую ζ -неподвижную переменную степени 0, то автоморфизм ζ становится ручным в классе автоморфизмов, сохраняющих градуировку (см. [15]). Укажем разложение такого автоморфизма в композицию элементарных:

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) &\mapsto (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 + (y_1y_4 - y_2y_3)) \\ &\mapsto (y_1, y_2 + y_1y_5 + y_1(y_1y_4 - y_2y_3), y_3, y_4, y_5 + (y_1y_4 - y_2y_3)) \\ &\mapsto (y_1, y_2 + y_1y_5 + y_1(y_1y_4 - y_2y_3), y_3, \\ &\quad y_4 + y_3y_5 + y_3(y_1y_4 - y_2y_3), y_5 + (y_1y_4 - y_2y_3)) \\ &\mapsto (y_1, y_2 + y_1y_5 + y_1(y_1y_4 - y_2y_3), y_3, y_4 + y_3y_5 + y_3(y_1y_4 - y_2y_3), y_5) \\ &\mapsto (y_1, y_2 + y_1(y_1y_4 - y_2y_3), y_3, y_4 + y_3y_5 + y_3(y_1y_4 - y_2y_3), y_5) \\ &\mapsto (y_1, y_2 + y_1(y_1y_4 - y_2y_3), y_3, y_4 + y_3(y_1y_4 - y_2y_3), y_5). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Известный автоморфизм Нагаты

$$(y_1, y_2, y_3) \mapsto (y_1 - 2y_2(y_1y_3 + y_2^2) - y_3(y_1y_3 + y_2^2)^2, y_2 + y_3(y_1y_3 + y_2^2), y_3)$$

является диким автоморфизмом кольца многочленов от трех переменных (см. [13]). Условие однородности этого автоморфизма относительно некоторой градуировки равносильно условиям

$$\deg(y_1) = 3 \deg(y_2), \quad \deg(y_3) = -\deg(y_2).$$

В случае $\mathbb{Z}$ -градуировки мы имеем действие одномерного тора $(t^3y_1, ty_2, t^{-1}y_3)$, факторпространство которого является аффинной плоскостью, и морфизм факторизации не является реализацией Кокса. В случае $\mathbb{Z}_n$ -градуировки морфизм факторизации для действия $(\varepsilon^3y_1, \varepsilon y_2, \varepsilon^{-1}y_3)$, $\varepsilon^n = 1$, определяет реализацию Кокса пространства $X_n = \mathbb{K}^3/\mathbb{Z}_n$, и автоморфизм Нагаты индуцирует дикий автоморфизм многообразия X_n . В частности, автоморфизм Нагаты определяет дикий автоморфизм аффинного конуса $X_2 \subset \mathbb{K}^6$ над образом вложения Веронезе $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$.

§ 7. Дополнение. Теория дивизоров для полугруппы

Всюду в этом параграфе под полугруппой подразумевается коммутативная полугруппа с единицей e , все неединичные элементы которой необратимы. Для операции в полугруппе используется мультипликативная запись. Полугруппа S называется *свободной*, если найдется подмножество $P \subset S \setminus \{e\}$ такое, что любой $s \in S \setminus \{e\}$ можно представить в виде $s = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$, $p_i \in P$, $k_i \in \mathbb{N}$, и такая запись единственна с точностью до порядка сомножителей. Элементы P — это в точности неразложимые или простые элементы S , поэтому P определяется полугруппой S однозначно. В ряде ситуаций вместо термина “свободная полугруппа” удобно использовать термин “факториальная полугруппа”.

Пусть Γ — произвольная полугруппа. Следующее определение заимствовано из [10; гл. III, § 3] (см. также [11]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. *Теорией дивизоров* для полугруппы Γ называется вложение $\tau : \Gamma \rightarrow D$ в свободную полугруппу D такое, что:

(i) если $a, b \in \Gamma$ и $\tau(a) = \tau(b)c_1$ для некоторого $c_1 \in D$, то $c_1 = \tau(c)$ для некоторого $c \in \Gamma$;

(ii) если для $d_1, d_2 \in D$ выполнено

$$\{a \in \Gamma \mid \exists d \in D : \tau(a) = dd_1\} = \{b \in \Gamma \mid \exists d \in D : \tau(b) = dd_2\},$$

то $d_1 = d_2$.

В [10; гл. III, § 3, теорема 1] доказано, что если полугруппа Γ обладает теорией дивизоров, то такая теория единственна с точностью до изоморфизма, поэтому далее мы обозначаем D через $D(\Gamma)$ и отождествляем элементы из Γ с их образами в $D(\Gamma)$.

Пусть полугруппа Γ конечно порождена. Выясним, когда Γ допускает теорию дивизоров, и напомним известную реализацию этой теории. Поскольку в разложение каждого образующего полугруппы Γ входит конечное число простых элементов из $D(\Gamma)$, полугруппа $D(\Gamma)$ конечно порождена и Γ вкладывается в решетку $\mathbb{Z}D(\Gamma)$. Условие насыщенности, возникающее в следующей лемме, является необходимым для существования теории дивизоров у полугруппы Γ (ср. [10; гл. III, § 3, теорема 3]).

ЛЕММА 7.2. *Пусть $\Gamma \subseteq D(\Gamma)$ — теория дивизоров для полугруппы Γ и L — подгруппа в свободной абелевой группе $\mathbb{Z}D(\Gamma)$, порожденная Γ . Если для элемента $l \in L$ найдется $t \in \mathbb{N}$ такое, что $l^t \in \Gamma$, то и $l \in \Gamma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $l^t \in \Gamma$ влечет $l \in D(\Gamma)$. Поскольку $l = ab^{-1}$, $a, b \in \Gamma$, то $a = bl$, и из условия (ii) следует, что $l \in \Gamma$.

Лемма 7.2 доказана.

Хорошо известно, что для конечно порожденной полугруппы Γ условие насыщенности равносильно условию $\Gamma = \sigma \cap L$, где σ — конус в пространстве $L_{\mathbb{Q}} := L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, порожденный (образующими) Γ . Пусть $\sigma^{\vee}$ — двойственный конус в сопряженном пространстве $L_{\mathbb{Q}}^*$, т.е.

$$\sigma^{\vee} = \{f \in L_{\mathbb{Q}}^* : f(x) \geq 0 \ \forall x \in \sigma\},$$

и $f_1, \dots, f_r$ – примитивные векторы на ребрах конуса $\sigma^\vee$. Тогда вложение

$$\Gamma \hookrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^r, \quad a \rightarrow (f_1(a), \dots, f_r(a)),$$

является теорией дивизоров для Γ . Заметим, что это вложение определяет минимальную реализацию конуса σ в виде пересечения положительного октанта $\mathbb{Q}_{\geq 0}^r$ и некоторого подпространства $V \subseteq \mathbb{Q}^r$.

Обратно, пусть $V \subseteq \mathbb{Q}^r$ – такое подпространство, что для конуса $\sigma := V \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}^r$ подмножества $\sigma_i := \sigma \cap \{x_i = 0\}$, $i = 1, \dots, r$, попарно различны и набор этих подмножеств совпадает с набором граней коразмерности 1 конуса σ . Пусть также $L \subseteq V \cap \mathbb{Z}^r$ – подрешетка, координатная проекция которой на каждую из осей Ox_i совпадает со множеством целых точек на этой оси. Тогда для полугруппы $\Gamma := L \cap \sigma$ вложение $\Gamma \hookrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ является теорией дивизоров. В самом деле, координатные функции x_i – это в точности примитивные векторы на ребрах конуса $\sigma^\vee$.

В дальнейшем нас будут интересовать не конечно порожденные полугруппы. Пример теории дивизоров в алгебраической геометрии доставляет теория дивизоров Вейля. Пусть X – неприводимое нормальное аффинное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ и Γ – полугруппа классов ассоциированности ненулевых элементов алгебры $\mathbb{K}[X]$ с естественной операцией умножения. Полугруппу Γ можно отождествить с полугруппой главных эффективных дивизоров на X , а полугруппа $D(\Gamma)$ реализуется как полугруппа эффективных дивизоров Вейля на X . Примеры теорий дивизоров, возникающие в теории чисел, можно найти в [10; гл. III].

Цель настоящего дополнения – доказать следующий результат, обобщающий теорему единственности для теории дивизоров.

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть $\tau: \Gamma \rightarrow D(\Gamma)$ – теория дивизоров для полугруппы Γ и $\alpha: \Gamma \rightarrow S$ – вложение Γ в свободную полугруппу S , для которого выполнены следующие условия:

- (i) если для некоторых $a, b \in \Gamma$ найдется $s \in S$ такой, что $\alpha(a) = \alpha(b)s$, то $s = \alpha(c)$ для некоторого $c \in \Gamma$;
- (ii) если элементы некоторого подмножества $A \subseteq \Gamma$ взаимно просты в совокупности в $D(\Gamma)$, т.е. не делятся одновременно ни на какой неединичный элемент из $D(\Gamma)$, то элементы подмножества $\alpha(A) \subseteq S$ взаимно просты в совокупности в S .

Тогда существует единственное вложение $\beta: D(\Gamma) \hookrightarrow S$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\alpha} & S \\ & \searrow \tau \quad \nearrow \beta & \\ & D(\Gamma) & \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование. Пусть P – множество простых элементов S и $P_1 \subseteq P$ – подмножество тех элементов, на которые делится хотя бы один элемент $\alpha(a)$, $a \in \Gamma \setminus \{0\}$. Не ограничивая общности, мы будем предполагать, что $P = P_1$. Для каждого $d \in D := D(\Gamma)$ и $s \in S$ определим

$$L(d) = \{a \in \Gamma \mid \exists d' \in D : a = dd'\}, \quad N(s) = \{b \in \Gamma \mid \exists s' \in S : \alpha(b) = ss'\}.$$

ЛЕММА 7.4. (i) Пусть $p \in P$. Тогда найдется простой элемент $q \in D$ такой, что $L(q) \subseteq N(p)$.

(ii) Пусть $q \in S$ – простой элемент. Тогда найдется $p_1 \in P$ такой, что $N(p_1) \subseteq L(q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $N(p) \neq \emptyset$, то найдется $a \in \Gamma$, для которого $\alpha(a) = ps$, $s \in S$. Пусть $a = q_1^{k_1} \cdots q_l^{k_l}$ – разложение на простые множители в D . Если $L(q_i) \not\subseteq N(p)$, то для любого $i = 1, \dots, l$ найдется $a_i \in \Gamma$, который делится на q_i , и для которого $\alpha(a_i)$ не делится на p . Рассмотрим $b = a_1^{k_1} \cdots a_l^{k_l}$. Тогда b делится на a . Однако $\alpha(a)$ делится на p , откуда следует, что на p делится некоторый $\alpha(a_i)$, противоречие. Утверждение (ii) доказывается аналогично.

Лемма 7.4 доказана.

ЛЕММА 7.5. Пусть $q, q_1 \in D$ – простые элементы, причем $L(q) \subseteq L(q_1)$. Тогда $q = q_1$.

Для доказательства достаточно заметить, что найдется $a \in \Gamma$, который делится на q , но не делится на qq_1 , а значит, не лежит в $L(q_1)$.

Для такого простого $q \in D$ найдутся $p \in P$ и простой $q_1 \in D$ такие, что $L(q_1) \subseteq N(p) \subseteq L(q)$, откуда $q = q_1$ и $N(p) = L(q)$. Пусть $\{p_1, \dots, p_t\}$ – все простые элементы, для которых $N(p_i) = L(q)$. Поскольку $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} N(p_i^j) = \emptyset$, то для каждого i найдется $r_i \in \mathbb{N}$ такое, что

$$N(p_i) = N(p_i^2) = \dots = N(p_i^{r_i}) \neq N(p_i^{r_i+1}).$$

Итак, с каждым простым элементом $q \in D$ канонически связаны набор элементов $\{p_1, \dots, p_t\}$ и набор показателей $\{r_1, \dots, r_t\}$.

Определим $\beta(q) = p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t}$ и продолжим это отображение до гомоморфизма $\beta: D \rightarrow S$. Поскольку при разных q связанные с ними наборы $\{p_1, \dots, p_t\}$ не пересекаются, отображение β инъективно. Остается проверить, что $\beta(a) = \alpha(a)$ для любого $a \in \Gamma$.

Пусть простой делитель $q \in D$ входит в разложение элемента a с кратностью k , $\beta(q) = p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t}$ и каждый p_i входит в разложение $\alpha(a)$ с кратностью n_i . Для каждого p_i найдется простой $q' \in D$, для которого $L(q') \subseteq N(p_i)$. Если это включение является строгим, то найдется элемент b из $N(p_i)$, который не делится на q' . Но тогда объединение $L(q')$ с элементом b дает множество элементов, которые взаимно просты в совокупности в D , что противоречит условию (ii) теоремы 7.3. Значит, $L(q') = N(p_i)$. Тем самым, каждый простой делитель p_i элемента $\alpha(a)$ связан с (единственным) простым делителем q элемента a , и достаточно доказать, что $n_i = kr_i$ для любого $i = 1, \dots, t$.

ЛЕММА 7.6. Если $s \in S$ и s не делится на $p_1, \dots, p_t$, то найдется $b \in \Gamma$, для которого $\alpha(b)$ делится на s и не делится на $p_1, \dots, p_t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s = s_1 \cdots s_n$ – разложение на простые множители. Если $N(s_j) \subseteq N(p_i) = L(q)$, то, как мы только что видели, $N(s_j) = L(q)$ и, значит, s_j совпадает с одним из элементов $p_1, \dots, p_t$, противоречие. Значит, найдутся $b_j \in \Gamma$, для которых $\alpha(b_j)$ делится на s_j и не делится на $p_1, \dots, p_t$. Остается положить $b = b_1 \cdots b_t$.

Лемма 7.6 доказана.

Имеем $L(q) = N(p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t}) \supsetneq N(p_j^{r_j+1})$. Значит, для каждого j найдется $a_j \in \Gamma$ такой, что $\alpha(a_j)$ делится на $p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t}$, но не делится на $p_j^{r_j+1}$. Тогда

$$\alpha(a_j) = p_1^{r_{1j}} \cdots p_t^{r_{tj}} h_j, \quad r_{ij} \geq r_i, \quad r_{jj} = r_j,$$

и элемент h_j взаимно прост с $p_1, \dots, p_t$.

ЛЕММА 7.7. $r_{ij} = r_i$ для всех $i, j = 1, \dots, t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что найдется пара (u, v) , для которой $r_{uv} > r_u$. Вычтем из вектора $(r_{1u}, \dots, r_{tu})$ вектор $(r_{1v}, \dots, r_{tv})$. На u -м месте получим отрицательное число. Пусть k_1 – первая позиция в векторе разности, где стоит отрицательное число. Прибавим к разности набор $(r_{1k_1}, \dots, r_{tk_1})$. Будем повторять эту процедуру до тех пор, пока не получим набор $(z_1, \dots, z_t)$ с неотрицательными координатами. Имеем

$$(z_1, \dots, z_t) + (r_{1v}, \dots, r_{tv}) = (r_{1u}, \dots, r_{tu}) + \sum_{i=1}^m (r_{1k_i}, \dots, r_{tk_i}).$$

Заметим, что $m \geq 1$ и $z_{k_m} < r_{k_m}$, так как z_{k_m} получено из отрицательного числа прибавлением $r_{k_m k_m} = r_{k_m}$. Положим $c = a_u a_{k_1} \cdots a_{k_m}$. Напомним, что $\alpha(a_v) = p_1^{r_{1v}} \cdots p_t^{r_{tv}} h_v$, и по лемме 7.6 найдется $b \in \Gamma$, для которого $\alpha(b)$ делится на h_v и не делится на $p_1, \dots, p_t$. Тогда $bc = a_v b'$ для некоторого $b' \in \Gamma$. Следовательно, $\alpha(b') = p_1^{z_1} \cdots p_t^{z_t} f$ и f не делится на $p_1, \dots, p_t$. Из условий $z_{k_m} < r_{k_m}$ и $N(p_{k_m}) = N(p_{k_m}^{r_{k_m}})$ следует, что $z_{k_m} = 0$. Но $N(p_i) = N(p_{k_m})$, значит, все z_i равны нулю. С другой стороны,

$$z_v = r_{vu} + \sum_{i=1}^m r_{vk_i} - r_{vv} \geq \sum_{i=1}^m r_{vk_i} > 0,$$

противоречие.

Лемма 7.7 доказана.

ЛЕММА 7.8. Найдется элемент $c \in \Gamma$, который делится на q и не делится на q^2 и для которого $\alpha(c)$ делится на все $p_i^{r_i}$ и не делится ни на один из $p_i^{r_i+1}$, $i = 1, \dots, t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предыдущей леммы следует, что элемент a_1 удовлетворяет двум последним требованиям, а также делится на q . Покажем, что каждый такой элемент c не делится на q^2 . Пусть $c = q^r h$, где элемент $h \in D$ взаимно прост с q и $r > 1$. Зафиксируем элемент $b \in \Gamma$, который делится на qh и не делится на q^2 . Тогда $b^r = cg$, $g \in \Gamma$ и g взаимно прост с q . Отсюда получаем, что $\alpha(b)^r = \alpha(c)\alpha(g)$ и $\alpha(g)$ не делится на $p_1, \dots, p_t$. Значит, $\alpha(b)$ не делится на $p_i^{r_i}$, поскольку $r > 1$. С другой стороны, b делится на q и, значит, $\alpha(b)$ делится на $p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t}$, противоречие.

Лемма 7.8 доказана.

Вернемся к доказательству равенства $n_i = kr_i$. Можно подобрать число m так, что $mr_i \leq n_i$ для всех $i = 1, \dots, t$ и хотя бы для одного номера j имеем $(m+1)r_j > n_j$. Тогда найдутся элементы $f_1, f_2 \in \Gamma$ такие, что $f_1 a = f_2 c^m$ и $\alpha(f_1)$ взаимно прост с $p_1, \dots, p_t$. Тогда кратность вхождения p_j в $\alpha(f_2)$ меньше r_j ,

а потому f_2 взаимно прост с $p_1, \dots, p_t$ и f_2 взаимно прост с q . Итак, $n_i = mr_i$. С другой стороны, приравнявая кратности вхождения q , получаем $k = m$. Это завершает доказательства равенства $n_i = kr_i$ и существования в теореме 7.3.

Единственность. Рассмотрим другое вложение $\gamma: D(\Gamma) \rightarrow S$, удовлетворяющее условиям теоремы. Пусть $a \in \Gamma$, $a = q_1^{k_1} \cdots q_l^{k_l}$. Тогда

$$\alpha(a) = \beta(q_1)^{k_1} \cdots \beta(q_l)^{k_l} = \gamma(q_1)^{k_1} \cdots \gamma(q_l)^{k_l}. \quad (*)$$

Если в разложение $\gamma(q_i)$ входит простой множитель p , то $L(q_i) \subseteq N(p)$, а значит, $L(q_i) = N(p)$. Следовательно, $\gamma(q_i) = p_1^{m_1} \cdots p_t^{m_t}$, где $p_1, \dots, p_t$ – простые элементы, связанные с q_i . Если некоторое m_j больше r_j , то возникает противоречие с $N(p_j^{r_j+1}) \subsetneq L(q_i)$. Значит, $m_j \leq r_j$ для всех j , и тогда в силу (*) получаем $m_j = r_j$. Это доказывает, что $\beta = \gamma$.

Теорема 7.3 доказана.

Покажем на примерах, что условия (i) и (ii) в теореме 7.3 существенны.

ПРИМЕР 7.9. Пусть Γ – подполугруппа в мультипликативной полугруппе $\mathbb{N}$ натуральных чисел, порожденная 10, 14, 15 и 21. Теория дивизоров для Γ реализуется вложением Γ в подполугруппу D , порожденную 2, 3, 5 и 7. С другой стороны, вложение $\alpha: \Gamma \rightarrow \mathbb{N}$, определенное на образующих как $\alpha(10) = 10$, $\alpha(14) = 2$, $\alpha(15) = 15$ и $\alpha(21) = 3$, не может быть продолжено до вложения D в $\mathbb{N}$. Здесь не выполнено условие (i) теоремы 7.3.

ПРИМЕР 7.10. Пусть Γ – подполугруппа в мультипликативной полугруппе $\mathbb{N}$, порожденная 4, 6 и 9. Теория дивизоров для Γ реализуется вложением Γ в подполугруппу D , порожденную 2 и 3. С другой стороны, вложение $\alpha: \Gamma \rightarrow \mathbb{N}$, определенное на образующих как $\alpha(4) = 20$, $\alpha(6) = 30$ и $\alpha(9) = 45$, не может быть продолжено до вложения D в $\mathbb{N}$. Здесь нарушено условие (ii) теоремы 7.3.

Список литературы

- [1] D. A. Cox, “The homogeneous coordinate ring of a toric variety”, *J. Algebraic Geom.*, **4:1** (1995), 17–50.
- [2] Y. Hu, S. Keel, “Mori dream spaces and GIT”, *Michigan Math. J.*, **48:1** (2000), 331–348.
- [3] F. Berchtold, J. Hausen, “Homogeneous coordinates for algebraic varieties”, *J. Algebra*, **266:2** (2003), 636–670.
- [4] E. J. Elizondo, K. Kurano, K. K. Watanabe, “The total coordinate ring of a normal projective variety”, *J. Algebra*, **276:2** (2004), 625–637.
- [5] И. В. Аржанцев, “О факториальности колец Кокса”, *Матем. заметки*, **85:5** (2009), 643–651; англ. пер.: I. V. Arzhantsev, “On the factoriality of Cox rings”, *Math. Notes*, **85:5–6** (2009), 623–629.
- [6] С. А. Гайфуллин, “Аффинные торические $SL(2)$ -вложения”, *Матем. сб.*, **199:3** (2008), 3–24; англ. пер.: S. A. Gaifullin, “Affine toric $SL(2)$ -embeddings”, *Sb. Math.*, **199:3** (2008), 319–339.
- [7] V. Batyrev, F. Haddad, “On the geometry of $SL(2)$ -equivariant flips”, *Mosc. Math. J.*, **8:4** (2008), 621–646.
- [8] F. Berchtold, J. Hausen, “Cox rings and combinatorics”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **359:3** (2007), 1205–1252.

- [9] J. Hausen, “Cox rings and combinatorics. II”, *Mosc. Math. J.*, **8**:4 (2008), 711–757.
- [10] З. И. Борович, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, 3-е изд., Наука, М., 1985; англ. пер. 2-го изд.: Z. I. Borevich, I. R. Shafarevich, *Number theory*, Academic Press, New York–London, 1966.
- [11] L. Skula, “Divisorentheorie einer Halbgruppe”, *Math. Z.*, **114**:2 (1970), 113–120.
- [12] D. Bühler, *Homogener Koordinatenring und Automorphismengruppe vollständiger torischer Varietäten*, Diplomarbeit, Basel, 1996.
- [13] I. P. Shestakov, U. U. Umirbaev, “The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables”, *J. Amer. Math. Soc.*, **17**:1 (2004), 197–227.
- [14] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Progr. Math., **190**, Birkhäuser, Basel, 2000.
- [15] M. K. Smith, “Stably tame automorphisms”, *J. Pure Appl. Algebra*, **58**:2 (1989), 209–212.
- [16] I. V. Arzhantsev, J. Hausen, “Geometric invariant theory via Cox rings”, *J. Pure Appl. Algebra*, **213**:1 (2009), 154–172.
- [17] F. Knop, H. Kraft, Th. Vust, “The Picard group of a G -variety”, *Algebraische Transformationsgruppen und invariantentheorie*, DMV Sem., **13**, Birkhäuser, Basel, 1989, 77–87.
- [18] M. Nagata, “On rational surfaces. II”, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math.*, **33** (1960), 271–293.
- [19] M. Koras, P. Russell, “Linearization problems”, *Algebraic group actions and quotients* (Wykno, Poland, 2000), Hindawi Publ., Cairo, 2004, 91–107.
- [20] I. V. Arzhantsev, J. Hausen, “On embeddings of homogeneous spaces with small boundary”, *J. Algebra*, **304**:2 (2006), 950–988.
- [21] I. R. Shafarevich, “On some infinite-dimensional groups”, *Simpos. Int. Geom. Algebr.* (Roma, 1965), *Rend. Mat. e Appl.* (5), **25**, 1966, 208–212; И. Р. Шафаревич, *Сочинения. Том 3, часть 2*, АОЗТ “Прима В”, М., 1996.
- [22] C. P. Ramanujam, “A note on automorphism groups of algebraic varieties”, *Math. Ann.*, **156**:1 (1964), 25–33.

И. В. Аржанцев (I. V. Arzhantsev)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: arjantse@mccme.ru

Поступила в редакцию

10.10.2008 и 06.06.2009

С. А. Гайфуллин (S. A. Gaifullin)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: sgayf@yandex.ru