А. А. Никитин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. СБОРНИК ЗАДАЧ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям

Книга доступна в электронной библиотечной системе biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2018

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
Н62

***Автор*:**

Никитин Алексей Антонович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, доцент департамента математики факультета экономических наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

***Рецензенты*:**

Шапошников С. В. — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Соболевский А. Н. — доктор физико-математических наук, директор Института проблем передачи информации Российской академии наук.

Никитин, А. А.

Н62 Математический анализ. Сборник задач : учеб. пособие для академического бакалавриата / А. А. Никитин. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 353 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс).

ISBN 978-5-9916-8585-6

В сборник включено около 1500 отобранных задач по основным темам курса математического анализа: теория множеств, предел числовой последовательности, предел и непрерывность функций одного и нескольких переменных, дифференциальное исчисление, исследование графиков функций, неопределенное, определенное и несобственное интегрирование; числовые и функциональные ряды, ряды Фурье.

Стандартные, базовые задачи по каждому разделу дополнены задачами олимпиадного и исследовательского характера. Многие из задач и утверждений снабжены иллюстрациями. Почти ко всем задачам даны ответы или указания.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов, обучающихся по математическим направлениям, а также для преподавателей, ведущих практические семинарские занятия по математическому анализу.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-9916-8585-6

Оглавление

Предисловие ... **7**

Глава 1. Теория вещественных чисел и множеств ... **11**

Листок 0. Задачи на мощность числовых множеств ... 12

Листок 1. Метод математической индукции ... 14

Листок 2. Ограниченные и неограниченные числовые множества ... 18

Глава 2. Предел числовой последовательности ... **23**

Листок 3. Понятие числовой последовательности ... 24

Листок 4. Предел последовательности ... 29

Листок 5. Монотонная последовательность и ее предел ... 34

Листок 6. Критерий Коши существования предела последовательности ... 39

Листок 7. Предельные точки последовательности и множества ... 44

Листок 8. Вычисление пределов последовательности ... 49

Глава 3. Функция одной переменной. Предел и непрерывность функции ... **55**

Листок 9. Предел функции. Условие его существования ... 56

Листок 10. Вычисление пределов функций ... 62

Листок 11. Асимптотическое сравнение функций. O-символика ... 67

Листок 12. Непрерывность функции. Точки разрыва ... 71

Листок 13. Свойства непрерывных функций ... 76

Глава 4. Дифференцирование функции одной переменной ... **81**

Листок 14. Производная и дифференциал. Основные правила вычисления ... 82

Листок 15. Производные функций, заданных параметрически ... 87

Листок 16. Производные и дифференциалы высших порядков ... 92

Листок 17. Основные свойства дифференцируемых функций ... 97

Листок 18. Равномерная непрерывность ... 101

Листок 19. Раскрытие неопределенностей. Правила Лопиталя ... 105

Листок 20. Формула Тейлора и ее применения к вычислению пределов ... 109

Глава 5. Неопределенный интеграл ... **113**

Листок 21. Неопределенный интеграл. Основные понятия ... 114

Листок 22. Интегрирование рациональных функций ... 117

Листок 23. Интегрирование иррациональных выражений ... 121

Листок 24. Интегрирование тригонометрических выражений ... 124

Листок 25. Неопределенный интеграл. Повторение ... 128

Глава 6. Исследование функции одной переменной ... **133**

Листок 26. Возрастание и убывание функции. Направление выпуклости ... 134

Листок 27. Локальные экстремумы 138
Листок 28. Построение графиков функций. Декартовы координаты 142
Листок 29. Построение графиков функций. Продолжение 146

Глава 7. Определенный интеграл 149
Листок 30. Определенный интеграл. Основные понятия 150
Листок 31. Вычисление определенных интегралов 154
Листок 32. Оценки интегралов. Теоремы о среднем 158
Листок 33. Несобственные интегралы 162
Листок 34. Несобственные интегралы. Продолжение 166
Листок 35. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов... 170

Глава 8. Геометрические приложения определенного интеграла 175
Листок 36. Вычисление площадей плоских фигур 176
Листок 37. Вычисление длин дуг кривых 182
Листок 38. Вычисление объемов и площадей поверхностей 186

Глава 9. Функции нескольких переменных 191
Листок 39. Предел и непрерывность функции нескольких переменных 192
Листок 40. Частные производные и дифференциал функции нескольких переменных 197
Листок 41. Дифференцируемость сложной функции 202
Листок 42. Формула Тейлора для функции нескольких переменных 207
Листок 43. Равномерная непрерывность функции нескольких переменных 211
Листок 44. Дифференцирование неявной функции 214
Листок 45. Производная по направлению. Градиент 218

Глава 10. Экстремум функции нескольких переменных 223
Листок 46. Безусловный экстремум функции нескольких переменных 224
Листок 47. Условный экстремум функции нескольких переменных 228
Листок 48. Условный экстремум. Продолжение 233

Зачетные листки по спецсеминару 237
Листок 49. Зачетный листок 1 238
Листок 50. Зачетный листок 2 240

Глава 11. Теория числовых рядов 243
Листок 51. Знакопостоянные ряды. Признаки сравнения 244
Листок 52. Признаки сходимости знакопостоянных рядов 248
Листок 53. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость 252
Листок 54. Дальнейшие примеры на абсолютную и условную сходимость 256
Листок 55. Бесконечные произведения 260
Листок 56. Повторные и двойные ряды 264

Глава 12. Функциональные последовательности и ряды 269
Листок 57. Понятие равномерной сходимости 270
Листок 58. Достаточные признаки равномерной сходимости 274
Листок 59. Свойства равномерно сходящихся рядов 278

Листок 60. Степенные ряды. Формула Коши — Адамара 282
Листок 61. Действия над степенными рядами 286

Глава 13. Ряды Фурье 291
Листок 62. Обобщенные методы суммирования 292
Листок 63. Метрические и нормированные пространства 296
Листок 64. Тригонометрические ряды. Общие понятия 300
Листок 65. Разложение функций в ряд Фурье на интервале $(-\pi; \pi)$ 304
Листок 66. Разложение функций в ряд Фурье на интервале $(-l; l)$ 308
Листок 67. Разложение функций в ряд Фурье. Повторение 311
Листок 68. Разложение в ряд Фурье по другим системам функций 315
Листок 69. Интеграл Фурье и преобразование Фурье 318
Листок 70. Свойства интегрального преобразования Фурье 323

Список литературы 325

Ответы 330

Предметный указатель 349

Посвящается моим студентам
2008–2012 учебных годов,
для которых и ради которых
эта работа и была проделана.

Предисловие

В настоящем пособии автором (которого, вероятно, более точно было бы назвать составителем) предпринята попытка обратить внимание читателя на новые методические идеи для классического университетского курса математического анализа. Данный сборник задач предлагался студентам первого курса факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова и студентам отделения прикладной математики и информатики факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ. Его структура максимально приближена к плану практических занятий первого и второго семестров из методической разработки [2] (которая была дополнена задачами по числовым и функциональным рядам [3]). Главным и основным источником задач данной разработки является известнейший задачник Б. П. Демидовича [1]. Поэтому и в рассматриваемом пособии ему отведена центральная роль.

Отметим, что чуть менее половины задач настоящего сборника была взята из того же задачника [1]. Эти номера отмечены числами в круглых скобках. Некоторые из оставшихся задач были придуманы автором самостоятельно, но подавляющее большинство было взято из многочисленных учебников, статей и книг [4]—[60]. Многие из этих пособий сейчас широко используются, но есть и те, которые, к величайшему сожалению, в данный момент почти не востребованы. Автор искренне надеется, что благодаря его труду доступ к этим ресурсам будет возобновлен.

Сборник составлен на основе «листков», разработанных автором, каждый из них охватывает тему одного семинарского занятия. «Листочковый» формат задачника кажется автору более удачным, чем классический, в связи с гораздо меньшим числом задач по каждой теме. Студент начальных курсов, начинающий свой путь в науке, пока еще не научился выбирать себе задачи для обучения. Если обучающийся занимается по книге, в которую помещено огромное число примеров, его внимание (если его действительно интересует предмет математического анализа) неминуемо распыляется по менее важным вопросам, даже при наличии компетентного преподавателя.

Кроме того, даже самые лучшие современные учебники могут не включать в себя те или иные задачи. Поэтому ответственному преподавателю приходится добавлять примеры из других задачников, не являющихся основными для его курса. Безусловно, автор настоящего сборника не может утверждать, что включил в свой список все важнейшие вопросы и не включил ни одного второстепенного. Скорее всего, это не так. Будем считать, что выбранный список задач является его собственным ви́дением курса практических занятий по математическому анализу.

Нумерация задач, теорем, определений, рисунков и других элементов текста в пособии для удобства их использования дана двойная по «листкам», при этом первый листок как вводный имеет номер «нуль».

Работа с «листками», послужившими основой для данного сборника, была построена следующим образом. После проверки и обсуждения домашнего задания студентам выдавались новые распечатанные «листки». Работа с ними начиналась с краткого напоминания теории, необходимой для решения включенных в них задач и расположенной в начале каждого раздела. При этом предполагалось, что учащиеся уже были ознакомлены с этими теоретическими фактами на лекциях и после прочтения электронной версии «листка», которая заранее выкладывалась в Интернете. Далее начиналось решение практических упражнений.

Некоторые из них были помечены значком «•». Эти номера планировалось рассмотреть в аудитории. Все неразобранные задачи автоматически задавались студентам на дом и могли быть заданы слушателям в качестве пятиминутной самостоятельной проверочной работы на следующем семинарском занятии. Исключение составляли лишь номера, помеченные значком «*». Эти задачи носили не обязательный, а скорее факультативный характер. На основных занятиях задачи со звездочкой почти не обсуждались, а принимались автором на отдельных листочках у наиболее активных слушателей (засчитывались первые три решения). Это позволяло творческим студентам решать интересные нетривиальные задачи повышенной сложности, а также давало им возможность учиться оформлять свои результаты.

В конце каждого семестра многие из этих задач были разобраны на спецсеминаре автора «Избранные главы математического анализа». Надо отметить, что идея факультативных задач вызвала немалый успех (ящик письменного стола автора в конце каждого года был заполнен несколькими пачками студенческих решений), но в целом еще подлежит усовершенствованию.

Обратим внимание также на то, что разобрать за одно семинарское занятие все задачи, помеченные значком «•», удается только в очень сильных группах, при напряженной работе преподавателя. Поэтому этот список нельзя считать обязательным, и в целом он создавался автором для сильных студентов, которые решали задачи быстрее, чем на доске, и которые хотели знать, что им решать дальше. Кроме того, самые ответственные студенты получают возможность посмотреть задачи дома при подготовке к следующему занятию (таких студентов, понятное дело, обычно бывает совсем немного, но они иногда автору встречались).

Многие из задач рассматриваемого сборника посвящены построению разнообразных продуктивных примеров и контрпримеров. Понимая исключительно важную роль этих упражнений для формирования математической культуры и научного творчества, автор отводит им одно из центральных мест. Сложность предлагаемых примеров варьируется от практически устных (студенты строили их на занятии моментально) до весьма непростых. Формулировка данных вопросов разнообразна. Часто спрашивается сама возможность такого построения. В этом случае предполагается, что либо будет доказана его невозможность, либо конструкция будет найдена. Отмечу, что эти задачи часто вызывали у слушателей сильный энтузиазм. Иногда после особо удачных нетривиальных вопросов группа разделялась на части, придерживающиеся диаметрально противоположных мнений, поэтому раз за разом вставал вопрос о математической интуиции.

Другой особенностью пособия стало использование большого числа иллюстраций к рассматриваемым задачам. Эти картинки помещаются для лучшего понимания изучаемого материала, а также для развития геометрического воображения у слушателей. Иногда изображения являются указанием к решению той или иной задачи. Часть данных рисунков была заимствована автором из источников из списка литературы, а некоторые были нарисованы с помощью современных компьютерных систем (*Wolfram Mathematica*, *MATLAB*, *Adobe Photoshop*) или найдены в сети Интернет. Вообще, использование новейшего программного обеспечения может принести очень большую пользу (как, впрочем, и вред) образовательному процессу, но требует исключительно аккуратного подхода. Поэтому данная идея также нуждается в дальнейшем осмыслении.

В результате изучения учебного пособия студент должен:

знать

- основные понятия теории пределов и непрерывных функций, дифференциального исчисления функции одной и многих переменных, неопределенного, определенного и несобственного интегрирования, теории числовых и функциональных рядов, рядов Фурье;
- различные способы вычисления пределов последовательности и функции;
- свойства непрерывных и дифференцируемых функций одной и многих переменных;
- классы интегрируемых функций;
- признаки сходимости числовых рядов, равномерной сходимости функциональных рядов;

уметь

- использовать основные понятия математического анализа при решении задач;
- применять дифференциальное и интегральное исчисление к исследованию функций, решению простейших оптимизационных и прикладных задач;

владеть

- навыками вычисления пределов последовательности и функции;
- навыками оценивания порядка малости (роста) функции;
- навыками исследования функций с помощью производной и построения эскиза графика функции;
- навыками разложения функции по формуле Тейлора и оценки остаточного члена;
- навыками вычисления неопределенных и определенных интегралов заданных классов функций;
- навыками исследования несобственных интегралов на сходимость;

- навыками применения определенных интегралов к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел вращения, длин кривых;
- навыками исследования числовых и функциональных рядов на сходимость;
- методами теории пределов и непрерывных функций одной и многих переменных;
- методами дифференциального исчисления функций одной и многих переменных;
- методами интегрального исчисления;
- методами теории числовых и функциональных рядов.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность рецензентам *А. Н. Соболевскому* и *С. В. Шапошникову* за ряд ценных замечаний, а также редактору *П. А. Макарову*, чей высокий профессионализм очень помог при создании настоящей книги. Кроме того, автор выражает глубокую благодарность своим многочисленным коллегам и друзьям с факультета ВМК МГУ за разнообразные советы по решению тех или иных задач и плодотворные обсуждения. Из их числа я особенно хотел бы выделить моего Учителя *Владимира Александровича Ильина*, который создал данный курс математического анализа и сформировал мое отношение к математике. Благодарю также *Александра Кулешова и Василия Фомичёва*, разговоры и споры с которыми были исключительно полезны в процессе создания книги, *Алексея Полосина* — главного организатора математических олимпиад факультета ВМК МГУ для студентов младших курсов, *Андрея Бодрова* и *Алесю Яковчук* за помощь в подготовке иллюстраций, *Андрея Чеснокова* за советы в наборе в среде *TeX*. Наконец, я не смог бы составить настоящий сборник без заботы и поддержки своей дорогой жены *Алисы Никитиной*. Кроме того, многие из задач были набраны на компьютере именно ею.

Глава 1
ТЕОРИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И МНОЖЕСТВ

Листок 0
Задачи на мощность числовых множеств

Определение 0.1. *Взаимно однозначное соответствие* (*биекция*) — соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует один и только один элемент другого множества, и обратно.

Определение 0.2. Два множества называются *эквивалентными*, если между ними возможно установить взаимно однозначное соответствие. Относительно двух эквивалентных множеств говорят, что они имеют *одинаковую мощность*. Обозначение: $A \sim B$.

Замечание 0.1. На вопрос, что такое мощность множества, можно ответить так: мощность — это то, что есть общего у всех эквивалентных между собой множеств (*определение через абстракцию*). Обозначение мощности множества A: $\overline{\overline{A}}$, $|A|$.

Определение 0.3. Всякое множество A, эквивалентное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, называется *исчислимым*, или *счетным*. Обозначение: $\aleph_0$.

Определение 0.4. Если множества A и B не эквивалентны, но $\exists B_1 \subset B$, что $B_1 \sim A$, и $\nexists A_1 \subset A$, что $A_1 \sim B$, то мы считаем, что мощность множества A *меньше* мощности множества B, т.е. $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.

0.1. Докажите, что из любого бесконечного множества A можно выделить счетное подмножество D.

0.2. Докажите, что всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

0.3. Докажите, что объединение счетного множества попарно непересекающихся счетных множеств есть счетное множество.

0.4. Пусть E — бесконечное множество, $D \subset E$, D — не более чем счетное множество и множество $E \setminus D$ бесконечно. Докажите, что множества $E \setminus D$ и E равномощны.

0.5. Докажите, что если к произвольному бесконечному множеству A прибавить конечное или счетное множество B новых элементов, то это не изменит его мощности, т.е. выполнено $(A \cup B) \sim A$.

0.6. Пусть A — произвольное бесконечное множество. Докажите существование множества B, такого что $B \subset A$ и $A \setminus B$ бесконечно, мощность которого равна мощности A.

0.7 (теорема Кантора об алгебраических числах). Число $a \in \mathbb{R}$ называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого уравнения вида $b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0 = 0$, где $b_j \in \mathbb{Z}$. Докажите, что множество всех алгебраических чисел счетно.

Замечание 0.2. Так как множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ несчетно, то существуют *трансцендентные* (не алгебраические) числа.

Определение 0.5. Назовем всякое множество, эквивалентное множеству точек отрезка $[0; 1]$, *множеством мощности континуума*. Обозначение: $\mathfrak{c}$.

0.8. Докажите, построив взаимно однозначное соответствие, что:

а) множества $[0; 1)$, $(0; 1]$ и $(0; 1)$ имеют мощность континуума;

б) множества $\mathbb{R}$, $(0; +\infty)$, $[0; +\infty)$, $(-\infty; 0]$ и $(-\infty; 0)$ имеют мощность континуума.

0.9. Установите эквивалентность полусегмента $(0; 1]$ и единичного квадрата $(0; 1] \times (0; 1]$.

0.10. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством иррациональных чисел и множеством действительных чисел.

0.11. Докажите, что объединение:

а) счетного числа непересекающихся множеств мощности континуума имеет мощность континуума;

б) континуума непересекающихся множеств мощности континуума имеет мощность континуума.

0.12 (теорема Кантора). Пусть X — произвольное множество, а 2^X — множество всех его подмножеств, включая $\varnothing$ и само множество X. Докажите, что множества X и 2^X не равномощны.

Определение 0.6. Назовем мощность множества всех подмножеств отрезка $[0; 1]$ *мощностью гиперконтинуума*.

0.13. Докажите, что множество всех действительных однозначных функций на отрезке $[0; 1]$ имеет мощность гиперконтинуума.

0.14. Докажите, что множество всех двоичных последовательностей имеет мощность континуума.

Листок 1
Метод математической индукции

Принцип математической индукции формулируется таким образом. Пусть $M \subset \mathbb{N}$ — такое множество, что:

1) $1 \in M$ (база индукции);

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ из того, что $n \in M$, следует, что $(n + 1) \in M$ (индукционный переход).

Тогда $M = \mathbb{N}$.

1.1 (2). • Докажите, что $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Как найти сумму квадратов, если ответ неизвестен?

1.2. Докажите, что сумма кубов $1^3 + 2^3 + ... + n^3$ является точным квадратом (например, $1 = 1^2$, $1 + 8 = 9 = 3^2$, $1 + 8 + 27 = 36 = 6^2$ и т.д.).

1.3 (бином Ньютона). а) • Докажите, что для $\forall n \in \mathbb{N}$; $a, b \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — *биномиальные коэффициенты.*

Замечание 1.1. Биномиальные коэффициенты легко получаются из *треугольника Паскаля* (рис. 1.1). В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Продолжать треугольник можно бесконечно.

$n = 0$							1							$(a + b)^n$
$n = 1$						1		1						
$n = 2$					1		2		1					
$n = 3$				1		3		3		1				
$n = 4$			1		4		1		4		1			
$n = 5$		1		5		10		10		5		1		
$n = 6$	1		6		15		20		15		6		1	
	.		.		.		.		.		.		.	

Рис. 1.1

б) ∗ Запишите формулу бинома для отрицательных целых n и докажите ее.

1.4. (неравенство Бернулли). Пусть $x_i \cdot x_j \geq 0$, $x_i > 1$ для всех $i, j = 1, ..., n$. Докажите, что $(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot ... \cdot (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + ... + x_n$.

1.5. Пусть $x_1, ..., x_n$ — строго положительные числа, такие что $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1$.

Докажите, что $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$.

1.6. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$. Докажите, что:

а) $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$; б) • $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ (неравенство числа e).

1.7. • Докажите, что $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!\ \forall n \in \mathbb{N}$.

1.8. Докажите: а) • неравенство

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} < 2$$

для $\forall n \in \mathbb{N}$, используя метод математической индукции;

б) неравенство из п. а) без использования метода математической индукции;

в) усиление неравенства из п. а), т.е. равенство

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

1.9. Докажите, что $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} < 2\ \forall n \in \mathbb{N}$.

1.10 (неравенства между «обыкновенными средними»). Пусть $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i > 0\ \forall i = 1, ..., n$. Обозначим

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}, \qquad G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}, \qquad \Gamma_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}.$$

Докажите, что $A_n \geq G_n \geq \Gamma_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Замечание 1.2. Выражение A_n называется *средним арифметическим*, G_n — *средним геометрическим*, Γ_n — *средним гармоническим* чисел $a_1, a_2, ..., a_n$.

Замечание 1.3. Отметим, что равенство в данных неравенствах возможно тогда и только тогда, когда выполнено $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

1.11 (8). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Докажите, что $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

1.12 (7). Докажите, что если $x > 1$, то справедливо неравенство $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$), причем знак равенства имеет место лишь при $x = 0$.

1.13 (9). Докажите следующие неравенства:

а) $2! \cdot 4! \cdot ... \cdot (2n)! > [(n + 1)!]^n$ при $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$;

б) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ при $n \in \mathbb{N}$.

1.14. Докажите, что для любых $x \in (0; 2\pi)$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется тождество

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

1.15. Докажите, что для $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}<\sqrt{n}+1.$$

1.16. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $C_n^k \le \left(\frac{e \cdot n}{k}\right)^k$, где e — *основание натурального логарифма.*

1.17 (видоизмененный треугольник Паскаля). На листке бумаги выписаны числа 1, 1. Вписав между ними их сумму, получим числа 1, 2, 1. Повторив операцию еще раз, получим 1, 3, 2, 3, 1. После трех операций будем иметь 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1. Какова будет сумма всех чисел после 55 операций?

1.18. Из чисел от 1 до $2n$ произвольно выбрано $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел всегда найдутся два, одно из которых делится на другое.

1.19. Пусть $p \ge 1$ — произвольное действительное число. Докажите, что для любых неотрицательных чисел $a_1,\ldots,a_n$ справедливо неравенство

$$a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p \le (a_1+a_2+\ldots+a_n)^p.$$

1.20. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, таких что каждое из чисел n, $n + 1$, $n + 2$ является суммой двух квадратов (например: $0 = 0^2 + 0^2$, $1 = 0^2 + 1^2$, $2 = 1^2 + 1^2$).

1.21. Докажите равенство

$$\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{i_1}\ldots\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} i_k = C_{m+k}^{k+1}.$$

1.22. Докажите, что n различных прямых, лежащих в одной плоскости, разбивают эту плоскость на области, которые могут быть закрашены красной и синей красками так, что все смежные области (т.е. области, имеющие общий отрезок прямой) будут закрашены разными красками.

1.23. * Предположим, что некоторые из чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ равны +1, остальные равны –1. Докажите, что выполняется тождество

$$2\sin\left[\left(\alpha_1+\frac{\alpha_1\alpha_2}{2}+\ldots+\frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}\right]=\alpha_1\sqrt{2+\alpha_2\sqrt{2+\alpha_3\sqrt{2+\ldots+\alpha_n\sqrt{2}}}}.$$

1.24 (теорема Шпернера). Пусть A — некоторое множество, состоящее из n элементов. Рассмотрим набор подмножеств $A_1, \ldots, A_k$ из A, такой что ни одно из множеств не является частью другого. Докажите следующее неравенство: $k \le C_n^{[n/2]}$.

1.25. Обоснуйте принцип математической индукции, пользуясь доказательством от противного и свойством, что в любой совокупности натуральных чисел содержится наименьшее число.

1.26. Выведите свойство (о существовании наименьшего числа), указанное в предыдущей задаче, как следствие из принципа математической индукции.

Замечание 1.4. Таким образом, оба этих предложения равносильны. Любое из них можно принять за одну из аксиом, определяющих натуральный ряд, тогда другое будет теоремой. Обычно за аксиому принимают сам принцип математической индукции, называя его аксиомой индукции (см. аксиомы Пеано).

Листок 2
Ограниченные и неограниченные числовые множества

Предположим, что $X \subset \mathbb{R}$.

Определение 2.1. Множество X *ограничено сверху* (*снизу*), если $\exists C \in \mathbb{R}$: $\forall x \in X \Rightarrow x \mathbb{C} C$ $(x \geq C)$, где C — *верхняя* (*нижняя*) *грань множества*.

Множество X *ограничено*, если $\exists C$: $\forall x \in X \Rightarrow |x| \mathbb{C} C$.

Утверждение 2.1. Множество X ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено сверху и снизу.

Определение 2.2. $M^* = \sup X$ — *точная верхняя грань множества* X, если:

1) $\forall x \in X \Rightarrow x \leq M^*$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in X$: $x' > M^* - \varepsilon$ (рис. 2.1).

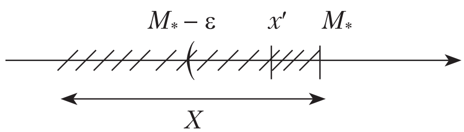


Рис. 2.1

Таким образом, $\sup X$ есть наименьшая из верхних граней этого множества.

Определение 2.3. $M_* = \inf X$ — *точная нижняя грань множества* X, если:

1) $\forall x \in X \Rightarrow x \geq M_*$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x'' \in X$: $x'' < M_* + \varepsilon$ (рис. 2.2).

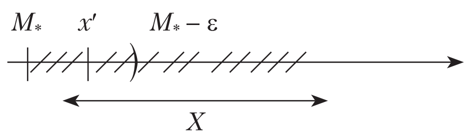


Рис. 2.2

Таким образом, $\inf X$ есть наибольшая из нижних граней этого множества.

Теорема 2.1. *Если множество вещественных чисел содержит хотя бы один элемент и ограничено сверху* (*снизу*), *то у этого множества существует точная верхняя* (*нижняя*) *грань.*

Определение 2.4. Если $\exists x^* \in X$: $\forall x \in X$ выполнено $x \leq x^*$, то x^* называется *наибольшим элементом множества* X. Обозначение: $x^* = \max X$.

Определение 2.5. Если $\exists x_* \in X$: $\forall x \in X$ выполнено $x \geq x_*$, то x_* называется *наименьшим элементом множества* X. Обозначение: $x_* = \min X$.

Замечание 2.1 (отличие sup и inf от max и min). Точная верхняя (нижняя) грань X может существовать, но не принадлежать данному множеству, тогда как $\max X$ и $\min X$, *если они существуют*, напротив, всегда принадлежат множеству X. С другой стороны, если $\exists \max X$, то $\sup X = \max X$ (если $\exists \min X$, то $\inf X = \min X$).

Утверждение 2.2 (*принцип Дирихле*). Если кролики рассажены в клетки, причем число кроликов больше числа клеток, то хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика.

2.1 (17). а) • Пусть $X = \{ r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}$. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани данного множества.

б) Покажите, что множество вещественных чисел $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1/7\}$ не имеет наибольшего элемента. Укажите точную нижнюю грань этого множества.

в) Покажите, что множество рациональных чисел $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 3\}$ не имеет наименьшего элемента.

2.2. Пусть $X \subset Y$. Докажите, что: а) • $\sup X \le \sup Y$; б) $\inf X \ge \inf Y$.

2.3. Пусть $A = X \cup Y$, $B = X \cap Y$. Докажите, что:

а) • $\sup A = \max\{\sup X; \sup Y\}$;

б) $\sup B \le \min\{\sup X; \sup Y\}$;

в) $\inf A = \min\{\inf X; \inf Y\}$;

г) $\inf B \ge \max\{\inf X; \inf Y\}$.

2.4. Пусть X — ограниченное множество; $-X$ — множество чисел, противоположных числам $x \in X$.

а) • Выразите $\inf(-X)$ через $\sup X$;

б) выразите $\sup(-X)$ через $\inf X$.

2.5 (19). Пусть $(X + Y)$ — множество всех сумм $x + y$, где $x \in X$, $y \in Y$. Докажите равенства:

а) • $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$;

б) $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$.

2.6 (20). Пусть $(X \cdot Y)$ — множество всех произведений $x \cdot y$, где $x \in X$, $y \in Y$, причем $x \ge 0$, $y \ge 0$. Докажите равенства:

а) • $\inf(X \cdot Y) = \inf X \cdot \inf Y$;

б) $\sup(X \cdot Y) = \sup X \cdot \sup Y$.

2.7. Докажите, что у любых двух различных точек расширенной числовой прямой (т.е. числовой прямой, включающей в себя $\pm\infty$) существуют непересекающиеся окрестности (рис. 2.3).

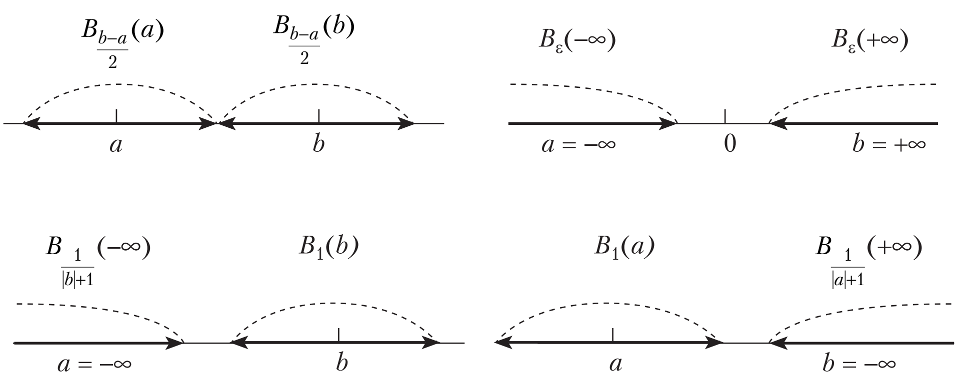


Рис. 2.3

2.8. Докажите следующие утверждения:

а) (теорема Архимеда) • каково бы ни было действительное число a, существует такое натуральное число n, что $n > a$, т.е. $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}: n > a$;

б) (следствие из теоремы Архимеда) каковы бы ни были числа a и b, $0 < a < b$, существует такое натуральное число k, что $(k - 1)a \le b < ka$ (рис. 2.4);

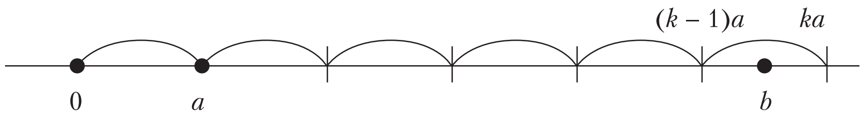


Рис. 2.4

в) пусть a и b $(a < b)$ — произвольные действительные числа. Тогда существует рациональное число c, заключенное между числами a и b.

2.9 (16). Покажите, что множество $\left\{\dfrac{m}{n}\right\}$ всех правильных рациональных дробей $\dfrac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и $m < n$, не имеет наименьшего и наибольшего элементов. Найдите точные нижнюю и верхнюю грани этого множества.

Принцип вложенных отрезков

Определение 2.6. Система числовых отрезков $[a_1; b_1], [a_2; b_2], ..., [a_n; b_n], ..., a_n \in \mathbb{R}, b_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, ...$, называется *системой вложенных отрезков*, если $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le ... \le b_n \le ... \le b_2 \le b_1$, т.е. каждый следующий отрезок $[a_{n+1}; b_{n+1}]$ содержится в предыдущем $[a_n; b_n]$: $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset ... \supset [a_n; b_n] \supset ...$ (рис. 2.5).

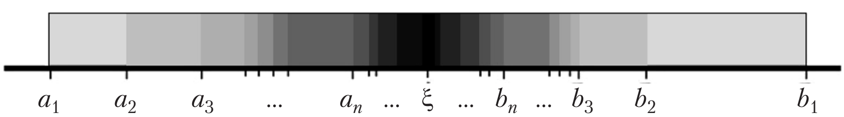


Рис. 2.5

2.10 (непрерывность множества действительных чисел в смысле Кантора). Докажите, что:

а) для всякой системы вложенных отрезков существует хотя бы одно число, которое принадлежит всем отрезкам данной системы;

б) отрезок [0; 1] имеет имеет мощность бо́льшую, чем бесконечное множество $\mathbb{N}$ (использовать утверждение п. а)).

2.11. Покажите, что для числовых промежутков других типов, нежели отрезки, предыдущее утверждение может уже не иметь места (т.е найдется система, например, вложенных интервалов, которая имеет пустое пересечение).

Замечание 2.2. Отметим, что существуют и такие системы вложенных интервалов, которые имеют непустое пересечение.

Определение 2.7. Пусть задана система отрезков $[a_n; b_n]$, $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Будем говорить, что *длина* $b_n - a_n$ *отрезков этой системы стремится к нулю*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$, такое что $\forall n \geq N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $b_n - a_n < \varepsilon$.

2.12 (лемма Кантора). Докажите, что для всякой суммы $[a_n; b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю, существует единственная точка ξ, принадлежащая всем отрезкам данной системы, причем $\xi = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$.

2.13. Докажите, что из всякого бесконечного множества интервалов, объединение которых покрывает отрезок $[a; b]$ (т.е. любая точка этого отрезка содержится хотя бы в одном из интервалов данного объединения), можно выделить конечное подмножество интервалов, объединение которых также покрывает $[a; b]$.

2.14 (теорема Хелли).* Пусть $[a_n; b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность отрезков на $\mathbb{R}$, таких что каждые два из них имеют по крайней мере одну общую точку. Докажите, что существует точка, принадлежащая каждому из отрезков.

2.15. * Пусть α — иррациональное число. Докажите, что для любых чисел $a < b$ можно выбрать *целые* числа m и n, для которых $a < m\alpha - n < b$. Можно ли выбрать числа m и n *натуральными*?

2.16. * Пусть G — открытое, не ограниченное сверху множество вещественных чисел. Существует ли такое $\alpha > 0$, что множество G содержит бесконечно много точек вида $n\alpha$, где $n \in \mathbb{N}$?

2.17. * Существует ли такой набор I интервалов, лежащих в интервале $(0; 1)$, что каждая рациональная точка интервала $(0; 1)$ принадлежит конечному числу интервалов из I, а каждая иррациональная точка этого отрезка — бесконечному числу интервалов из I?

Замечание 2.3. Обратим внимание на то, что набора интервалов $\tilde{I}$, такого что каждая рациональная точка интервала $(0; 1)$ принадлежит бесконечному числу интервалов из $\tilde{I}$, а каждая иррациональная точка этого отрезка — конечному числу интервалов из $\tilde{I}$, не существует.

2.18. * Пусть из каждой точки интервала $(0; 1)$ проведен отрезок положительной длины. Докажите, что сумма длин всех таких отрезков бесконечна.

Глава 2
ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Листок 3
Понятие числовой последовательности

Определение 3.1. *Числовая последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество занумерованных вещественных чисел.

Определение 3.2. $\{x_n\}$ *ограничена*, если $\exists M$: $\forall n \in \mathbb{N}$ $|x_n| \le M$. $\{x_n\}$ *не ограничена*, если для $\forall M$ $\exists n(M) \in \mathbb{N}$: $|x_{n(M)}| > M$.

Определение 3.3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$: $\forall n \ge N(\varepsilon)$ $|x_n - a| < \varepsilon$.

Определение 3.4. $\{x_n\}$ *бесконечно малая*, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ($\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$: $\forall n \ge N(\varepsilon)$ $|x_n| < \varepsilon$).

Определение 3.5. $\{x_n\}$ *бесконечно большая*, если:

1) $\{x_n\}$ знакопостоянна;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, т.е. $x_n > 0$ ($x_n < 0$) $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall E > 0$ $\exists N(E)$: при $n \ge N(E)$ $|x_n| > E$.

Замечание 3.1. Знакопостоянство бесконечно большой последовательности иногда не требуется.

Утверждение 3.1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, тогда

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = x \pm y$;

2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$;

3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$ ($y_n \ne 0$ $\forall n$, $y \ne 0$).

Утверждение 3.2. Если $\exists N$: $\forall n \ge N$ выполнено $x_n \le y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (если данные пределы существуют).

3.1 (42). Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ есть бесконечно малая, указав $\forall \varepsilon > 0$ число $N(\varepsilon)$, что $\forall n \ge N(\varepsilon)$ выполнено $|x_n| < \varepsilon$, если:

а) • $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$;

б) • $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$;

в) $x_n = \dfrac{1}{n!}$;

г) $x_n = (-1)^n \cdot 0{,}999^n$ (рис. 3.1).

3.2. Приведите пример бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$, члены которой:

а) • поочередно то приближаются к своему пределу, то удаляются от него;

б) поочередно то принимают значение, равное своему пределу, то удаляются от него.

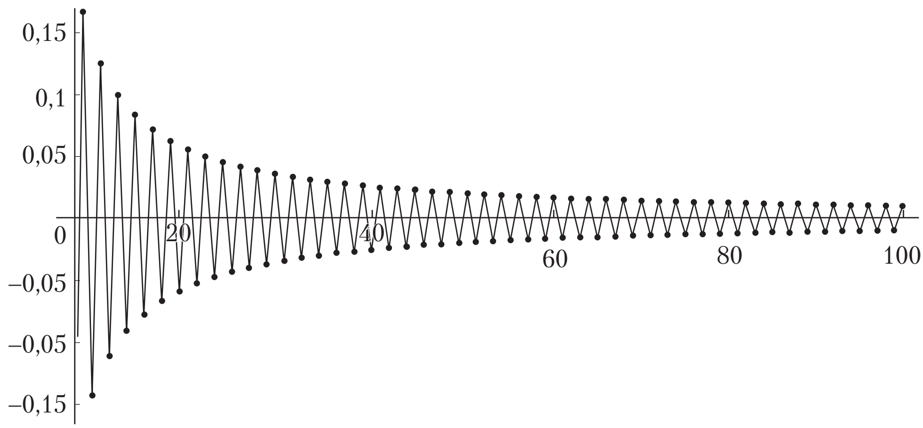


Рис. 3.1

Помещенные выше примеры бесконечно малых последовательностей интересны тем, что они охватывают различные способы стремления переменной к нулю. При этом *несущественно*, лежат ли значения последовательности с одной стороны (3.1б, в) от предела или нет (3.1а, г); *несущественно*, приближается ли она с каждым шагом к своему пределу (3.1) или нет (3.2); *несущественно* наконец, достигает ли последовательность своего предела, т.е. принимает ли значения равные ему (3.2б). *Существенно* лишь то, о чем говорится в определении: *последовательность должна отличаться от предела сколь угодно мало для достаточно больших своих номеров*.

3.3 (43). Докажите, что $\{x_n\}$ есть бесконечно большая, возможно, незнакопостоянная, определив $\forall E > 0$ число $N(E)$: $|x_n| > E$ при $n \geq N(E)$, если:

а) • $x_n = (-1)^n \cdot n$ (рис. 3.2);

б) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$;

в) $x_n = \lg(\lg n)$ $(n \geq 2)$;

г) $x_n = \dfrac{3^n - 2^n}{2^n + 1}$.

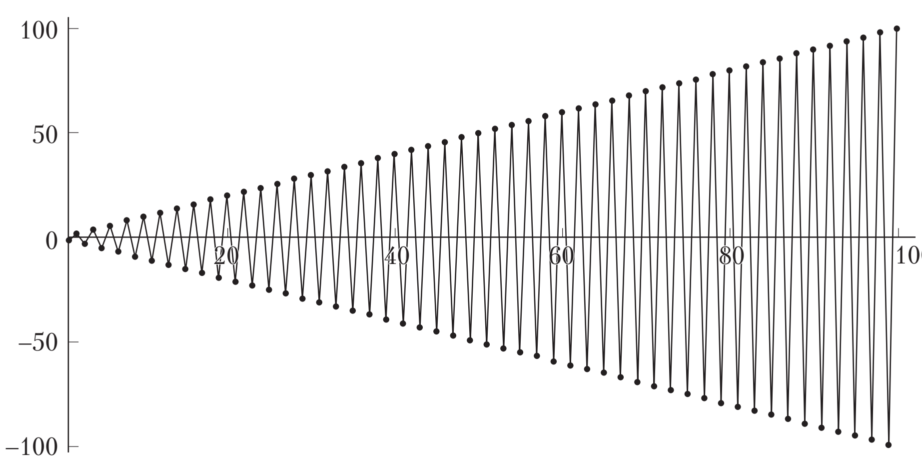


Рис. 3.2

3.4 (41). • Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$, определив $\forall\varepsilon > 0$ число $N(\varepsilon)$: $|x_n - 1| < \varepsilon$ при всех $n \geq N$.

3.5 (45). Сформулируйте с помощью кванторов и неравенств следующие утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

3.6. • Приведите пример неограниченной последовательности $\{x_n\}$, у которой есть ограниченная подпоследовательность.

Замечание 3.2. Отметим, что построенная неограниченная последовательность не является бесконечно большой, т.е. данные понятия существенно разные.

3.7. Докажите по определению, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ $(a > 1)$ (рис. 3.3);

б) • $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ $(|q| < 1)$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} Q^n = \infty$ $(|Q| > 1)$.

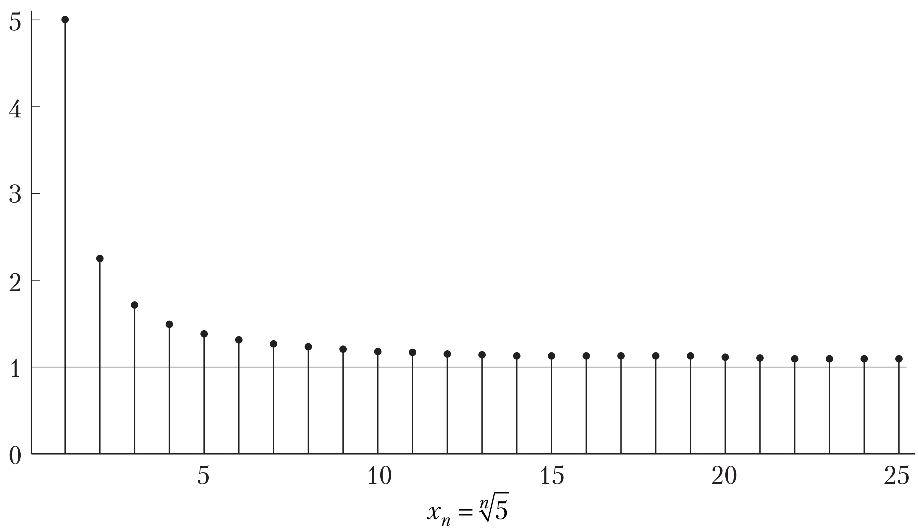


Рис. 3.3

3.8. • Рассмотрим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию:

$$a, aq, aq^2, ..., aq^n, ... \; (|q| < 1).$$

Под ее суммой понимается предел, к которому стремится сумма S_n ее n членов при $n \to \infty$. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

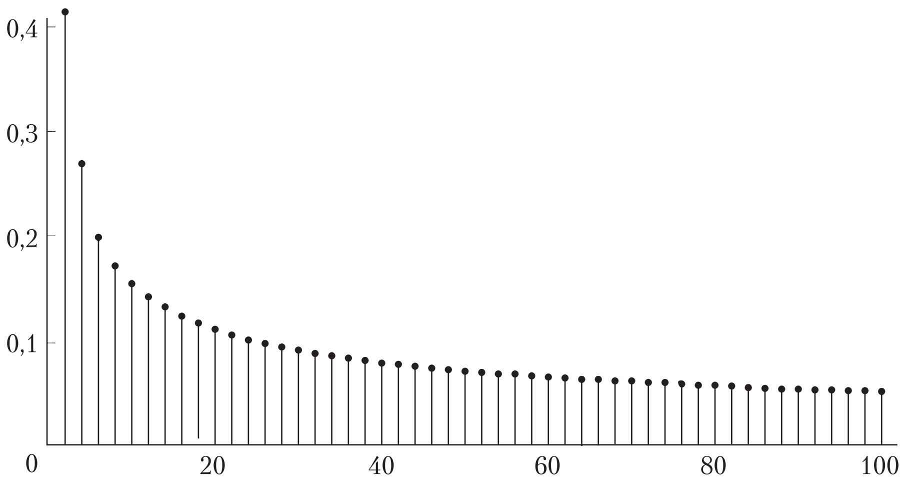
3.9. Приведите пример последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, таких что $x_n > y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3.10 (46—57). Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10000n}{n^2+1}$; б) • $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ (рис. 3.4, *а*); в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$;

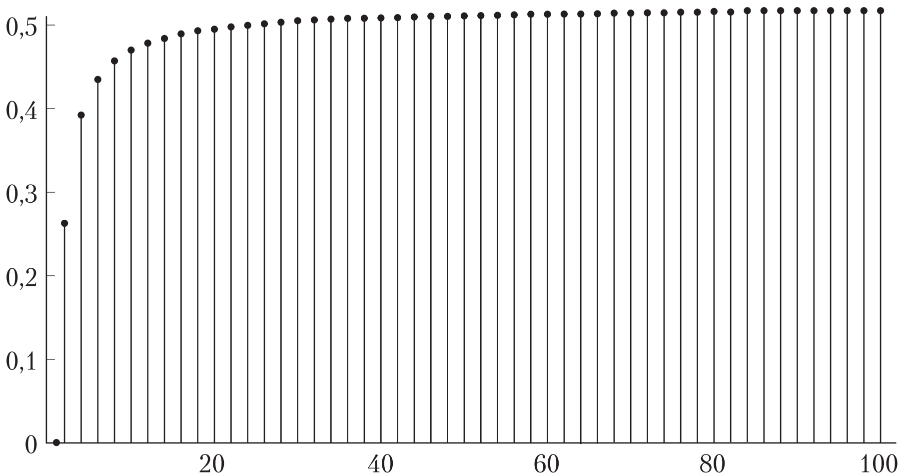
г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$, $|a|<1$, $|b|<1$;

е) • $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$ (рис. 3.4, *б*);



$$x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

а



$$x_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}$$

б

Рис. 3.4

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$; з) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\ldots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)$; к) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$;

л) • $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$; м) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2})$.

3.11. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

3.12. Пусть заданы два числа a и b. Положим $x_1=a, x_2=b, x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$ $(n\ge 3)$. Найдите предел последовательности $\{x_n\}$.

3.13. На отрезке AB длины l строится последовательность точек $\{x_n\}$ следующим образом: $x_1 = A$, $x_2 = B$, каждая следующая точка x_{n+1} является серединой отрезка, соединяющего точки x_{n-1} и x_n. К какой точке отрезка AB стремится последовательность $\{x_n\}$?

3.14. * Докажите, что последовательность $\{x_n\} = 1 + 17n^2$ содержит бесконечно много квадратов целых чисел.

3.15. * Определим последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при помощи условий:
$x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}\sin^2\alpha$, $y_n = y_{n-1} + 2x_{n-1}\cos^2\alpha$, $x_0 = 0$, $y_0 = \cos\alpha$.
Найдите выражение для x_n и y_n через n и α.

3.16. * Найдите формулу общего члена для последовательности:

а) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $3 \le n \in \mathbb{N}$ (последовательность Фибоначчи);

б) $x_1 = a, x_2 = b, x_n = x_{n-1}-\frac{x_{n-2}}{4}, 3\le n\in\mathbb{N}$.

3.17. * Докажите, что последовательность $\{x_n\}$, заданная условием $x_{n+1}=x_n+\frac{x_n^2}{n^2}$ при $n\in\mathbb{N}$, где $0 < x_1 < 1$, ограничена.

3.18 (модификация последовательности Фаррея). * Определим последовательность $\{a_n\}$ следующим образом: $a_0 = 1$, $a_{2n+1} = a_n$, $a_{2n+2} = a_n + a_{n+1}$, $0 \le n \in \mathbb{Z}$. Докажите, что множество $\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}, n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\ldots\right\}$ содержит все положительные рациональные числа.

3.19. * Найдите значения параметров a и b, при которых сходится последовательность $x_0 = a$, $x_n = 1 + bx_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, и вычислите ее предел в данных случаях.

3.20. * Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Докажите, что любое множество из $mn + 1$ попарно различных действительных чисел содержит либо строго возрастающую совокупность из $m + 1$ чисел, либо строго убывающую совокупность из $n + 1$ чисел.

3.21. * Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ не равных нулю вещественных чисел, таких что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено: $x_{n+1}^2-x_nx_{n+2}=1$. Докажите, что найдется такое действительное число a, что $x_{n+2} = ax_{n+1} - x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Листок 4
Предел последовательности

Теорема 4.1 (о двух эвольвентах). *Если* $\forall n$ *начиная с некоторого выполнено* $y_n \le x_n \le z_n$, *а также* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, *тогда* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

4.1. • Пусть $a > 1$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0$.

4.2 (60). Пусть $a > 1$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

4.3 (63, 65). Докажите следующие равенства, используя теорему о двух эвольвентах:

а) • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ при $a > 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

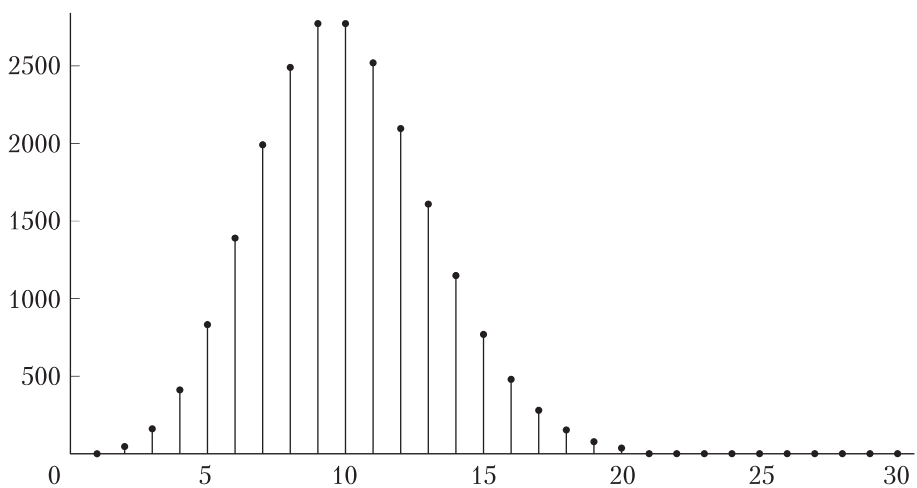
4.4 (62). Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$ при $|q| < 1$.

4.5 (61, 66). Докажите, что:

а) • $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{n!} = 0$ (рис. 4.1);

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.



$x_n = \dfrac{10^n}{n!}$

Рис. 4.1

4.6 (64). • Пусть $a > 1$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0$.

4.7. Докажите, что при $0 < k < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+k)^k-n^k]=0$.

4.8. • Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

4.9 (68). Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\right)=0$.

4.10. • Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

4.11. Пусть дано m положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и $A=\max\limits_{1\le i\le m} a_i$. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_m^n}$.

4.12 (91). • Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.Приведите пример, что обратное утверждение может не выполняться.

4.13. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ и $x_n\ge -1$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Далее, пусть $p\in\mathbb{N}$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[p]{1+x_n}=1$.

4.14. Найдите пределы следующих последовательностей:

а) $x_n=\dfrac{(n+1)^{2010}}{n^{2010}+1}$;

б) $x_n=\sqrt[n]{\dfrac{2^n+3^n+4^n}{5^n+6^n}}$;

в) • $x_n=\sqrt[n]{n+|\sin n|}$ (рис. 4.2).

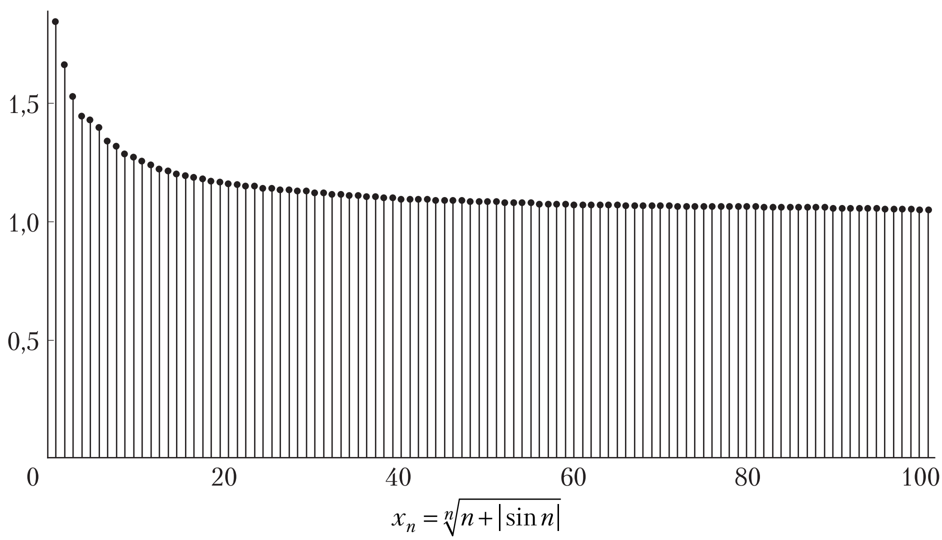


Рис. 4.2

4.15. Найдите пределы:

а) • $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^1+2^2+\ldots+n^n}{n^n}$ (рис. 4.3);

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

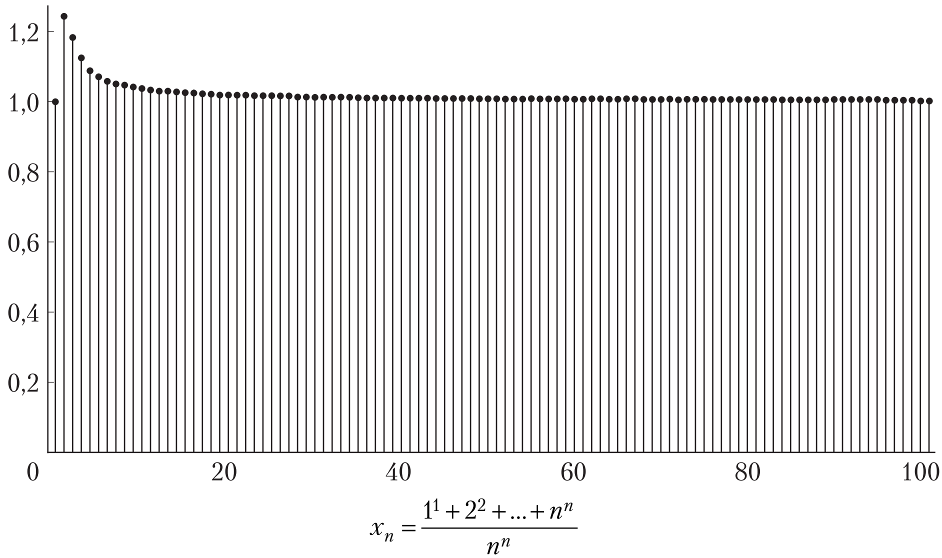


Рис. 4.3

4.16. Докажите, что выполняются следующие неравенства:

$$\left(\frac{k}{e}\right)^k<k! \text{ при } k\geq 1,\ k!<k\left(\frac{k}{e}\right)^k \text{ при } k\geq 11,$$

и вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}.$$

4.17. ∗ Для последовательности $\{a_n\}$ справедливы следующие соотношения:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\to a \text{ при } n\to\infty;$$

$$n(a_{n+1}-a_n)\to b \text{ при } n\to\infty$$

для некоторых a, $b\in\mathbb{R}$. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ сходится, и найдите ее предел.

4.18. ∗ Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности, такие что $\forall x\in[1;2]$ выполнено $a_n+b_nx\to c(x)\in\mathbb{R}$ при $n\to\infty$. Докажите, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, и определите функцию $c(x)$.

4.19. * Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ a_n и b_n — целые числа, заданные равенством

$$(1+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}.$$

Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

4.20. * Пусть для положительных чисел a и b выполнены равенства

$$a_1 = \frac{ab}{a+b};\, a_{n+1} = \frac{ab}{a+b-a_n},\, n \geq 1.$$

Найдите выражение для a_n и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4.21. * Пусть $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$, $n \geq 1$. При каких значениях a последовательность $\{a_n\}$ сходится?

Определение 4.1. Последовательность $\{x_n\}$ называется *выпуклой*, если

$$x_n \leq \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}$$

при $n = 2, 3, \ldots$.

4.22. * Докажите, что для любой положительной строго убывающей к нулю последовательности можно построить мажорирующую ее выпуклую последовательность, стремящуюся к нулю.

4.23 (вавилонский алгоритм вычисления $\sqrt{2}$). а) * Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями

$$x_1 = 1;\, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right),\, n \geq 1.$$

Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

Замечание 4.1. Вычисления показывают, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к $\sqrt{2}$ очень быстро. Так, например, $x_4 - \sqrt{2} = 2{,}124 \cdot 10^{-6}$.

б) * К чему будет стремиться последовательность из п. а), если в качестве начального условия выбрать $x_1 = -1$?

4.24 (итерационная формула Герона). * Докажите, что последовательность чисел $\{x_n\}$, заданная условиями

$$x_1 = 1;\, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),\, n \geq 1,\, a > 0,$$

сходится. Найдите предел этой последовательности.

4.25. * Пусть $a > 0$ и $k > 0$ — произвольные действительные числа. Определим последовательность $\{a_n\}$ равенствами

$$a_0 = a, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right), n \geq 0.$$

Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\frac{a_n - \sqrt{k}}{a_n + \sqrt{k}} = \left(\frac{a - \sqrt{k}}{a + \sqrt{k}}\right)^{2^n}.$$

4.26. $*$ Пусть

$$\alpha_n = \sqrt[n]{1 + \sqrt[n+1]{1 + \sqrt[n+2]{1 + \ldots}}}$$

(бесконечное число корней). Конечны ли эти величины? Чему равен $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$?

4.27. $*$ Докажите, что

$$9 = \sqrt{3u_2u_4 + u_4\sqrt{3u_4u_6 + u_6\sqrt{3u_6u_8 + \ldots}}},$$

где $\{u_n\}$ — *последовательность Фибоначчи.*

Листок 5
Монотонная последовательность и ее предел

Определение 5.1. Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонной*, если $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено одно из условий:

$x_{n+1} > x_n$, $\{x_n\}$ — *возрастающая*, $\{x_n\}\uparrow$;
$x_{n+1} \geq x_n$, $\{x_n\}$ — *неубывающая*, $\{x_n\}\nearrow$;
$x_{n+1} \leq x_n$, $\{x_n\}$ — *невозрастающая*, $\{x_n\}\rightarrow$;
$x_{n+1} < x_n$, $\{x_n\}$ — *убывающая*, $\{x_n\}\downarrow$.

Теорема 5.1 (Вейерштрасса). *Пусть последовательность* $\{a_n\}$ *возрастает или неубывает и ограничена сверху, тогда* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$, *где* $\sup\{a_n\}$ — *наименьшее из чисел, ограничивающих данную последовательности сверху. Пусть последовательность* $\{a_n\}$ *убывает или невозрастает и ограничена снизу, тогда* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$, *где* $\inf\{a_n\}$ — *наибольшее из чисел, ограничивающих данную последовательности снизу.*

5.1. • Пусть $a > 0$. Докажите сходимость последовательности

$$x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{n\text{ корней}}$$

и найдите ее предел.

5.2 (среднее арифметико-геометрическое). Пусть даны два положительных числа $a > b$. Положим

$$a_1 = \frac{a+b}{2},\ b_1 = \sqrt{ab},\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Замечание 5.1. В данном примере мы не находим выражение для предела, но, зная, что он существует, легко можем вычислить его с любой степенью точности, так как он содержится между последовательностями a_n и b_n ($a_n \geq b_n$ $\forall n$). Вычисление данного предела будет проведено в дальнейшем.

5.3 (69) (число e). • Докажите, что последовательность $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ($n = 1, 2, \ldots$) монотонно возрастает и ограничена сверху, а последовательность $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ (n = 1, 2, ...) монотонно убывает и ограничена снизу. Отсюда выведите, что эти последовательности имеют общий предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

5.4. Используя равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$:

а) • докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e;$$

Замечание 5.2. Последовательность $\{s_n\} = 2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ сходится к числу e гораздо быстрее последовательности $\{e_n\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и поэтому применима к вычислениям числа e значительно лучше (например, $e - e_5 \approx 0{,}2299$; $e - s_5 \approx \approx 0{,}0016$). Более подробно скорости сходимости данных последовательностей можно изучить по рис. 5.1.

б) докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k,$$

где $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$;

Замечание 5.3. Основная трудность этой задачи заключается в доказательстве сходимости данной последовательности.

в) выведите формулу

$$e = 2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n},$$

где $0 < \theta_n < 1$;

г) докажите, что число e иррациональное;

Замечание 5.4. Отметим, что число e не только *иррациональное*, но даже *трансцендентное* (число, не являющееся корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами).

д) * докажите, что $Ae^2 + Be + C \neq 0$, если $A, B, C \in \mathbb{Z}$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

5.5 (70). Докажите, что

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n},\ n = 1, 2, \ldots .$$