С. А. Логвенков, В. С. Самовол

Линейная алгебра

Основы теории, примеры и задачи

Москва
Издательство МЦНМО
2017

УДК 512 (075.8)
ББК 22.143
Л69

Авторы:

Логвенков Сергей Алексеевич
доцент кафедры высшей математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)

Самовол Владимир Симхович
профессор кафедры высшей математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)

Утверждено на заседании кафедры высшей математики НИУ ВШЭ

Рецензенты:

Буров А. А.,
д. ф.-м. н., с. н. с. ФИЦ Информатика и Управление РАН

Юмашев М. В.,
к. ф.-м. н., доцент механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова

Логвенков С. А., Самовол В. С.

Л69 Линейная алгебра. Основы теории, примеры и задачи. — М.: МЦНМО, 2017. — 188 с.

ISBN 978-5-4439-2627-8

Издание ориентировано на программы курсов по линейной алгебре для студентов социально-экономических и управленческих специальностей, а также на соответствующие разделы программ по высшей математике факультетов НИУ ВШЭ с более углубленным изучением математики. Учебник охватывает такие основные разделы линейной алгебры, как векторная алгебра с элементами аналитической геометрии, теория линейных уравнений и связанная с ней алгебра матриц, теория многочленных матриц, элементы теории квадратичных форм, а также базовые сведения из теории линейных пространств и линейных операторов. Усвоению теоретического материала способствует включение в книгу большого числа примеров и задач, в том числе теоретического характера.

ББК 22.143

ISBN 978-5-4439-2627-8

© Логвенков С. А., Самовол В. С., 2017.
© МЦНМО, 2017.

Предисловие

Предлагаемое издание охватывает основные разделы линейной алгебры, которые, как правило, изучаются на первом курсе университета студентами социально-экономических и управленческих специальностей. Вместе с тем некоторые разделы могут быть полезны студентам, обучающимся по специальности «Прикладная математика». Сюда относятся: векторная алгебра с элементами аналитической геометрии, теория линейных уравнений и связанная с ней алгебра матриц, теория многочленных матриц, элементы теории квадратичных форм, а также базовые сведения из теории линейных пространств и линейных операторов.

Учебник ориентирован на помощь читателю в осмыслении основных теоретических положений линейной алгебры. Эта цель достигается путем включения в книгу значительного числа примеров и задач, служащих хорошим иллюстративным материалом к рассматриваемым теоретическим положениям и способствующих усвоению методических приемов и выработке практических навыков решения задач. Большое внимание при этом авторы уделили примерам и задачам теоретического характера, дающим читателю дополнительные возможности для осмысления различных аспектов представленного теоретического материала. Помимо иллюстрирующих основной материал примеров, в учебник включены задачи для самостоятельного решения.

Особую важность представляют те разделы (жорданова форма матриц, квадратичные формы и др.), которые являются необходимой основой для изучения различных математических таких курсов, как дифференциальные уравнения, математическое моделирование, математический анализ, традиционно изучаемых студентами университетов.

В предлагаемом издании представлены практически все основные теоретические положения базовых разделов линейной алгебры. Часть из них дана без подробных обоснований. Авторы сочли разумным заменить изложение многих доказательств, которые можно найти в многочисленных учебниках, примерами и задачами, способствующими углубленному усвоению теоретического материала

и служащими его необходимой иллюстрацией. В то же время многие положения, играющие важную роль при усвоении материала, снабжены необходимыми пояснениями и подробными комментариями. Везде, где это было возможно, авторы стремились к алгоритмичности изложения теоретических положений и проводимых вычислений.

При работе над данным изданием авторы привлекали широкий круг разнообразных источников, прежде всего те книги, которые представлены в приводимом библиографическом списке.

Авторы выражают благодарность рецензентам, замечания которых позволили улучшить книгу.

Глава 1

Векторная алгебра, линейные пространства и начала аналитической геометрии

§ 1. Векторная алгебра и линейные пространства

1. Векторная алгебра

Определение. *Вектором* называется упорядоченная пара точек. Первая точка называется началом вектора, вторая — концом вектора.

Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется нулевым, его длина равна нулю. Если длина вектора положительна, то его называют ненулевым. Ненулевой вектор можно определить также как направленный отрезок, т. е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек считается первой (началом вектора), а другая — второй (концом вектора). Направление нулевого вектора, естественно, не определено.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$ и изображается стрелкой, обращенной острием к концу вектора. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна длине отрезка AB и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. Имея в виду это обозначение, длину вектора называют также модулем или абсолютной величиной. Нулевой вектор, например $\overrightarrow{AA}$, обозначается символом $\vec{0}$ и изображается одной точкой.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются равными векторами, если после их параллельного переноса в одну точку так, чтобы начала векторов (точки A и C) совпадали, совпадут и концы векторов (точки B и D).

Линейные операции над векторами

1. Сложение векторов. Пусть даны два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Перенесем параллельным переносом вектор $\overrightarrow{CD}$ так, чтобы его начало совпало с точкой B. Получим вектор $\overrightarrow{BD}_1 = \overrightarrow{CD}$. Вектор $\overrightarrow{AD}_1$ называется *суммой* $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}_1 = \overrightarrow{AD}_1.$$

Это правило нахождения суммы двух векторов называется *правилом треугольника*.

Сумму двух неколлинеарных векторов можно найти по правилу параллелограмма. Для этого перенесем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ в одну точку O. Получим векторы $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{CD}$. Диагональ OC_1 параллелограмма $OB_1C_1D_1$ определяет сумму

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OC}.$$

2. Вычитание векторов. Пусть даны два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. С помощью параллельного переноса приложим их к произвольной точке O. Получим векторы $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{CD}$. Искомую *разность* находим по правилу

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{D_1B_1}.$$

3. Умножение вектора на число. Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число λ ($\lambda \neq 0$) называется вектор $\lambda \cdot \vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям: длина вектора $\lambda \cdot \vec{a}$ равна $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, т. е. $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$; начала и концы векторов $\vec{a}$ и $\lambda \cdot \vec{a}$ лежат на соответствующих параллельных прямых; векторы $\vec{a}$ и $\lambda \cdot \vec{a}$ одинаково направлены, если $\lambda > 0$, и противоположно направлены, если $\lambda < 0$.

4. Условие коллинеарности векторов. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если существует такое число λ ($\lambda \neq 0$), что $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$.

Определение. *Арифметическим n-мерным вектором* называется любой упорядоченный набор из n действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Для сокращенного обозначения арифметического вектора обычно используется запись $\vec{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются координатами этого вектора.

Определение. *Суммой двух векторов* с одним и тем же числом координат $\vec{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ и $\vec{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n)$ называется вектор $\vec{c} = (c_1; c_2; \ldots; c_n)$ с координатами $c_i = a_i + b_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Определение. *Произведением вектора* $\vec{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ *на число* λ называется вектор $\vec{c} = (c_1; c_2; \ldots; c_n)$ с координатами $c_i = \lambda \cdot a_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Определение. Два вектора с одним и тем же числом координат $\vec{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ и $\vec{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n)$ считаются *равными* в том и только в том случае, когда $a_i = b_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Определение. Множество всех n-мерных вещественных векторов, в котором введены операции сложения векторов и умножения вектора на число, называется *n-мерным вещественным векторным пространством* и обозначается $\mathbb{R}^n$.

2. Линейное пространство

Определение. Множество L, состоящее из произвольных элементов, называемых *векторами*, является линейным векторным пространством, если на нем определены две операции:

1) *операция сложения*: для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, принадлежащих множеству L, существует вектор $\vec{c}$, также принадлежащий множеству L, такой, что $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

2) *операция умножения на число*: для любого вектора $\vec{a}$, принадлежащего множеству L, и числа λ, существует вектор $\vec{c}$, принадлежащий множеству L, такой, что $\vec{c}=\lambda\cdot\vec{a}$.

При этом необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\ \forall\vec{a},\vec{b}\in L$;

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\ \forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in L$;

3) существует такой нулевой элемент $\vec{0}\in L$, что $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}\ \forall\vec{a}\in L$;

4) $\forall\vec{a}\in L$ существует такой вектор $-\vec{a}\in L$, что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

5) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}\ \forall\vec{a},\vec{b}\in L$ и $\forall\lambda\in\mathbb{R}$;

6) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}\ \forall\vec{a}\in L$ и $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$;

7) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}\ \forall\vec{a}\in L$ и $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$;

8) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}\ \forall\vec{a}\in L$.

Условия 1—8 называются *аксиомами линейного пространства*. Знак равенства, поставленный между векторами, означает, что в левой и правой частях равенства представлен один и тот же элемент множества L; такие векторы называются равными. Знак стрелка над элементами линейного пространства зачастую опускается.

В определении линейного пространства операция умножения вектора на число введена для действительных чисел. Такое пространство называют *линейным пространством над множеством действительных (вещественных) чисел* или, короче, *вещественным линейным пространством*. Если в определении вместо множества $\mathbb{R}$ действительных чисел взять множество комплексных чисел $\mathbb{C}$, то получим *линейное пространство над множеством комплексных чисел*, или, короче, *комплексное линейное пространство*. В качестве числового множества можно выбрать и множество рациональных чисел, при этом получим линейное пространство над множеством рациональных чисел. Далее, если не оговорено обратное, будут рассматриваться вещественные линейные пространства. В некоторых случаях для краткости будем говорить о пространстве, опуская слово «линейное», так как все пространства, рассматриваемые ниже, линейные.

Замечание[1]. 1. Аксиомы 5 и 6 определяют дистрибутивность операции умножения вектора на число по отношению к операции сложения векторов (аксиома 5) или к операции сложения чисел (аксиома 6). Аксиома 7, иногда называемая законом ассоциативности умножения на число, выражает связь двух разных операций: умножения вектора на число и умножения чисел. Свойство, определяемое аксиомой 8, называется унитарностью операции умножения вектора на число.

2. Линейное пространство — это непустое множество, так как оно обязательно содержит нулевой вектор.

3. Операции сложения векторов и умножения вектора на число называются линейными операциями над векторами.

4. Сумма вектора u с противоположным вектором $-v$ называется разностью векторов u и v и обозначается $u-v=u+(-v)$.

5. Два ненулевых вектора u и v называются коллинеарными (пропорциональными), если существует такое число λ, что $v=\lambda u$. Понятие коллинеарности распространяется на любое конечное число векторов. Нулевой вектор 0 считается коллинеарным с любым вектором.

Следствия аксиом линейного пространства

1. В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор.

2. В линейном пространстве для любого вектора $v\in L$ существует единственный противоположный вектор $-v\in L$.

3. Произведение произвольного вектора пространства на число нуль равно нулевому вектору, т. е. $0v=0$, $\forall v\in L$.

4. Произведение нулевого вектора на любое число равно нулевому вектору, т. е. $\lambda 0=0$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

5. Вектор, противоположный данному вектору, равен произведению данного вектора на число -1, т. е. $-v=(-1)v$ $\forall v\in L$.

6. В выражениях вида $a+b+\ldots+z$ (сумма конечного числа векторов) или $\alpha\cdot\beta\cdot\ldots\cdot\omega\cdot v$, где $\alpha,\beta,\ldots,\omega\in\mathbb{R}$ и $v\in L$ (произведение вектора на конечное число множителей), можно расставлять скобки в любом порядке либо вообще не указывать.

Докажем, например, первые два свойства. Покажем единственность нулевого вектора. Если 0 и $0'$ — два нулевых вектора, то по аксиоме 3 получаем равенства $0'+0=0'$ и $0+0'=0$, левые части

[1] Знак стрелка над элементами линейного пространства здесь и далее может быть опущен.

которых равны по аксиоме 1. Следовательно, равны и правые части, т. е. $0 = 0'$. Теперь покажем единственность противоположного вектора. Если вектор $v \in L$ имеет два противоположных вектора $-v$ и $(-v)'$, то по аксиомам 2, 3, 4 получаем их равенство:

$$(-v)' = (-v)' + (v + (-v)) = ((-v)' + v) + (-v) = -v.$$

Остальные свойства доказываются аналогично.

Линейным подпространством векторного пространства L называется непустое множество $L_1 \subset L$, обладающее следующими свойствами:

1) сумма двух элементов из L_1 снова принадлежит L_1;

2) произведение αv любого вектора $v \in L_1$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$ снова принадлежит L_1.

Примеры линейных пространств

1. Пусть $\{0\}$ — множество, содержащее один нулевой вектор, с операциями $0 + 0 = 0$ и $\lambda 0 = 0$. Для указанных операций аксиомы 1—8 выполняются. Следовательно, множество $\{0\}$ является линейным пространством над любым числовым полем. Это линейное пространство называется нулевым.

2. Обозначим через V_1, V_2, V_3 множества векторов (направленных отрезков) на прямой, на плоскости, в пространстве соответственно с обычными операциями сложения векторов и умножения векторов на число. Выполнение аксиом 1—8 линейного пространства следует из курса элементарной геометрии. Следовательно, множества V_1, V_2, V_3 являются вещественными линейными пространствами. Вместо свободных векторов можно рассмотреть соответствующие множества радиус-векторов. Например, множество векторов на плоскости, имеющих общее начало, т. е. отложенных от одной фиксированной точки плоскости, является вещественным линейным пространством. Множество радиус-векторов единичной длины не образует линейное пространство, так как для любого из этих векторов сумма $v + v$ не принадлежит рассматриваемому множеству.

3. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ подмножество векторов с неотрицательными действительными элементами. Такое подмножество не является линейным пространством, так как не содержит противоположных векторов.

Множество столбцов из $\mathbb{R}^n$, у которых последние m элементов равны нулю $(m < n)$, является линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^n$.

4. Пусть $\{Ax=0\}$ — множество решений следующей однородной системы линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=0, \\ 5x_1-4x_2=0. \end{cases}$$

Из свойства решений однородной системы следует, что сумма двух решений однородной системы и произведение ее решения на число также являются решениями однородной системы, т. е. принадлежат множеству $\{Ax=0\}$. Поэтому множество решений однородной системы является вещественным линейным пространством.

Множество $\{Ax=b\}$ решений неоднородной системы

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=4, \\ 5x_1-4x_2=3 \end{cases}$$

не является линейным пространством хотя бы потому, что не содержит нулевого элемента ($x=0$ не является решением неоднородной системы).

5. Пусть $M_{m\times n}$ — множество числовых таблиц (матриц) размера $m\times n$ с операциями сложения матриц и умножения матриц на число. Аксиомы 1—8 линейного пространства для этого множества выполняются. Нулевым вектором является нулевая матрица соответствующих размеров. Следовательно, множество $M_{m\times n}$ является линейным пространством.

6. Пусть $P(\mathbb{C})$ — множество многочленов одной переменной с комплексными коэффициентами. Операции сложения многочленов и умножения многочлена на число, рассматриваемое как многочлен нулевой степени, определены и удовлетворяют аксиомам 1—8 (в частности, нулевым вектором является многочлен, тождественно равный нулю). Поэтому множество $P(\mathbb{C})$ является линейным пространством над множеством комплексных чисел. Множество $P(\mathbb{R})$ многочленов с действительными коэффициентами также является линейным пространством (но, разумеется, над множеством действительных чисел). Множество $P_n(\mathbb{R})$ многочленов степени не выше чем n с действительными коэффициентами также является вещественным линейным пространством. Заметим, что операция сложения многочленов определена на этом множестве, так как степень суммы многочленов не превышает большей из степеней слагаемых. Множество $P_n(\mathbb{R})$ является линейным подпространством пространства $P_m(\mathbb{R})$ при $m>n$.

Множество многочленов степени n не является линейным пространством, так как сумма таких многочленов может оказаться многочленом меньшей степени, не принадлежащим рассматриваемому множеству. Множество всех многочленов степени не выше чем n с положительными коэффициентами также не является линейным пространством, поскольку при умножении такого многочлена на отрицательное число получим многочлен, не принадлежащий этому множеству.

7. Пусть $C(\mathbb{R})$ — множество действительных функций, определенных и непрерывных на $\mathbb{R}$. Сумма $(f+g)$ функций f, g и произведение λf функции f на действительное число λ определяются равенствами $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Эти операции действительно определены на $C(\mathbb{R})$, так как сумма непрерывных функций и произведение непрерывной функции на число являются непрерывными функциями, т. е. элементами множества $C(\mathbb{R})$. Проверим выполнение аксиом линейного пространства. Из коммутативности сложения действительных чисел следует справедливость равенства

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. Поэтому $f + g = g + f$, т. е. аксиома 1 выполняется. Аксиома 2 аналогичным образом следует из ассоциативности сложения. Нулевым вектором служит функция $0(x)$, тождественно равная нулю, которая, разумеется, является непрерывной. Для любой функции f выполняется равенство $f(x) + 0(x) = f(x)$, т. е. справедлива аксиома 3. Противоположным вектором для вектора f будет функция $(-f)(x) = -f(x)$. Тогда $f + (-f) = 0$ (аксиома 4 выполняется). Аксиомы 5, 6 следуют из дистрибутивности операций сложения и умножения действительных чисел, а аксиома 7 — из ассоциативности умножения чисел. Последняя аксиома выполняется, так как умножение на единицу не изменяет функцию: $1 \cdot f(x) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$, т. е. $1 \cdot f = f$. Таким образом, рассматриваемое множество $C(\mathbb{R})$ с введенными операциями является вещественным линейным пространством. Аналогично доказывается, что $C^1(\mathbb{R})$, $C^2(\mathbb{R})$, …, $C^m(\mathbb{R})$ — множества функций, имеющих непрерывные производные первого, второго и т. д. порядков соответственно, — также являются линейными пространствами.

Множество действительных функций, определенных и монотонных на $\mathbb{R}$, не является линейным пространством, так как разность двух монотонных функций может оказаться немонотонной функцией.

Задачи для самостоятельной работы

1.1. В треугольнике ABC точка M делит сторону BC в отношении $3:5$ (считая от точки B). Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

1.2. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Разложите вектор $\overrightarrow{DO}$ по векторам $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$, где O — точка пересечения медиан треугольника.

1.3. В параллелограмме $ABCD$ точки M и K — середины сторон BC и CD соответственно. Разложите вектор $\overrightarrow{AD}$ по векторам $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BK}$.

1.4. В трапеции $ABCD$ стороны AD и BC параллельны и $AD = 2BC$. Точка M — середина стороны CD. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$.

1.5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка P — центр грани $A_1B_1C_1D_1$, точка Q — центр грани DD_1C_1C, а L — середина отрезка PQ. Разложите вектор $\overrightarrow{AL}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

1.6. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K — середина ребра C_1D_1, а точка M делит ребро AA_1 в отношении $1:2$ (считая от точки A). Разложите вектор $\overrightarrow{MK}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

1.7. В треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке M. Разложите вектор $\overrightarrow{SM}$ по векторам $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SC}$.

1.8. В правильном тетраэдре $SABC$ точка O — центр треугольника ABC, а точка M — середина ребра SC. Разложите вектор $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AS}$.

1.9. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(3;-4;7)$, $B(-5;3;-2)$, $C(1;2;-3)$. Найдите его четвертую вершину D.

1.10. Даны векторы $\overrightarrow{AC} = (1;-1;6)$ и $\overrightarrow{BD} = (-1;-5;2)$, являющиеся диагоналями параллелограмма $ABCD$, и точка $A(2;3;1)$. Найдите координаты точек B и D.

1.11. Является ли линейным подпространством совокупность векторов из $\mathbb{R}^n$, координаты которых являются целыми числами?

1.12. Является ли линейным подпространством совокупность векторов плоскости xOy, каждый из которых лежит на одной из осей координат Ox или Oy?

1.13. В каком случае множество всех векторов плоскости xOy, концы которых лежат на данной прямой, а начала совпадают с началом координат, является линейным подпространством?

1.14. Является ли линейным подпространством совокупность векторов плоскости xOy, начала и концы которых лежат на данной прямой?

1.15. Является ли линейным подпространством совокупность векторов трехмерного пространства, концы которых не лежат на данной прямой?

1.16. Является ли линейным подпространством совокупность векторов из $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$?

1.17. Является ли линейным подпространством совокупность векторов из $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$?

1.18. Докажите, что система векторов из $\mathbb{R}^n$, у которых первая и последняя координаты равны между собой, образует линейное подпространство. Найдите его базис и размерность.

§ 2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов

1. Основные понятия

Определение. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не равные одновременно нулю, что справедливо равенство

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = 0.$$

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется линейно независимой, если из равенства $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n=0$ следует, что $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$.

Примеры линейно зависимых и линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$

1. Любые два коллинеарных вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ являются линейно зависимыми. Пусть, например, $\vec{a}_1 = 3\vec{a}_2$. Тогда, перенося все слагаемые налево и положив $\lambda_1 = 1$, а $\lambda_2 = -3$, получим выполнение определения линейной зависимости.

2. Два неколлинеарных ненулевых вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ на плоскости линейно независимы. Действительно, если предположить, что векторы линейно зависимы, то найдется пара чисел λ_1 и λ_2, не равных одновременно нулю (пусть $\lambda_1 \neq 0$) и таких, что $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 = 0$. Тогда, разделив на λ_1, мы получим условие коллинеарности векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ и тем самым придем к противоречию. Следовательно, предположение о линейной зависимости было неверным.

3. Любые три компланарных вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ в $\mathbb{R}^3$ являются линейно зависимыми. Действительно, перенесем векторы в одну

точку и построим параллелограмм таким образом, чтобы два вектора были направлены вдоль его сторон, а третий вектор являлся диагональю параллелограмма. Тем самым третий вектор будет линейно выражаться через первые два вектора.

4. Любые три некомпланарных вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ в $\mathbb{R}^3$ являются линейно независимыми. Если предположить, что векторы линейно зависимы, то найдется тройка чисел λ_1, λ_2 и λ_3, не равных одновременно нулю (пусть $\lambda_1 \neq 0$) и таких, что $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 = 0$. Тогда, разделив на λ_1, получим, что вектор $\vec{a}_1$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$, т. е. лежит в плоскости, содержащей векторы $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$, и тем самым придем к противоречию. Следовательно, предположение о линейной зависимости было неверным.

Пример 1. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите значения параметров p и q, при которых векторы $p\vec{a} + q\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c}$ коллинеарны.

Решение. Запишем условие коллинеарности векторов:

$$p\vec{a} + q\vec{b} + \vec{c} = \lambda(\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c}).$$

Перенося все слагаемые в правую часть равенства и приводя подобные слагаемые, получим, что

$$(\lambda - p)\vec{a} + (p\lambda - q)\vec{b} + (q\lambda - 1)\vec{c} = 0.$$

С учетом того, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны, т. е. линейно независимы, последнее равенство возможно лишь при условии равенства нулю коэффициентов при них. В результате получаем систему уравнений для нахождения неизвестных p, q и λ:

$$\begin{cases} \lambda - p = 0, \\ p\lambda - q = 0, \\ q\lambda - 1 = 0. \end{cases}$$

Решением системы уравнений являются $p = q = 1$ (при $\lambda = 1$).

Пример 2. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите значения параметра k, при которых векторы $\vec{a} + \vec{b} + k\vec{c}$, $k\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}$ компланарны.

Решение. Условие компланарности трех векторов состоит в том, что один вектор линейно выражается через два других:

$$\vec{a} + \vec{b} + k\vec{c} = \lambda(k\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \mu(\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}).$$

После переноса всех слагаемых в правую часть равенства и приведения подобных слагаемых получим, что

$$(\lambda k+\mu-1)\vec{a}+(\lambda+\mu k-1)\vec{b}+(\lambda+\mu-k)\vec{c}=0.$$

С учетом того, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны, т. е. линейно независимы, последнее равенство возможно лишь при условии равенства нулю коэффициентов при них. В результате получаем систему уравнений для нахождения неизвестных λ, μ и k:

$$\begin{cases} \lambda k+\mu-1=0, \\ \lambda+\mu k-1=0, \\ \lambda+\mu-k=0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим, что при $k-1=0$ система уравнений будет выполнена при любых λ и μ, удовлетворяющих уравнению $\lambda+\mu-1=0$. Если $k-1\neq 0$, то $\lambda=\mu$ и из первых двух уравнений следует, что $\lambda(k+1)=1$, а из третьего — что $2\lambda=k$. В результате получим, что параметр k удовлетворяет уравнению $k^2+k-2=0$ и $k_1=-2$, $k_2=1$.

2. Свойства линейно зависимых и линейно независимых векторов

1. Любая система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой.

2. Система векторов, содержащая два равных вектора, является линейно зависимой.

3. Система векторов, содержащая два коллинеарных вектора, является линейно зависимой.

4. Система векторов, содержащая более одного вектора, является линейно зависимой тогда и только тогда, когда среди данных векторов имеется такой, который линейно выражается через остальные.

5. Если система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ является линейно независимой, а система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}$ является линейно зависимой, то вектор $\vec{a}_{n+1}$ можно разложить по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, притом единственным образом.

Элементарные преобразования системы векторов

1. Перестановка двух произвольных векторов местами.
2. Умножение вектора на число, отличное от нуля.
3. Прибавление к одному вектору системы другого вектора.

Теорема. *Элементарные преобразования не меняют свойств линейной зависимости или независимости системы векторов.*

Определение. Система векторов называется *ступенчатой*, если в координатной записи векторов каждый последующий вектор имеет в начале хотя бы на одну нулевую координату больше (нули идут подряд), чем предыдущий.

Примером ступенчатой системы векторов является следующая система: $\vec{a}_1 = (x_1; x_2; x_3; x_4)$, $\vec{a}_2 = (0; 0; y_3; y_4)$, $\vec{a}_3 = (0; 0; 0; z_4)$. Здесь координаты, обозначенные буквами, являются отличными от нуля числами.

Теорема. *Любая ступенчатая система векторов, не содержащая нулевого вектора, является линейно независимой.*

Пример 3. Исследуйте систему векторов $\vec{a}_1 = (1; 2; -1; -2; 0)$, $\vec{a}_2 = (2; 3; 0; -2; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; 2; 1; 4; 2)$, $\vec{a}_4 = (1; 3; -1; 0; -1)$ на линейную зависимость и независимость.

Решение. Запишем эти векторы в виде таблицы (матрицы), в которой строка с номером k состоит из координат вектора $\vec{a}_k$. Используя элементарные преобразования, приведем эту систему к ступенчатому виду. Если в результате преобразований будет получен нулевой вектор, то данная система векторов будет линейно зависимой, если нет — линейно независимой. Справа от каждой строки будем указывать проводимые элементарные преобразования, нумеруя строки латинским цифрами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} - \text{I} \\ \text{IV} - \text{I} \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{(меняем местами} \\ \text{строки III и IV)} \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{III} + \text{II} \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{IV} - \text{III} \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система векторов приведена к ступенчатой системе, не содержащей нулевого вектора, поэтому исходная система векторов является линейно независимой.

Задачи для самостоятельной работы

2.1. Исследуйте систему векторов на линейную зависимость или независимость:

а) $\vec{a}_1 = (-7; 5; 19)$, $\vec{a}_2 = (-5; 7; -7)$, $\vec{a}_3 = (-8; 7; 14)$;

б) $\vec{a}_1 = (1; 2; -2)$, $\vec{a}_2 = (0; -1; 4)$, $\vec{a}_3 = (2; -3; 3)$;

в) $\vec{a}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{a}_2 = (2; -1; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; 3; 4)$;

г) $\vec{a}_1 = (0; 1; 1; 0)$, $\vec{a}_2 = (1; 1; 3; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; 3; 5; 1)$, $\vec{a}_4 = (0; 1; 1; -2)$;

д) $\vec{a}_1 = (-1; 7; 1; -2)$, $\vec{a}_2 = (2; 3; 2; 1)$, $\vec{a}_3 = (4; 4; 4; -3)$, $\vec{a}_4 = (1; 6; -1; 1)$.

2.2. При каких значениях параметра a система векторов является линейно зависимой:

$$\vec{a}_1 = (1; 2; -1; 1), \quad \vec{a}_2 = (2; 5; 0; 1), \quad \vec{a}_3 = (-1; 0; 5; a)?$$

2.3. При каких значениях параметра a система векторов является линейно независимой:

$$\vec{a}_1 = (2; 1; a; 2), \quad \vec{a}_2 = (1; 2; 3; 1), \quad \vec{a}_3 = (1; -1; 2; 1)?$$

§ 3. Базис, координаты, размерность линейного пространства. Ранг системы векторов

1. Базис линейного пространства

Определение. Упорядоченная система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называется *базисом линейного пространства* L, если выполнены следующие условия:

1) векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ линейно независимы;

2) для любого вектора $\vec{a}$ из линейного пространства L существует такой набор чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n.$$

Последнее равенство называется разложением вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, а коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — координатами вектора $\vec{a}$ в данном базисе.

Теорема. *Разложение элемента $\vec{a}$ линейного пространства L по данному базису единственно, т. е. существует единственный такой набор чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что*

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n.$$

Теорема. *Число векторов базиса линейного пространства определено однозначно.*

Определение. *Размерностью* линейного пространства L называется количество векторов его базиса. Размерность пространства L обозначается $\dim L$.

Базис линейного пространства определяется неоднозначно. Например, если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства L, то система векторов $\lambda e_1, \lambda e_2, \ldots, \lambda e_n$ при любом $\lambda \neq 0$ также является базисом пространств L. Количество базисных векторов в разных базисах одного и того же конечномерного пространства, разумеется, одно и то же, так как это количество равно размерности пространства.

В некоторых пространствах, часто встречающихся в приложениях, один из возможных базисов, наиболее удобный с практической точки зрения, называют стандартным.

Определение. *Линейной оболочкой* набора векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называется множество всевозможных линейных комбинаций $\alpha_1 a_1 + + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k$ данных векторов с произвольными коэффициентами α_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, из поля действительных чисел $\mathbb{R}$. Линейная оболочка векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ обозначается $\mathrm{Lin}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Теорема (о дополнении системы векторов до базиса)**.** *Всякую линейно независимую систему k векторов n-мерного линейного пространства $(1 \leqslant k \leqslant n)$ можно дополнить до базиса пространства.*

Доказательство. В самом деле, пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — линейно независимая система векторов n-мерного пространства L $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Рассмотрим линейную оболочку этих векторов: $L_k = \mathrm{Lin}(e_1; e_2; \ldots; e_k)$. Любой вектор $v \in L_k$ образует с векторами $e_1, e_2, \ldots, e_k$ линейно зависимую систему $e_1, e_2, \ldots, e_k, v$, так как вектор v линейно выражается через остальные. Поскольку в n-мерном пространстве существует n линейно независимых векторов, получаем, что $L_k \neq L$ и существует вектор $e_{k+1} \in L$, который не принадлежит L_k. Дополняя этим вектором линейно независимую систему $e_1, e_2, \ldots, e_k$, получаем систему векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}$, которая также линейно независима. Действительно, если бы она оказалась линейно зависимой, то из этого следовало бы, что $e_{k+1} \in \mathrm{Lin}(e_1; e_2; \ldots; e_k) = L_k$, а это противоречит условию $e_{k+1} \notin L_k$.

Итак, система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}$ линейно независима. Значит, первоначальную систему векторов удалось дополнить одним вектором без нарушения линейной независимости. Продолжаем этот процесс. Рассмотрим линейную оболочку этих векторов:

$L_{k+1} = \mathrm{Lin}(e_1; e_2; \ldots; e_k; e_{k+1})$. Если $L_{k+1} = L$, то $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}$ — базис и теорема доказана. Если $L_{k+1} \neq L$, то дополняем систему векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}$ вектором $e_{k+2} \in L$, $e_{k+2} \notin L_{k+1}$ и т. д. Процесс дополнения обязательно закончится, так как пространство L конечномерное. В результате получим равенство

$$L = L_n = \mathrm{Lin}(e_1; e_2; \ldots; e_k; \ldots; e_n),$$

из которого следует, что $e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots, e_n$ — базис пространства L. Теорема доказана. □

Теорема о дополнении системы векторов до базиса говорит о том, что базис — это *максимальная линейно независимая система векторов* линейного пространства, так как базис — это линейно независимая система векторов и ее нельзя дополнить каким-либо вектором без потери линейной независимости.

Покажем теперь, что если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V, то $V = \mathrm{Lin}(e_1; e_2; \ldots; e_n)$, т. е. линейное пространство является линейной оболочкой базисных векторов.

В самом деле, для доказательства равенства $V = \mathrm{Lin}(e_1; e_2; \ldots; e_n)$ двух множеств векторов достаточно показать, что включения $V \subset \subset \mathrm{Lin}(e_1; e_2; \ldots; e_n)$ и $\mathrm{Lin}(e_1; e_2; \ldots; e_n) \subset V$ выполняются одновременно. Действительно, с одной стороны, любая линейная комбинация векторов линейного пространства принадлежит самому линейному пространству, т. е. $\mathrm{Lin}(e_1; e_2; \ldots; e_n) \subset V$. С другой стороны, любой вектор пространства по определению базиса можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов, т. е. $V \subset \subset \mathrm{Lin}(e_1; e_2; \ldots; e_n)$. Отсюда следует равенство рассматриваемых множеств.

Примеры базисов

1. Любая тройка некомпланарных векторов является базисом в пространстве $\mathbb{R}^3$.

2. Рассмотрим линейное пространство векторов $\vec{a} = (x; y)$, координаты которых удовлетворяют условию $y = 3x$. Векторы этого линейного пространства имеют общий вид $\vec{a} = (x; 3x)$. Поэтому базис состоит из одного вектора, например $\vec{e}_1 = (1; 3)$.

3. В линейном пространстве многочленов степени, не превышающей два, в качестве базиса можно взять векторы $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = x$, $\vec{e}_3 = x^2$. Действительно, элементы этого линейного пространства имеют общий вид $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, тогда в указанном базисе

этот многочлен можно представить как $P_2(x) = c\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + a\vec{e}_3$, а значит, тройка чисел c, b, a является координатами многочлена $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ в базисе $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = x$, $\vec{e}_3 = x^2$.

Пример 1. В линейном пространстве многочленов степени, не превышающей 2, разложите многочлен $P(x) = 3x^2 + x + 3$ по многочленам $Q(x) = 2x^2 + x$, $R(x) = x^2 + 1$ и $S(x) = 4x^2 + 2x + 1$.

Решение. В линейном пространстве многочленов степени, не превышающей два, в качестве базиса можно взять векторы $\vec{e}_1 = x^2$, $\vec{e}_2 = x$, $\vec{e}_3 = 1$. Тогда в выбранном базисе каждый многочлен можно рассматривать как вектор: $P(x) = (3; 1; 3)$, $Q(x) = (2; 1; 0)$, $R(x) = (1; 0; 1)$, $S(x) = (4; 2; 1)$. Чтобы разложить многочлен $P(x)$ по многочленам $Q(x)$, $R(x)$ и $S(x)$, необходимо найти числа a_1, a_2, a_3, при которых будет выполнено равенство

$$P(x) = a_1 Q(x) + a_2 R(x) + a_3 S(x).$$

В координатном виде оно имеет вид

$$(3; 1; 3) = a_1(2; 1; 0) + a_2(1; 0; 1) + a_3(4; 2; 1),$$

или, с учетом правил умножения вектора на число и сложения векторов

$$(3; 1; 3) = (2a_1 + a_2 + 4a_3; a_1 + 2a_3; a_2 + a_3).$$

Приравнивая соответствующие координаты векторов в левой и правой частях равенства, найдем неизвестные a_1, a_2, a_3 из решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 + 4a_3 = 3, \\ a_1 + 2a_3 = 1, \\ a_2 + a_3 = 3. \end{cases}$$

Решая полученную систему методом исключения неизвестных, найдем, что $a_1 = -3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ и искомое разложение имеет вид $P(x) = -3Q(x) + R(x) + 2S(x)$.

Пример 2. Для любого натурального числа n в пространстве $P(\mathbb{C})$ многочленов с комплексными коэффициентами найдите n линейно независимых элементов.

Решение. Многочлены

$$e_1 = 1, \quad e_2 = z, \quad \ldots, \quad e_n = z^{n-1}$$

линейно независимы, так как их линейная комбинация

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \alpha_1 + \alpha_2 z + \ldots + \alpha_n z^{n-1}$$

равна нулевому многочлену только в тривиальном случае

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Поскольку эта система многочленов линейно независима при любом натуральном n, пространство $P(\mathbb{C})$ бесконечномерно. Аналогично делаем вывод о бесконечной размерности пространства $P(\mathbb{R})$ многочленов с действительными коэффициентами. Пространство $P_n(\mathbb{R})$ многочленов степени не выше чем n конечномерно. Действительно, векторы $e_1 = 1$, $e_2 = x$, …, $e_{n+1} = x^n$ образуют базис этого пространства, так как они линейно независимы и любой многочлен из $P_n(\mathbb{R})$ можно представить в виде линейной комбинации этих векторов:

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = \alpha_0 e_1 + \alpha_1 e_2 + \ldots + \alpha_n e_{n+1}.$$

Следовательно, $\dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

Пространство $\mathbb{R}^n$ содержит не более чем n линейно независимых векторов. Следовательно, $\dim \mathbb{R}^n \leqslant n$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ легко найти n линейно независимых столбцов. Например, столбцы единичной матрицы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

очевидно, линейно независимы. При этом ясно, что любой вектор из $\mathbb{R}^n$ является суммой указанных векторов с некоторыми коэффициентами. Следовательно, $\dim \mathbb{R}^n = n$. Указанный набор векторов считается стандартным базисом пространства. Аналогично $\dim \mathbb{C}^n = n$, поэтому пространство комплексных векторов $\mathbb{C}^n$ называют *n-мерным комплексным арифметическим пространством*.

Пространство $C(\mathbb{R})$ непрерывных функций является бесконечномерным. Действительно, для любого натурального n многочлены $1, x, \ldots, x^n$, рассматриваемые как непрерывные функции, образуют линейно независимые системы (см. пример 2).

Пространство $\mathbb{R}^X$ действительных функций, определенных на множестве X, в зависимости от области определения X может быть конечномерным или бесконечномерным. Если X — конечное множество, то пространство $\mathbb{R}^X$ конечномерное. Пусть, например, $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда любая функция f, определенная на множестве X, задается набором чисел $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_k = f(k)$,

$k = 1, 2, \ldots, n$. Но тогда очевидно, что данная функция линейно выражается через функции f_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, где функция f_k при $k = 1, 2, \ldots, n$ принимает следующие значения на множестве X: $f_k(k) = 1$, $f_k(j) = 0$, $j \neq k$.

Нетрудно показать, что если X — бесконечное множество, то пространство $\mathbb{R}^X$ бесконечномерное. Доказательство этого факта оставляем читателю.

2. Ранг системы векторов

Определение. Пусть дана система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Любой вектор $\vec{a}$ вида

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — произвольные числа, называется *линейной комбинацией векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Напомним, что множество всех линейных комбинаций векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ является линейной оболочкой векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ и обозначается $\mathrm{Lin}(\vec{a}_1; \vec{a}_2; \ldots; \vec{a}_n)$. Линейная оболочка является линейным пространством.

Определение. *Рангом* системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется размерность их линейной оболочки. Если количество векторов базиса линейной оболочки равно s, то это записывается как $s = \mathrm{rang}(\vec{a}_1; \vec{a}_2; \ldots; \vec{a}_n)$ или $s = \mathrm{rg}(\vec{a}_1; \vec{a}_2; \ldots; \vec{a}_n)$.

Данное определение подразумевает, что рангом системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ является максимальное количество линейно независимых векторов системы.

Теорема. *Ранг системы векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *не меняется при следующих преобразованиях*:

1) *перестановка двух произвольных векторов местами*;

2) *умножение вектора на число, отличное от нуля*;

3) *прибавление к одному вектору системы другого вектора*;

4) *вычеркивание нулевого вектора*.

Пример 3. Найдите ранг системы векторов и укажите какой-нибудь базис в этой системе векторов. Векторы, не входящие в базис, разложите по базису:

$$\vec{a} = (2; -1; -3), \quad \vec{b} = (1; 0; 1), \quad \vec{c} = (-1; 1; 3), \quad \vec{d} = (1; 1; 4).$$

Решение. Составим матрицу из данных векторов, взятых в качестве ее строк, и будем приводить эту матрицу к треугольному (ступенчатому) виду. Предварительно для удобства расчетов поменяем поря-

док строк в матрице. Рядом с каждой строкой будем указывать соответствующий ей вектор (эти записи ниже называем комментарием):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} b \\ a \\ c \\ d. \end{matrix}$$

Умножая первую строку на нужные коэффициенты и прибавляя ее к другим строкам, получаем нули в первом столбце под первым диагональным элементом. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} b \\ a-2b \\ c+b \\ d-b. \end{matrix}$$

Аналогичным способом с помощью второй строки получаем нули во втором столбце под вторым диагональным элементом. Новая матрица приобретает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} b \\ a-2b \\ (c+b)+(a-2b)=a-b+c \\ (d-b)+(a-2b)=d+a-3b. \end{matrix}$$

В комментарии расшифрованы проведенные преобразования.

В последнем преобразовании добиваемся нуля в последней строке третьего столбца (под третьим диагональным элементом):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} b \\ a-2b \\ a-b+c \\ (d+a-3b)-2(a-b+c)=d-a-b-2c. \end{matrix}$$

Матрица приведена к требуемому виду, что свидетельствует об окончании вычислений. Первые три строки преобразованной матрицы имеют ступенчатый вид, что говорит о линейной независимости соответствующих вектор-строк. Эти векторы представляют собой линейные комбинации векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. Это позволяет сделать вывод о том, что ранг исходной системы векторов равен трем, а векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ являются ее базисом. Осталось выразить вектор $\vec{d}$ через векторы базиса. Для этого заметим, что последняя строка матрицы нулевая. Следовательно, согласно комментарию имеем $\vec{d}-\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c}=0$, а значит, $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$. Задача решена полностью.

Задачи для самостоятельной работы

3.1. Разложите вектор $\vec{x}(4; 3; -2)$ по векторам

$$\vec{e}_1(1; 1; 2),\ \vec{e}_2(-3; 0; -2),\ \vec{e}_3(1; 2; -1).$$

3.2. Разложите вектор $\vec{x}(2; 2; 3; 3)$ по системе векторов

$$\vec{a}(1; 2; 3; 1),\ \vec{b}(2; 1; 2; 3),\ \vec{c}(3; 2; 4; 4).$$

3.3. В линейном пространстве многочленов степени, не превосходящей 2, и с корнем $x = 1$ найдите какой-нибудь базис. Найдите в этом базисе разложение многочлена $T(x) = x^2 - 3x + 2$. В ответе укажите координаты многочлена $T(x)$ в выбранном базисе.

3.4. В линейном пространстве многочленов степени, не превосходящей 2, найдите разложение многочлена $T(x)$ по базису $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$. В ответе укажите координаты многочлена $T(x)$ в данном базисе:

$$T(x) = 3x^2 + 2x + 1, \quad P(x) = 4x^2 + 3x + 4,$$
$$Q(x) = 3x^2 + 2x + 3, \quad R(x) = x^2 + x + 2.$$

3.5. Найдите какой-нибудь базис в указанном линейном пространстве L. Найдите координаты элемента $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ в этом базисе. В ответе укажите координаты элемента A в выбранном базисе:

а) L — линейное пространство всех матриц размера 2×2;

б) L — линейное пространство симметричных матриц размера 2×2;

в) L — линейное пространство матриц размера 2×2 вида $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

3.6. В линейном пространстве симметричных матриц размера 2×2 найдите координаты элемента $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$ в базисе

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.7. Найдите ранг системы векторов и укажите какой-нибудь базис в этой системе векторов. Векторы, не входящие в базис, разложите по базису:

а) $\vec{a}_1 = (1; 1; 2)$, $\vec{a}_2 = (3; 1; 2)$, $\vec{a}_3 = (1; 2; 1)$, $\vec{a}_4 = (2; 1; 2)$;

б) $\vec{a}_1 = (1; 1; 1)$, $\vec{a}_2 = (-3; -5; 5)$, $\vec{a}_3 = (3; 4; -1)$, $\vec{a}_4 = (1; -1; 4)$;

в) $\vec{a}_1 = (1; 1; 0; -1)$, $\vec{a}_2 = (1; 2; 1; 0)$, $\vec{a}_3 = (1; 3; 2; 1)$, $\vec{a}_4 = (1; 4; 3; 2)$;

г) $\vec{a}_1 = (1; 0; 1; 0)$, $\vec{a}_2 = (-2; 1; 3; -7)$, $\vec{a}_3 = (3; -1; 0; 3)$, $\vec{a}_4 = (-4; 1; -3; 1)$;
д) $\vec{a}_1 = (1; 1; 4; 2)$, $\vec{a}_2 = (1; -1; -2; 4)$, $\vec{a}_3 = (0; 2; 6; -2)$, $\vec{a}_4 = (-3; 3; 3; -12)$, $\vec{a}_5 = (-1; 0; -4; -3)$;
е) $\vec{a}_1 = (1; 3; 0; 5)$, $\vec{a}_2 = (1; 2; 0; 4)$, $\vec{a}_3 = (1; 1; 1; 3)$, $\vec{a}_4 = (1; 0; -1; 2)$, $\vec{a}_5 = (1; -3; 3; -1)$.

§ 4. Скалярное произведение. Элементы аналитической геометрии

1. Скалярное произведение векторов

Пусть каждой паре векторов $\vec{a}, \vec{b} \in E$ поставлено в соответствие вещественное число $(\vec{a}, \vec{b})$, называемое скалярным произведением этих векторов, причем выполнены условия

1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ $\forall \vec{a}, \vec{b} \in E$,
2) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$ $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in E$,
3) $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$ $\forall \vec{a}, \vec{b} \in E$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
4) $(\vec{a}, \vec{a}) > 0$ $\forall \vec{a} \in E$ $(\vec{a} \neq 0)$, и $(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Линейное пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, называется евклидовым пространством. Можно скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определить следующим образом: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\beta$, где β — угол между данными векторами. Если векторы $\vec{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ и $\vec{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n)$ заданы в ортонормированном базисе (векторы базиса попарно перпендикулярны и имеют единичную длину), то их скалярное произведение может быть найдено по формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i$.

Скалярное произведение векторов может быть использовано для нахождения длины вектора. Длина вектора $\vec{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ может быть вычислена как $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}$.

Эта же формула позволяет вычислять угол между векторами $\vec{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ и $\vec{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n)$:

$$\cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\right)}.$$

Если в пространстве заданы точки $A(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $B(y_1; y_2; \ldots; y_n)$, то, поскольку расстояние между ними будет равно длине вектора $\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1; y_2 - x_2; \ldots; y_n - x_n)$, для вычисления расстояния между двумя точками получаем формулу

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

Пример 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с длиной ребра, равной 1, найдите расстояние между точками O_1 и O_2, являющимися центрами граней $A_1B_1C_1D_1$ и CDD_1C_1 соответственно, а также угол между прямыми AO_1 и AO_2.

Решение. Введем декартову систему координат с началом в точке A. Ось Ox направим по направлению вектора $\overrightarrow{AD}$, Oy по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, Oz по направлению вектора $\overrightarrow{AA_1}$. В выбранной системе координат укажем координаты некоторых точек: $A(0; 0; 0)$, $A_1(0; 0; 1)$, $C_1(1; 1; 1)$, $D(1; 0; 0)$. Точка O_1 является серединой отрезка A_1C_1, и ее координаты вычисляются как половина суммы координат концов отрезка (точек A_1 и C_1), т. е. $O_1(0{,}5; 0{,}5; 1)$. Аналогично точка O_2 является центром отрезка C_1D, поэтому $O_2(1; 0{,}5; 0{,}5)$. Найдем векторы $\overrightarrow{AO_1} = (0{,}5; 0{,}5; 1)$ и $\overrightarrow{AO_2} = (1; 0{,}5; 0{,}5)$. Найдем расстояние между точками O_1 и O_2 как длину вектора

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AO_2} - \overrightarrow{AO_1} = (0{,}5; 0; -0{,}5).$$

Тогда $|\overrightarrow{O_1O_2}| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Найдем угол между прямыми AO_1 и AO_2:

$$\cos\beta = \left|\frac{\overrightarrow{AO_1} \cdot \overrightarrow{AO_2}}{|\overrightarrow{AO_1}| \cdot |\overrightarrow{AO_2}|}\right| = \frac{0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}5}{\sqrt{1{,}5} \cdot \sqrt{1{,}5}} = \frac{5}{6}, \quad \text{и} \quad \beta = \arccos\left(\frac{5}{6}\right).$$

2. Уравнение плоскости в трехмерном пространстве

Плоскость в трехмерном пространстве может быть задана следующим уравнением: $Ax + By + Cz = D$. Здесь вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ перпендикулярен плоскости и называется вектором нормали. Уравнение плоскости, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$ с вектором нормали $\vec{n} = (A; B; C)$, может быть написано в следующем виде: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, или, после раскрытия скобок, $Ax + By + Cz + D = 0$, $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

При составлении общего уравнения плоскости нормаль может быть выбрана неоднозначно. Так, если вектор $\vec{n}$ является вектором нормали к плоскости, то и вектор $\lambda\vec{n}$, где λ — произвольное отлич-

ное от нуля число, также является вектором нормали к той же плоскости. Это соответствует умножению обеих частей уравнения плоскости на число λ.

Приведем условие параллельности двух плоскостей. Пусть плоскости заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Необходимым и достаточным условием параллельности или совпадения плоскостей является условие коллинеарности их нормалей: $\vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_2$, где $\lambda \neq 0$, или

$$\begin{cases} A_1 = \lambda A_2, \\ B_1 = \lambda B_2, \\ C_1 = \lambda C_2. \end{cases}$$

Плоскости будут совпадать, если помимо этих условий справедливо и равенство $D_1 = \lambda D_2$. Тогда первое уравнение примет вид $\lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, т. е. будет равносильно второму уравнению.

Условия параллельности и совпадения плоскостей можно записать в следующем виде.

Параллельность: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$.

Совпадение: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.

Отсюда следует критерий параллельности или совпадения двух плоскостей:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1.$$

Необходимым и достаточным условием пересечения двух плоскостей является условие неколлинеарности их нормалей, или, что то же самое, условие непропорциональности коэффициентов при неизвестных:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$$

При этом условии система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений, которые определяют прямую пересечения двух плоскостей.

Угол между двумя плоскостями можно определить как угол между их векторами нормали. По этому определению получается не один

угол, а два смежных угла, дополняющих друг друга до π. В элементарной геометрии из двух смежных углов, как правило, выбирается меньший, т. е. величина φ угла между двумя плоскостями удовлетворяет условию $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Если $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ — векторы нормалей к плоскостям, то величина угла между ними вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Пример 2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки: $A(1; 1; 1)$ и $B(2; -1; 1)$ и $C(2; 2; 0)$.

Решение. Прежде всего найдем вектор нормали $\vec{n} = (a; b; c)$. Этот вектор должен быть перпендикулярен векторам $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 0)$ и $\overrightarrow{AC} = (1; 1; -1)$, следовательно, скалярное произведение вектора нормали и этих векторов должно равняться нулю. Получаем систему двух уравнений

$$a - 2b = 0,$$
$$a + b - c = 0.$$

Решение системы имеет вид $a = 2b$, $c = 3b$. Полагая $b = 1$, получаем вектор нормали $\vec{n} = (2; 1; 3)$. Уравнение плоскости имеет вид $2(x-1) + (y-1) + 3(z-1) = 0$, или $2x + y + 3z = 6$.

3. Уравнение прямой в трехмерном пространстве

Прямая в трехмерном пространстве может быть задана параметрически и канонически.

Параметрический вид уравнения прямой: $x = x_0 + ta$, $y = y_0 + tb$, $z = z_0 + tc$. Здесь $(x_0; y_0; z_0)$ — точка, лежащая на прямой, а $\vec{l} = (a; b; c)$ — направляющий вектор прямой, t — числовой параметр.

Канонический вид уравнения этой же прямой:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Чтобы *перейти от канонического уравнения к параметрическому*, следует приравнять каждую дробь параметру t и записать полученные равенства в виде системы:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t.$$

Прямая может быть также задана как линия пересечения двух плоскостей, т. е. как решение системы двух линейных уравнений с тремя

неизвестными:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \end{cases}$$

где коэффициенты при неизвестных непропорциональны:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Возможны четыре различных случая расположения двух прямых в пространстве:

— прямые скрещиваются, т. е. не лежат в одной плоскости;

— прямые пересекаются, т. е. лежат в одной плоскости и имеют одну общую точку;

— прямые параллельны, т. е. лежат в одной плоскости и не пересекаются;

— прямые совпадают.

Рассмотрим признаки взаимного расположения прямых, заданных каноническими уравнениями

$$l_1 \colon \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1} \quad \text{и} \quad l_2 \colon \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2},$$

где $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ — точки, принадлежащие прямым l_1 и l_2 соответственно, $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ — направляющие векторы прямых, а $\vec{m} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$ — вектор, соединяющий точки M_1 и M_2.

Перечисленным выше случаям взаимного расположения прямых l_1 и l_2 соответствуют следующие признаки:

— прямые l_1 и l_2 скрещиваются тогда и только тогда, когда векторы $\vec{m}$, $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ не компланарны;

— прямые l_1 и l_2 пересекаются тогда и только тогда, когда векторы $\vec{m}$, $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ компланарны, а векторы $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ не коллинеарны;

— прямые l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ коллинеарны, а векторы $\vec{m}$ и $\vec{l}_1$ не коллинеарны;

— прямые l_1 и l_2 совпадают тогда и только тогда, когда векторы $\vec{m}$, $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ коллинеарны.

Возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости:

— прямая и плоскость пересекаются, т. е. имеют одну общую точку;

— прямая и плоскость параллельны, т. е. не имеют общих точек;

— прямая лежит в плоскости, т. е. все точки прямой принадлежат плоскости.

Рассмотрим признаки взаимного расположения прямой и плоскости, заданных уравнениями

$$l\colon \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \quad \text{и} \quad \alpha\colon Ax+By+Cz+D=0.$$

Перечисленным выше случаям взаимного расположения прямой l и плоскости α соответствуют следующие признаки:

— прямая l и плоскость α пересекаются тогда и только тогда, когда векторы $\vec{n}=(A;B;C)$ и $\vec{l}=(a;b;c)$ не ортогональны;

— прямая l и плоскость α параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{n}=(A;B;C)$ и $\vec{l}=(a;b;c)$ ортогональны, а точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ не принадлежит плоскости;

— прямая l лежит в плоскости α тогда и только тогда, когда векторы $\vec{n}=(A;B;C)$ и $\vec{l}=(a;b;c)$ ортогональны, а точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ принадлежит плоскости.

Учитывая свойство скалярного произведения векторов, получаем признаки в следующем виде:

— прямая l и плоскость α пересекаются тогда и только тогда, когда $a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C\neq 0$;

— прямая l и плоскость α параллельны тогда и только тогда, когда $a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$;

— прямая l лежит в плоскости α тогда и только тогда, когда $a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

Угол φ между прямой с направляющим вектором $\vec{l}=(a;b;c)$ и плоскостью с вектором нормали $\vec{n}=(A;B;C)$ определяется как острый угол, дополняющий угол между прямой и перпендикуляром к плоскости до $\frac{\pi}{2}$:

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{l}\cdot\vec{n}|}{|\vec{l}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|aA+bB+cC_2|}{\sqrt{a^2+b^2+b^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пример 3. Напишите каноническое уравнение прямой, проходящей через следующие точки: $A(2;2;5)$, $B(0;2;-4)$.

Решение. Направляющий вектор прямой — это вектор $\overrightarrow{AB}=B-A=(-2;0;-9)$.

Следовательно, каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-5}{-9}.$$

Пример 4. Найдите точку пересечения E двух прямых, первая из которых проходит через точки $A(1;-2;5)$ и $B(2;1;4)$, а вторая — через точки $C(6;3;-2)$ и $D(4;2;1)$.

Решение. Составим параметрические уравнения этих прямых. При этом направляющий вектор первой прямой — это вектор $\overrightarrow{AB} = B - A = (1; 3; -1)$, направляющий вектор второй прямой — вектор $\overrightarrow{CD} = D - C = (-2; -1; 3)$:

$$x = 1 + u, \quad y = -2 + 3u, \quad z = 5 - u;$$
$$x = 6 - 2v, \quad y = 3 - v, \quad z = -2 + 3v.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 + u = 6 - 2v, \\ -2 + 3u = 3 - v, \\ 5 - u = -2 + 3v. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $u = 1$, $v = 2$. Подставляя полученные значения u и v в уравнения любой из прямых, находим точку их пересечения: $E(2; 1; 4)$. Заметим, что если бы полученная система уравнений не имела решения, то это означало бы, что данные прямые не пересекаются, т. е. параллельны или скрещиваются. Чтобы в этом случае определить расположение указанных прямых, целесообразно рассмотреть их направляющие векторы. Если они коллинеарны, то прямые параллельны, а если эти векторы не коллинеарны, то прямые скрещиваются.

Пример 5. Составьте уравнение плоскости, перпендикулярной прямой $x = 5 + t$, $y = -t$, $z = -1 - 2t$ и проходящей через точку $A(2; -1; 1)$.

Решение. Вектор нормали плоскости будет совпадать с направляющим вектором данной прямой $\vec{n} = (1; -1; -2)$. Следовательно, уравнение плоскости имеет вид $(x - 2) - (y + 1) - 2(z - 1) = 0$, или $x - y - 2z = 1$.

Пример 6. Составьте уравнение прямой, являющейся линией пересечения двух заданных плоскостей: $2x + y + z = 0$ и $x + 2y + z = 1$.

Решение. Объединим уравнения в одну систему. В ходе решения неизвестную y выберем в качестве свободного параметра, а неизвестные x и z выразим через y. Решая полученную систему уравнений методом исключений (методом Гаусса), получим решение в следующем виде: $x = -1 + t$, $y = t$, $z = 2 - 3t$. Полученное решение, очевидно, представляет собой уравнение искомой прямой, записанное в параметрической форме.

Задачи для самостоятельной работы

4.1. Даны вершины треугольника ABC: $A(3;-1;5)$, $B(4;2;-5)$ и $C(-4;0;3)$. Найдите длину медианы, проведенной из вершины A.

4.2. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=\vec{k}-3\vec{j}$. Определите длины его диагоналей.

4.3. Даны векторы $\vec{a}=(4;-2;4)$ и $\vec{b}=(6;-3;2)$. Найдите

$$(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b}).$$

4.4. Даны длины векторов $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$, $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Найдите $|\vec{a}-\vec{b}|$.

4.5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=60^\circ$, причем $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=8$. Определите $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.

4.6. Параллелограмм построен на векторах $\overrightarrow{AB}=(2{,}5;1;2{,}5)$ и $\overrightarrow{AD}=(0{,}5;-1;1{,}5)$. Найдите угол между его диагоналями.

4.7. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — единичные векторы, образующие угол 120°. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4.8. Найдите длину проекции вектора $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ на вектор $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$.

4.9. Найдите косинус угла между вектором $\vec{a}=(3;-4;5)$ и вектором $\vec{b}$ — проекцией вектора $\vec{a}$ на координатную плоскость xOy.

4.10. Найдите $\cos(\widehat{\vec{b},\vec{c}})$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-7$ и $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$.

4.11. Найдите $\vec{a}\cdot\vec{c}$, если $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=1$, $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{5}{6}$ и $\vec{c}=\vec{a}-3\vec{b}$.

4.12. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°. Известны длины векторов $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$. Определите косинус угла между векторами $\vec{c}=\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$.

4.13. Найдите $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ и $\vec{a}\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=6$;

4.14. Напишите уравнение плоскости, параллельной оси Ox и проходящей через точки $M_1(0;1;3)$ и $M_2(2;4;5)$.

4.15. Напишите уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $M(2;-4;3)$.

4.16. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(14;2;2)$ параллельно плоскости $x-2y-3z=0$.

4.17. Найдите угол между плоскостями $x+2y-2z-8=0$ и $x++y-17=0$.

4.18. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;-1;2)$ перпендикулярно плоскостям $x-2y+z-13=0$ и $x++2y-2z+2=0$.

4.19. Напишите в каноническом и параметрическом виде уравнение прямой, являющейся пересечением плоскостей $x+y-z-2=0$ и $2x-y+z-7=0$.

4.20. Прямые l_1 и l_2 являются линиями пересечения двух пар плоскостей. Определите, пересекаются ли эти прямые:

$$l_1\colon \begin{cases} 2x+y-z-2=0, \\ x-y+2z-2=0; \end{cases} \quad l_2\colon \begin{cases} x+3y-z-2=0, \\ x+2y-2=0. \end{cases}$$

4.21. Найдите угол между прямыми $\frac{x+1}{0}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{1}$ и $x=2t-1$, $y=2t+3$, $z=2$.

4.22. Найдите угол между прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{\sqrt{2}}$ и плоскостью $x+y+z\sqrt{2}=0$.

4.23. При каком значении параметра a прямая l и плоскость α перпендикулярны:

$$l\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{-1}, \quad \alpha\colon 2x+(a+2)y-2z+11=0?$$

4.24. Найдите точку пересечения прямой l и плоскости α:

$$l\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}, \quad \alpha\colon x-3y+z-8=0.$$

4.25. При каком значении параметра a плоскость $x+y+az-4=0$ и прямая $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ пересекаются (параллельны)?

4.26. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;-4)$ и перпендикулярной прямой $\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$.

4.27. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{3}$ и точку $M(3;4;5)$.

4.28. Найдите координаты проекции точки $P(-1;2;0)$ на плоскость $4x-5y-z-7=0$.

4.29. Найдите расстояние от точки $(0;-5;10)$ до плоскости $5x+2y-z-10=0$.

4.30. Найдите проекцию точки $M(2;3;4)$ на прямую $x=y=z$.

4.31. Найдите точку пересечения прямых $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{-1}$ и $\frac{x+6}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}$.

4.32. Напишите уравнение плоскости, относительно которой точки $P_1(1;-2;-3)$ и $P_2(3;4;9)$ симметричны.

4.33. Найдите точку, симметричную точке $P(0;-1;3)$ относительно плоскости $2x+y-2z-2=0$:

Ответы к задачам главы 1

1.1. $\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$. **1.2.** $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$. **1.3.** $\frac{2}{5}\overrightarrow{AM}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BK}$.
1.4. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$. **1.5.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **1.6.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$.
1.7. $\frac{1}{3}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})$. **1.8.** $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AS}$. **1.9.** $D(9;-5;6)$.
1.10. $B(3;5;3)$, $D(2;0;5)$. **1.11.** Не является. **1.12.** Не является.
1.13. Является, если прямая проходит через начало координат.
1.14. Является. **1.15.** Не является. **1.16.** Является.
1.17. Не является.
1.18. Базис образуют, например, векторы $(1;0;\ldots;0;1)$, $(0;1;0;\ldots;0)$, $(0;0;1;0;\ldots;0)$, …, $(0;\ldots;0;1;0)$. Размерность равна $n-1$.
2.1. а) Линейно зависима; б) линейно независима; в) линейно зависима; г) линейно зависима; д) линейно независима.
2.2. $a=-2$. **2.3.** $a\neq 5$. **3.1.** $\vec{x}=-\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3$. **3.2.** $\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$.
3.3. В качестве базиса можно взять $e_1=(x-1)^2$, $e_2=x-1$. В этом базисе $T(x)=(1;-1)$.
3.4. $(2;-1;-2)$.
3.5. а) В качестве базиса можно взять $e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. В этом базисе $A=(0;2;2;3)$.
б) В качестве базиса можно взять $e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. В этом базисе $A=(0;2;3)$.
в) В качестве базиса можно взять $e_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. В этом базисе $A=(2;2;3)$.
3.6. $(2;2;-4)$.
3.7. а) Ранг 3, в качестве базиса можно взять $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$. В этом базисе $\bar{a}_4=(0{,}5;0{,}5;0)$.
б) Ранг 3, в качестве базиса можно взять $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$. В этом базисе $\bar{a}_4=(7{,}75;-0{,}25;-2{,}5)$.
в) Ранг 2, в качестве базиса можно взять $\bar{a}_1,\bar{a}_2$. В этом базисе $\bar{a}_3=(-1;2)$, $\bar{a}_4=(-2;3)$.
г) Ранг 3, в качестве базиса можно взять $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$. В этом базисе $\bar{a}_4=(0;-1;-2)$.
д) Ранг 3, в качестве базиса можно взять $\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_5$. В этом базисе $\vec{a}_2=(1;-1;0)$, $\vec{a}_4=(-2;2,5;1)$.
е) Ранг 3, в качестве базиса можно взять $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$. В этом базисе $\vec{a}_4=(-3;5;-1)$, $\vec{a}_5=(-2;0;3)$.
4.1. 7. **4.2.** 3, $\sqrt{21}$. **4.3.** -184. **4.4.** 22. **4.5.** $\sqrt{97}$ и 7.
4.6. $\vec{d}_1=(3;0;4)$ и $\vec{d}_2=(2;2;1)$, $\cos A=\frac{2}{3}$. **4.7.** 120°. **4.8.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.
4.9. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **4.10.** $\frac{11}{5\sqrt{13}}$. **4.11.** 21.

4.12. $\vec{c}^2=3+9+9=21$, $\vec{d}^2=1$, $\overrightarrow{cd}=3+3-3=3$, $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{21}}$. **4.13.** $-\frac{1}{3}$.
4.14. $2y-3z+7=0$. **4.15.** $2x+y=0$. **4.16.** $x-2y-3z-4=0$.
4.17. $\varphi=\frac{\pi}{4}$. **4.18.** $2x+3y+4z-3=0$.
4.19. $\frac{x-3}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$; $x=3$, $y=-1+t$, $z=t$. **4.20.** Нет. **4.21.** $\varphi=\frac{\pi}{3}$.
4.22. $\varphi=\frac{\pi}{6}$. **4.23.** $a=4$. **4.24.** $(2;-1;3)$.
4.25. При $a\neq-1$ пересекаются, при $a=-1$ параллельны.
4.26. $y+z+1=0$. **4.27.** $x-2y+z=0$. **4.28.** $(1;-0{,}5;-0{,}5)$.
4.29. $\sqrt{30}$. **4.30.** $(3;3;3)$. **4.31.** $(-5;6;1)$.
4.32. $x+3y+6z-23=0$. **4.33.** $(4;1;-1)$.

Глава 2

Матрицы и определители матриц. Системы линейных уравнений

§1. Алгебраические операции с матрицами

1. Матрицы

Определение. *Матрицей* A размера $m \times n$ называется набор чисел, записанных в виде таблицы, содержащей m строк и n столбцов. Матрица A записывается в следующем виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} называются *элементами* матрицы. При нумерации элементов матрицы первый индекс является номером строки, второй — номером столбца. Так, элемент с номером a_{32} расположен на пересечении третьей строки и второго столбца. Для обозначения матрицы A, состоящей из элементов a_{ij}, можно использовать запись $A = (a_{ij})$.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей.

Матрица, содержащая одинаковое число строк и столбцов $m = n$, называется квадратной.

Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

называется *диагональной*. Диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят 1, называется *единичной*:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Если все элементы квадратной матрицы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю, то матрицу называют *верхней треугольной*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Все элементы, расположенные в части матрицы, обозначенной нулем, равны нулю.

Аналогично если все элементы квадратной матрицы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю, то матрицу называют нижней треугольной.

2. Операции над матрицами

1. Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой определяются равенством $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Обозначение: $C = A + B$.

2. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица C, элементы которой определяются равенством $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$. Обозначение: $C = \lambda A$.

3. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times k$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размера $k \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$, элементы которой определяются равенством

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^{l=k} a_{il}b_{lj}.$$

Обозначение: $C = AB$. Важно отметить, что произведение AB определено только для таких матриц, у которых число столбцов матрицы A (первого сомножителя) равно числу строк матрицы B (второго сомножителя). При этом число строк матрицы $C = AB$ равно числу строк матрицы A, а число столбцов — числу столбцов матрицы B.

Приведенную выше формулу для вычисления произведения матриц AB можно представить и в другом виде. Элементы матрицы $C = AB$ можно вычислять как скалярное произведение вектора $\vec{A}_i$, состоящего из элементов строки с номером i матрицы A, и вектора $\vec{B}_j$, состоящего из элементов столбца с номером j матрицы B: $c_{ij} = \vec{A}_i \cdot \vec{B}_j$.

4. Матрица A^T является транспонированной к матрице A, если ее элементы определяются равенством $a^T_{ij} = a_{ji}$. Таким образом, строки матрицы A^T являются соответствующими столбцами матрицы A, т. е. первая строка матрицы A^T является первым столбцом

матрицы A, вторая строка матрицы A^T является вторым столбцом матрицы A и т. д.

Определенные арифметические операции с матрицами обладают следующими свойствами:

1) $A+B=B+A$;
2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;
3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;
4) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;
5) $A(BC)=(AB)C$;
6) $A(B+C)=AB+AC$;
7) $(\lambda A)B=A(\lambda B)$;
8) $(AB)^T=B^TA^T$.

Следует отметить, что при вычислении произведения матриц сомножители нельзя менять местами.

Пример 1. Вычислите матрицу, транспонированную к матрице

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 5 & 1 & 7\\ 8 & -2 & 10\end{pmatrix}.$$

Решение. Поменяв местами строки столбца матрицы A, получим, что $A^T=\begin{pmatrix}1 & 5 & 8\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & 7 & 10\end{pmatrix}$.

Пример 2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 2 & 4 & 7\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 6 & 5\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Вычислите $C=3A-2B^T$.

Решение. Имеем $C=3\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 2 & 4 & 7\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4 & -3\\ 6 & 5\\ 1 & -1\end{pmatrix}^T=$

$$=3\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 2 & 4 & 7\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4 & 6 & 1\\ -3 & 5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -9 & 15\\ 6 & 12 & 21\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & 12 & 2\\ -6 & 10 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3-8 & -9-12 & 15-2\\ 6+6 & 12-10 & 21+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -21 & 13\\ 12 & 2 & 23\end{pmatrix}.$$

Пример 3. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -3\\ 5 & -2 & 6\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & -5\\ 8 & -3\end{pmatrix}$. Вычислите $C=AB$.

Решение. $C=\begin{pmatrix}4 & 1 & -3\\ 5 & -2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & -5\\ 8 & -3\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot2+1\cdot4+(-3)\cdot8 & 4\cdot1+1\cdot(-5)+(-3)\cdot(-3)\\ 5\cdot2+(-2)\cdot4+6\cdot8 & 5\cdot1+(-2)\cdot(-5)+6\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & 8\\ 50 & -3\end{pmatrix}.$$

Пример 4. Найдите размерность линейного пространства матриц размера 2×2 и укажите в нем какой-нибудь базис.

Решение. Докажем, что в качестве базиса этого линейного пространства можно взять следующие векторы: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Докажем, что эти векторы являются линейно независимыми. Для этого рассмотрим равенство

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 + \lambda_4\vec{e}_4 = 0,$$

или

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Используя правило умножения матрицы на число и сложения матриц, получим, что

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Таким образом, доказано, что линейная комбинация векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$ может быть равна нулю лишь при условии $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, т. е. векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$ линейно независимы.

Произвольную матрицу размера 2×2, имеющую общий вид $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, можно разложить по векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$ следующим образом: $A = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d\vec{e}_4$. Все это доказывает, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$ образуют базис линейного пространства матриц размера 2×2 и матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ может быть рассмотрена в этом базисе как вектор (a, b, c, d). Размерность этого линейного пространства равна четырем.

Пример 5. В линейном пространстве кососимметричных матриц (такие матрицы удовлетворяют условию $a_{ij} = -a_{ji}$) найдите разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$ по матрицам

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Нетрудно доказать, аналогично тому, как сделано в примере 4, что в качестве базиса этого линейного пространства можно взять векторы

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда в этом базисе матрицы можно рассматривать как векторы $\vec{A}=(2;7;-8)$, $\vec{A}_1=(2;-3;0)$, $\vec{A}_2=(0;-1;4)$, $\vec{A}_3=(0;-2;0)$. Найдем коэффициенты разложения вектора $\vec{A}$ по векторам $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ и $\vec{A}_3$ из равенства

$$x_1\vec{A}_1+x_2\vec{A}_2+x_3\vec{A}_3=\vec{A}.$$

Учитывая правила умножения вектора на число и сложения векторов и приравнивая соответствующие координаты в левой и в правой частях равенства, найдем неизвестные x_1, x_2, x_3 из решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1=2, \\ -3x_1-x_2-2x_3=7, \\ 4x_2=-8. \end{cases}$$

Решением полученной системы являются $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=-4$, и искомое разложение имеет вид $A=A_1-2A_2-4A_3$.

В пространстве $M_{2\times3}$ матриц размера 2×3 с естественными операциями сложения и умножения на числа можно выбрать 6 матриц:

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$e_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad e_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad e_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

которые линейно независимы. Действительно, их линейная комбинация

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\\alpha_4&\alpha_5&\alpha_6\end{pmatrix}=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_6e_6$$

равна нулевой матрице только в тривиальном случае $\alpha_1=\alpha_2=\ldots$ $\ldots=\alpha_6=0$.

Вместе с тем заключаем, что любая матрица

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\\alpha_4&\alpha_5&\alpha_6\end{pmatrix}$$

из $M_{2\times3}$ линейным образом выражается через выбранные 6 матриц, т. е. $M_{2\times3}=\mathrm{Lin}(e_1;e_2;\ldots;e_6)$. Следовательно, $\dim M_{2\times3}=6$, а матрицы $e_1,e_2,\ldots,e_6$ являются базисом (стандартным) этого пространства. Аналогично доказывается, что $\dim M_{m\times n}=mn$.

Задачи для самостоятельной работы

1.1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу $C=2A-3B$.

1.2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу X, удовлетворяющую матричному уравнению $5A+3X-B=0$.

1.3. Найдите $f(A)$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $f(x)=x^2-3x$.

1.4. Найдите произведение матриц A и B:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

з) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$;

и) $A=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

к) $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$;

л) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 2\\ 7 & 0 & 1\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}$;

м) $A^T=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B^T=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

1.5. Найдите произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$ матриц A и B и установите, как при этом меняются столбцы или строки матрицы B:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}.$$

1.6. Используя результат предыдущей задачи, представьте матрицу B в виде произведения матриц A и X. В ответе укажите матрицу X и порядок сомножителей: $B=A\cdot X$ или $B=X\cdot A$.

а) $A=\begin{pmatrix}342 & 211 & 645\\ 457 & 992 & 719\\ 123 & 403 & 842\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}645 & 211 & 342\\ 719 & 992 & 457\\ 842 & 403 & 123\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}332 & 211 & 123\\ 457 & 992 & 719\\ 123 & 403 & 842\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}996 & 633 & 369\\ 457 & 992 & 719\\ 123 & 403 & 842\end{pmatrix}$.

1.7. Возведите матрицу A в степень n:

а) $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}$, $n=5$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $n=10$, $n=15$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $n=10$.

§ 2. Ранг матрицы. Определитель матрицы

1. Ранг матрицы

Определение. Число r называется *рангом* матрицы A и записывается как $r=\operatorname{rang}(A)$ (либо $r=\operatorname{rg}(A)$), если ранг системы векторов, образованных строками матрицы, равен r.

Элементарные преобразования матриц

1. Перестановка местами двух произвольных строк матрицы.
2. Умножение строки матрицы на число, отличное от нуля.
3. Прибавление к одной строке матрицы другой строки.
4. Исключение строки, состоящей целиком из нулей.

Теорема. *Элементарные преобразования матриц не меняют ранг матрицы.*

Теорема. *Ранг матрицы равен рангу транспонированной матрицы.*

Данная теорема означает, что ранг матрицы, определяемый как ранг системы векторов, образованных строками матрицы, совпадает с рангом системы векторов, образованных столбцами матрицы.

Ранг матрицы может быть найден путем приведения матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. После этого, так же как и при нахождении ранга системы векторов, ранг матрицы будет равен количеству строк преобразованной матрицы, при этом строки, состоящие целиком из нулей, исключены.

Пример 1. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 11 & 1 & -3 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & -1 & -5 & 12 \end{pmatrix}$.

Решение. С помощью элементарных преобразований приведем матрицу к ступенчатому виду. Справа от каждой строки будем указывать проводимые элементарные преобразования, нумеруя строки латинским цифрами:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 11 & 1 & -3 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & -1 & -5 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II} - 3\text{I} \\ \text{III} - 11\text{I} \\ \text{IV} - 2\text{I} \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -11 & 20 \\ 0 & 12 & -3 & -33 & 60 \\ 0 & 4 & -1 & -11 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{III} - 3\text{II} \\ \text{IV} - \text{II} \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -11 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -11 & 20 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получено, что $\operatorname{rang}(A) = 2$.

Теорема. *Ранг произведения матриц не превышает рангов сомножителей*:

$$\operatorname{rang}(A \cdot B) \leqslant \min\{\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B)\}.$$

Теорема. *Ранг суммы матриц не превышает суммы рангов слагаемых*:

$$\operatorname{rang}(A + B) \leqslant \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B).$$

2. Определитель квадратной матрицы

Определение. Каждой квадратной матрице A размера $n \times n$ по некоторому правилу может быть поставлено в соответствие число,

обозначаемое $|A|$ или $\det(A)$, называемое определителем n-го порядка или просто определителем, т. е. определитель является некоторой функцией элементов матрицы.

Общая формула для вычисления определителя n-го порядка достаточно сложна и громоздка, поэтому в практических случаях при вычислении определителей используют их свойства, полученные на основании исследования общей формулы.

Свойства определителей

1. Определитель второго порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

2. Определитель третьего порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Для запоминания этой формулы более удобным является мнемоническое правило

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & a_{12} & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{23} \\ a_{31} & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & a_{13} \\ a_{21} & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{32} & \cdot \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & a_{13} \\ \cdot & a_{22} & \cdot \\ a_{31} & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{23} \\ \cdot & a_{32} & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & a_{12} & \cdot \\ a_{21} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Здесь каждое слагаемое является произведением трех указанных элементов матрицы.

3. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется: $|A| = |A^T|$.

4. Если в матрице поменять местами две любые строки (два любых столбца), оставив остальные на своих местах, то определитель меняет свой знак на противоположный.

5. Определитель не меняется, если к какой-либо строке (столбцу) матрицы прибавить другую строку (столбец), умноженную на произвольное число.

6. Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя.

7. Если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

Пример 2. Вычислите определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$, пользуясь правилом 2.

Решение. Имеем

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot(-1) + 2\cdot 4\cdot 0 + (-3)\cdot(-2)\cdot 7 - \\ - 0\cdot 5\cdot(-3) - 7\cdot 4\cdot 1 - (-1)\cdot(-2)\cdot 2 = 5.$$

Теорема. *Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ в n-мерном пространстве являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда определитель, строки которого составлены из их координат, равен нулю.*

Пример 3. Найдите вектор нормали к плоскости, проходящей через три точки $A(2; 3; 4)$, $B(6; -3; 4)$ и $C(-4; 6; -4)$, не лежащие на одной прямой.

Решение. Пусть точка $M(x; y; z)$ является произвольной точкой плоскости. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AM}$: $\overrightarrow{AB} = (4; -6; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-6; 3; -8)$, $\overrightarrow{AM} = (x-2; y-3; z-4)$. Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AM}$ являются линейно зависимыми, поскольку любой вектор плоскости (вектор $\overrightarrow{AM}$) может быть линейно выражен через пару неколлинеарных векторов (векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$), лежащих в этой плоскости. Условие линейной зависимости векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AM}$ заключается в равенстве нулю определителя, строки которого составлены из их координат:

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & -8 \\ x-2 & y-3 & z-4 \end{vmatrix} = 0.$$

После вычисления определителя получим, что

$$12\cdot(z-4) + (-6)\cdot(-8)\cdot(x-2) - \\ - (-8)\cdot 4\cdot(y-3) - (-6)\cdot(-6)\cdot(z-4) = 0.$$

Приведение подобных слагаемых и деление обеих частей уравнения на 8 дает уравнение плоскости в следующем виде:

$$6x + 4y - 3z - 12 = 0.$$

Из полученного уравнения плоскости следует, что вектор нормали к ней имеет вид $\vec{n} = (6; 4; -3)$. В качестве координат вектора нормали взяты коэффициенты, стоящие при x, y и z.

Определение. *Минором* M_{ij} квадратной матрицы A называется определитель матрицы, полученной из матрицы A удалением строки с номером i и столбца с номером j.

Определение. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} квадратной матрицы A называется величина $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример 4. Вычислите минор M_{13} матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -8 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. После удаления первой строки и третьего столбца получим матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 5 & -8 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Ее определитель равен -105. Поэтому $M_{13} = -105$.

Пример 5. Вычислите алгебраическое дополнение A_{34} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -8 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. После удаления третьей строки и четвертого столбца получим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Ее определитель равен -3. Тогда $M_{34} = -3$, а $A_{34} = (-1)^{3+4} M_{34} = 3$.

Теорема. *Определитель матрицы A равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения*:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}A_{ik}.$$

Номер строки может быть выбран произвольно.

Определитель матрицы A равен сумме произведений элементов какого-либо столбца на их алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{kj}A_{kj}.$$

Номер столбца может быть выбран произвольно.

Пример 6. Вычислите определитель матрицы A путем разложения его по элементам какого-либо столбца (строки).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Будем раскладывать определитель матрицы по элементам первого столбца с учетом наличия в этом столбце нулевого элемента (чем больше нулевых элементов, тем меньше объем вычислений). Определитель матрицы вычисляется по формуле $|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$. Здесь a_{i1} — элементы первого столбца, а A_{i1} — их алгебраические дополнения ($i = 1, 2, 3$). Вычисляем нужные нам алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -2.$$

Отсюда $|A| = A_{11} - 2A_{31} = -10$.

Пример 7. Вычислите определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 2 & -2 \\ 9 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. При вычислении определителей матриц большого размера целесообразно комбинировать различные методы, прежде всего такие, как приведение матрицы к ступенчатому виду и разложение определителя по столбцу или строке, содержащей много нулевых элементов. Справа от матрицы указано, какие элементарные преобразования будут выполнены со строками на следующем шаге. Римские цифры обозначают номера строк. Имеем

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 2 & -2 \\ 9 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} + \text{I} \\ \text{IV} - 3\text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{разложим} \\ \text{определитель} \\ \text{по 1-му столбцу} \end{pmatrix} =$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II} - 3\text{I} \\ \text{III} - 2\text{I} \end{matrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{разложим} \\ \text{определитель} \\ \text{по 1-му столбцу} \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 1\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} \text{II} - \text{I} = 3\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -75.$$

Определение ранга матрицы может быть дано с использованием понятия определителя матрицы.

Пусть A — матрица размера $m \times n$, а r — натуральное число, не превосходящее m и n. *Минором k-го порядка* матрицы A называется определитель матрицы k-го порядка, образованной элементами, стоящими на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов матрицы A. Обозначая миноры, номера выбранных строк будем указывать верхними индексами, а выбранных столбцов — нижними, располагая их по возрастанию.

Пример 8. Вычислите миноры M_{23}^{12} и M_{134}^{123} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем $M_{23}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $M_{134}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Определение. В матрице A размера $m \times n$ минор r-го порядка называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры $(r+1)$-го порядка равны нулю либо не существуют.

Определение. *Рангом* матрицы A называется порядок базисного минора.

Данное определение равносильно определению, приведенному ранее в данной главе.

Пример 9. Найдите все базисные миноры и ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Все миноры третьего порядка данной матрицы равны нулю, так как у этих определителей третья строка нулевая. Поэтому базисным может быть только минор второго порядка, расположенный в первых двух строках матрицы. Перебирая 6 возможных миноров, отбираем отличные от нуля:

$$M_{12}^{12} = M_{13}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad M_{24}^{12} = M_{34}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad M_{14}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Каждый из этих пяти миноров является базисным. Следовательно, ранг матрицы равен 2.

Находить ранг матрицы таким образом довольно затруднительно из-за большого объема вычислений. Однако количество вычис-

ляемых миноров можно существенно уменьшить, если использовать так называемый метод окаймляющих миноров.

Определение. Пусть M — минор k-го порядка матрицы A размера $m \times n$, расположеный на пересечении k строк и k столбцов. Добавим к набору этих строк и столбцов еще одну строку и столбец. Полученный минор $(k+1)$-го порядка называют *окаймляющим минором* для минора M.

Метод окаймляющих миноров состоит из следующих действий.

1. Пусть M — минор k-го порядка, не равный нулю.

2. Если окаймляющие миноры для минора M составить невозможно (т. е. матрица содержит k строк или k столбцов), то ранг матрицы равен k. Если окаймляющие миноры существуют и все равны нулю, то ранг также равен k. Если среди окаймляющих миноров есть хотя бы один, отличный от нуля, то выполним для него п. 1 и 2, взяв $k+1$ вместо k.

Задачи для самостоятельной работы

2.1. Найдите ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 7 \\ 4 & 15 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 17 & 4 & 13 & -9 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & 11 & -7 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & -9 & 4 & -2 \\ 5 & 18 & -8 & -1 \end{pmatrix}$.

2.2. Вычислите определитель:

а) $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 7 \\ -2 & -8 & -7 & -3 \\ -1 & -6 & -5 & -4 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2.3. Вычислите минор M_{32} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.4. Вычислите алгебраическое дополнение A_{43} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.5. Вычислите определитель матрицы путем разложения его по элементам второй строки:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -4 \end{vmatrix}.$$

2.6. Вычислите определитель матрицы путем разложения его по элементам третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & x & 8 \\ -4 & -1 & y & -5 \\ 8 & -1 & z & 12 \\ 4 & -1 & t & 7 \end{vmatrix}.$$

2.7. При каком значении параметра a выполнено равенство

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & a+3 & -2 \\ 5 & -5 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 40?$$

2.8. При каких значениях параметра a система векторов $\vec{x}_1 = (3; 7; 4)$, $\vec{x}_2 = (3; 8; 6)$, $\vec{x}_3 = (3; a+5; 8)$ линейно зависима?

2.9. При каких значениях параметра a произвольный вектор в пространстве $\mathbb{R}^3$ можно разложить по векторам $\vec{a}_1 = (1; 4; 3)$, $\vec{a}_2 = (2; 1-a; 1)$, $\vec{a}_3 = (5; 4; 1)$?

2.10. При каком значении параметра a точки $A(1; 1; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-1; 0; 1)$ и $D(a+1; 2; 0)$ лежат в одной плоскости?

§ 3. Обратная матрица. Матричные уравнения

1. Обратная матрица

Определение. Матрица Z называется *обратной* для квадратной матрицы A, если она удовлетворяет условию $ZA = AZ = E$, где E — единичная матрица. Матрицу Z, обратную матрице A, обычно обозначают A^{-1}.

Теорема. *Квадратная матрица A, определитель которой отличен от нуля* ($|A| \neq 0$), *имеет обратную матрицу и притом только одну.*

Свойства обратной матрицы

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;
2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
4) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

Способы нахождения обратной матрицы

1. Первый способ нахождения обратной матрицы использует теорему о том, что если определитель матрицы отличен от нуля, то элементы обратной матрицы находятся по формуле

$$A^{-1} = \frac{(A_{ij})^T}{|A|},$$

где (A_{ij}) — матрица, составленная из алгебраических дополнений матрицы A.

2. Второй способ нахождения обратной матрицы (способ присоединенной матрицы) основан на использовании элементарных преобразований, приводящих матрицу A к единичной матрице.

Для этого составим матрицу $(A \mid E)$, полученную дописыванием справа от матрицы A единичной матрицы E того же размера. Вертикальная черта, разделяющая матрицы, используется только для зрительного удобства.

С помощью элементарных преобразований, выполняемых над строками матрицы $(A \mid E)$, приведем ее левую часть (матрицу A) к единичной матрице. В качестве элементарных преобразований можно использовать перестановку строк, умножение строки матрицы на любое отличное от нуля число и прибавление к одной строке матрицы другой строки. При этом матрица $(A \mid E)$ приводится к виду $(E \mid Z)$. Тогда матрица Z, стоящая в правой части, будет равна матрице, обратной A, т. е. $Z = A^{-1}$.

Пример 1. Вычислите матрицу A^{-1}, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для вычисления матрицы, обратной матрице второго порядка, существует следующая формула, полученная на основании первого способа нахождения обратной матрицы.

Если $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $|A|=ad-bc\neq 0$, то $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Перемножив матрицу A и полученную матрицу A^{-1}, можно непосредственно убедиться, что их произведение равно матрице $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Отсюда получаем: $A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Вычислите матрицу A^{-1}, обратную матрице A, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Эту задачу можно решать двумя способами: способом, основанным на вычислении алгебраических дополнений, и методом присоединенной матрицы. Продемонстрируем оба метода.

Способ 1. Вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A и ее определитель:

$$\begin{aligned} &A_{11}=4, \quad A_{12}=-7, \quad A_{13}=-6, \\ &A_{21}=-8, \quad A_{22}=9, \quad A_{23}=10, \\ &A_{31}=4, \quad A_{32}=-5, \quad A_{33}=-6, \quad |A|=-4. \end{aligned}$$

Составим матрицу $B=(A_{ij})$, элементами которой являются алгебраические дополнения матрицы A: $B=\begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ -8 & 9 & 10 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$. Используя формулу нахождения обратной матрицы $A^{-1}=\frac{1}{|A|}B^T$, получим, что

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

Способ 2. Используем теперь метод присоединенной матрицы. Построим матрицу $B=(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, полученную дописыванием справа от матрицы A единичной матрицы.

С помощью элементарных преобразований (умножение строки матрицы на любое отличное от нуля число и прибавление к одной строке матрицы другой строки) приведем матрицу, составленную из первых трех строк и столбцов, к единичной матрице. При этом преобразования над ее строками будем производить и над строками всей матрицы B. Справа от матрицы указано, какие элементарные преобразования будут выполнены со строками на следующем шаге. Римские цифры обозначают номера строк.

Сначала получим нули под главной диагональю:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{II}-3\text{I} \\ \text{III}-4\text{I} \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 9 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{III}-\tfrac{5}{3}\text{II} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right) 3\text{III} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right) \text{II}-\tfrac{5}{2}\text{III}.$$

Далее получим нули над главной диагональю:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -\frac{-21}{2} & \frac{27}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right) 2\text{II} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & -21 & 27 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right) \text{I}+0{,}5\text{III} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2{,}5 & -2{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & -12 & 0 & -21 & 27 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right) \text{I}+\frac{1}{6}\text{II} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -12 & 0 & -21 & 27 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{12}\text{II} \\ \frac{1}{2}\text{III} \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right).$$

В левой части полученной матрицы мы видим матрицу, обратную матрице A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. Матричные уравнения

Рассмотрим матричное уравнение $AX = B$, где матрицы A и B имеют одинаковое количество строк, а матрица A является квадратной. Тогда если определитель матрицы A отличен от нуля, то это матричное уравнение имеет единственное решение $X = A^{-1}B$.

Рассмотрим также матричное уравнение $XA = B$, где матрицы A и B имеют одинаковое количество столбцов, а матрица A является квадратной. Тогда если определитель матрицы A отличен от нуля, то это матричное уравнение имеет единственное решение $X = BA^{-1}$.

Пример 3. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решите уравнения: а) $AX = B$ и б) $XA = C$.

Решение. Найдем матрицу, обратную матрице A. Она имеет вид $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

а) Решение уравнения $AX = B$ имеет вид

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Решение уравнения $AX = B$ имеет вид

$$X = CA^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & -2 \\ 14 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Решите уравнение $BX + 2X = E$, где $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и E — единичная матрица.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$BX + 2X = BX + 2EX = (B + 2E)X.$$

Решение уравнения $(B + 2E)X = E$ имеет вид

$$X = (B+2E)^{-1}E = (B+2E)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Решите уравнение $AXB = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем обратные матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(убедитесь в этом, вычислив матрицу $B^{-1}B$).

Решение уравнения $AXB = C$ может быть найдено в два действия: $XB = A^{-1}C$ (как решение уравнения вида $AX = B$) и $X = A^{-1}CB^{-1}$ (как решение уравнения вида $XA = B$).

Тогда

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -8 & 8 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельной работы

3.1. Найдите матрицу, обратную матрице A:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2. Найдите A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Указание: считайте матрицу A матрицей коэффициентов систем линейных уравнений с соответствующими правыми частями.)

3.3. Найдите значения параметров a, b и c, при которых матрицы A и B являются обратными:

а) $A=\begin{pmatrix} a-1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & c-2 \\ 4 & b & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -8 & 3 & -6 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & a & 2 \\ 5 & -7 & c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ b & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.4. Решите матричное уравнение:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} -8 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $X\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;

д) $X\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; е) $X\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $X\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 15 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$; к) $X\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;

м) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

§ 4. Системы линейных уравнений

1. Основные понятия и теоремы

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

Числа a_{ij} $(i=1, \ldots, m,\ j=1, \ldots, n)$ называются коэффициентами системы; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — свободными членами; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестными.

Определение. *Решением* системы называется набор чисел

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad x_n = \alpha_n,$$

при подстановке которых в систему уравнений каждое уравнение превращается в верное числовое равенство.

Определение. Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*. Система уравнений, не имеющая решений, называется *несовместной*.

Определение. Система уравнений называется *однородной*, если все ее свободные члены равны нулю.

Определение. Системы уравнений называются *эквивалентными*, если они имеют совпадающие множества решений.

Систему линейных уравнений можно записать в матричном виде. Для этого из коэффициентов системы составим матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Свободные члены и неизвестные запишем в виде столбца свободных членов и столбца неизвестных соответственно:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему линейных уравнений можно записать в следующем виде: $A\vec{x} = \vec{b}$.

Определение. *Расширенной* матрицей системы линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$ называется матрица, полученная дописыванием к матрице A справа столбца свободных членов. Расширенная матрица имеет вид

$$(A \mid \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Вертикальная черта используется только для зрительного удобства и не несет никакой дополнительной смысловой нагрузки.

Определение. Элементарные преобразования системы линейных уравнений:

1) *перестановка* местами двух уравнений системы;

2) *умножение* уравнения на число, отличное от нуля;

3) *прибавление* к одному уравнению системы другого уравнения.

Теорема. *Элементарные преобразования системы линейных уравнений приводят ее к эквивалентной системе уравнений.*

Видно, что элементарные преобразования систем линейных уравнений совпадают с элементарными преобразованиями, проводимыми с расширенными матрицами этих систем уравнений. Поэтому при решении систем уравнений и приведении их к более простому виду оказывается более удобным проводить преобразования не с самими уравнениями, а с расширенной матрицей системы.

Теорема (Кронекера—Капелли)**.** *Система линейных уравнений* $A\vec{x}=\vec{b}$ *совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы*: $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(A|\vec{b})$.

Пример 1. Исследуйте на совместность систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-1,\\ -x_1+2x_2-3x_3=3,\\ 2x_1-x_2+3x_3=2,\\ 3x_1-2x_2+5x_3=1. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований будем приводить ее к ступенчатому виду:

$$(A\mid\vec{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&2&-1\\ -1&2&-3&3\\ 2&-1&3&2\\ 3&-2&5&1 \end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \text{II}+\text{I}\\ \text{III}-2\text{I}\\ \text{IV}-3\text{I}\end{array}\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&2&-1\\ 0&1&-1&2\\ 0&1&-1&4\\ 0&1&-1&4 \end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \text{III}-\text{II}\\ \text{IV}-\text{II}\end{array}\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&2&-1\\ 0&1&-1&2\\ 0&0&0&2\\ 0&0&0&2 \end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ \text{IV}-\text{III}\end{array}\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&2&-1\\ 0&1&-1&2\\ 0&0&0&2\\ 0&0&0&0 \end{array}\right).$$

В результате преобразований получили систему уравнений с матрицей

$$A_1=\begin{pmatrix} 1&-1&2\\ 0&1&-1\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}$$

и столбцом свободных членов $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Матрица A_1 приведена к ступенчатому виду и содержит две ненулевые строки, поэтому $\operatorname{rang}(A_1) = 2$, в то время как расширенная матрица $(A_1 \mid \vec{b}_1)$ содержит три ненулевые строки и ее ранг равен трем. Поэтому приведенная система уравнений является несовместной, т. е. не имеет решений.

Из приведенного примера виден простой смысл теоремы Кронекера—Капелли: для того чтобы система уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ее ступенчатый вид не содержал уравнений, в которых левая часть состоит из нулей, а правая часть отлична от нуля.

Пример 2. При каких значениях параметра a система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + a \cdot x_4 = 7 \end{cases}$$

является совместной?

Решение. Составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований будем приводить ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & a & 7 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} - \text{I} \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & a+4 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \text{III} + \text{II} \end{matrix} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 & 2 \end{array}\right).$$

В результате преобразований получили систему уравнений с матрицей $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$ и столбцом свободных членов $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Матрица A_1 приведена к ступенчатому виду, и ее ранг зависит от значения параметра a: при $a = 3$ матрица A_1 содержит две ненулевые строки, поэтому $\operatorname{rang}(A_1) = 2$, при $a \neq 3$ матрица A_1 содержит уже три ненулевые строки, поэтому $\operatorname{rang}(A_1) = 3$. Расширенная матрица $(A_1 \mid \vec{b}_1)$ содержит три ненулевые строки, поэтому ее ранг

равен 3 при любых значениях параметра. Следовательно, система уравнений является совместной, т. е. имеет решение, при $a \neq 3$.

После приведения расширенной матрицы системы к ступенчатому виду третье уравнение системы принимает вид $(a-3)\cdot x_4 = 2$. Поэтому очевидно, что оно имеет решение лишь в том случае, когда коэффициент, стоящий при неизвестной x_4 отличен от нуля.

Теорема. *Если* $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid \vec{b}) = n$, *где* n *— количество неизвестных, то система линейных уравнений* $A\vec{x} = \vec{b}$ *имеет единственное решение. Если* $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid \vec{b}) < n$, *где* n *— количество неизвестных, то система линейных уравнений* $A\vec{x} = \vec{b}$ *имеет бесконечное множество решений.*

Иначе говоря, если система линейных уравнений совместна и количество независимых уравнений совпадает с количеством неизвестных, то система уравнений имеет единственное решение. Если количество независимых уравнений меньше количества неизвестных, решений будет бесконечно много.

Теорема. *Решения однородной системы линейных уравнений* $A\vec{x} = 0$ *образуют линейное пространство.*

Иначе говоря, сумма двух решений однородной системы линейных уравнений также является решением той же системы, и если решение однородной системы линейных уравнений умножить на любое число, то опять получим решение той же системы.

Теорема. *Пусть* $\operatorname{rang}(A) = r$, *тогда размерность линейного пространства решений однородной системы линейных уравнений* $A\vec{x} = 0$ *равна* $n - r$, *где* n *— количество неизвестных.*

Определение. Базис линейного пространства решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальным набором* решений.

Теорема. *Общее решение* $\vec{x}$ *совместной неоднородной системы линейных уравнений* $A\vec{x} = \vec{b}$ *можно представить в виде суммы частного решения этой системы* $\vec{x}_{частн}$ *и общего решения* $\vec{x}_{одн}$ *соответствующей ей однородной системы* $A\vec{x} = 0$:

$$\vec{x} = \vec{x}_{частн} + \vec{x}_{одн}.$$

Поскольку однородная система линейных уравнений $A\vec{x} = 0$ всегда имеет решение $\vec{x} = 0$, для нее всегда выполнен критерий совместности. На практике часто возникает вопрос, при каких условиях однородная система линейных уравнений $A\vec{x} = 0$ имеет ненулевое решение. На основании сформулированной выше теоремы

это возможно при выполнении условия $\operatorname{rang}(A) < n$, где n — количество неизвестных. При этом, конечно же, решений будет бесконечно много. Условие $\operatorname{rang}(A) < n$ означает, что строки матрицы A линейно зависимы. Для однородных систем линейных уравнений $A\vec{x} = 0$ с квадратной матрицей это условие удобно записать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Система линейных уравнений $A\vec{x} = 0$ с квадратной матрицей имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю*: $\det A = 0$.

2. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Пусть дана система m линейных уравнений, содержащая n неизвестных: $A\vec{x} = \vec{b}$. Для ее решения нужно выполнить следующие действия.

1. Составить расширенную матрицу системы $(A \mid \vec{b})$.

2. Используя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы $\left(A \mid \vec{b}\right)$, привести ее к ступенчатому виду.

3. Выяснить, совместна система или нет. Для этого определить ранги матриц A и $(A \mid \vec{b})$. Ранги этих матриц равны количеству ненулевых строк после приведения матриц к ступенчатому виду.

4. Если система совместна и $\operatorname{rang}(A) = n$, где n — количество неизвестных, то решение системы будет единственным. Для его нахождения надо решать преобразованную систему, двигаясь от последнего уравнения к первому. На каждом шаге придется решать уравнение, содержащее только одну неизвестную, остальные неизвестные оказываются найденными на предыдущих шагах.

5. Если система совместна и $\operatorname{rang}(A) < n$, где n — количество неизвестных, то решение системы будет неединственным. В этом случае сначала надо выбрать базисные неизвестные. Это можно сделать неединственным образом. Приведем один из способов выбора базисных неизвестных. В качестве базисных неизвестных выберем неизвестные, стоящие при ненулевых коэффициентах в начале ступени (матрица приведена к ступенчатому виду) каждой строки. Остальные неизвестные можно выбирать произвольно, и они называются свободными неизвестными. Видно, что если после приведения к ступенчатому виду матрица системы содержит r ненулевых строк ($\operatorname{rang}(A) = r$), а количество неизвестных равно n, то количе-

ство базисных неизвестных будет равно r (число ненулевых строк), в то время как количество свободных неизвестных будет равно $n-r$. Введем различные обозначения для свободных неизвестных. Для нахождения базисных неизвестных будем решать преобразованную систему, двигаясь от последнего уравнения к первому. В результате получим равенства, выражающие базисные переменные через свободные. Процесс решения совместной системы заканчивается получением формул, по которым могут быть найдены все неизвестные.

Метод Гаусса еще называют методом исключения неизвестных.

Пример 3. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=9, \\ 2x_1-x_2+3x_3=13, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=-1 \end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение. Составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований будем приводить ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \text{II}-2\text{I} \\ \text{III}-3\text{I} \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \frac{\text{II}}{5} \\ \\ \end{matrix} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \text{III}-4\text{II} \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -24 \end{array}\right).$$

Решим систему уравнений с расширенной матрицей, приведенной к ступенчатому виду. Последнее уравнение имеет вид $-6x_3=-24$, откуда находим, что $x_3=4$. Далее решим уравнение $-x_2+x_3=-1$, соответствующее второй строке расширенной матрицы, приведенной к ступенчатому виду. Поскольку x_3 найдено на предыдущем шаге, получим, что $x_2=5$. Далее решаем уравнение $x_1+2x_2-x_3=9$, из которого находим, что $x_1=3$. Итак, найдено решение $x_1=3$, $x_2=5$, $x_3=4$.

Пример 4. Выберите базисные и свободные неизвестные в системе уравнений, заданной своей расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Решение. Видно, что система уравнений состоит из трех уравнений для шести неизвестных. Расширенная матрица системы приведена к ступенчатому виду. При выборе базисных неизвестных будем выбирать в качестве таковых неизвестные, стоящие при первом отличном от нуля коэффициенте соответствующей строки матрицы, приведенной к ступенчатому виду, т. е. при коэффициене в начале каждой ступени. В первой строке первый отличные от нуля коэффициент стоит при неизвестной x_1, во второй — при x_4, в третей — при x_6. Следовательно, неизвестные x_1, x_4 и x_6 являются базисными, а оставшиеся неизвестные x_2, x_3 и x_5 можно взять произвольно, обозначив их как $x_2 = C_1$, $x_3 = C_2$ и $x_5 = C_3$.

Пример 5. Решите следующую систему линейных уравнений. Ответ запишите в векторной форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу данной системы уравнений и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Попутно мы выяснили, что ранги основной и расширенной матриц системы совпадают (равны двум). Это свидетельствует о совместности системы. В качестве базисных неизвестных берем неизвестные, соответствующие первым отличным от нуля элементам соответствующей строки матрицы, приведенной к ступенчатому виду. Из вида полученной матрицы следует, что в качестве базисных можно выбрать неизвестные x_1 и x_2. Оставшиеся неизвестные x_3 и x_4 можно взять в качестве свободных. Из второго уравнения выразим x_2 через свободные неизвестные x_3 и x_4. Получим $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$. Подставляя это выражение в первое уравнение и приводя подобные члены, получаем $x_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4$. Полагая $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, получаем $x_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}c_1 + \frac{7}{4}c_2$, $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2$. Ответ можно теперь записать

в векторной форме:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Решите однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Найдите фундаментальную систему решений однородной системы уравнений.

Решение. Матрица системы взята с теми же коэффициентами при неизвестных, что и в предыдущей задаче. После проведения элементарных преобразований решение однородной системы записывается в виде

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений данной однородной системы уравнений. Тогда любое решение однородной системы можно представить в виде $x = C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2$.

3. Правило (метод) Крамера

Теорема (правило Крамера). *Решение системы линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$ (с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$) с невырожденной квадратной матрицей A ($\det A \neq 0$) размера $n \times n$ удовлетворяет ра-*

венствам $D_i x_i = D$ $(i = 1, \ldots, n)$, где D — определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой столбца с номером i на столбец свободных членов $\vec{b}$.

Пример 7. Решите систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_2 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Решение. Матрица системы уравнений имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

а столбец свободных членов $\vec{b} = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$. Вычислим определитель матрицы A. В результате получим $D = -60$. Вычислим определители D_i, $i = 1, 2, 3$. Определитель D_1 является определителем матрицы, полученной из матрицы A заменой первого столбца на вектор $\vec{b}$:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -300.$$

Аналогично вычисляем определители D_2 и D_3:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 60, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = -60.$$

На основании правила Крамера получаем

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 5, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -1, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 1.$$

Задачи для самостоятельной работы

4.1. Решите систему уравнений методом Гаусса и по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 1, \\ 3x_1 + 8x_2 - 10x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

4.2. Решите систему линейных уравнений. Найдите фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений. Запишите ответ в векторном виде:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 34x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 79x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 22x_2 + x_3 + 250x_4 = 0, \\ 2x_1 - 44x_2 + 3x_3 + 180x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 14x_4 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - 11x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$

4.3. Исследуйте системы линейных уравнений на совместность:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 3, \\ 5x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ -5x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 2. \end{cases}$

4.4. Представьте общее решение системы уравнений в виде суммы частного решения и общего решения соответствующей однородной системы:

а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ -3x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 7x_4 = -5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 - x_4 = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 - 11x_3 - 7x_4 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 - 13x_3 - 11x_4 = 1. \end{cases}$

4.5. При каких значениях параметра a система линейных уравнений совместна:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + (a+9)x_3 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 6x_2 - 7x_3 = a + 3? \end{cases}$

4.6. При каких значениях параметра a система линейных уравнений совместна? Решите систему линейных уравнений при найденных значениях параметра:

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 + 11x_3 + 5x_4 + 90x_5 = 0, \\ 4x_1 + 0 \cdot x_2 + 44x_3 + 21x_4 + 400x_5 = 1, \\ 5x_1 + 0 \cdot x_2 + 55x_3 + 27x_4 + 530x_5 = a. \end{cases}$$

4.7. При каких значениях параметра a однородная система линейных уравнений, заданная матрицей

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & a+6 & 5 \end{pmatrix},$$

имеет ненулевое решение?

4.8. Найдите базис линейного пространства векторов, ортогональных векторам $(1; -2; 0; 34)$ и $(3; -5; 0; 79)$. Запишите ответ в векторном виде.

4.9. Найдите ближайшую к точке $(0; 0; -4)$ точку $M(x_1; x_2; x_3)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 12. \end{cases}$$

4.10. Предприятие выпускает 3 вида изделий с использованием двух видов сырья. Для продукции ценовой вектор $\mathbf{p} = (6; 20; 100)$, вектор наличного сырья $\mathbf{s} = (38; 96)$, нормы расходов сырья даны элементами матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 18 \end{pmatrix}$. Требуется определить максимальную стоимость продукции $\mathbf{P}$ и оптимальный вектор-план выпуска продукции $\mathbf{q} = (q_1; q_2; q_3)$ при полном использовании всего сырья, т. е. найти максимум функции $\mathbf{P} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}^T$, если $\mathbf{q}$ — решение системы $\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}^T = \mathbf{s}^T$. При решении следует учесть, что все величины q_1, q_2, q_3 неотрицательны.

Ответы к задачам главы 2

1.1. $C=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 4\\ -12 & -1 & -7\\ 5 & 2 & -8\end{pmatrix}$. **1.2.** $X=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-30 & -6 & -2 & -25\\ -13 & 13 & -22 & 16\\ -9 & -5 & -3 & -1\end{pmatrix}$.

1.3. $f(A)=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 4 & 6\end{pmatrix}$.

1.4. а) $A\cdot B=\begin{pmatrix}22 & 11\\ -19 & -1\end{pmatrix}$; б) $A\cdot B=\begin{pmatrix}9 & -5 & -9\\ 25 & 15 & -12\end{pmatrix}$; в) $A\cdot B=\begin{pmatrix}14 & 22\\ 17 & -9\\ 16 & 8\end{pmatrix}$;

г) $A\cdot B=\begin{pmatrix}-6 & -2\\ 13 & -4\\ 21 & 1\end{pmatrix}$; д) $A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 15\\ 17 & 13\end{pmatrix}$; е) $A\cdot B=\begin{pmatrix}11 & -14 & 10\\ 7 & -6 & 7\end{pmatrix}$;

ж) $A\cdot B=\begin{pmatrix}6 & 7 & 3\\ 0 & -8 & 6\\ 0 & -6 & 6\end{pmatrix}$; з) $A\cdot B=(-12)$; и) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 4 & -6\\ -1 & -2 & 3\\ 4 & 8 & -12\end{pmatrix}$;

к) $A\cdot B=\begin{pmatrix}31\\ -14\\ 18\end{pmatrix}$; л) $A\cdot B=(-6\ -17\ -1)$; м) $A\cdot B=\begin{pmatrix}-6 & 13 & 18\\ 3 & 18 & 26\\ -15 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

1.5. $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 7 & 8 & 9\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & 6 & 5\\ 7 & 9 & 8\end{pmatrix}$.

1.6. а) $X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=A\cdot X$; б) $X=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=X\cdot A$.

1.7. а) $A^5=\begin{pmatrix}304 & -61\\ 305 & -62\end{pmatrix}$; б) $A^{10}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^{15}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$; в) $A^{10}=\begin{pmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2.1. а) 1; б) 2; в) 2; г) 3; д) 3.

2.2. а) -31; б) -10; в) 8; г) -150; д) -10; е) -720. **2.3.** $M_{32}=8$.

2.4. $A_{43}=-16$. **2.5.** $2a-8b+c+5d$. **2.6.** $8x+15y+12z-19t$.

2.7. $a=-1$. **2.8.** $a=4$. **2.9.** $a\neq-\frac{9}{7}$. **2.10.** $a=3$.

3.1. а) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}9 & -6\\ -4 & 3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -5 & 3\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -7 & -3\\ -1 & 10 & 6\end{pmatrix}$.

3.2. $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0\\ -0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

3.3. а) $a=-2$, $b=2$, $c=4$; б) $a=-5$, $b=-2$, $c=3$.

3.4. а) $-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}0 & -3 & 24\\ -12 & 1 & 1\end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-23 & 43 & -4\\ -10 & 14 & 1\end{pmatrix}$; в) $-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9 & 0 & -6\\ 9 & 18 & -45\end{pmatrix}$;

г) $-\begin{pmatrix}3 & 5\\ 0 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; д) $-\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 17 & 7\\ -19 & -8\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1{,}5 & -1{,}5\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 10 & -2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 10 & 11 & -3 \end{pmatrix}$; л) $\begin{pmatrix} 35 & -22 \\ 59 & -37 \end{pmatrix}$;

м) $\begin{pmatrix} -50 & -76 \\ 40 & 61 \end{pmatrix}$.

4.1. а) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$; б) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

4.2. а) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -570 \\ 0 \\ 320 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -570 \\ 0 \\ 320 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 24 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -21 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 24 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -21 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$.

4.3. а) Совместна; б) несовместна.

4.4. а) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -1{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **4.5.** а) $a \neq -6$; б) $a = 2$.

4.6. $a = 2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 0 \\ -40 \\ 1 \end{pmatrix}$. **4.7.** $a = 2$.

4.8. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 12 \\ 23 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **4.9.** $x_1 = 6 - 5t$, $x_2 = 0$, $x_3 = t$, $t = 1$, $(1; 0; 1)$.

4.10. $\mathbf{P} = 518$, $\mathbf{q} = (3; 0; 5)$.

Глава 3

Собственные векторы и собственные значения матрицы

§1. Основные понятия и теоремы

Определение. Пусть A — числовая квадратная матрица n-го порядка. Матрица $A-\lambda E$ называется *характеристической* для A, а ее определитель $\Delta_A = \det(A-\lambda E)$ — характеристическим многочленом матрицы A:

$$A-\lambda E = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Delta_A = \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что степень характеристического многочлена равна порядку n характеристической матрицы.

Определение. Ненулевой вектор

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

удовлетворяющий условию $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, называется *собственным вектором* матрицы A. Число λ называется собственным значением матрицы A. Говорят, что собственный вектор $\vec{x}$ соответствует собственному значению λ.

Рассмотрим задачу нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы. Приведенное выше определение можно записать в виде $(A-\lambda E)\vec{x} = 0$, где E — единичная матрица n-го порядка. Таким образом, мы получаем однородную систему n ли-

нейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Поскольку нас интересуют только нетривиальные решения $\vec{x} \neq 0$ однородной системы, определитель матрицы системы должен быть равен нулю:

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

В противном случае система имеет единственное тривиальное решение. Таким образом, задача нахождения собственных значений матрицы свелась к решению уравнения $\det(A-\lambda E)=0$, т. е. к отысканию корней характеристического многочлена $\Delta_A = \det(A-\lambda E)$ матрицы A. Уравнение $\Delta_A = \det(A-\lambda E) = 0$ называется характеристическим уравнением матрицы A.

Так как характеристический многочлен имеет степень n, характеристическое уравнение — это алгебраическое уравнение n-го порядка. Согласно основной теореме алгебры характеристический многочлен можно представить в виде

$$\Delta_A = \det(A-\lambda E) = a_n(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{n_k},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — корни многочлена кратности $n_1, n_2, \ldots, n_k$ соответственно, причем $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. Другими словами, характеристический многочлен имеет n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Теорема. *Все корни характеристического многочлена* (*характеристического уравнения*) *и только они являются собственными значениями матрицы.*

Действительно, если число λ — собственное значение матрицы A, которому соответствует собственный вектор $\vec{x} \neq 0$, то однородная система линейных уравнений $(A-\lambda E)\vec{x}=0$ имеет нетривиальное решение, следовательно, матрица системы вырожденная, т. е. число λ удовлетворяет характеристическому уравнению. Наоборот, если λ — корень характеристического многочлена, то определитель

$\det(A-\lambda E)$ матрицы однородной системы $(A-\lambda E)\vec{x}=0$ равен нулю, т. е. $\operatorname{rang}(A-\lambda E)<n$. В этом случае система имеет бесконечное множество решений, включая ненулевые решения. Поэтому найдется вектор $\vec{x}\neq 0$, удовлетворяющий условию $(A-\lambda E)\vec{x}=0\to A\vec{x}=\lambda\vec{x}$. Значит, λ — собственное значение матрицы A.

Свойства собственных векторов

Пусть A — квадратная матрица n-го порядка.

1. Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.

В самом деле, пусть $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ — собственные векторы, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2, причем $\lambda_1\neq\lambda_2$. Составим произвольную линейную комбинацию этих векторов и приравняем ее нулю: $\alpha_1\vec{s}_1+\alpha_2\vec{s}_2=0$.

Покажем, что это равенство возможно только в тривиальном случае, когда $\alpha_1=\alpha_2=0$. Действительно, умножая обе части равенства на матрицу A и подставляя $A\vec{s}_1=\lambda_1\vec{s}_1$, $A\vec{s}_2=\lambda_2\vec{s}_2$, получим, что $\alpha_1\lambda_1\vec{s}_1+\alpha_2\lambda_2\vec{s}_2=0$. Прибавляя к последнему равенству равенство $\alpha_1\vec{s}_1+\alpha_2\vec{s}_2=0$, умноженное на $-\lambda_2$, получаем $\alpha_1(\lambda_1-\lambda_2)\vec{s}_1=0$. Так как $\vec{s}_1\neq 0$ и $\lambda_1\neq\lambda_2$, делаем вывод, что $\alpha_1=0$. Тогда из равенства $\alpha_1\vec{s}_1+\alpha_2\vec{s}_2=0$ следует, что и $\alpha_2=0$ (поскольку $\vec{s}_2\neq 0$). Таким образом, собственные векторы $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ линейно независимы. Доказательство для любого конечного числа собственных векторов проводится по индукции.

2. Ненулевая линейная комбинация собственных векторов, соответствующих одному собственному значению, является собственным вектором, соответствующим тому же собственному значению.

Действительно, если собственному значению λ соответствуют собственные векторы $\vec{s}_1,\vec{s}_2,\ldots,\vec{s}_k$, то отсюда следует, что вектор $\vec{s}=\alpha_1\vec{s}_1+\alpha_2\vec{s}_2+\ldots+\alpha_k\vec{s}_k$ также собственный, поскольку

$$\begin{aligned}A\vec{s}=A(\alpha_1\vec{s}_1+\alpha_2\vec{s}_2+\ldots+\alpha_k\vec{s}_k)=A(\alpha_1\vec{s}_1)+A(\alpha_2\vec{s}_2)+\ldots+A(\alpha_k\vec{s}_k)=\\ =\alpha_1A(\vec{s}_1)+\alpha_2A(\vec{s}_2)+\ldots+\alpha_kA(\vec{s}_k)=\alpha_1\lambda\vec{s}_1+\alpha_2\lambda\vec{s}_2+\ldots+\alpha_k\lambda\vec{s}_k=\\ =\lambda(\alpha_1\vec{s}_1+\alpha_2\vec{s}_2+\ldots+\alpha_k\vec{s}_k)=\lambda\vec{s}.\end{aligned}$$

3. Пусть $(A-\lambda E)^+$ — присоединенная матрица для характеристической матрицы $A-\lambda E$. Если λ_0 — собственное значение матрицы A, то любой ненулевой столбец матрицы $(A-\lambda_0E)^+$ является собственным вектором, соответствующим собственному значению λ_0.

Здесь для любой квадратной матрицы C элементами присоединенной матрицы C^+ служат алгебраические дополнения к элементам c_{ji}.

Таким образом, выполнено равенство (см. способы нахождения обратной матрицы) $(A-\lambda E)(A-\lambda E)^+ = \Delta_A(\lambda)E$. Подставляя корень λ_0, получаем $(A-\lambda_0 E)(A-\lambda_0 E)^+ = 0$.

Если $\vec{s}$ — ненулевой столбец матрицы $(A-\lambda_0 E)^+$, то $(A-\lambda_0 E)\vec{s} = 0$, следовательно, $A\vec{s} = \lambda_0\vec{s}$. Значит, $\vec{s}$ — собственный вектор матрицы A.

Замечания. 1. По основной теореме алгебры характеристическое уравнение имеет в общем случае n комплексных корней (с учетом их кратностей). Поэтому собственные значения и собственные векторы имеются у любой квадратной матрицы. При этом собственные значения матрицы определяются однозначно (с учетом их кратности), а собственные векторы — неоднозначно.

2. Чтобы из множества собственных векторов выделить максимальную линейно независимую систему собственных векторов, нужно для всех различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ записать одну за другой системы линейно независимых собственных векторов, т. е. фундаментальные системы решений однородных систем

$$(A-\lambda_1 E)\vec{x} = 0, \quad (A-\lambda_2 E)\vec{x} = 0, \ldots, (A-\lambda_k E)\vec{x} = 0.$$

Полученная система собственных векторов будет линейно независимой в силу свойства собственных векторов.

3. Совокупность всех собственных значений матрицы (с учетом их кратностей) называют ее спектром.

4. Спектр матрицы называется простым, если собственные значения матрицы попарно различные (все корни характеристического уравнения простые).

5. Для простого корня λ_0 характеристического уравнения соответствующий собственный вектор можно найти, раскладывая определитель матрицы $A-\lambda_0 E$ по одной из строк. Тогда ненулевой вектор, компоненты которого равны алгебраическим дополнениям элементов одной из строк матрицы $A-\lambda_0 E$, является собственным вектором.

6. Определитель матрицы равен произведению ее собственных значений (с учетом их кратности).

Действительно, характеристический многочлен можно разложить на множители (см. следствие основной теоремы алгебры):

$$\Delta_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — корни многочлена (быть может, совпадающие). Отсюда следует, что $\Delta_A(0) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$. С другой стороны, по определению получаем $\Delta_A(0) = \det(A - \lambda E)|_{\lambda=0} = \det A$, следовательно, $\det A = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$.

§ 2. Вычисление собственных векторов и собственных значений квадратной матрицы

Для нахождения собственных векторов и собственных значений квадратной матрицы n-го порядка A надо выполнить следующие действия.

1. Составить характеристический многочлен матрицы $\Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.

2. Найти все различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, кратности $n_1, n_2, \ldots, n_k$ корней определять не нужно.

3. Для каждого найденного корня λ_i $(i = 1, \ldots, k)$ найти фундаментальную систему $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-r}$ решений однородной системы уравнений $(A - \lambda_i E)\vec{x} = 0$, где $r = \operatorname{rang}(A - \lambda_i E)$.

4. Совокупность всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_i $(i = 1, \ldots, k)$, написать в следующем виде: $\vec{s} = C_1\vec{a}_1 + C_2\vec{a}_2 + \ldots + C_{n-r}\vec{a}_{n-r}$.

Пример 1. Найдите собственные значения и собственные векторы матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. а) Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A.

1. Составляем характеристический многочлен матрицы:

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 14.$$

2. Решаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0 \;\rightarrow\; \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 7.$$

3.1. Для корня $\lambda_1 = 2$ составляем однородную систему уравнений:

$$(A - \lambda_1 E)x = 0\colon \begin{pmatrix} 1-2 & -2 \\ 3 & 8-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен единице ($r=1$), число неизвестных $n=2$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из одного ($n-r=1$) вектора. В качестве базисной переменной берем переменную x_1, свободная переменная — x_2. Выражаем базисную переменную x_1 через свободную: $x_1=-2x_2$. Полагая $x_2=1$, получаем решение $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

4.1. Записываем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1=2$: $\vec{s}_1=C_1\vec{a}_1$, где C_1 — отличная от нуля произвольная постоянная.

Заметим, что согласно п. 5 замечаний в качестве собственного вектора можно выбрать вектор, составленный из алгебраических дополнений элементов второй строки матрицы $\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, т. е. $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. Умножив этот столбец на -1, получим вектор $\vec{a}_1$.

3.2. Для корня $\lambda_2=7$ составляем однородную систему уравнений:

$$(A-\lambda_2 E)\vec{x}=0\colon \begin{pmatrix}1-7 & -2\\ 3 & 8-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-6 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Как и в первом случае, решаем эту систему методом Гаусса, приводя матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен единице ($r=1$), число неизвестных $n=2$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из одного ($n-r=1$) вектора. Выражаем базисную переменную x_1 через свободную: $x_1=-\frac{1}{3}x_2$. Полагая $x_2=1$, получаем решение

$$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}.$$

4.2. Записываем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2=7$: $\vec{s}_2=C_2\vec{a}_2$, где C_2 — отличная от нуля произвольная постоянная.

Заметим, что согласно п. 5 замечаний в качестве собственного вектора можно выбрать вектор, составленный из алгебраических дополнений элементов первой строки матрицы $\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, т. е. вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Поделив его на -3, получим $\vec{a}_2$.

б) Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы B.

1. Составляем характеристический многочлен матрицы:

$$\Delta_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5.$$

2. Решаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \;\rightarrow\; \lambda_1 = 1+2i, \quad \lambda_2 = 1-2i.$$

3.1. Для корня $\lambda_1 = 1+2i$ составляем однородную систему уравнений:

$$(B-\lambda_1 E)\vec{x} = 0\colon \begin{pmatrix} 1-(1+2i) & -4 \\ 1 & 1-(1+2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2i & -4 & 0 \\ 1 & -2i & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2i & 0 \\ -2i & -4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен единице ($r = 1$), число неизвестных $n = 2$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из одного ($n - r = 1$) вектора. Выражаем базисную переменную x_1 через свободную: $x_1 = 2ix_2$. Полагая $x_2 = 1$, получаем решение

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.1. Записываем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 1+2i$: $\vec{s}_1 = C_1\vec{a}_1$, где C_1 — отличная от нуля произвольная постоянная.

Заметим, что согласно п. 5 замечаний в качестве собственного вектора можно выбрать вектор, составленный из алгебраических дополнений элементов первой строки матрицы $\begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix}$, т. е. $\begin{pmatrix} -2i \\ -1 \end{pmatrix}$. Умножив этот столбец на -1, получим вектор $\vec{a}_1$.

3.2. Для корня $\lambda_2 = 1-2i$ составляем однородную систему уравнений:

$$(B-\lambda_2 E)x = 0\colon \begin{pmatrix} 1-(1-2i) & -4 \\ 1 & 1-(1-2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2i & -4 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2i & -4 & 0 \\ 1 & 2i & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2i & 0 \\ 2i & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен единице ($r=1$), число неизвестных $n=2$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из одного ($n-r=1$) вектора. Выражаем базисную переменную x_1 через свободную: $x_1 = -2ix_2$. Полагая $x_2 = 1$, получаем решение

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. Записываем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 1-2i$: $\vec{s}_1 = C_2\vec{a}_2$, где C_2 — отличная от нуля произвольная постоянная.

Заметим, что согласно п. 5 замечаний в качестве собственного вектора можно выбрать вектор, составленный из алгебраических дополнений элементов первой строки матрицы $\begin{pmatrix} 2i & -4 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$, т. е. $\begin{pmatrix} 2i \\ -1 \end{pmatrix}$. Умножив этот столбец на -1, получим вектор $\vec{a}_2$.

в) Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы C.

1. Составляем характеристический многочлен матрицы:

$$\Delta_C(\lambda) = \det(C-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2.$$

2. Решаем характеристическое уравнение:

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0 \ \to \ \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 0.$$

3.1. Для корня $\lambda_1 = 3$ составляем однородную систему уравнений:

$$(C-\lambda_1 E)\vec{x}=0\colon \begin{pmatrix} 1-3 & 1 & 1 \\ 1 & 1-3 & 1 \\ 1 & 1 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен двум ($r = 2$), число неизвестных $n = 3$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из одного ($n - r = 1$) вектора. В качестве базисных переменных берем переменные x_1, x_2, свободная переменная — x_3. Выражаем базисные переменные x_1, x_2 через свободную: $x_1 = x_3$, $x_2 = x_3$. Полагая $x_3 = 1$, получаем решение

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.1. Все собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 3$, вычисляются по формуле $\vec{s}_1 = C_1\vec{a}_1$, где C_1 — отличная от нуля произвольная постоянная.

Заметим, что согласно п. 5 замечаний в качестве собственного вектора можно выбрать вектор, составленный из алгебраических дополнений элементов первой строки матрицы $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, т. е. $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Умножив этот столбец на $\frac{1}{3}$, получим вектор $\vec{a}_1$.

3.2. Для корня $\lambda_2 = 0$ составляем однородную систему уравнений:

$$(C-\lambda_2 E)\vec{x} = C\vec{x} = 0\colon \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен единице ($r=1$), число неизвестных $n=3$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из двух ($n-r=2$) векторов. В качестве базисных переменных берем переменную x_1, свободные переменные — x_2, x_3. Выражаем базисную переменную x_1 через свободные: $x_1=-x_2-x_3$. Полагая $x_2=1$, $x_3=0$, получаем решение $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. Полагая $x_2=0$, $x_3=1$, получаем второе решение $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

4.2. Записываем множество собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_2=0$: $\vec{s}=C_1\vec{a}_1+C_2\vec{a}_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, не равные нулю одновременно. В частности, при $C_1=0$, $C_2=-1$ получаем $\vec{s}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, а при $C_1=-1$, $C_2=0$ получаем $\vec{s}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Присоединяя к этим собственным векторам собственный вектор $\vec{s}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1=3$, находим три линейно независимых собственных вектора матрицы C:

$$\vec{s}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{s}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{s}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Заметим, что для корня $\lambda_2=0$ нельзя найти собственный вектор, применяя п. 5 замечаний, так как алгебраическое дополнение каждого элемента матрицы A равно нулю.

Задачи для самостоятельной работы

2.1. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы: а) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}4&-1\\-1&4\end{pmatrix}$.

2.2. Найдите $|\cos\varphi|$, где φ — угол между собственными векторами, соответствующими различным собственным значениям:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.4. При каком значении параметра a матрица A имеет собственный вектор $\vec{v}$:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = (-3; 1; a-1)$;

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = (2; 3; a-1)$?

2.5. Проверьте, что вектор X является собственным вектором матрицы A и найдите соответствующее ему собственное значение λ:

а) $A = \begin{pmatrix} -15 & -5 & 23 & 4 \\ -33 & -13 & 49 & 14 \\ -13 & -5 & 21 & 4 \\ -18 & -5 & 23 & 7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 23 & -52 \\ 7 & 16 & 39 & -56 \\ 11 & 20 & 27 & -52 \\ 11 & 20 & 33 & -58 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2.6. Выделите из векторов $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ собственные векторы матрицы A и найдите их собственные значения:

а) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ и $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -5 & 13 & 7 \\ -6 & 14 & 6 \\ 8 & -17 & -6 \end{pmatrix}$;

б) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -11 \\ 12 & -1 & 16 \\ 6 & -1 & 9 \end{pmatrix}$.

2.7. Найдите собственный вектор матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, соответствующий большему собственному значению, имеющий длину $\sqrt{136}$ и составляющий тупой угол с осью Ox.

2.8. Найдите собственный вектор матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, соответствующий большему собственному значению, имеющий длину $\sqrt{54}$ и составляющий тупой угол с осью Oz.

2.9. Найдите множество собственных векторов матрицы A, соответствующих заданному собственному значению, решив однородную систему линейных уравнений:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 & 90 \\ 4 & 46 & 21 & 400 \\ 5 & 55 & 28 & 490 \\ 7 & 77 & 37 & 712 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$;

б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -10 & 5 & 50 \\ 3 & -27 & 16 & 167 \\ 2 & -20 & 14 & 117 \\ 4 & -40 & 21 & 220 \end{pmatrix}$, $\lambda = 3$;

в) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & 40 \\ 3 & 20 & 25 & 133 \\ 2 & 14 & 16 & 93 \\ 4 & 28 & 31 & 146 \end{pmatrix}$, $\lambda = -1$.

2.10. Матрица A имеет три собственных вектора v_1, v_2, v_3 с соответствующими собственными значениями $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$. Для матрицы $f(A) = A^2 + A$ найдите собственные векторы и собственные значения.

2.11. Матрица A имеет три собственных вектора v_1, v_2, v_3 с соответствующими собственными значениями $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Для матрицы $f(A) = A^2 - A$ найдите собственные векторы и собственные значения.

Ответы к задачам главы 3

2.1. а) $\lambda = 1$, $(1; 1)$; $\lambda = 3$, $(1; -1)$; б) $\lambda = 3$, $(1; 1)$; $\lambda = 5$, $(1; -1)$.
2.2. а) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; б) $\frac{4}{\sqrt{65}}$.
2.3. а) $\lambda_1 = 2$, $(1; 1; 0)$; $\lambda_2 = 3$, $(2; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$;
б) $\lambda_1 = 2$, $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 1)$; $\lambda_2 = 4$, $(1; 1; -1)$;
в) $\lambda_1 = 1$, $(2; -1; 2)$; $\lambda_2 = 3$, $(1; -2; -1)$; $\lambda_3 = 5$, $(0; 1; 0)$.
2.4. а) $a = 3$; б) $a = 4$. **2.5.** а) $\lambda = 2$; б) $\lambda = -4$.
2.6. а) $\vec{u}_2$, $\lambda = -1$, $\vec{u}_3$, $\lambda = 2$; б) $\vec{u}_1$, $\lambda = -2$, $\vec{u}_3$, $\lambda = 1$.
2.7. $\lambda = -2$, $\lambda = 1$, $\lambda = 4$, $t(3; 4; 3)$, $(-6; -8; -6)$.
2.8. $\lambda = 1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 5$, $t(1; 1; 2)$, $(-3; -3; -6)$.

2.9. а) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ -40 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ -17 \\ 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 64 \\ 0 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.10. Собственными векторами матрицы $f(A)$ являются векторы v_1, v_2, v_3. Им соответствуют собственные значения $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 12$.

2.11. Собственными векторами матрицы $f(A)$ являются векторы v_1, v_2, v_3. Им соответствуют собственные значения $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 6$.

Глава 4

Многочленные матрицы (λ-матрицы)

§1. Основные понятия и теоремы

1. Основные понятия

Определение. *Многочленной* (*полиномиальной*) матрицей (или λ-матрицей) называется матрица, элементами которой являются многочлены переменной λ. Далее будут рассматриваться только квадратные λ-матрицы n-го порядка:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Элементы λ-матрицы — это многочлены вида

$$a_{ij}(\lambda) = a_{ij}^{(m)}\lambda^m + a_{ij}^{(m-1)}\lambda^{m-1} + \dots + a_{ij}^{(1)}\lambda + a_{ij}^{(0)},$$

где $a_{ij}^{(m)}, a_{ij}^{(m-1)}, \dots, a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(0)}$ — коэффициенты, а m — степень многочлена (в общем случае разная для разных элементов матрицы).

Случай, когда все элементы λ-матрицы тождественно равны нулю, сводится к числовой нулевой матрице. Поэтому нулевые λ-матрицы далее не рассматриваются.

Любую λ-матрицу n-го порядка можно представить в виде многочлена с матричными коэффициентами:

$$A(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + A_1\lambda + A_0,$$

где $A_m, A_{m-1}, \dots, A_1, A_0$ — числовые квадратные матрицы n-го порядка, матрица $A_m \neq 0$ — старший коэффициент, матрица A_0 — свободный член, неотрицательное целое число m — степень многочлена. Заметим, что степень m многочлена равна наибольшей из степеней элементов λ-матрицы. Многочлен с матричными коэффициентами называется регулярным, если определитель старшего коэффициента не равен нулю: $\det A_m \neq 0$.

Две λ-матрицы $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ называются равными: $A(\lambda) = B(\lambda)$, если они имеют одинаковый порядок n и равные соответствующие

элементы:

$$a_{ij}(\lambda) = b_{ij}(\lambda), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Все операции, определенные для числовых матриц, переносятся на λ-матрицы.

Произведение многочленов с матричными коэффициентами, в отличие от произведения обычных многочленов, может иметь степень меньше, чем сумма степеней множителей. Действительно, старший коэффициент $A_m B_k$ произведения многочленов может быть равен нулю, даже если матрицы A_m и B_k ненулевые. Если хотя бы один из множителей — регулярный многочлен, то степень произведения равна сумме степеней множителей. В самом деле, если матрицы A_m и B_k ненулевые и, кроме того, $\det A_m \neq 0$, то $A_m B_k \neq 0$. Действительно, если $A_m B_k = 0$, то $B_k = (A_m)^{-1} 0 = 0$, что противоречит допущению.

Как и у числовых матриц, произведение λ-матриц некоммутативно, т. е. $A(\lambda)B(\lambda) \neq B(\lambda)A(\lambda)$.

Для нахождения определителя λ-матрицы используются те же правила и свойства, что и для числовых матриц, поскольку λ-матрица при фиксированном значении λ становится числовой. Заметим, что определитель λ-матрицы, ее миноры и алгебраические дополнения представляют собой многочлены от переменной λ.

В соответствии с общим определением рангом λ-матрицы будем считать максимальный порядок минора, не равного тождественно нулю, т. е. $\operatorname{rg}(A(\lambda)) = r$, если в матрице $A(\lambda)$ имеется отличный от нуля минор r-го порядка, а все миноры большего порядка тождественно равны нулю или не существуют.

2. Обращение многочленных матриц

Обратной для квадратной λ-матрицы $A(\lambda)$ является λ-матрица $A^{-1}(\lambda)$, если $A(\lambda)A^{-1}(\lambda) = A^{-1}(\lambda)A(\lambda) = E$, где E — единичная матрица того же порядка, что и матрица $A(\lambda)$.

Необходимым и достаточным условием существования обратной λ-матрицы $A^{-1}(\lambda)$ является условие $\det A(\lambda) = \text{const} \neq 0$, т. е. определитель обращаемой λ-матрицы должен быть отличным от нуля многочленом нулевой степени (постоянной).

Формула

$$A^{-1}(\lambda) = \frac{1}{\det A(\lambda)} \widetilde{A}(\lambda),$$

определяет обратную матрицу к матрице $A(\lambda)$. Здесь $\widetilde{A}(\lambda) = (A(\lambda))^T$ — так называемая присоединенная матрица ((A_{ij}) — матрица, составленная из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij} матрицы A). Матрица $A(\lambda)$, для которой существует обратная матрица $A^{-1}(\lambda)$, называется обратимой.

Пример 1. Для λ-матрицы

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

найдите обратную λ-матрицу.

Решение. Вычислим определитель данной матрицы:

$$\det A(\lambda) = \lambda^2 - (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 1 \neq 0.$$

Находим обратную λ-матрицу (по стандартным правилам для числовых матриц):

$$A^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & -\lambda + 1 \\ -\lambda - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что условие

$$A(\lambda)A^{-1}(\lambda) = A^{-1}(\lambda)A(\lambda) = E$$

выполняется.

3. Элементарные преобразования многочленных матриц

Элементарными преобразованиями λ-матрицы называются следующие ее преобразования.

1. Перестановка двух столбцов (строк) матрицы.

2. Умножение всех элементов одного столбца (строки) матрицы на одно и то же число, отличное от нуля.

3. Прибавление к элементам одного столбца (строки) соответствующих элементов другого столбца (строки), умноженных на один и тот же многочлен $p(\lambda)$.

Матрица $B(\lambda)$, полученная из исходной матрицы $A(\lambda)$ конечным числом элементарных преобразований, называется эквивалентной матрице $A(\lambda)$. Это обозначается так: $A(\lambda) \sim B(\lambda)$.

Заметим, что с помощью элементарных преобразований любую ненулевую числовую матрицу можно привести к одному из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad (E).$$

При этом в п. 3 под многочленом $p(\lambda)$ понимается число (представляющее собой многочлен нулевой степени).

Напомним, что многочлен $d(\lambda) \neq 0$ называется общим делителем отличных от нуля многочленов $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$, если каждый из них делится на $d(\lambda)$ без остатка. Общий делитель максимальной степени (со старшим коэффициентом, равным единице) называется наибольшим общим делителем. У любых ненулевых многочленов существует единственный наибольший общий делитель. Понятия общего делителя и наибольшего общего делителя распространяются на любое конечное число многочленов. В частности, если один из многочленов тождественно равен единице, то он является наибольшим общим делителем.

Задачи для самостоятельной работы

1.1. Вычислите обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda+1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2. Вычислите обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} \lambda^2+3\lambda & \lambda-1 \\ \lambda+4 & 1 \end{pmatrix}$.

§ 2. Приведение многочленной матрицы к диагональному виду

При помощи элементарных преобразований λ-матрицу $A(\lambda)$ можно привести к диагональному виду

$$A'(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f_r(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $f_j(\lambda)$, $1 \leqslant j \leqslant r$, — многочлены со старшим коэффициентом, равным единице, r — ранг матрицы $A(\lambda)$. Алгоритм повторяет в общих чертах метод Гаусса, но имеются некоторые отличия при выборе ведущего элемента.

Процесс приведения λ-матрицы к диагональному виду распадается на следующие этапы.

1. В λ-матрице выбрать отличный от нуля элемент наименьшей степени (ведущий элемент). Если имеется несколько элементов

наименьшей степени, то среди них выбирается любой. Переставить (при необходимости) два столбца и две строки так, чтобы ведущая строка и ведущий столбец, на пересечении которых стоит ведущий элемент, оказались на месте первой строки и первого столбца (преобразование 1 типа § 1, п. 3). Ведущий элемент при этом окажется в левом верхнем углу рассматриваемой матрицы.

Если все элементы ведущего столбца и ведущей строки, за исключением ведущего элемента, равны нулю, то этот столбец и эту строку следует исключить из рассмотрения и продолжить поиск ведущего элемента в оставшейся части матрицы. Преобразования заканчиваются, если исключены все столбцы и строки, или в оставшейся части матрицы все элементы нулевые, или в оставшейся части матрицы имеется только один элемент.

Если все элементы ведущего столбца и ведущей строки делятся без остатка на ведущий элемент, то перейти к п. 3.

Если не все элементы ведущего столбца и ведущей строки делятся на ведущий элемент, то степень ведущего элемента нужно понизить, переходя к п. 2.

2. Если в первом столбце имеется элемент $a_{i1}(\lambda)$, который не делится на ведущий элемент $a_{11}(\lambda)$, то представить этот элемент в виде

$$a_{i1}(\lambda) = p(\lambda)a_{11}(\lambda) + r(\lambda),$$

где остаток $r(\lambda)$ отличен от 0 и его степень меньше, чем степень многочлена $a_{11}(\lambda)$. Прибавить к i-й строке первую строку, умноженную на многочлен $-p(\lambda)$, при этом получить на месте элемента $a_{i1}(\lambda)$ многочлен $r(\lambda)$. Перейти к выбору ведущего элемента, т. е. к п. 1. Поступить аналогично, если в первой строке есть элемент, который не делится на ведущий (использовать то же представление и преобразование столбцов).

3. К каждой строке, расположенной ниже ведущей, прибавить ведущую строку, умноженную соответственно на такой многочлен, чтобы элементы, стоящие под ведущим, оказались равными нулю (преобразование 3 типа § 1, п. 3). Аналогично к каждому столбцу, расположенному правее ведущего, прибавить ведущий столбец, умноженный соответственно на такой многочлен, чтобы элементы, стоящие правее ведущего, оказались равными нулю (преобразование 3 типа § 1, п. 3).

4. Исключив из рассмотрения строку и столбец, на пересечении которых стоит ведущий элемент, перейти к п. 1, в котором все описанные действия применить к оставшейся части матрицы.

Пример 1. Приведите λ-матрицы к диагональному виду:

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2-\lambda\\ \lambda^2+\lambda & -\lambda+1\end{pmatrix},\quad B(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2+2\lambda+4\\ \lambda^2-2\lambda+1 & 0\end{pmatrix},$$

$$C(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица $A(\lambda)$.

1. Наименьшую степень имеет элемент $a_{11}(\lambda)=\lambda$. Выбираем его в качестве ведущего. Все элементы ведущего (первого) столбца и ведущей (первой) строки делятся на ведущий элемент. Поэтому переходим к п. 3 алгоритма.

3. Ко второй строке прибавим первую, умноженную на $-\lambda-1$:

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2-\lambda\\ \lambda^2+\lambda & -\lambda+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2-\lambda\\ 0 & -\lambda+1+(-\lambda-1)(\lambda^2-\lambda)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2-\lambda\\ 0 & -\lambda^3+1\end{pmatrix}.$$

Здесь и далее мы используем знак $\to$ при переходе к эквивалентной матрице.

Ко второму столбцу прибавим первый, умноженный на $1-\lambda$:

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2-\lambda\\ \lambda^2+\lambda & -\lambda+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2-\lambda\\ 0 & -\lambda^3+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & -\lambda^3+1\end{pmatrix}.$$

Переходим к п. 4 алгоритма.

4. Исключим из рассмотрения первый столбец и первую строку. Оставшаяся часть матрицы состоит из одного элемента. Преобразования закончены, матрица приведена к диагональному виду.

Матрица $B(\lambda)$.

1. В качестве ведущего элемента выбираем $b_{11}(\lambda)=\lambda$. Первый столбец и первая строка матрицы — ведущие. Так как элемент $b_{21}(\lambda)=(\lambda-1)^2$ не делится на ведущий без остатка, переходим к п. 2 алгоритма.

2. Разделим многочлен $b_{21}(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1$ на $b_{11}(\lambda)=\lambda$:

$$\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-2)\lambda+1.$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на $-\lambda+2$:

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2+2\lambda+4\\ \lambda^2-2\lambda+1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2+2\lambda+4\\ 1 & -\lambda^3+8\end{pmatrix}.$$

Возвращаемся к п. 1.

1. Выбираем элемент наименьшей степени (единицу) в качестве ведущего. Меняем местами первую и вторую строки:

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2+2\lambda+4\\ \lambda^2-2\lambda+1 & 0\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2+2\lambda+4\\ 1 & -\lambda^3+8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -\lambda^3+8\\ \lambda & \lambda^2+2\lambda+4\end{pmatrix}.$$

Все элементы ведущего (первого) столбца и ведущей (первой) строки делятся на ведущий элемент. Поэтому переходим к п. 3 алгоритма.

3. Прибавляем ко второй строке первую, умноженную на $-\lambda$, а затем ко второму столбцу прибавляем первый, умноженный на λ^3-8:

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2+2\lambda+4\\ \lambda^2+2\lambda+1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -\lambda^3+8\\ \lambda & \lambda^2+2\lambda+4\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^4+\lambda^2-6\lambda+4\end{pmatrix}.$$

4. Исключаем из рассмотрения первую строку и первый столбец матрицы. Переходим к п. 1 алгоритма.

1. Поскольку в оставшейся части матрицы имеется только один элемент, преобразования надо закончить, так как матрица $B(\lambda)$ приведена к диагональному виду.

Матрица $C(\lambda)$.

1. Выбираем в качестве ведущего элемент $c_{12}(\lambda)=1$ наименьшей степени. Меняем местами первый и второй столбцы:

$$C(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \lambda & 0\\ \lambda & 0 & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Все элементы ведущего (первого) столбца и ведущей (первой) строки делятся на ведущий элемент. Поэтому переходим к п. 3 алгоритма.

3. Ко второй строке прибавляем первую, умноженную на $-\lambda$, а затем ко второму столбцу прибавляем первый, умноженный на $-\lambda$:

$$C(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \lambda & 0\\ \lambda & 0 & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^2 & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

4. Исключаем первую строку и первый столбец из рассмотрения и переходим к п. 1.

1. В оставшейся части матрицы выбираем ненулевой элемент наименьшей степени, который равен единице. Меняем местами второй и третий столбцы:

$$C(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^2 & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\lambda^2\\ 0 & \lambda & 0\end{pmatrix}.$$

Все элементы ведущей (второй) строки и ведущего (второго) столбца делятся на ведущий элемент (на 1). Поэтому переходим к п. 3 алгоритма.

3. К третьей строке прибавляем вторую, умноженную на $-\lambda$, а затем к третьему столбцу прибавляем второй, умноженный на λ^2:

$$C(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\lambda^2\\ 0 & \lambda & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{pmatrix}.$$

4. Исключаем второй столбец и вторую строку из рассмотрения. Переходим к п. 1 алгоритма.

1. Так как в оставшейся части матрицы имеется единственный элемент, преобразования заканчиваются, матрица приведена к диагональному виду.

Замечания. 1. Диагональный вид λ-матрицы не единственный. Он зависит от выбранной последовательности элементарных преобразований.

Для λ-матриц можно уточнить понятие диагонального вида так, чтобы оно отвечало условию единственности.

Определение. *Нормальным диагональным видом* λ-матрицы n-го порядка называется диагональная матрица

$$\Lambda(\lambda)=\begin{pmatrix}e_1(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & e_r(\lambda) & 0 & \dots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix},$$

у которой все многочлены, стоящие на главной диагонали, имеют старшие коэффициенты, равные единице, причем многочлен $e_2(\lambda)$ делится на $e_1(\lambda)$, $e_3(\lambda)$ делится на $e_2(\lambda)$ и т. д., $e_r(\lambda)$ делится на $e_{r-1}(\lambda)$. Количество r ненулевых многочленов больше нуля, так

как рассматриваются ненулевые λ-матрицы, и это количество не превосходит порядка матрицы, т. е. $1 \leqslant r \leqslant n$.

2. Чтобы привести λ-матрицу к нормальному диагональному виду, нужно сначала привести матрицу к диагональному виду:

$$\operatorname{diag}(a'_{11}(\lambda), a'_{22}(\lambda), \ldots, a'_{nn}(\lambda)).$$

Элемент $a'_{11}(\lambda)$ выбираем в качестве ведущего (если старший коэффициент этого многочлена не равен единице, то нужно разделить на него многочлен). Если среди диагональных элементов есть элемент, например $a'_{ii}(\lambda)$, который не делится на ведущий элемент, степень ведущего элемента можно понизить. Для этого прибавляем i-й столбец к ведущему (первому) столбцу, а затем переходим к п. 2 алгоритма приведения λ-матрицы к диагональному виду.

Если все диагональные элементы делятся на $a'_{11}(\lambda)$, то, исключив первую строку и первый столбец, следует продолжить преобразования с оставшейся частью диагональной матрицы. Преобразования заканчиваются, если в оставшейся диагональной матрице остался один ненулевой элемент.

3. Алгоритм приведения λ-матрицы к нормальному диагональному виду отличается от соответствующего алгоритма приведения числовой матрицы к простейшему виду выбором ведущего элемента. Для λ-матрицы необходимо, чтобы ведущий элемент оказался делителем всех элементов ведущей строки и ведущего столбца (либо всех диагональных элементов, если λ-матрица диагональная). Для этого метод Гаусса дополняется приемами понижения степени ведущего элемента. Действительно, понижая степень многочлена, мы обязательно получим многочлен, на который делятся другие. В крайнем случае получим многочлен нулевой степени (отличную от нуля постоянную величину), на который делятся все многочлены.

4. Для λ-матриц, как и для числовых, преобразования, обратные к элементарным, являются элементарными.

Пример 2. Приведите следующие λ-матрицы к нормальному диагональному виду:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2-\lambda \\ \lambda^2+\lambda & -\lambda+1 \end{pmatrix}, \quad B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2+2\lambda+4 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица $A(\lambda)$.

Приводим вначале матрицу $A(\lambda)$ к диагональному виду (см. пример 1):

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2-\lambda\\ \lambda^2+\lambda & -\lambda+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & -\lambda^3+1\end{pmatrix}.$$

Полученный диагональный вид не является нормальным, так как двучлен $-\lambda^3+1$ не делится на λ. Продолжаем преобразования согласно п. 2 замечания. Прибавляем к первому столбцу второй. Затем согласно п. 2 алгоритма приведения λ-матрицы к диагональному виду разделим многочлен $-\lambda^3+1$ на λ:

$$-\lambda^3+1=(-\lambda^2)\lambda+1$$

и получим частное $p(\lambda)=-\lambda^2$.

Прибавляем ко второй строке первую, умноженную на $-p(\lambda)=\lambda^2$:

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2-\lambda\\ \lambda^2+\lambda & -\lambda+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ -\lambda^3+1 & -\lambda^3+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & -\lambda^3+1\end{pmatrix}.$$

Теперь ведущий элемент равен единице. Поэтому меняем местами первую и вторую строки, а затем ко второй строке прибавляем первую, умноженную на $-\lambda$:

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2-\lambda\\ \lambda^2+\lambda & -\lambda+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & -\lambda^3+1\end{pmatrix}\to$$
$$\to\begin{pmatrix}1 & -\lambda^3+1\\ \lambda & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -\lambda^3+1\\ 0 & \lambda^4-\lambda\end{pmatrix}.$$

Прибавляя ко второму столбцу первый, умноженный на λ^3-1, получаем

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2-\lambda\\ \lambda^2+\lambda & -\lambda+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -\lambda^3+1\\ 0 & \lambda^4-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^4-\lambda\end{pmatrix}.$$

Матрица $A(\lambda)$ приведена к нормальному диагональному виду $\Lambda(\lambda)$, где

$$\Lambda(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^4-\lambda\end{pmatrix}.$$

Матрицы $B(\lambda)$ и $C(\lambda)$ в примере 1 приведены к диагональному виду, который является нормальным.

Задачи для самостоятельной работы

Приведите матрицы к нормальному диагональному виду с помощью элементарных преобразований.

2.1. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. **2.2.** $\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \lambda+1 \\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{pmatrix}$. **2.3.** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+5 \end{pmatrix}$.

2.4. $\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & 1 \\ 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$. **2.5.** $\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \end{pmatrix}$.

2.6. $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2-\lambda & \lambda^3+4\lambda^2-3\lambda \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda & 3\lambda^2+3\lambda \end{pmatrix}$.

2.7. $\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$. **2.8.** $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$.

2.9. $\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$.

§ 3. Инвариантные множители многочленной матрицы

1. Основные понятия

Пусть $A(\lambda)$ — это λ-матрица n-го порядка. Любой минор этой матрицы представляет собой многочлен переменной λ. Напомним, что рангом λ-матрицы называется максимальный порядок минора, не равного тождественно нулю, т. е. $\operatorname{rg} A(\lambda) = r$, если в матрице $A(\lambda)$ имеется отличный от нуля минор r-го порядка, а все миноры большего порядка тождественно равны нулю или не существуют.

Обозначим через $d_k(\lambda)$ наибольший общий делитель миноров k-го порядка λ-матрицы $A(\lambda)$. Для определенности будем считать, что старшие коэффициенты многочленов $d_k(\lambda)$ равны единице. Заметим, что в совокупности многочленов $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots d_r(\lambda)$, где $r = \operatorname{rg} A(\lambda)$, каждый последующий многочлен делится на предыдущий.

В самом деле, разложив любой минор k-го порядка по строке, получим сумму миноров $(k-1)$-го порядка, взятых с некоторыми коэффициентами. Так как каждый минор $(k-1)$-го порядка делится на $d_{k-1}(\lambda)$, вся сумма тоже будет делиться на $d_{k-1}(\lambda)$. Следовательно, любой минор k-го порядка делится на $d_{k-1}(\lambda)$. Поэтому и наибольший общий делитель $d_k(\lambda)$ также делится на $d_{k-1}(\lambda)$. Многочлены $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_r(\lambda)$ будем называть делителями миноров

матрицы $A(\lambda)$. Многочлены

$$e_1(\lambda) = d_1(\lambda), \quad e_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}, \quad \ldots, \quad e_r(\lambda) = \frac{d_r(\lambda)}{d_{r-1}(\lambda)}$$

называются *инвариантными множителями* λ-матрицы $A(\lambda)$. Здесь r — ранг λ-матрицы $A(\lambda)$.

Теорема (об инвариантных множителях)**.** *При элементарных преобразованиях λ-матрицы ее инвариантные множители не изменяются.*

Достаточно показать, что при элементарных преобразованиях не изменяются многочлены $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_r(\lambda)$. В самом деле, при одном элементарном преобразовании матрицы $A(\lambda)$ любой ее минор k-го порядка либо не изменится, либо поменяет знак на противоположный, либо совпадет с другим минором k-го порядка, либо окажется равным сумме двух миноров k-го порядка (взятых с некоторыми множителями). Ни одно из этих действий не может изменить наибольшего общего делителя $d_k(\lambda)$. Отсюда следует, что и отношения наибольших общих делителей не изменяются.

Следствие 1. *Ранг λ-матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях столбцов* (*строк*).

Следствие 2. *Инвариантные множители λ-матрицы полностью определяют ее нормальный диагональный вид, т. е. многочлены $e_k(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, r$, стоящие на диагонали в нормальном диагональном виде λ-матрицы, совпадают с инвариантными множителями λ-матрицы.*

В самом деле, все миноры первого порядка матрицы в нормальном диагональном виде λ-матрицы, т. е. элементы этой матрицы, делятся на $e_1(\lambda)$. Поэтому $d_1(\lambda) = e_1(\lambda)$. Все миноры второго порядка указанной матрицы делятся на произведение $e_1(\lambda)e_2(\lambda)$. Это следует из свойства многочленов $e_k(\lambda)$: каждый многочлен $e_k(\lambda)$ делится без остатка на многочлен $e_{k-1}(\lambda)$, $2 \leqslant k \leqslant n$. Следовательно, $d_2(\lambda) = e_1(\lambda)e_2(\lambda)$ и т. д. Рассматривая миноры r-го порядка нормального диагонального вида λ-матрицы, получаем, что $d_r(\lambda) = e_1(\lambda)e_2(\lambda)\ldots e_r(\lambda)$. Отсюда следуют равенства

$$e_1(\lambda) = d_1(\lambda), \quad e_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}, \quad \ldots, \quad e_r(\lambda) = \frac{d_r(\lambda)}{d_{r-1}(\lambda)}.$$

Все эквивалентные λ-матрицы имеют одни и те же инвариантные множители, которые, как мы только что убедились, полностью определяют нормальный диагональный вид λ-матрицы.

Следствие 3. *Эквивалентные λ-матрицы приводятся к одному и тому же нормальному диагональному виду.*

Отметим следующую связь между характеристическим многочленом $\det(A-\lambda E)$ матрицы A и инвариантными множителями матрицы $A-\lambda E$.

Характеристический многочлен квадратной матрицы n-го порядка A может быть представлен в виде произведения инвариантных множителей характеристической матрицы $(A-\lambda E)$:

$$\det(A-\lambda E) = (-1)^n e_1(\lambda)e_2(\lambda)\ldots e_n(\lambda).$$

В самом деле, характеристическая матрица имеет нормальный диагональный вид

$$\operatorname{diag}(e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_n(\lambda)),$$

так как $\operatorname{rg}(A-\lambda E)=n$. Наибольший общий делитель $d_n(\lambda)$ (старший коэффициент которого равен единице) единственного минора n-го порядка матрицы $A-\lambda E$ отличается от определителя $\det(A-\lambda E)$ только множителем $(-1)^n$, т. е. характеристический многочлен имеет вид $\det(A-\lambda E)=(-1)^n d_n(\lambda)$. Подставляя $d_n(\lambda)=e_1(\lambda)e_2(\lambda)\ldots e_n(\lambda)$, получаем искомое равенство

$$\det(A-\lambda E) = (-1)^n e_1(\lambda)e_2(\lambda)\ldots e_n(\lambda).$$

2. Способы нахождения инвариантных множителей многочленных матриц

Способ 1. Привести λ-матрицу к нормальному диагональному виду $\operatorname{diag}(e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_r(\lambda), 0, \ldots, 0)$. Ненулевые многочлены, стоящие на главной диагонали, являются искомыми инвариантными множителями.

Способ 2. 1. Найти наибольший общий делитель $d_1(\lambda)$ миноров 1-го порядка λ-матрицы (т. е. ее элементов), затем найти наибольший общий делитель $d_2(\lambda)$ миноров 2-го порядка и т. д. Процесс завершить, если все миноры некоторого порядка $r+1$ либо тождественно равны нулю, либо не существуют.

2. Найти инвариантные множители по формулам

$$e_1(\lambda)=d_1(\lambda),\quad e_2(\lambda)=\frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)},\quad \ldots,\quad e_r(\lambda)=\frac{d_r(\lambda)}{d_{r-1}(\lambda)}.$$

Пример 1. Найдите инвариантные множители многочленной матрицы

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0\\ 0 & \lambda-1\end{pmatrix}.$$

Решение. Способ 1. Матрица $A(\lambda)$ имеет нормальный диагональный вид. Поэтому $e_1(\lambda)=\lambda-1$, $e_2(\lambda)=\lambda-1$.

Способ 2. 1. Выпишем ненулевые миноры первого порядка матрицы $A(\lambda)$. Они все равны $\lambda-1$. Следовательно, их наибольший общий делитель $d_1(\lambda)=\lambda-1$. Минор второго порядка этой матрицы единственный и равен $(\lambda-1)^2$. Следовательно, $d_2(\lambda)=(\lambda-1)^2$.

2. По определению находим инвариантные множители:

$$e_1(\lambda)=d_1(\lambda)=\lambda-1,\quad e_2(\lambda)=\frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}=\lambda-1.$$

Пример 2. Найдите инвариантные множители многочленной матрицы

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0\\ 0 & \lambda-2\end{pmatrix}.$$

Решение. Диагональный вид матрицы $A(\lambda)$ не является нормальным, поскольку двучлен $\lambda-2$ не делится без остатка на двучлен $\lambda-1$. Поэтому непосредственно первый способ здесь не применим.

Способ 2. 1. Выпишем ненулевые миноры первого порядка: $\lambda-1$, $\lambda-2$. Наибольший общий делитель этих многочленов равен единице, т. е. $d_1(\lambda)=1$. Матрица $A(\lambda)$ имеет единственный минор второго порядка, поэтому $d_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)$.

2. Находим инвариантные множители:

$$e_1(\lambda)=d_1(\lambda)=1,\quad e_2(\lambda)=\frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}=(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Пример 3. Найдите инвариантные множители многочленной матрицы

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Решение. Приведем матрицу $A(\lambda)$ к нормальному виду (детали этого процесса можно найти в примере 1 в предыдущем параграфе) первым способом:

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \lambda & 0\\ \lambda & 0 & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^2 & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\lambda^2\\ 0 & \lambda & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{pmatrix}=\Lambda(\lambda).$$

Матрица $\Lambda(\lambda)$ имеет нормальный диагональный вид. Поэтому $e_1(\lambda)=1$, $e_2(\lambda)=1$, $e_3(\lambda)=\lambda^3$.

Задачи для самостоятельной работы

Приведите матрицы к нормальному диагональному виду при помощи делителей миноров матрицы.

3.1. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 1 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 1 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$.

3.2. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 1 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 1 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-3) \end{pmatrix}$. **3.3.** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

3.4. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. **3.5.** $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5+\lambda \end{pmatrix}$.

3.6. $\begin{pmatrix} 2\lambda^2-12\lambda+16 & 2-\lambda & 2\lambda^2-12\lambda+17 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ \lambda^2-6\lambda+7 & 2-\lambda & \lambda^2-6\lambda+8 \end{pmatrix}$.

Ответы к задачам главы 4

1.1. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \lambda+1 & -\lambda \end{pmatrix}$. **1.2.** $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda+1 \\ -\lambda-4 & \lambda^2+3\lambda \end{pmatrix}$. **2.1.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$.

2.2. $\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda^3+\lambda^2-2\lambda-2 \end{pmatrix}$. **2.3.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2+5\lambda \end{pmatrix}$. **2.4.** $\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & (\lambda+1)(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$.

2.5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2.6.** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2 \end{pmatrix}$. **2.7.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^3 \end{pmatrix}$.

2.8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+2\lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$. **2.9.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$.

3.1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$. **3.2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \end{pmatrix}$.

3.3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}$. **3.4.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$. **3.5.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(\lambda) \end{pmatrix}$,

$p(\lambda)=\lambda^5+5\lambda^4+4\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+1$. **3.6.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-3) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-3)^2 \end{pmatrix}$.

Глава 5

Подобие числовых матриц

§ 1. Свойства подобных матриц. Критерий подобия

1. Подобие матриц

Определение. Квадратные матрицы n-го порядка A и B называются *подобными*, если существует такая невырожденная матрица S, $(\det S \neq 0)$, что $B = S^{-1}AS$. Преобразование матрицы A по формуле $S^{-1}AS$ называется преобразованием подобия, а матрица S — преобразующей.

Свойства подобных матриц

1. Каждая квадратная матрица подобна самой себе: $A = E^{-1}AE$.

2. Если матрица B подобна матрице A, то и A подобна B:

$$B = S^{-1}AS \to A = SBS^{-1} = (S^{-1})^{-1}BS^{-1} = T^{-1}BT, \quad T = S^{-1}.$$

3. Если матрица A подобна матрице B, а матрица B подобна матрице C, то A подобна C:

$$A = S^{-1}BS, \quad B = T^{-1}CT \to A = S^{-1}T^{-1}CTS = (TS)^{-1}C(TS) = P^{-1}CP,$$

где $P = TS$.

4. Подобие является частным случаем эквивалентных преобразований.

5. В случае ортогональности преобразующей матрицы подобные матрицы являются конгруэнтными.

6. Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.

Поясним свойства 4, 5. Напомним, что эквивалентные матрицы связаны соотношением

$$B = SAT,$$

где S и T — невырожденные матрицы. Если $T = S^{-1}$, то получаем преобразование подобия $B = SAS^{-1} \leftrightarrow A = S^{-1}BS$. Если же матрица S ортогональная $(S^{-1} = S^T)$, то подобные матрицы, связанные равенством $B = S^{-1}AS$, оказываются конгруэнтными, так как $B = S^TAS$ (определение конгруэнтности матриц A и B).

Покажем справедливость свойства 6. В самом деле, пусть матрицы A и B подобны, т. е. существует такая матрица S, что $B = S^{-1}AS$. Преобразуем характеристический многочлен матрицы B (по теореме об определителе произведения матриц):

$$\det(B - \lambda E) = \det(S^{-1}AS - S^{-1}\lambda ES = \det(S^{-1}(A - \lambda E)S) =$$

$$= \det(S^{-1})\det(A - \lambda E)\det S = \frac{1}{\det S}\det(A - \lambda E)\det S = \det(A - \lambda E).$$

Сформулируем теперь важный критерий подобия матриц.

2. Критерий подобия матриц

Для того чтобы матрицы A и B были подобны, необходимо и достаточно, чтобы их характеристические матрицы $A - \lambda E$ и $B - \lambda E$ имели одинаковые инвариантные множители.

Подобные матрицы возникают во многих алгебраических задачах при замене переменных. Например, при решении системы уравнений

$$Ax = b$$

с невырожденной квадратной матрицей A можно сделать линейную замену неизвестных: ввести столбец новых неизвестных y $(x = Sy)$ и новый столбец свободных членов c $(b = Sc)$, для которых система уравнений будет выглядеть так:

$$ASy = Sc, \quad \text{или} \quad S^{-1}ASy = c.$$

Матрица $S^{-1}AS = \Lambda$ полученной системы подобна матрице исходной системы. Например, если в результате преобразования подобия полученная матрица Λ имеет диагональный вид:

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

то решение системы $\Lambda y = c$ находится просто:

$$y_i = \frac{c_i}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

после чего нетрудно вычислить и решение исходной системы

$$x = Sy.$$

§ 2. Приведение матрицы к диагональному виду при помощи преобразования подобия

Рассмотрим задачу приведения квадратной матрицы A к диагональному виду $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ при помощи преобразования подобия.

Теорема (о приведении матрицы к диагональному виду)**.** *Для того чтобы квадратная матрица n-го порядка A приводилась к диагональному виду* $\Lambda = S^{-1}AS$*, необходимо и достаточно, чтобы она имела n линейно независимых собственных векторов.*

Действительно, запишем равенство $\Lambda = S^{-1}AS$ в виде $S\Lambda = AS$, т. е.

$$S\Lambda = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} = AS,$$

или $(s_1 \dots s_n)\Lambda = A(s_1 \dots s_n)$, где s_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — столбцы матрицы S. Отсюда получаем систему уравнений для столбцов s_i матрицы S: $As_i = \lambda_i s_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Поэтому если матрицу A можно привести преобразованием подобия к диагональному виду $\Lambda = S^{-1}AS$, то для столбцов s_i матрицы S выполняются равенства $As_i = \lambda_i s_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, т. е. столбцы s_i являются собственными векторами матрицы A, причем они линейно независимы, так как матрица S невырожденная. Необходимость доказана. Пусть, наоборот, матрица A имеет n линейно независимых собственных векторов s_i, удовлетворяющих равенствам $As_i = \lambda_i s_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда, составив из них матрицу S, получим для нее равенство $S\Lambda = AS$. Учитывая, что матрица S невырожденная (из-за линейной независимости ее столбцов), получаем $\Lambda = S^{-1}AS$, т. е. матрица A подобна диагональной. Достаточность доказана.

Следствие 1. *Если матрица имеет простой спектр* (*т. е. все ее собственные числа попарно различны*)*, то она приводится к диагональному виду.*

Действительно, в этом случае, поскольку все собственные числа попарно различны, по свойству собственных векторов все собственные векторы будут линейно независимы.

Следствие 2. *Если матрица A приводится к диагональному виду*

$$\Lambda = S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

то числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (*среди которых могут быть равные*) *являются собственными значениями матрицы A, а столбцы* $s_1, \dots, s_n$ *преобразующей матрицы* $S = (s_1 \dots s_n)$ *являются соответствующими собственными векторами матрицы A.*

Следствие 3. *Если $s_1, s_2, \ldots, s_n$ — линейно независимые собственные векторы матрицы A, соответствующие ее собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (среди которых могут быть равные), то матрица A приводится к диагональному виду*

$$\Lambda = S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

при помощи преобразующей матрицы $S = (s_1 \ldots s_n)$, составленной из собственных векторов.

Чтобы привести квадратную матрицу A (n-го порядка) к диагональному виду при помощи преобразования подобия $\Lambda = S^{-1}AS$ и найти преобразующую матрицу S, нужно выполнить следующие действия.

1. Найти n линейно независимых собственных векторов $s_1, s_2, \ldots, s_n$ матрицы A.

2. Из собственных векторов $s_1, s_2, \ldots, s_n$ составить преобразующую матрицу $S = (s_1 \ldots s_n)$.

3. По собственным значениям матрицы A составить матрицу $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ — искомый диагональный вид матрицы A.

Иначе матрицу Λ можно найти, выполняя преобразование подобия $\Lambda = S^{-1}AS$.

Пример 1. Приведите данные матрицы к диагональному виду и найдите соответствующие преобразующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A.

1. Составляем характеристический многочлен матрицы:

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 14.$$

Решаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 7.$$

Для корня $\lambda_1 = 2$ составляем однородную систему уравнений:

$$(A - \lambda_1 E)x = 0 : \begin{pmatrix} 1-2 & -2 \\ 3 & 8-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя матрицу системы к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве базисной переменной берем переменную x_1, свободная переменная — x_2. Выражаем базисную переменную x_1 через свободную: $x_1 = -2x_2$. Полагая $x_2 = 1$, получаем решение $s_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для корня $\lambda_2 = 7$ составляем однородную систему уравнений:

$$(A - \lambda_2 E)x = 0\colon \begin{pmatrix} 1-7 & -2 \\ 3 & 8-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя матрицу системы к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выражаем базисную переменную x_1 через свободную: $x_1 = -\frac{1}{3}x_2$. Полагая $x_2 = 3$, получаем решение $s_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Столбцы s_1, s_2 линейно независимы.

2. Составляем из собственных векторов преобразующую матрицу:

$$S = (s_1 s_2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Находим диагональный вид Λ матрицы A, выполняя преобразование подобия:

$$\begin{aligned} \Lambda = S^{-1}AS &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -7 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

На главной диагонали матрицы A стоят собственные значения матрицы A.

Матрица B.

1. Составляем характеристический многочлен матрицы:

$$\Delta_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5.$$

Решаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0, \quad \lambda_1 = 1 + 2i, \quad \lambda_2 = 1 - 2i.$$

Для корня $\lambda_1 = 1+2i$ составляем однородную систему уравнений:

$(B-\lambda_1 E)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1-(1+2i) & -4 \\ 1 & 1-(1+2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя матрицу системы к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -2i & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выражаем базисную переменную x_1 через свободную: $x_1 = 2ix_2$. Полагая $x_2 = 1$, получаем решение $s_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для корня $\lambda_2 = 1-2i$ составляем однородную систему уравнений:

$(B-\lambda_2 E)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1-(1-2i) & -4 \\ 1 & 1-(1-2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2i & -4 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя матрицу системы к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix} 2i & -4 \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 2i & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выражаем базисную переменную x_1 через свободную: $x_1 = -2ix_2$. Полагая $x_2 = 1$, получаем решение $s_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Столбцы s_1, s_2 линейно независимы. Составляем из собственных векторов преобразующую матрицу:

$$S = (s_1 s_2) = \begin{pmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполняем преобразование подобия:

$$\begin{aligned} \Lambda = S^{-1}BS &= \begin{pmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{4i}\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -1 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4+2i & -4-2i \\ 1+2i & 1-2i \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{4i}\begin{pmatrix} -8+4i & 0 \\ 0 & 8+4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

На главной диагонали матрицы Λ стоят собственные значения матрицы B.

Матрица C.

Составляем характеристический многочлен матрицы:

$$\Delta_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2.$$

Решаем характеристическое уравнение:

$$(\lambda-2)^2 = 0 \to \lambda = 2.$$

Для собственного числа $\lambda = 2$ составляем однородную систему уравнений:

$$(C - \lambda_2 E)x = 0 : \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя матрицу системы к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выражаем базисную переменную x_1 через свободную: $x_1 = -2x_2$. Полагая $x_2 = 1$, получаем решение $s_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Все собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda = 2$, имеют вид $s = \alpha s_1$, где α — отличная от нуля произвольная постоянная. Как видим, матрица C второго порядка имеет только один линейно независимый собственный вектор, поэтому ее нельзя привести к диагональному виду при помощи преобразования подобия.

Пример 2. Приведите матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

к диагональному виду и найдите соответствующую преобразующую матрицу.

Найдите выражение для степени A^m с натуральным показателем $m \in \mathbb{N}$.

Решение. 1. Составляем характеристический многочлен матрицы:

$$\Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2.$$

Решаем характеристическое уравнение:

$$-\lambda^3+3\lambda^2=0\to\lambda_1=0,\quad \lambda_2=3.$$

Для корня $\lambda_1=0$ составляем однородную систему уравнений:

$$(A-\lambda_1 E)x=Ax=0\colon \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя матрицу системы к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Ранг r матрицы системы равен единице, число неизвестных $n=3$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из двух $(n-r=2)$ решений. В качестве базисной переменной берем переменную x_1, свободные переменные — x_2, x_3. Выражаем базисную переменную x_1 через свободные: $x_1=-x_2-x_3$. Полагая $x_2=-1$, $x_3=0$, получаем решение $s_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. Полагая $x_2=0$, $x_3=-1$, получаем второе решение $s_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Для корня $\lambda_2=3$ составляем однородную систему уравнений:

$$(A-\lambda_2 E)x=0\colon \begin{pmatrix}1-3&1&1\\1&1-3&1\\1&1&1-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя матрицу системы к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Ранг r матрицы системы равен двум, число неизвестных $n=3$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из $n-r=1$ реше-

ния. В качестве базисных переменных берем переменные x_1, x_2, свободная переменная — x_3. Выражаем базисные переменные x_1, x_2 через свободную: $x_1 = x_3$, $x_2 = x_3$. Полагая $x_3 = 1$, получаем решение $s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Составляем из вычисленных собственных векторов преобразующую матрицу $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, при помощи которой матрица A приводится к диагональному виду Λ:

$$\Lambda = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем m-ю степень матрицы A, учитывая, что $A = S\Lambda S^{-1}$:

$$A^m = \underbrace{(S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1})\ldots(S\Lambda S^{-1})}_{m} = S\Lambda^m S^{-1}.$$

Нетрудно получить степень Λ^m диагональной матрицы, так как произведение диагональных матриц является диагональной матрицей:

$$\Lambda^m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^m \end{pmatrix},$$

$$A^m = S\Lambda^m S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3^m \\ 0 & 0 & 3^m \\ 0 & 0 & 3^m \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3^m & 3^m & 3^m \\ 3^m & 3^m & 3^m \\ 3^m & 3^m & 3^m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3^{m-1} & 3^{m-1} & 3^{m-1} \\ 3^{m-1} & 3^{m-1} & 3^{m-1} \\ 3^{m-1} & 3^{m-1} & 3^{m-1} \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Выясните, являются ли подобными между собой следующие матрицы.

2.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$.

2.2. $A=\begin{pmatrix}6 & 6 & -15\\ 1 & 5 & -5\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}37 & -20 & -4\\ 34 & -17 & -4\\ 119 & -70 & -11\end{pmatrix}$.

2.3. $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & -15\\ 1 & 3 & -5\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-13 & -70 & 119\\ -4 & -19 & 34\\ -4 & -20 & 35\end{pmatrix}$.

2.4. Методом приведения матрицы к диагональному виду вычислите A^{100}, где $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

2.5. Докажите, что матрица A из предыдущей задачи удовлетворяет уравнению

$$X^n - 4^{n-1}X = 0$$

при любом натуральном n.

Ответы к задачам главы 5

2.1. Подобны. **2.2.** Подобны.

2.3. A и C подобны между собой, но не подобны матрице B.

2.4. $A^{100}=4^{99}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

2.5. Предварительно приведя матрицу A к диагональному виду, покажите, что $A^n=4^{n-1}A$.

Глава 6

Элементарные делители многочленной матрицы (λ-матрицы)

§1. Основные понятия и теоремы

1. Понятие об элементарных делителях многочленных матриц

Пусть $A(\lambda)$ — многочленная квадратная матрица n-го порядка. Как известно, она приводится к нормальному диагональному виду

$$\operatorname{diag}(e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_r(\lambda), 0, \ldots, 0),$$

где $e_i(\lambda)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, — инвариантные множители матрицы $A(\lambda)$, $r = \operatorname{rg} A(\lambda)$.

Разложим каждый из многочленов $e_i(\lambda)$ на линейные множители:

$$\begin{aligned}
e_1(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{a_1}(\lambda-\lambda_2)^{a_2}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{a_k},\\
e_2(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{b_1}(\lambda-\lambda_2)^{b_2}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{b_k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e_{n-1}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{l_k},\\
e_n(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}.
\end{aligned}$$

Показатели степеней удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant a_i \leqslant b_i \leqslant \ldots \leqslant l_i \leqslant m_i, \quad i = 1, \ldots, k,$$

так как каждый последующий инвариантный множитель делится на предыдущий. Некоторые из множителей $(\lambda-\lambda_i)^j$ могут иметь нулевую степень, т. е. быть равными единице. Исключение составляют множители $(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$, для которых все показатели степеней не меньше единицы ($m_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, k$).

Каждый отличный от единицы многочлен вида $(\lambda-\lambda_i)^j$, указанный в разложениях инвариантных множителей, называется *элементарным делителем матрицы* $A(\lambda)$.

Можно составить таблицу элементарных делителей матрицы $A(\lambda)$:

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1},\ (\lambda-\lambda_1)^{l_1},\ \ldots,\ (\lambda-\lambda_1)^{b_1},\ (\lambda-\lambda_1)^{a_1},$$
$$(\lambda-\lambda_2)^{m_2},\ (\lambda-\lambda_2)^{l_2},\ \ldots,\ (\lambda-\lambda_2)^{b_2},\ (\lambda-\lambda_2)^{a_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\lambda-\lambda_k)^{m_k},\ (\lambda-\lambda_k)^{l_k},\ \ldots,\ (\lambda-\lambda_k)^{b_k},\ (\lambda-\lambda_k)^{a_k}.$$

2. Составление таблицы элементарных делителей по таблице инвариантных множителей

Для составления приведенной выше таблицы элементарных делителей по таблице инвариантных множителей нужно:

а) в первый столбец таблицы элементарных делителей записать элементарные делители последнего инвариантного множителя $e_r(\lambda)$ из таблицы инвариантных множителей;

б) во второй столбец таблицы элементарных делителей записать элементарные делители предпоследнего инвариантного множителя $e_{r-1}(\lambda)$ из таблицы инвариантных множителей так, чтобы в i-й строке были степени одного и того же двучлена $\lambda-\lambda_i$, и т. д.; в последний столбец записать элементарные делители первого инвариантного множителя $e_1(\lambda)$ из таблицы инвариантных множителей так, чтобы в i-й строке были степени одного и того же двучлена $\lambda-\lambda_i$.

Элементы, тождественно равные единице, не являются элементарными делителями и в таблицу элементарных делителей не заносятся. Поэтому в каждой строке таблицы может быть разное количество элементарных делителей, точнее, в каждом последующем столбце количество делителей не больше, чем в предыдущем. В каждой строке таблицы элементарных делителей стоят делители $(\lambda-\lambda_i)^j$, относящиеся к одному собственному значению λ_i. Поскольку собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ могут быть упорядочены по-разному, строки таблицы элементарных делителей можно переставлять. Это не будет в дальнейшем иметь существенного значения.

3. Составление таблицы инвариантных множителей по таблице элементарных делителей

По таблице элементарных делителей можно восстановить таблицу инвариантных множителей. Для этого нужно:

а) перемножая элементарные делители первого столбца таблицы элементарных делителей, получить последний инвариантный множитель $e_r(\lambda)$ в таблице инвариантных множителей;

б) перемножая элементарные делители второго столбца таблицы элементарных делителей, получить предпоследний инвариантный множитель $e_{r-1}(\lambda)$ в таблице инвариантных множителей и т. д.

Исчерпав столбцы таблицы элементарных делителей, дописываем недостающие инвариантные множители, полагая их равными единице (количество инвариантных множителей равно рангу матрицы).

Заметим, что, составляя таблицу инвариантных множителей по таблице элементарных делителей, можно переставлять строки таблицы элементарных делителей, так как это не приведет к изменению таблицы инвариантных множителей. Столбцы таблицы элементарных делителей переставлять нельзя.

Задачи для самостоятельной работы

Найдите элементарные делители следующих λ-матриц.

1.1. $\begin{pmatrix} \lambda^3+2 & \lambda^3+1 \\ 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda+3 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda+2 \end{pmatrix}$.

1.2. $\begin{pmatrix} \lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 2\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-1 & 2\lambda^2-2\lambda \end{pmatrix}$.

1.3. $\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & 2\lambda+1 & \lambda^2+1 \\ \lambda^2+4\lambda+4 & 2\lambda+3 & \lambda^2+4\lambda+3 \\ \lambda^2-4\lambda+3 & 2\lambda-1 & \lambda^2-4\lambda+2 \end{pmatrix}$.

1.4. $\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2-5 \end{pmatrix}$.

Ответы к задачам главы 6

1.1. $\lambda+1$, $(\lambda-1)^2$. **1.2.** $\lambda+1$, $\lambda-1$, $\lambda-1$.

1.3. Элементарных делителей нет (матрица приводится к единичной матрице).

1.4. $\lambda+i$, $\lambda-i$, $\lambda+\sqrt{3}$, $\lambda-\sqrt{3}$.

Глава 7

Элементарные делители характеристической матрицы

§ 1. Основные понятия и теоремы

1. Определение элементарных делителей характеристической матрицы

Пусть A — числовая квадратная матрица n-го порядка. Характеристическая матрица $A - \lambda E$ приводится (элементарными преобразованиями) к нормальному диагональному виду

$$\operatorname{diag}(e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_r(\lambda)),$$

где $e_i(\lambda)$ — инвариантные множители матрицы $A - \lambda E$. Характеристический многочлен можно представить в виде

$$\Delta_A(\lambda) = (-1)^n e_1(\lambda) e_2(\lambda) \ldots e_n(\lambda).$$

Разложим каждый из многочленов $e_i(\lambda)$ на линейные множители:

$$\begin{aligned}
e_1(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{a_1} (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{a_k}, \\
e_2(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{b_1} (\lambda - \lambda_2)^{b_2} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{b_k}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e_{n-1}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{l_1} (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{l_k}, \\
e_n(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}.
\end{aligned}$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — различные собственные значения матрицы A; показатели степеней удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant a_i \leqslant b_i \leqslant \ldots \leqslant l_i \leqslant m_i$, $i = 1, \ldots, k$, так как каждый последующий инвариантный множитель делится на предыдущий. Некоторые из множителей $(\lambda - \lambda_i)^j$ могут иметь нулевую степень, т. е. быть равными единице. Исключение составляют множители $(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$, для которых все показатели степеней не меньше единицы ($m_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, k$).

Учитывая, что характеристический многочлен равен произведению инвариантных множителей (с коэффициентом $(-1)^n$):

$$\Delta_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{n_k} = \\ = (-1)^n e_1(\lambda)e_2(\lambda)\ldots e_n(\lambda),$$

получаем, что $a_i + b_i + \ldots + l_i + m_i = n_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ и $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, т. е. сумма степеней всех инвариантных множителей равна порядку квадратной матрицы A.

Каждый отличный от единицы многочлен вида $(\lambda - \lambda_i)^j$, указанный в разложениях инвариантных множителей, называется *элементарным делителем характеристической матрицы* $A - \lambda E$ (или просто *элементарным делителем матрицы* A).

Как отмечалось в предыдущей главе, можно составить таблицу элементарных делителей:

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1},\ (\lambda-\lambda_1)^{l_1},\ \ldots,\ (\lambda-\lambda_1)^{b_1},\ (\lambda-\lambda_1)^{a_1},$$
$$(\lambda-\lambda_2)^{m_2},\ (\lambda-\lambda_2)^{l_2},\ \ldots,\ (\lambda-\lambda_2)^{b_2},\ (\lambda-\lambda_2)^{a_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\lambda-\lambda_k)^{m_k},\ (\lambda-\lambda_k)^{l_k},\ \ldots,\ (\lambda-\lambda_k)^{b_k},\ (\lambda-\lambda_k)^{a_k}.$$

Напомним основные процедуры при составлении таблицы элементарных делителей. Для составления этой таблицы по таблице инвариантных множителей нужно:

а) в первый столбец таблицы элементарных делителей записать элементарные делители последнего инвариантного множителя $e_n(\lambda)$ из таблицы инвариантных множителей;

б) во второй столбец таблицы элементарных делителей записать элементарные делители предпоследнего инвариантного множителя $e_{n-1}(\lambda)$ из таблицы инвариантных множителей так, чтобы в i-й строке были степени одного и того же двучлена $\lambda - \lambda_i$, и т. д.; в последний столбец записать элементарные делители первого инвариантного множителя $e_1(\lambda)$ из таблицы инвариантных множителей так, чтобы в i-й строке были степени одного и того же двучлена $\lambda - \lambda_i$.

Элементы, тождественно равные единице, не являются элементарными делителями и в таблицу элементарных делителей не заносятся. Поэтому в каждой строке таблицы может быть разное количество элементарных делителей, точнее, в каждом последующем столбце количество делителей не больше, чем в предыдущем. В каждой строке таблицы элементарных делителей стоят делители $(\lambda - \lambda_i)^j$,

относящиеся к одному собственному значению λ_i. Поскольку собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ могут быть упорядочены по-разному, строки таблицы элементарных делителей можно переставлять. Это не будет в дальнейшем иметь существенного значения.

2. Составление таблицы инвариантных множителей характеристической матрицы

По таблице элементарных делителей можно восстановить таблицу инвариантных множителей. Для этого нужно:

а) перемножая элементарные делители первого столбца таблицы элементарных делителей, получить последний инвариантный множитель $e_n(\lambda)$ в таблице инвариантных множителей;

б) перемножая элементарные делители второго столбца таблицы элементарных делителей, получить предпоследний инвариантный множитель $e_{n-1}(\lambda)$ в таблице инвариантных множителей и т. д.

Исчерпав столбцы таблицы элементарных делителей, дописываем недостающие инвариантные множители, полагая их равными единице (количество инвариантных множителей равно сумме степеней всех элементарных делителей, т. е. порядку матрицы).

Заметим, что, составляя таблицу инвариантных множителей по таблице элементарных делителей, можно переставлять строки таблицы элементарных делителей, так как это не приведет к изменению таблицы инвариантных множителей. Столбцы таблицы элементарных делителей переставлять нельзя.

Отметим, что эквивалентные характеристические матрицы $A - \lambda E$ и $B - \lambda E$ имеют одинаковые инвариантные множители. Значит, они имеют и одинаковые элементарные делители. Следовательно, необходимым и достаточным условием подобия числовых матриц является совпадение их элементарных делителей.

Задачи для самостоятельной работы

Найдите элементарные делители следующих матриц. По элементарным делителям вычислите инвариантные множители e_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, характеристической матрицы.

1.1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **1.2**. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. **1.3**. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4. $\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix}$. **1.5.** $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответы к задачам главы 7

1.1. $\lambda-1$, $\lambda-3$, $e_1=1$, $e_2=(\lambda-1)(\lambda-3)$.
1.2. $(\lambda-3)^2$, $e_1=1$, $e_2=(\lambda-3)^2$.
1.3. $(\lambda-2)^2$, $\lambda-2$, $e_1=1$, $e_2=\lambda-2$, $e_3=(\lambda-2)^2$.
1.4. λ^2, λ, $e_1=1$, $e_2=\lambda$, $e_3=\lambda^2$.
1.5. λ^2, $\lambda-1$, $e_1=1$, $e_2=1$, $e_3=\lambda^2(\lambda-1)$.

Глава 8

Жордановы клетки и матрицы

§ 1. Основные понятия и теоремы

1. Жорданова клетка и ее элементарный делитель

Определение. Квадратную матрицу (r-го порядка) вида

$$J_r(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

называют *жордановой клеткой* r-го порядка, соответствующей собственному значению λ_0. Все элементы на главной диагонали этой верхней треугольной матрицы равны λ_0, элементы над главной диагональю равны единице, а остальные элементы равны нулю.

Найдем элементарные делители жордановой клетки. Для этого составим характеристическую матрицу

$$J_r(\lambda_0) - \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda_0 - \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 - \lambda \end{pmatrix}$$

и найдем наибольшие общие делители $d_i(\lambda)$ миноров i-го порядка. Среди ненулевых миноров первого порядка есть минор, равный единице. Рассматривая его как многочлен нулевой степени, заключаем, что наибольший общий делитель миноров первого порядка должен быть также многочленом нулевой степени, т. е. $d_1(\lambda) = 1$. Среди миноров второго порядка также имеется минор, равный единице (минор, образованный элементами, стоящими на пересечении первой и второй строк и второго и третьего столбца), следовательно, $d_2(\lambda) = 1$ и т. д. Минор $(r-1)$-го порядка, образованный элементами, стоящими на пересечении первых $r-1$ строк и столбцов со второго по последний, имеет нижний треугольный вид с единичными элементами на главной диагонали, т. е. этот минор также

равен единице. Поэтому $d_{r-1}(\lambda)=1$. Минор r-го порядка, т. е. определитель характеристической матрицы, равен $(\lambda_0-\lambda)^r$, поэтому $d_r(\lambda)=(\lambda_0-\lambda)^r$. По формулам, выражающим инвариантные множители через $d_i(\lambda)$, находим инвариантные множители:

$$e_1(\lambda)=e_2(\lambda)=\ldots=e_{r-1}(\lambda)=1,\quad e_r(\lambda)=(\lambda_0-\lambda)^r.$$

Следовательно, данная жорданова клетка имеет всего один элементарный делитель $(\lambda_0-\lambda)^r$. Поэтому характеристическая матрица приводится к нормальному диагональному виду:

$$J_r(\lambda_0)-\lambda E\to\operatorname{diag}(1,\ldots,1,(\lambda-\lambda_0)^r).$$

Заметим, что характеристический многочлен $\Delta(J_r(\lambda_0))=(\lambda-\lambda_0)^r$ имеет единственный корень λ_0 кратности r, т. е. λ_0 — собственное значение матрицы $J_r(\lambda_0)$.

Рассмотрим теперь блочно-диагональную матрицу

$$J=\operatorname{diag}(J_{r_1}(\lambda_1),J_{r_2}(\lambda_2))=\begin{pmatrix}J_{r_1}(\lambda_1) & 0\\ 0 & J_{r_2}(\lambda_2)\end{pmatrix},$$

где $J_{r_1}(\lambda_1)$ и $J_{r_2}(\lambda_2)$ — жордановы клетки, а 0 — нулевые матрицы соответствующих размеров. Для определенности считаем, что $r_1\geqslant r_2$. Характеристическая матрица $J-\lambda E$ также имеет блочно-диагональный вид. С помощью элементарных преобразований каждого блока матрица $J-\lambda E$, приводится к диагональному виду:

$$J-\lambda E\to\operatorname{diag}(1,\ldots,1,(\lambda-\lambda_1)^{r_1},1,\ldots,1,(\lambda-\lambda_2)^{r_2}).$$

Если $\lambda_1\neq\lambda_2$, то

$$d_1(\lambda)=\ldots=d_{r_1+r_2-1}(\lambda)=1,\quad d_{r_1+r_2}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}.$$

Тогда

$$e_1(\lambda)=e_2(\lambda)=\ldots=e_{r_1+r_2-1}(\lambda)=1,\quad e_{r_1+r_2}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}.$$

Следовательно, матрица J имеет два элементарных делителя $(\lambda-\lambda_1)^{r_1}$ и $(\lambda-\lambda_2)^{r_2}$.

Если $\lambda_1=\lambda_2$, то

$$d_1(\lambda)=\ldots=d_{r_1+r_2-1}(\lambda)=(\lambda-\lambda_2)^{r_2},\quad d_{r_1+r_2}(\lambda)=(\lambda-\lambda_2)^{r_1+r_2}.$$

Тогда

$$e_1(\lambda)=e_2(\lambda)=\ldots=e_{r_1+r_2-2}(\lambda)=1,\quad e_{r_1+r_2-1}(\lambda)=(\lambda-\lambda_2)^{r_2},$$
$$e_{r_1+r_2}(\lambda)=(\lambda-\lambda_2)^{r_1}.$$

Следовательно, матрица J здесь также имеет два элементарных делителя $(\lambda-\lambda_1)^{r_1}$ и $(\lambda-\lambda_2)^{r_2}$.

Таким образом, элементарные делители блочно-диагональной матрицы J в любом случае получаются объединением элементарных делителей каждого блока.

2. Жорданова матрица

Определение. *Жордановой матрицей* называют блочно-диагональную матрицу, на диагонали которой стоят жордановы клетки:

$$J=\operatorname{diag}(J_{r_1}(\lambda_1),J_{r_2}(\lambda_2),\ldots,J_{r_k}(\lambda_k))=\begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0\\ 0 & J_{r_2}(\lambda_2) & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & J_{r_k}(\lambda_k)\end{pmatrix}.$$

Здесь 0 — нулевые матрицы соответствующих размеров. Среди собственных значений $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ могут быть равные, размеры $r_1,r_2,\ldots,r_k$ жордановых клеток (всех или некоторых) тоже могут совпадать. Жорданова матрица почти диагональная. На ее главной диагонали стоят собственные значения, некоторые элементы над главной диагональю равны единице, остальные элементы нулевые. Про такую матрицу J говорят, что она имеет *нормальную жорданову форму* (или просто *жорданову форму*).

Элементарные делители жордановой матрицы

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{r_2},\ \ldots,\ (\lambda-\lambda_k)^{r_k}$$

получаются в результате объединения элементарных делителей жордановых клеток.

§ 2. Жорданова форма и элементарные делители матрицы

1. Составление жордановой матрицы по таблице элементарных делителей

Чтобы составить по таблице элементарных делителей соответствующую жорданову матрицу, нужно:

а) для первой строки

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1},\quad (\lambda-\lambda_1)^{l_1},\quad \ldots,\quad (\lambda-\lambda_1)^{b_1},\quad (\lambda-\lambda_1)^{a_1}$$

элементарных делителей записать жордановы клетки

$$J_{m_1}(\lambda_1),\quad J_{l_1}(\lambda_1),\quad \ldots,\quad J_{b_1}(\lambda_1),\quad J_{a_1}(\lambda_1);$$

б) для второй строки

$$(\lambda-\lambda_2)^{m_2},\quad (\lambda-\lambda_2)^{l_2},\quad \ldots,\quad (\lambda-\lambda_2)^{b_2},\quad (\lambda-\lambda_2)^{a_2}$$

элементарных делителей записать жордановы клетки

$$J_{m_2}(\lambda_2),\quad J_{l_2}(\lambda_2),\quad \ldots,\quad J_{b_2}(\lambda_2),\quad J_{a_2}(\lambda_2)\quad \text{и т. д.}$$

Получив полный набор жордановых клеток (количество которых совпадает с количеством элементарных делителей в таблице), составить из них блочно-диагональную матрицу. Порядок, в котором нужно располагать жордановы клетки на диагонали, не регламентирован. Поэтому для одной и той же таблицы можно получить разные жордановы матрицы, отличающиеся только перестановкой жордановых клеток.

2. Составление таблицы элементарных делителей по жордановой матрице

Чтобы по жордановой матрице составить таблицу ее элементарных делителей, нужно:

а) выбрать в жордановой матрице все жордановы клетки, соответствующие собственному значению λ_1; составить для каждой клетки элементарный делитель, а затем записать эти элементарные делители в порядке убывания степеней в первую строку таблицы, например, для жордановых клеток

$$J_{m_1}(\lambda_1),\quad J_{l_1}(\lambda_1),\quad \ldots,\quad J_{b_1}(\lambda_1),\quad J_{a_1}(\lambda_1),$$

где $m_1 \geqslant l_1 \geqslant \ldots \geqslant b_1 \geqslant a_1 \geqslant 1$, записать строку

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1},\quad (\lambda-\lambda_1)^{l_1},\quad \ldots,\quad (\lambda-\lambda_1)^{b_1},\quad (\lambda-\lambda_1)^{a_1}$$

элементарных делителей;

б) выбрать в жордановой матрице все жордановы клетки, соответствующие собственному значению λ_2, составить для каждой клетки элементарный делитель, а затем записать эти элементарные делители в порядке убывания степеней во вторую строку таблицы и т. д., пока не исчерпаются все собственные значения данной жордановой матрицы.

Порядок, в котором выбираются собственные значения жордановой матрицы, точно не устанавливается. Поэтому для одной жордановой матрицы можно получить разные таблицы элементарных делителей, которые будут отличаться только перестановкой строк.

Ранее отмечалось, что перестановка строк таблицы элементарных делителей не влияет на составление таблицы инвариантных множителей.

Замечания. 1. Диагональная матрица имеет жорданову форму, в которой все жордановы клетки первого порядка:

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \operatorname{diag}(J_1(\lambda_1), J_1(\lambda_2), \ldots, J_1(\lambda_n)).$$

2. Хотя жорданова матрица в общем случае не диагональная, для нее достаточно просто решаются типовые задачи линейной алгебры. Например, для неоднородной системы уравнений $Jx = b$ с невырожденной матрицей $J = J_n(\lambda_0)$ можно сразу записать решение:

$$x_n = \frac{b_n}{\lambda_0}, \quad x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - x_n}{\lambda_0}, \quad \ldots, \quad x_1 = \frac{b_1 - x_2}{\lambda_0}.$$

3. Для решения тех или иных задач линейной алгебры используются различные простые виды квадратных матриц, которые обычно называют *нормальными* или *каноническими формами*, к ним относится также и вещественная жорданова форма. Приведенную выше матрицу J называют также *канонической формой*.

Пример 1. Найдите элементарные делители и инвариантные множители жордановых матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A.

Матрица $A = \operatorname{diag}(J_1(1), J_1(2), J_2(3))$ состоит из трех жордановых клеток с разными собственными значениями $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Для каждого собственного значения запишем жорданову клетку и соответствующий элементарный делитель:

$$\lambda_1 = 1 \to J_1(1) \to \lambda - 1,$$
$$\lambda_2 = 2 \to J_1(2) \to \lambda - 2,$$
$$\lambda_3 = 3 \to J_2(3) \to (\lambda - 3)^2.$$

Получили таблицу элементарных делителей, которая состоит из одного столбца. По этой таблице составляем инвариантные множители (количество которых равно порядку матрицы A). Записываем последний инвариантный множитель $e_4(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 1)(\lambda - 2)$,

перемножая элементарные делители первого столбца. Поскольку исчерпаны все элементарные делители (второго столбца в таблице нет), остальные инвариантные множители полагаем равными единице:

$$e_3(\lambda) = 1, \quad e_2(\lambda) = 1, \quad e_1(\lambda) = 1.$$

Матрица B.

Матрица $B = \operatorname{diag}(J_2(1), J_1(1), J_1(2))$ состоит из трех жордановых клеток, соответствующих двум разным собственным значениям $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

Для каждого собственного значения записываем соответствующие жордановы клетки и элементарные делители:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 1 \to J_2(1), \quad J_1(1) \to (\lambda-1)^2, \quad \lambda-1, \\ &\lambda_2 = 2 \to J_1(2) \to \qquad\qquad \lambda-2. \end{aligned}$$

Получили таблицу элементарных делителей, которая состоит из двух столбцов. По этой таблице составляем инвариантные множители (количество которых равно порядку матрицы B). Записываем последний инвариантный множитель $e_4(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$, перемножая элементарные делители первого столбца. Далее записываем предпоследний инвариантный множитель $e_3(\lambda) = \lambda - 1$ по второму столбцу таблицы. Поскольку исчерпаны все элементарные делители (третьего столбца в таблице нет), остальные инвариантные множители полагаем равными единице: $e_2(\lambda) = e_1(\lambda) = 1$.

Матрица C.

Матрица $C = \operatorname{diag}(J_2(1), J_2(1))$ состоит из двух одинаковых жордановых клеток, соответствующих одному собственному значению $\lambda_1 = 1$. Для этого собственного значения записываем жордановы клетки и соответствующие элементарные делители:

$$\lambda_1 = 1 \to J_2(1), \quad J_2(1) \to (\lambda-1)^2, \quad (\lambda-1)^2.$$

Получили таблицу элементарных делителей, которая состоит из двух столбцов. По этой таблице составляем инвариантные множители (количество которых равно порядку матрицы C). Записываем последний инвариантный множитель $e_4(\lambda) = (\lambda-1)^2$ по первому столбцу таблицы. Записываем предпоследний инвариантный множитель $e_3(\lambda) = (\lambda-1)^2$ по второму столбцу таблицы. Поскольку исчерпаны все элементарные делители (третьего столбца в таблице нет), остальные инвариантные множители полагаем равными единице: $e_2(\lambda) = e_1(\lambda) = 1$.

Пример 2. По инвариантным множителям найдите жорданову матрицу.

а) Матрица A:

$$e_1(\lambda) = e_2(\lambda) = e_3(\lambda) = 1, \quad e_4(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4).$$

б) Матрица B:

$$e_1(\lambda) = e_2(\lambda) = 1, \quad e_3(\lambda) = \lambda - 1, \quad e_4(\lambda) = (\lambda-1)^3.$$

в) Матрица C:

$$e_1(\lambda) = 1, \quad e_2(\lambda) = \lambda - 1, \quad e_3(\lambda) = \lambda - 1, \quad e_4(\lambda) = (\lambda-1)^2.$$

Решение. Для матрицы A составляем таблицу элементарных делителей. В первый столбец таблицы записываем элементарные делители последнего инвариантного множителя:

$$\lambda - 1,$$
$$\lambda - 2,$$
$$\lambda - 3,$$
$$\lambda - 4.$$

Остальные элементарные делители равны единице и в таблицу не заносятся. Составляем по таблице элементарных делителей жорданову матрицу. Для каждого элементарного делителя записываем соответствующую жорданову клетку: $J_1(1)$, $J_1(2)$, $J_1(3)$, $J_1(4)$.

Располагая эти клетки на главной диагонали блочной матрицы, получаем искомую жорданову матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы B составляем таблицу элементарных делителей. В первый столбец таблицы записываем единственный элементарный делитель последнего инвариантного множителя $e_4(\lambda)$, во второй столбец — предпоследнего инвариантного множителя $e_3(\lambda)$: $(\lambda-1)^3$, $\lambda - 1$.

Инвариантные множители $e_1(\lambda) = 1$, $e_2(\lambda) = 1$ не содержат элементарных делителей, отличных от единицы, и поэтому в таблицу не записываются. Составляем по таблице элементарных делителей жорданову матрицу. Для каждого элементарного делителя записываем соответствующую жорданову клетку: $J_3(1)$, $J_1(1)$. Располагая

эти клетки на главной диагонали блочной матрицы, получаем искомую жорданову матрицу:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы C составляем таблицу элементарных делителей. В первый столбец таблицы записываем единственный элементарный делитель последнего инвариантного множителя $e_4(\lambda)$, во второй столбец — предпоследнего инвариантного множителя $e_3(\lambda)$, в третий столбец — $e_2(\lambda)$: $(\lambda-1)^2$, $\lambda-1$, $\lambda-1$.

Инвариантный множитель $e_1(\lambda)=1$ не содержит элементарных делителей, отличных от единицы, и поэтому в таблицу не записывается. Составляем по таблице элементарных делителей жорданову матрицу. Для каждого элементарного делителя записываем соответствующую жорданову клетку: $J_2(1)$, $J_1(1)$ $J_1(1)$. Располагая эти клетки на главной диагонали блочной матрицы, получаем искомую жорданову матрицу:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найдите элементарные делители и инвариантные множители следующих матриц.

2.1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. **2.2**. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **2.3**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **2.4**. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **2.6**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **2.7**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **2.9**. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **2.10**. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **2.12**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **2.13**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.14. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

По инвариантным множителям найдите жорданову матрицу.

2.15. $e_3 = (\lambda-3)^2$, $e_2 = (\lambda-3)$, $e_1 = 1$.

2.16. $e_3 = (\lambda-4)^2(\lambda-2)$, $e_2 = e_1 = 1$.

2.17. $e_3 = (\lambda-5)^3$, $e_2 = e_1 = 1$.

2.18. $e_4 = (\lambda-2)^3(\lambda-3)$, $e_3 = e_2 = e_1 = 1$.

2.19. $e_4 = (\lambda-3)^4$, $e_3 = e_2 = e_1 = 1$.

2.20. $e_4 = (\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$, $e_3 = e_2 = e_1 = 1$.

2.21. $e_4 = (\lambda-2)^2$, $e_3 = (\lambda-2)^2$, $e_2 = e_1 = 1$.

§ 3. Приведение матрицы к жордановой форме методом элементарных делителей

Рассматривается задача упрощения квадратной матрицы при помощи преобразования подобия. Наиболее простой вид квадратной матрицы — диагональный. Для диагональных матриц легко решаются многие типовые задачи линейной алгебры, например обращение матриц, решение системы уравнений, нахождение многочлена от матрицы и т. п. Однако, как показано ранее, не всякая квадратная матрица подобна диагональной. Поэтому возникает необходимость приведения матрицы к такому виду (пусть даже не диагональному), чтобы при решении типовых задач линейной алгебры не возникало значительных трудностей. Ниже будет показано, что таким наиболее простым видом, к которому можно привести любую числовую матрицу, является так называемая жорданова матрица.

Теорема (о приведении матрицы к нормальной жордановой форме)**.** *Любая квадратная матрица подобна жордановой матрице. Две жордановы матрицы подобны тогда и только тогда, когда они составлены из одинаковых жордановых клеток и отличаются друг от друга лишь расположением клеток на главной диагонали, другими словами, любую квадратную матрицу при помощи преобразования подобия можно привести к нормальной жордановой форме и притом единственной* (*с точностью до перестановок жордановых клеток*).

В самом деле, для любой квадратной матрицы A можно найти элементарные делители и составить соответствующую таблицу. По элементарным делителям можно составить соответствующую жорданову матрицу J_A. При этом матрицы A и J_A будут иметь одинаковые элементарные делители, что является критерием их подобия. Значит, найдется такая невырожденная преобразующая матрица S, что $J_A = S^{-1}AS$. Заметим, что жорданова форма J_A матрицы A определяется по ее элементарным делителям единственным образом с точностью до перестановок жордановых клеток.

Общая задача приведения матрицы к жордановой форме формулируется следующим образом. Требуется привести квадратную матрицу A к жордановой форме J_A при помощи преобразования подобия: $J_A = S^{-1}AS$, т. е. найти жорданову форму J_A квадратной матрицы A (первый этап) и найти преобразующую матрицу S (второй этап), для которой $J_A = S^{-1}AS$.

В некоторых теоретических и прикладных задачах достаточно определить только жорданову форму матрицы, т. е. ограничиться первым этапом. Однако чаще, кроме жордановой формы J_A матрицы A, требуется также найти и преобразующую матрицу S, т. е. выполнить оба этапа.

В данном параграфе мы рассмотрим метод нахождения жордановой формы матрицы J_A, основанный на изучении характеристической матрицы $A - \lambda E$. При этом можно действовать двумя путями: либо вычислить элементарные делители исходной матрицы A (найдя предварительно наибольшие общие делители миноров соответствующего порядка), либо привести характеристическую матрицу к диагональной нормальной форме с помощью элементарных преобразований. Кроме метода, связанного с изучением характеристической матрицы, в следующем параграфе мы изложим еще один метод, позволяющий одновременно с жордановой формой J_A матрицы A находить и преобразующую матрицу S. Этот метод основан на вычислении системы собственных и присоединенных векторов матрицы A.

Задачу приведения матрицы к диагональному виду можно считать частным случаем задачи приведения матрицы к жордановой форме. Если квадратная матрица n-го порядка A имеет n линейно независимых собственных векторов, то, как это следует из соответствующей теоремы, ее жорданова форма J_A является диагональной матрицей (с собственными значениями на главной диагонали),

а преобразующая матрица S может быть составлена из n линейно независимых собственных векторов матрицы A.

Для нахождения жордановой формы J_A квадратной матрицы A методом элементарных делителей нужно выполнить следующие действия.

1. Составить характеристическую матрицу $A-\lambda E$.

2. Найдите ее инвариантные множители либо

2.1) путем вычисления наибольших общих делителей миноров фиксированного порядка; либо

2.2) путем приведения характеристической матрицы к нормальному диагональному виду с помощью элементарных преобразований.

3. По инвариантным множителям составить таблицу элементарных делителей.

4. По элементарным делителям составить жорданову форму J_A.

Пример 1. Приведите к жордановой форме следующие матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A.

1. Составляем характеристическую матрицу:

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 \\ -1 & 0-\lambda \end{pmatrix}.$$

2. Инвариантные множители будем искать путем вычисления наибольших общих делителей миноров фиксированного порядка характеристической матрицы. Рассмотрим миноры 1-го порядка и найдем их наибольший общий делитель $d_1(\lambda)$. Поскольку среди этих миноров есть минор, равный отличной от нуля константе, $d_1(\lambda)=1$. Единственный минор второго порядка равен определителю характеристической матрицы, поэтому

$$d_2(\lambda)=\det(A-\lambda E)=(4-\lambda)(-\lambda)+4=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2.$$

Таким образом, получаем

$$e_1(\lambda)=1,\quad e_2(\lambda)=\frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}=(\lambda-2)^2.$$

3. По инвариантным множителям составляем таблицу элементарных делителей. Так как собственное значение матрицы единственное ($\lambda=2$), таблица состоит из одной строки (и одного столбца): $(\lambda-2)^2$.

4. Единственному элементарному делителю $(\lambda-2)^2$ соответствует одна жорданова клетка 2-го порядка, образующая жорданову форму матрицы A: $J_A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

Матрица B.

Будем искать жорданову форму матрицы с помощью элементарных преобразований характеристической матрицы.

1. Составляем характеристическую матрицу:

$$B-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ -1 & -1 & 1-\lambda\end{pmatrix}.$$

2. Делаем следующие элементарные преобразования характеристической матрицы.

Меняем местами первую и третью строки и умножаем первую строку на -1. Выбрав ведущий элемент, равный единице, делаем равными нулю остальные элементы в первом столбце и в первой строке:

$$B-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ -1 & -1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1-\lambda\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ 1-\lambda & 0 & 1\end{pmatrix}\to$$
$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda-1\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ 1-\lambda & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ 0 & \lambda-1 & (\lambda-1)^2+1\end{pmatrix}.$$

Меняем местами второй и третий столбцы и умножаем вторую строку на -1. Выбрав ведущий элемент, равный единице, делаем равными нулю остальные элементы во втором столбце и во второй строке:

$$B-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ -1 & -1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ 0 & \lambda-1 & (\lambda-1)^2+1\end{pmatrix}\to$$
$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-\lambda\\ 0 & (\lambda-1)^2+1 & \lambda-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda-1\\ 0 & (\lambda-1)^2+1 & \lambda-1\end{pmatrix}\to$$
$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -(\lambda-1)^3\end{pmatrix}.$$

Умножая третий столбец на -1, получаем нормальную диагональную форму характеристической матрицы:

$$B-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ -1 & -1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^3\end{pmatrix}.$$

3. По инвариантным множителям $e_1(\lambda)=e_2(\lambda)=1$, $e_3(\lambda)=(\lambda-1)^3$ составляем таблицу элементарных делителей. Таблица состоит из одного делителя $(\lambda-1)^3$, которому соответствует одна жорданова клетка 3-го порядка (для собственного значения $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$).

4. В результате получаем следующую нормальную жорданову форму матрицы B:

$$J_B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Матрица C.

Будем искать жорданову форму матрицы с помощью элементарных преобразований характеристической матрицы.

1. Составляем характеристическую матрицу:

$$C-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}.$$

2. Делаем следующие элементарные преобразования характеристической матрицы. Меняем местами первый и третий столбцы, выбираем единицу в качестве ведущего элемента и делаем равными нулю все элементы первой строки и первого столбца, за исключением ведущего элемента:

$$C-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1-\lambda & 1 & 1\end{pmatrix}\to$$
$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 0 & -\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & 2\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & 2\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}.$$

Умножаем второй столбец на -1, выбираем ведущий элемент, находящийся во второй строке и втором столбце, делаем равными

нулю соответствующие элементы этой строки и столбца:

$$C-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & 2\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}\to$$
$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda\\ 0 & -\lambda & 2\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda\\ 0 & 0 & 3\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 3\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}.$$

Умножим третий столбец на -1, чтобы старший коэффициент многочлена был равен единице:

$$C-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & -3\lambda+\lambda^2\end{pmatrix}.$$

Составляем таблицу инвариантных множителей:

$$e_1(\lambda)=1,$$
$$e_1(\lambda)=\lambda,$$
$$e_3(\lambda)=\lambda(\lambda-3).$$

3. Составляем таблицу элементарных делителей: λ, λ, $\lambda-3$.

4. Каждому из трех элементарных делителей соответствует жорданова клетка 1-го порядка (для собственных значений $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=3$), т. е. жорданова форма матрицы C — диагональная матрица:

$$J_C=\operatorname{diag}(J_1(0),J_1(0),J_1(3))=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найдите жорданову форму следующих матриц методом элементарных делителей.

3.1. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$. **3.2**. $\begin{pmatrix}2 & 6 & -15\\ 1 & 1 & -5\\ 1 & 2 & -6\end{pmatrix}$. **3.3**. $\begin{pmatrix}9 & -6 & -2\\ 18 & -12 & -3\\ 18 & -9 & -6\end{pmatrix}$.

3.4. $\begin{pmatrix}4 & 6 & -15\\ 1 & 3 & -5\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}$. **3.5**. $\begin{pmatrix}0 & -4 & 0\\ 1 & -4 & 0\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}$. **3.6**. $\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$.

3.7. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. **3.8.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$. **3.9.** $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

3.10. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

§ 4. Приведение матрицы к жордановой форме методом присоединенных векторов

В этом параграфе мы рассмотрим способ нахождения жордановой формы матрицы, позволяющий одновременно вычислять и преобразующую матрицу.

Жордановым блоком называется блочно-диагональная матрица, на диагонали которой расположены жордановы клетки, отвечающие одному собственному значению матрицы A:

$$\begin{pmatrix} J_{i_1}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{i_2}(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & J_{i_s}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

При этом жордановой клеткой, соответствующей собственному числу λ матрицы A, называется матрица вида

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Здесь все диагональные элементы равны числу λ, элементы, стоящие над главной диагональю матрицы, равны единице, остальные элементы матрицы равны нулю.

Каждому собственному числу λ матрицы A можно поставить в соответствие жорданов блок, в котором сумма размерностей жордановых клеток будет равна кратности корня λ в характеристическом многочлене $|A - \lambda E|$ матрицы A. Если матрица имеет блочно-диагональный вид, где на диагонали расположены жордановы блоки, то в этом случае говорят, что матрица имеет жорданову форму. Отношение подобия, связывающее матрицу с ее жордановой формой, дает метод нахождения преобразующей матрицы. Для того

чтобы сформулировать этот метод, нам потребуется ввести понятие набора векторов, присоединенных к собственному вектору.

Если вектор a является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному числу λ, то присоединенными векторами (к вектору a) называются такие векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$, для которых выполняются условия

$$Aa_1 = \lambda a_1 + a, \quad Aa_2 = \lambda a_2 + a_1, \quad \ldots, \quad Aa_k = \lambda a_k + a_{k-1}.$$

Рассмотрим прежде всего соотношение подобия $S^{-1}AS = J_A$, связывающее матрицу A, являющуюся жордановым блоком, с ее жордановой формой J_A. Пусть $s_1^1, s_2^1, \ldots, s_{i_1}^1$ — первые i_1 столбцов матрицы S. Из указанного соотношения подобия получаем для этих вектор-столбцов следующие равенства:

$$\begin{aligned}
As_1^1 &= \lambda_1 s_1^1,\\
As_2^1 &= \lambda_1 s_2^1 + s_1^1,\\
As_3^1 &= \lambda_1 s_3^1 + s_2^1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
As_{i_1}^1 &= \lambda_1 s_{i_1}^1 + s_{i_1-1}^1.
\end{aligned}$$

Следовательно, вектор-столбец s_1^1 оказывается собственным вектором матрицы A, а векторы $s_2^1, \ldots, s_{i_1}^1$ — это система векторов, присоединенных к вектору s_1^1.

Аналогично система следующих i_2 столбцов $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_{i_2}^2$ матрицы S состоит из собственного вектора s_1^2 и присоединенных к нему векторов $s_2^2, \ldots, s_{i_2}^2$.

Рассуждая подобным образом, приходим к выводу о том, что столбцы преобразующей матрицы S — это наборы векторов, каждый из которых представляет собой собственный вектор и присоединенные к нему векторы. Этот вывод дает возможность вычисления преобразующей матрицы. Кроме того, попутно определяются размеры жордановых клеток жордановой формы J_A матрицы A.

Если кратность корня λ равна единице, то жорданов блок (жорданова клетка) представляет собой матрицу, состоящую из одного элемента, равного λ. В частности, если все корни характеристического многочлена различны, то жорданова форма матрицы — это диагональная матрица с собственными числами на диагонали.

Равенство $S^{-1}AS = J_A$, или, что то же самое, $AS = SJ_A$, мы будем использовать для проверки вычислений жордановой формы.

Разберем теперь несколько примеров.

Пример 1. Вычислите жорданову форму матрицы A, а также найдите преобразующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Здесь характеристический многочлен имеет вид

$$\det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)^3.$$

Он имеет корень $\lambda = 2$ кратности три. Получаем

$$B = A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения собственного вектора решаем однородную систему уравнений $Bx = 0$. Решение этой системы можно записать в векторной форме:

$$x = c_1 e_1 + c_2 e_2, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь c_1, c_2 — произвольные числа.

Отсюда следует, что собственные векторы, отвечающие собственному числу $\lambda = 2$, образуют двумерное подпространство. Из приведенных ниже вычислений будет видно, что не для любого собственного вектора существует присоединенный вектор. Наша цель теперь состоит в том, чтобы в этом подпространстве выбрать такой собственный вектор, для которого существует присоединенный вектор.

Переходим к вычислению присоединенного вектора y и одновременно такого собственного вектора x, для которого существует присоединенный вектор y. Присоединенный вектор должен удовлетворять системе уравнений

$$Ay = \lambda y + c_1 e_1 + c_2 e_2,$$

где c_1, c_2 — неизвестные параметры, которые мы выберем так, чтобы данная система имела решение (при этом, разумеется, требуется, чтобы выполнялось неравенство $c_1 e_1 + c_2 e_2 \neq 0$). Запишем систему в развернутом виде:

$$\begin{aligned} -2y_1 + y_2 &= c_1, \\ -4y_1 + 2y_2 &= 2c_1, \\ -2y_1 + y_2 &= c_2. \end{aligned}$$

Для того чтобы данная система была совместна, нужно, чтобы выполнялось равенство $c_1 = c_2$. Пусть теперь $c_1 = c_2 = 1$. Тогда числа $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$ являются одним из решений последней системы уравнений и, следовательно, вектор $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ является присоединенным вектором для собственного вектора $a = e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Таким образом, столбцами преобразующей матрицы могут служить векторы e_1, a, y. Составим матрицу S, столбцами которой являются указанные векторы:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сама жорданова форма $J = J_A$ матрицы A имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для проверки проведенных вычислений убедимся в выполнении равенства $AS = SJ$. Вычисляем

$$AS = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad SJ = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученное равенство $AS = SJ$ подтверждает правильность проведенных выше вычислений.

Пример 2. Вычислите жорданову форму матрицы A, а также найдите преобразующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Здесь характеристический многочлен имеет вид

$$\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)^3.$$

Он имеет корень $\lambda = 1$ кратности три. Получаем

$$B = A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения собственного вектора решаем однородную систему уравнений $Bx = 0$. Решение этой системы можно записать в векторной форме

$$x = c\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

В качестве собственного вектора возьмем вектор $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Переходим к вычислению присоединенных векторов (их должно быть два, чтобы вместе с собственным вектором a они образовывали нужный набор векторов). Для этого решим систему уравнений $Ay = \lambda y + a$.

Запишем систему в развернутом виде:

$$\begin{aligned} -3y_2 + 3y_3 &= 3, \\ -2y_1 - 7y_2 + 13y_3 &= 1, \\ -y_1 - 4y_2 + 7y_3 &= 1. \end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$y = c\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Полагая $c = 0$, получаем первый присоединенный вектор

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления второго присоединенного вектора требуется решить систему уравнений $Ay = \lambda y + a_1$.

Запишем данную систему в развернутом виде:

$$\begin{aligned} -3y_2 + 3y_3 &= 3, \\ -2y_1 - 7y_2 + 13y_3 &= -1, \\ -y_1 - 4y_2 + 7y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$y = c\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Полагая $c=0$, получаем второй присоединенный вектор

$$a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в качестве столбцов преобразующей матрицы можно взять набор векторов a, a_1, a_2. Составим матрицу S, столбцами которой являются указанные векторы:

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сама жорданова форма J матрицы A имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для проверки проведенных вычислений убедимся в выполнении равенства $AS=SJ$. Имеем

$$AS = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad SJ = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Вычислите жорданову форму матрицы A, а также найдите преобразующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Здесь характеристический многочлен имеет вид

$$\det(A-\lambda E) = (1-\lambda)\lambda^2.$$

Он имеет корень $\lambda=1$ кратности один и корень $\lambda=0$ кратности два. Ясно, что жорданова форма матрицы A будет иметь одну жорданову клетку размера 1, соответствующую корню $\lambda=1$. Наша задача состоит в вычислении жорданова блока, соответствующего корню $\lambda=0$ и нахождении соответствующего набора вектор-столбцов преобразующей матрицы.

Рассмотрим собственное значение $\lambda_1=0$. Матрица $A-\lambda_1 E$ имеет вид

$$B_1 = A-\lambda_1 E = A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения собственного вектора решаем однородную систему уравнений $B_1 x = 0$. Решение этой системы можно записать в векторной форме:

$$x = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

В качестве собственного вектора возьмем вектор

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку кратность корня λ_1 равняется двум, требуется найти присоединенный вектор для вектора a_1. С этой целью решим систему уравнений $Ay = \lambda_1 y + a_1$.

Запишем систему в развернутом виде:

$$\begin{aligned} 4y_1 - 5y_2 + 2y_3 &= 1, \\ 5y_1 - 7y_2 + 3y_3 &= 2, \\ 6y_1 - 9y_2 + 4y_3 &= 3. \end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$y = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Полагая $c = 0$, получаем присоединенный вектор

$$a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Осталось найти собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = 1$. Для этого вычисляем матрицу

$$B_2 = A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

и решаем однородную систему уравнений $B_2 x = 0$.

Решение этой системы имеет вид

$$x = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

В качестве собственного вектора возьмем вектор

$$a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составим теперь матрицу S, столбцами которой являются найденные векторы a_1, a_2, a_3:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сама жорданова форма J матрицы A имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для проверки проведенных вычислений убедимся в выполнении равенства $AS = SJ$. Имеем

$$AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad SJ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Вычислите жорданову форму матрицы A а также найдите преобразующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Здесь характеристический многочлен имеет вид

$$\det(A - \lambda E) = \det(A_1 - \lambda E)\det(A_2 - \lambda E),$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем $\det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)^4$. Единственный корень характеристического многочлена $\lambda = 2$ имеет кратность 4.

Перейдем теперь к вычислению собственных векторов. Матрица $B = A - \lambda E$ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем однородную систему уравнений $Bx = 0$.

Решение этой системы имеет вид

$$x = c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3,$$
$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Перейдем теперь к вычислению присоединенного вектора. С этой целью решим систему уравнений

$$Ay = \lambda y + c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3.$$

Запишем матрицу этой систему в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & c_1 - c_3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы система была совместна, должны выполняться равенства $c_2 = c_3 = 0$. Полагая $c_1 = 1$ (заметим, что в качестве c_1 можно выбрать любое число, отличное от нуля), находим одно из решений последней системы уравнений:

$$y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку у нас $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$, вектор y является присоединенным вектором для собственного вектора a_1. Таким образом, искомым базисом является набор векторов

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Соответственно получаем

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Жорданова форма J матрицы A имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Осталось проверить равенство $AS = SJ$. Имеем

$$AS = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad SJ = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Вычислите жорданову форму матрицы A, а также найдите преобразующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Здесь характеристический многочлен имеет вид

$$\det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)^4.$$

Единственный корень характеристического многочлена $\lambda = 2$ имеет кратность 4.

Перейдем теперь к вычислению собственных векторов. Матрица $B = A - \lambda E$ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решаем однородную систему уравнений $Bx = 0$.

Решение этой системы имеет вид

$$x = ca, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Полагая $c = 1$, получаем собственный вектор a.

Перейдем теперь к вычислению присоединенных векторов. С этой целью решим систему уравнений $Ay = \lambda y + a$.

Запишем матрицу этой системы в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим одно из решений этой системы уравнений:

$$y = a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор a_1 является первым присоединенным вектором. Вычислим теперь следующий присоединенный вектор, для чего решим систему уравнений $Ay = \lambda y + a_1$.

Одно из решений этой системы уравнений — вектор

$$y = a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

который является вторым присоединенным вектором. Вычислим теперь последний присоединенный вектор. Решим с этой целью систему уравнений $Ay = \lambda y + a_2$.

Ее решением является вектор

$$y = a_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Соответственно получаем

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Жорданова форма J матрицы A имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Осталось проверить равенство $AS = SJ$. Имеем

$$AS = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -10 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad SJ = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -10 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найдите жорданову форму следующих матриц методом присоединенных векторов.

4.1. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **4.2.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. **4.3.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.4. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.6. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$.

4.7. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 & 7 \\ -1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4.8. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.9. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 & 8 \\ -1 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4.10. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.11. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4.12. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4.13. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4.14. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -13 \\ -1 & 5 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4.15. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4.16. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 & 8 \\ -2 & 7 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

4.17. $\begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 & 10 \\ -3 & 8 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответы к задачам главы 8

2.1. $\lambda-1, \lambda-2, e_2=(\lambda-1)(\lambda-2), e_1=1.$
2.2. $\lambda-1, \lambda-1, e_2=\lambda-1, e_1=\lambda-1.$
2.3. $(\lambda-1)^2, e_2=(\lambda-1)^2, e_1=1.$
2.4. $\lambda-1, \lambda-1, \lambda-2, e_3=(\lambda-1)(\lambda-2), e_2=\lambda-1, e_1=1.$
2.5. $\lambda-1, \lambda-1, \lambda-1, e_3=\lambda-1, e_2=\lambda-1, e_1=\lambda-1.$
2.6. $(\lambda-1)^2, \lambda-2, e_3=(\lambda-1)^2(\lambda-2), e_2=1, e_1=1.$
2.7. $(\lambda-1)^2, \lambda-1, e_3=(\lambda-1)^2, e_2=\lambda-1, e_1=1.$
2.8. $\lambda-1, \lambda-1, \lambda-2, \lambda-2, e_4=(\lambda-1)(\lambda-2), e_3=(\lambda-1)(\lambda-2),$ $e_2=e_1=1.$
2.9. $\lambda-1, \lambda-1, \lambda-1, \lambda-2, e_4=(\lambda-1)(\lambda-2), e_3=e_2=\lambda-1, e_1=1.$
2.10. $\lambda-1, \lambda-1, \lambda-1, \lambda-1, e_4=e_3=e_2=e_1=\lambda-1.$
2.11. $(\lambda-1)^3, \lambda-2, e_4=(\lambda-1)^3(\lambda-2), e_3=e_2=e_1=1.$
2.12. $(\lambda-1)^3, \lambda-1, e_4=(\lambda-1)^3, e_3=\lambda-1, e_2=e_1=1.$
2.13. $(\lambda-1)^2, (\lambda-2)^2, e_4=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2, e_3=e_2=e_1=1.$
2.14. $(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, e_4=(\lambda-1)^2, e_3=(\lambda-1)^2, e_2=e_1=1.$
2.15. $\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$. **2.16.** $\begin{pmatrix}4&1&0\\0&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. **2.17.** $\begin{pmatrix}5&1&0\\0&5&1\\0&0&5\end{pmatrix}$.
2.18. $\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$. **2.19.** $\begin{pmatrix}3&1&0&0\\0&3&1&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}$. **2.20.** $\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}$.
2.21. $\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$. **3.1.** $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$. **3.2.** $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$.
3.3. $\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&1\\0&0&-3\end{pmatrix}$. **3.4.** $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. **3.5.** $\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$.
3.6. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. **3.7.** $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$. **3.8.** $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. **3.9.** $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.
3.10. $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$. **4.1.** $\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$. **4.2.** $\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$.
4.3. $\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$. **4.4.** $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$. **4.5.** $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$. **4.6.** $\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\alpha&1\\0&0&\alpha\end{pmatrix}$.
4.7. $\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$. **4.8.** $\begin{pmatrix}3&1&0&0\\0&3&1&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}$. **4.9.** $\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

4.10. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **4.11.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **4.12.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4.13. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **4.14.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **4.15.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4.16. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **4.17.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Глава 9

Квадратичные формы

§1. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

1. Квадратичная форма и ее матрица

Определение. *Квадратичной формой* называется однородный многочлен второй степени

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям симметричности $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Это условие не ограничивает общности, так как сумму двух подобных членов $a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$ с неравными коэффициентами всегда можно заменить суммой $a'_{ij}x_ix_j + a'_{ji}x_jx_i$ с равными коэффициентами, полагая $a'_{ij} = a'_{ji} = \dfrac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$.

Симметрическая матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов квадратичной формы, называется *матрицей квадратичной формы*. Определитель этой матрицы называется *дискриминантом*, а ее ранг — *рангом квадратичной формы*. Квадратичная форма называется *вырожденной*, если ее матрица вырожденная ($\operatorname{rg}(A) < n$); в обратном случае, когда матрица невырожденная ($\operatorname{rg}(A) = n$), квадратичная форма называется *невырожденной*.

Составляя из переменных матрицу-столбец

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = x,$$

квадратичную форму можно записать в виде $Q(x) = x^T Ax$. После линейного преобразования переменных $x = Sy$ квадратичная форма принимает следующий вид:

$$Q(x) = Q(Sy) = (Sy)^T A(Sy) = y^T (S^T AS) y = y^T A' y = \widetilde{Q}(y),$$

$$A' = S^T AS.$$

Матрица A', очевидно, удовлетворяет условию симметричности.

Говорят, что квадратичная форма имеет *канонический вид*, если ее матрица диагональная, другими словами, в квадратичной форме имеются только члены с квадратами переменных, а все попарные произведения различных переменных отсутствуют (соответствующие коэффициенты равны нулю):

$$\widetilde{Q}(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2.$$

Задача приведения квадратичной формы к каноническому виду формулируется следующим образом. Для данной квадратичной формы требуется найти такую линейную невырожденную замену переменных, при которой квадратичная форма принимает канонический вид. Как показывает следующая теорема, эта задача всегда разрешима. Заметим, что на практике нередко бывает достаточно определить только канонический вид квадратичной формы, не указывая замены переменных.

Теорема (о приведении квадратичной формы к каноническому виду)**.** *Любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду при помощи некоторой линейной невырожденной замены переменных.*

Конструктивное доказательство этой теоремы составляет содержание метода Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

2. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

Для приведения квадратичной формы к каноническому виду нужно выполнить следующие действия.

1. Выбрать такую переменную (*ведущую*), которая входит в квадратичную форму во второй и в первой степени одновременно (если в квадратичной форме есть член с квадратом переменной и с произведением этой переменной на другую переменную), и перейти к п. 2.

Если в квадратичной форме нет ведущих переменных, то выбрать пару переменных, произведение которых входит в квадратичную форму с отличным от нуля коэффициентом, и перейти к п. 3.

Если в квадратичной форме отсутствуют произведения различных переменных, то никаких преобразований делать не надо, так как она уже имеет канонический вид.

2. По ведущей переменной выделить полный квадрат: собрать в квадратичной форме все члены с ведущей переменной, дополнить

сумму этих членов до полного квадрата (разумеется, добавленные члены нужно также и вычесть, чтобы не изменилась сумма). Получим сумму полного квадрата некоторой линейной формы (в которую входит ведущая переменная) и квадратичной формы, в которую ведущая переменная не входит. Далее нужно сделать следующую замену переменных: выделенную линейную форму, содержащую ведущую переменную, принять за одну из новых переменных, а все старые переменные, за исключением ведущей, принять за соответствующие новые. Продолжить преобразования с п. 1.

3. Выбранную пару переменных заменить на разность и сумму двух новых переменных, а остальные старые переменные принять за соответствующие новые переменные. При этом произведение пары выбранных переменных преобразуется в разность квадратов двух новых переменных, т. е. в новой квадратичной форме появятся квадраты переменных с отличными от нуля коэффициентами. Продолжить преобразования новой квадратичной формы с п. 1.

Идея метода Лагранжа состоит в том, что прием, используемый в п. 2 (выделение полного квадрата), исключает одну переменную из числа ведущих. Например, если переменная x_1 ведущая (т. е. $a_{11} \neq 0$ и хотя бы один из коэффициентов $a_{12}, \ldots, a_{1n}$ отличен от нуля), то выделяем полный квадрат по переменной x_1 (собираем все члены с x_1 и дополняем их сумму до полного квадрата):

$$Q(x) = a_{11}\left[x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2\right] -$$
$$- a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{nn}x_n^2.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, представляет собой полный квадрат. Поэтому

$$Q(x) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + Q_1(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$
$$Q_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) = a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{nn}x_n^2 -$$
$$- a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2.$$

Здесь $Q_1(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма, в которую не входит ведущая переменная x_1, а

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

— линейная форма, содержащая ведущую переменную. Теперь сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, \\ y_2 &= x_2, \\ y_3 &= x_3, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= x_n. \end{aligned}$$

Тогда наша квадратичная форма примет вид

$$Q(x) = y_1^2 + Q_1(y_2, \ldots, y_n).$$

Заметим, что в результате последнего преобразования все члены, содержащие ведущую переменную x_1 в первой и второй степени, заменены квадратом одной новой переменной y_1^2. В дальнейших преобразованиях переменная y_1 уже никогда не будет ведущей.

Многократно применяя этот прием, исключаем одну за другой все ведущие переменные, получая тем самым канонический вид квадратичной формы. Однако выделение полного квадрата невозможно, если в квадратичной форме отсутствуют члены с квадратами переменных. В этом случае применяется способ, описанный в п. 3, который порождает члены с квадратами переменных.

Например, если выделена пара переменных x_1 и x_2, произведение которых входит в квадратичную форму с отличным от нуля коэффициентом ($a_{12} \neq 0$), то нужно сделать замену переменных

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2, \\ x_2 &= y_1 - y_2, \\ x_3 &= y_3, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= y_n. \end{aligned}$$

При этом получим новую квадратичную форму, в которой появятся квадраты новых переменных с отличными от нуля коэффициентами, так как в результате замены член $2a_{12}x_1x_2$ преобразуется к виду $2a_{12}(y_1^2 - y_2^2)$, а других членов с y_1^2 в новой квадратичной форме не будет.

Заметим, что при помощи метода Лагранжа не только находится канонический вид, но и определяется искомая невырожденная

замена переменных. В самом деле, последние две указанные выше замены переменных — это линейные замены с матрицами

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Определители этих матриц отличны от нуля ($\det S_1 = 1$, $\det S_2 = -2$). Следовательно, эти замены переменных невырожденные. Последовательно применяя указанные замены переменных, приходим к искомому невырожденному преобразованию, приводящему квадратичную форму к каноническому виду.

Канонический вид квадратичной формы определен неоднозначно, так как зависит от последовательности выбора ведущих переменных. Сделав, например, замену переменных

$$y_i = \alpha_i z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

в квадратичной форме канонического вида

$$\widetilde{Q}(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2,$$

получим другую квадратичную форму, которая тоже имеет канонический вид.

Элементы матрицы невырожденной линейной замены переменных, приводящей квадратичную форму к каноническому виду, вычисляются при помощи арифметических операций по коэффициентам квадратичной формы. Поэтому если коэффициенты квадратичной формы рациональные (соответственно действительные, комплексные), то и коэффициенты линейной замены будут рациональными (соответственно действительными, комплексными).

Рассмотрим теперь несколько примеров приведения квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.

Пример 1. Приведите квадратичную форму

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

Решение. В данную квадратичную форму переменная x_1 входит в первой и второй степенях одновременно. Выбираем ее в качестве ведущей. По ведущей переменной x_1 выделяем все слагаемые, кото-

рые содержат ее в качестве множителя, и формируем соответствующий полный квадрат:

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 =$$
$$= x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 =$$
$$= (x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_2x_3.$$

Введем теперь новые переменные $y_1 = x_1 + x_2 - x_3$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ и запишем квадратичную форму в этих переменных:

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = y_1^2 + y_2y_3 = y_1^2 + Q_1(y_2, y_3).$$

Выражение старых переменных через новые выглядит так:

$$x_1 = y_1 - y_2 + y_3, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3.$$

Зафиксируем матрицу этого преобразования:

$$x = S_1y, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь квадратичную форму $Q_1(y_2, y_3) = y_2y_3$ и приведем ее к каноническому виду. Для этого, согласно методу Лагранжа, сделаем преобразование, используя новые переменные z_2, z_3:

$$Q_1(y_2, y_3) = y_2y_3 = (z_2 + z_3)(z_2 - z_3) = z_2^2 - z_3^2.$$

При этом первую переменную принимаем за соответствующую новую: $y_1 = z_1$. Используемое здесь преобразование и его матрица имеют вид

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = z_2 + z_3, \quad y_3 = z_2 - z_3, \quad y = S_2z, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма в новых переменных имеет канонический вид:

$$Q(x) = \widetilde{Q}(z) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2.$$

Соответствующее преобразование координат получаем в виде произведения преобразований S_1 и S_2:

$$x = Sz, \quad S = S_1S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и A' квадратичной формы $Q(x)$ в начальных и в конечных координатах соответственно имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -0{,}5 \\ -1 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При этом, как отмечалось в начале данного параграфа, должно выполняться равенство $A'=S^T AS$. Убеждаемся в выполнении этого равенства:

$$S^T AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -0{,}5 \\ -1 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Приведите квадратичную форму

$$Q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

Решение. В данную квадратичную форму ни одна из переменных не входит во второй степени. Вследствие этого сделаем следующее преобразование:

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2, \quad x_3 = y_3$$

и запишем квадратичную форму в этих переменных:

$$Q(x) = Q_1(y) = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + (y_1 + y_2)y_3 - (y_1 - y_2)y_3 = \\ = y_1^2 - y_2^2 + 2y_2y_3.$$

В полученную квадратичную форму переменная y_2 входит в первой и второй степенях одновременно. Выбираем ее в качестве ведущей. По ведущей переменной y_2 выделяем слагаемые, которые ее содержат в качестве множителя, и формируем соответствующий полный квадрат:

$$Q_1(y) = y_1^2 - (y_2^2 - 2y_2y_3 + y_3^2) + y_3^2 = y_1^2 - (y_2 - y_3)^2 + y_3^2.$$

Введем теперь новые переменные $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2 - y_3$, $z_3 = y_3$ и запишем квадратичную форму в этих переменных:

$$Q_1(y) = \widetilde{Q}(z) = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2,$$

$$\widetilde{Q}(z) = z^T A' z, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма в новых переменных имеет канонический вид. Осталось записать преобразование, приводящее исходную квадратичную форму к полученному каноническому виду. Первое преобразование в векторной форме имеет вид

$$x = S_1 y, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Во втором преобразовании выражение старых координат через новые выглядит так: $y_1 = z_1$, $y_2 = z_2 + z_3$, $y_3 = z_3$. Запишем его в векторном виде:

$$y = S_2 z, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итоговое преобразование имеет вид

$$x = Sz, \quad S = S_1 S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и A' квадратичной формы $Q(x)$ в начальных и в конечных координатах соответственно имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Убедимся теперь в выполнении равенства $A' = S^T A S$:

$$S^T A S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найдите методом Лагранжа канонический вид следующих квадратичных форм и вычислите матрицы соответствующих преобразований.

1.1. $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

1.2. $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

1.3. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
1.4. $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$.
1.5. $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$.
1.6. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.

§ 2. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду

1. Основные понятия

Определение. Две квадратные матрицы A и A' одного и того же порядка называются *конгруэнтными*, если существует такая невырожденная матрица S, что $A' = S^T AS$.

Конгруэнтными, в частности, являются матрицы квадратичных форм, получающиеся при невырожденной замене переменных $x = Sy$, так как они связаны равенством $A' = S^T AS$.

Главными минорами квадратной матрицы называются миноры, диагональные элементы которых находятся на главной диагонали матрицы. Угловыми минорами квадратной матрицы A (n-го порядка) называются следующие главные миноры:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A;$$

здесь угловой минор k-го порядка Δ_k составлен из элементов матрицы A, стоящих на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы A.

Свойства конгруэнтных матриц

1. Конгруэнтные матрицы имеют равные ранги. В самом деле, ранг произведения матрицы A на невырожденные матрицы S и S^T равен рангу матрицы A. Это следует из теоремы о ранге произведения матриц.

Действительно, ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого сомножителя. Таким образом, если $A = SB$, $\det S \neq 0$, то $\operatorname{rg}(A) \leqslant \operatorname{rg}(B)$. Но так как $B = S^1 A$, получаем, что $\operatorname{rg}(B) \leqslant \operatorname{rg}(A)$, и, следовательно, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$.

2. Матрица, конгруэнтная симметрической матрице, также является симметрической. Действительно, если $A = A^T$ и $A' = S^T AS$, то

$$(A')^T = (S^T AS)^T = S^T A^T (S^T)^T = S^T AS = A'.$$

3. Определители действительных конгруэнтных матриц имеют одинаковые знаки. В частности, если $A' = S^T AS$ и $\det S = 1$, то $\det A = \det A'$.

В самом деле, из равенства $A' = S^T AS$ и свойств определителя следует, что

$$\det A' = \det(S^T AS) = \det(S^T) \det A \det S = \det A (\det S)^2,$$

т. е. знаки величин $\det A$ и $\det A'$ совпадают. Если же $\det S = 1$, то $\det A = \det A'$.

4. Если квадратные матрицы A и A' связаны соотношением $A' = S^T AS$, где матрица S верхняя треугольная с единицами на главной диагонали:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

то все угловые миноры матриц A и A' равны (здесь в матрице S звездочкой $*$ обозначаются любые числа).

Действительно, разобьем квадратные матрицы A, S и A' на блоки, выделив в каждой квадратный блок в первых k строках и первых k столбцах:

$$A' = S^T AS = \begin{pmatrix} S_k^T & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_k & 0 \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_k^T A_k S_k & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k' & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Здесь 0 — нулевые матрицы соответствующих размеров, а звездочкой $*$ обозначаются блоки соответствующих размеров, значения элементов которых для доказательства не существенны и могут быть любыми. Получаем, $A_k' = S_k^T A_k S_k$. Учитывая, что $\det S_k = \det S_k^T = 1$ для любого $k = 1, 2, \dots, n$, имеем

$$\Delta_k' = \det A_k' = \det(S_k^T A_k S_k) = \det(S_k^T) \det A_k \det S_k = \det A_k = \Delta_k,$$

т. е. угловые миноры Δ_k и Δ_k' матриц A и A' равны для любого $k = 1, 2, \dots, n$.

2. Теорема Якоби о каноническом виде квадратичной формы

Если квадратичная форма $Q(x)=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ имеет ранг r и первые r угловых миноров матрицы A квадратичной формы отличны от нуля:

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \ \ldots,$$

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то данную квадратичную форму можно привести к каноническому виду

$$\widetilde{Q}(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2, \quad \lambda_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}, \quad i = 1, \ldots, r, \quad \Delta_0 = 1,$$

при помощи линейной замены переменных $x = Sy$ с верхней треугольной матрицей S с единицами на главной диагонали.

Действительно, применяя метод Лагранжа, выбираем первую переменную x_1 в качестве ведущей ($\Delta_1 = a_{11} \neq 0$) и выделяем по ней полный квадрат, т. е. делаем соответствующую линейную замену переменных, описанную в предыдущем параграфе. Этой замене соответствует матрица S_1, которая является верхней треугольной с единицами на главной диагонали. Получим квадратичную форму с матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & a'_{22} & * & \ldots \\ 0 & * & * & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где звездочкой $*$ обозначены некоторые элементы матрицы A'. Поскольку матрица S_1 верхняя треугольная с единицами на главной диагонали, по свойству 4 конгруэнтных матриц получаем $\Delta_2 = \Delta'_2$. Следовательно, $\Delta_2 = a_{11}a'_{22} = \Delta_1 a'_{22}$, а значит, $a'_{22} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} \neq 0$. Поэтому вторую переменную можно взять в качестве ведущей и выделить по ней полный квадрат. Для этого делаем линейную замену

переменных с верхней треугольной матрицей с единицами на главной диагонали и т. д. Условия теоремы Якоби обеспечивают возможность применения п. 2 метода Лагранжа r раз. В результате описанных действий получается указанный в теореме канонический вид квадратичной формы. Формулы для вычисления λ_i следуют из свойства 4 конгруэнтных матриц. Действительно, поскольку угловые миноры матриц A и $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ равны (по свойству 4 конгруэнтных матриц), имеем $\Delta_1 = \lambda_1$, $\Delta_2 = \lambda_1\lambda_2$, ..., $\Delta_r = \lambda_1 \ldots \lambda_r$. Отсюда получаем

$$\lambda_1 = \Delta_1, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ \ldots, \ \lambda_r = \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}}.$$

Остальные угловые миноры равны нулю: $\Delta_{r+1} = \ldots = \Delta_n = 0$, так как ранг матрицы A равен r.

Таким образом, для нахождения канонического вида квадратичной формы методом Якоби необходимо выполнить следующие действия.

1. Составить матрицу A (n-го порядка) квадратичной формы.

2. Найти первые r отличных от нуля угловых миноров матрицы квадратичной формы. Если $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, ..., $\Delta_n \neq 0$, то перейти к п. 3, положив $r = n$. Если $\Delta_1 = a_{11} = 0$, то процесс закончить, так как метод Якоби неприменим. Если

$$\Delta_1 \neq 0, \quad \Delta_2 \neq 0, \ \ldots, \ \Delta_r \neq 0, \quad \Delta_{r+1} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant n-1,$$

то найти отличный от нуля минор $(r+1)$-порядка, окаймляющий минор Δ_r. Если такого минора нет, то перейти к п. 3, иначе процесс закончить, так как метод Якоби неприменим.

3. Записать искомый канонический вид квадратичной формы

$$\widetilde{Q}(y) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} y_r^2, \quad \Delta_0 = 1.$$

Если условие теоремы Якоби не выполняется, то можно попытаться за счет перестановок строк и столбцов матрицы A (и соответствующей перенумерации переменных) добиться выполнения указанного условия. При этом, естественно, нужно соблюдать правило: $x_i \longleftrightarrow x_j$, т. е. если строки с номерами i и j меняются местами, то и столбцы с этими номерами также меняются местами. Тогда новая матрица будет удовлетворять условию симметричности.

Рассмотрим теперь несколько примеров приведения квадратичной формы к каноническому виду методом Якоби.

Пример 1. Приведите квадратичную форму

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

к каноническому виду методом Якоби.

Решение. Матрица A данной квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что ранг этой матрицы равен двум. При этом

$$\Delta_1 = a_{11} = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Согласно теореме Якоби данная квадратичная форма может быть приведена к следующему каноническому виду:

$$Q(x) = \widetilde{Q}(y) = y_1^2 + y_2^2.$$

Покажем, что это вполне согласуется с результатом применения к данной квадратичной форме метода Лагранжа. Согласно методу Лагранжа запишем квадратичную форму в виде

$$Q(x) = (x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_2^2$$

и сделаем следующую замену переменных:

$$y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3.$$

В результате этого преобразования квадратичная форма приводится к указанному выше виду.

Пример 2. Приведите квадратичную форму

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2$$

к каноническому виду методом Якоби.

Решение. Матрица A данной квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -0{,}5 \\ -1 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем угловые миноры:

$$\Delta_1 = a_{11} = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, метод Якоби здесь неприменим. При этом ранг матрицы A больше единицы, поскольку есть минор, отличный от нуля, окаймляющий минор Δ_2. Действительно, таким окаймляющим минором является минор

$$\Delta_2' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -0{,}5 \end{vmatrix} = 0{,}5.$$

Попробуем добиться выполнения условия теоремы Якоби за счет перенумерации переменных. Если произвести перенумерацию $x_1 \longleftrightarrow x_3$, т. е. поменять местами первую и третью строки матрицы, а также первый и третий ее столбец, то в новой матрице A_1 условие Якоби будет выполнено:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & -1 \\ -0{,}5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 0{,}75, \quad \Delta_3 = -0{,}25.$$

Согласно теореме Якоби данная квадратичная форма может быть приведена к следующему каноническому виду:

$$Q(x) = \widetilde{Q}(y) = y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 - \frac{1}{3}y_3^2.$$

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении линейного преобразования переменных, приводящего квадратичную форму методом Якоби к каноническому виду.

Если выполняется условие Якоби, то указанное преобразование можно вычислить методом присоединенной матрицы. Для этого нужно составить блочную матрицу $B = (AE)$, приписав к матрице A квадратичной формы единичную матрицу тех же размеров. Далее нужно привести левый блок (матрицу A) к ступенчатому виду A' при помощи элементарных преобразований строк блочной матрицы (AE). В результате получим блочную матрицу $B' = (A'S)$, где S^T будет являться матрицей искомого преобразования. Элементы главной диагонали матрицы A' будут равны коэффициентам в каноническом виде квадратичной формы.

Рассмотрим применение этого алгоритма в примере 1.

Квадратичная форма имеет вид

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2.$$

Составляем блочную матрицу $B = (AE)$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После приведения левого блока (матрицы A) к ступенчатому виду получим следующую матрицу:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (A'S).$$

Канонический вид квадратичной формы определяется числами, стоящими на главной диагонали матрицы A':

$$Q(x) = \widetilde{Q}(y) = y_1^2 + y_2^2.$$

Соответствующая замена переменных определяется матрицей S^T:

$$x = S^T y, \quad S^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученный вывод соответствует приведенным выше результатам.

Рассмотрим теперь применение этого алгоритма в примере 2.

Квадратичная форма имеет вид

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2.$$

Матрица A данной квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -0{,}5 \\ -1 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь не выполнено условие Якоби, поэтому, как отмечалось выше, сначала необходимо произвести перенумерацию переменных $x_1 \longleftrightarrow x_3$, что соответствует следующему преобразованию координат:

$$x_1 = y_3, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_1, \quad x = S_1 y, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате этого преобразования квадратичная форма примет вид

$$Q(x) = Q_1(y) = y_1^2 - y_1y_2 - 2y_1y_3 + y_2^2 + 2y_2y_3 + y_3^2,$$

а матрица A_1 квадратичной формы в новых переменной будет иметь вид

$$A_1 = (S_1)^T AS = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & -1 \\ -0{,}5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь условие Якоби выполнено, и мы переходим к следующему этапу. Составляем блочную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и приводим ее к требуемому виду:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = (A'S_2).$$

Канонический вид квадратичной формы определяется числами, стоящими на главной диагонали матрицы A':

$$Q_1(y) = Q_2(z) = z_1^2 + \frac{3}{4}z_2^2 - \frac{1}{3}z_3^2.$$

Соответствующая замена переменных определяется матрицей $(S_2)^T$:

$$y = (S_2)^T z, \quad (S_2)^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итоговое преобразование координат имеет вид

$$x = Sz, \quad S = S_1(S_2)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Осталось проверить равенство $A' = S^T AS$, где

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

— матрица канонического вида нашей квадратичной формы. Следующие вычисления показывают справедливость указанного равенства:

$$S^T AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = A'.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найдите методом Якоби канонический вид следующих квадратичных форм и вычислите матрицы соответствующих преобразований методом присоединенной матрицы.

2.1. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

2.2. $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

2.3. $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

2.4. $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

§ 3. Закон инерции вещественных квадратичных форм. Знакоопределенность вещественных квадратичных форм

1. Закон инерции

Рассмотрим вещественные (действительные) квадратичные формы, коэффициенты которых являются действительными числами, а переменные принимают действительные значения. Как следует из изложенного выше материала, любую вещественную квадратичную форму можно привести к каноническому виду при помощи вещественной линейной невырожденной замены переменных.

Определение. Количество положительных (отрицательных) коэффициентов в каноническом виде называется положительным (отрицательным) *индексом* квадратичной формы, а разность положительного и отрицательного индексов называется сигнатурой квадратичной формы.

Например, если квадратичная форма имеет канонический вид $\widetilde{Q}(z) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$, то ее положительный индекс равен 2, отрицательный индекс равен 1 и сигнатура равна 1.

Выше мы показали, что количество ненулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы равно рангу r квадратичной формы (рангу ее матрицы A). Перенумеруем переменные так, чтобы в каноническом виде квадратичной формы первыми были p слагаемых с положительными коэффициентами, затем $r - p$ слагаемых с отрицательными коэффициентами, а остальные слагаемые были с нулевыми коэффициентами:

$$\widetilde{Q}(z) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_p z_p^2 + \lambda_{p+1} z_{p+1}^2 + \lambda_{p+2} z_{p+2}^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2,$$
$$\lambda_i > 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant p, \quad \lambda_i < 0, \quad p+1 \leqslant i \leqslant r.$$

Если сделать невырожденную замену переменных

$$y_i = \begin{cases} \dfrac{z_i}{\sqrt{|\lambda_i|}}, & 1 \leqslant i \leqslant r, \\ z_i, & i > r, \end{cases}$$

то получим нормальный вид квадратичной формы

$$\widetilde{Q}(z) = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - z_{p+2}^2 - \ldots - z_r^2,$$

в котором ненулевые коэффициенты равны либо 1, либо -1.

Из четырех величин: ранга, положительного и отрицательного индексов и сигнатуры — достаточно знать любые две, чтобы вычислить остальные. Например, если известны ранг r и положительный индекс p, то отрицательный индекс равен $r-p$, а сигнатура равна $\sigma = p-(r-p) = 2p-r$.

Следующую теорему называют *законом инерции квадратичных форм*.

Теорема. *Ранг, положительный и отрицательный индексы, а также сигнатура вещественной квадратичной формы не зависят от действительной невырожденной линейной замены переменных, приводящей квадратичную форму к каноническому виду.*

Из этой теоремы следует, что два канонических вида одной и той же квадратичной формы имеют:

а) одинаковое количество ненулевых слагаемых (которое определяется рангом квадратичной формы);

б) одинаковое количество слагаемых одного знака.

2. Знакоопределенные квадратичные формы

Определение. Вещественная квадратичная форма $Q(x) = x^T Ax$ называется *положительно* (*отрицательно*) *определенной*, если $Q(x) > 0$ ($Q(x) < 0$) для любых $x \neq 0$. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются определенными (знакоопределенными). Если для любых значений x выполняется неравенство $Q(x) \geqslant 0$ ($Q(x) \leqslant 0$), то квадратичная форма называется неотрицательно (неположительно) определенной. В этом случае говорят, что квадратичная форма полуопределенная. Если же квадратичная форма принимает как положительные, так и отрицательные значения, то она называется неопределенной (знакопеременной). Определенность и полуопределенность квадратичных форм обозна-

чается неравенствами $Q(x) > 0$, $Q(x) < 0$, $Q(x) \geqslant 0$, $Q(x) \leqslant 0$ соответственно.

Поскольку каждой вещественной квадратичной форме соответствует ее матрица, эта терминология переносится на действительные симметрические матрицы.

Определение. Симметричная матрица A называется *положительно определенной*, если такой является соответствующая квадратичная форма $x^T Ax$. Определенность и полуопределенность симметрической матрицы обозначаются неравенствами $A > 0$, $A < 0$, $A \geqslant 0$, $A \leqslant 0$ соответственно.

Пример 1. Исследуйте знакоопределенность квадратичных форм:

1) $Q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$; 2) $Q(x) = x_2^2$; 3) $Q(x) = 2x_1x_2$.

Решение. 1. Выделив полный квадрат, получаем для любого $x \neq 0$ неравенство $Q(x_1) = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 > 0$. Следовательно, данная квадратичная форма является положительно определенной.

2. Квадратичная форма $Q(x) = x_2^2$ не является положительно определенной, так как $Q(1, 0) = 0$ для $x = (1, 0) \neq 0$. В силу неравенства $Q(x) = x_2^2 \geqslant 0$ эта форма неотрицательно определенная.

3. Квадратичная форма $Q(x) = 2x_1x_2$ неопределенная, так как она может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Например, $Q(1, 1) = 2 > 0$, $Q(1, -1) = -2 < 0$.

Замечания. 1. Положительно определенная квадратичная форма приводится к следующему нормальному виду:

$$\widetilde{Q}(z) = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2,$$

т. е. $p = r = \sigma = n$. Положительный индекс (p), ранг (r) и сигнатура (σ) равны числу переменных (n). Отрицательный индекс равен нулю. Согласно закону инерции они не изменяются при невырожденной замене переменных.

2. Дискриминант положительно определенной квадратичной формы больше нуля, т. е. $\det A > 0$. Действительно, матрица нормального вида положительно определенной квадратичной формы единичная. Поскольку матрица A положительно определенной квадратичной формы конгруэнтна единичной матрице $E = S^T AS$, получаем, что $\det A(\det S)^2 = 1$, т. е. $\det A > 0$.

3. Неотрицательно определенная квадратичная форма приводится к нормальному виду

$$\widetilde{Q}(z) = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2,$$

т. е. положительный индекс (p), ранг (r) и сигнатура (σ) равны, но меньше количества переменных ($p = r = \sigma < n$). Отрицательный индекс здесь равен нулю.

4. Для отрицательно (и неположительно) определенных квадратичных форм справедливы аналогичные утверждения, так как знаки форм $Q(x)$ и $-Q(x)$ противоположны.

3. Критерий Сильвестра

Теорема (критерий Сильвестра)**.** *Для того чтобы вещественная квадратичная форма $Q(x) = x^T Ax$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры ее матрицы были положительны*:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Для отрицательной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров ее матрицы чередовались начиная с отрицательного:

$$\Delta_1 = a_{11} < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots,$$

$$(-1)^k \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots,$$

$$(-1)^n \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

В самом деле, рассмотрим первое утверждение теоремы (о положительной определенности). Достаточность указанных условий следует из теоремы Якоби, так как при выполнении неравенств

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ \ldots, \ \Delta_n > 0$$

квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$\widetilde{Q}(y) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2, \quad \Delta_0 = 1$$

с положительными коэффициентами при квадратах переменных. Ясно, что $\widetilde{Q}(y) > 0$ для всех $y \neq 0$, т. е. $Q(x) = Q(Sy) = \widetilde{Q}(y) > 0$ для всех $x \neq 0$.

Для доказательства необходимости рассмотрим квадратичную форму $Q_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ переменных $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Матрица A_k этой формы представляет собой левый верхний блок матрицы $A = \begin{pmatrix} A_k & * \\ * & * \end{pmatrix}$ исходной квадратичной формы (звездочкой, как обычно, обозначены блоки, не существенные для рассуждений). Из положительной определенности $Q(x)$ следует положительная определенность формы $Q_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Из этого следует, что $\det A_k > 0$ (см. п. 2 замечаний), но $\Delta_k = \det A_k$ — угловой минор k-го порядка матрицы A. Таким образом, $\Delta_k > 0$ для $1 \leqslant k \leqslant n$, что и требовалось доказать. Второе утверждение сводится к первому, если рассмотреть квадратичную форму $-Q(x)$.

4. Критерий полуопределенности квадратичной формы

Теорема (критерий полуопределенности квадратичной формы)**.** *Для того чтобы квадратичная форма $Q(x) = x^T Ax$ была неотрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы A были неотрицательны. Под главными минорами понимаются миноры, у которых элементы главной диагонали их матрицы расположены на главной диагонали основной матрицы.*

Для неположительной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры четного порядка были неотрицательны, а нечетного порядка были неположительны.

Пример 2. Выясните знакоопределенность квадратичных форм с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A положительно определенная ($A > 0$), так как ее угловые миноры положительны: $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 1$. Следовательно, квадратичная форма $Q(x) = x^T Ax = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$ положи-

тельно определенная (см. критерий Сильвестра). Этот вывод подтверждается выделением полных квадратов:

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2,$$

т. е. квадратичная форма знакоопределенная.

Матрица B не является положительно или отрицательно определенной, так как ее угловые миноры не удовлетворяют критерию Сильвестра: $\Delta_1 = -1 < 0$, $\Delta_2 = 0$.

Проверим условия полуопределенности. У этой матрицы имеется два главных минора первого порядка, оба они равны -1. Единственный минор второго порядка (он же главный) равен нулю. Таким образом, главные миноры нечетного порядка неположительны, а четного порядка — неотрицательны. Следовательно, данная квадратичная форма неположительно определенная ($B \leqslant 0$). Этот вывод подтверждается выделением полного квадрата:

$$Q(x) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 = -(x_1 - x_2)^2,$$

т. е. для всех x, у которых $x_1 = x_2$, справедливо равенство $Q(x) = 0$, а для остальных x выполняется неравенство $Q(x) < 0$.

Матрица C не является положительно или отрицательно определенной, так как ее угловые миноры не удовлетворяют критерию Сильвестра: $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -1 < 0$, $\Delta_3 = 1 > 0$. Кроме того, эти миноры не удовлетворяют критерию полуопределенности. Следовательно, матрица C неопределенная. Тогда и квадратичная форма $Q(x) = x^T Cx = 2x_1x_2 - x_3^2$ неопределенная. Действительно, выпишем главные миноры первого порядка:

$$M_{11} = 0, \quad M_{22} = 0, \quad M_{33} = -1;$$

главные миноры второго порядка:

$$M_{12}^{12} = -1, \quad M_{13}^{13} = 0, \quad M_{23}^{23} = 0;$$

главный минор третьего порядка:

$$M_{123}^{123} = 1.$$

Так как среди главных миноров есть хотя бы один отрицательный, квадратичная форма не является неотрицательно определенной. Поскольку среди главных миноров четного порядка есть отрицательный (кроме того, среди главных миноров нечетного порядка есть положительный), квадратичная форма не является неположительно

определенной. Нетрудно заметить, что если $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$, то $Q(x) = 2x_1x_2 - x_3^2 = -1 < 0$, а если $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$, то $Q(x) = 2 > 0$, т. е. квадратичная форма принимает как положительные, так и отрицательные значения, следовательно, является знакопеременной (неопределенной).

Задачи для самостоятельной работы

Установите знакоопределенность следующих квадратичных форм двумя способами: приведением к каноническому виду и с помощью критерия Сильвестра. Вычислите ранг, положительный индекс и сигнатуру квадратичных форм.

3.1. $x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$. **3.2**. $-4x_1x_2$.

3.3. $x_1^2 - 10x_1x_2 + 26x_2^2$. **3.4**. $x_1^2 + 16x_1x_2 + 56x_2^2$.

3.5. $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

3.6. $-x_1^2 - 5x_2^2 - 11x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

3.7. $\frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5x_4^2 + 2x_1x_4 - 2x_2x_3$.

Ответы к задачам главы 9

1.1. $y_1^2 + 4y_2^2 - 9y_3^2$, $x = Sy$, $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2. $4y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, $x = Sy$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, $x = Sy$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4. $2y_1^2 - 3y_2^2 + 3y_3^2$, $x = Sy$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.5. $-12y_1^2 - 4y_2^2 + 4y_3^2$, $x = Sy$, $S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.6. $y_1^2 - y_2^2$, $x = Sy$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.1. $y_1^2-3y_2^2+\frac{7}{3}y_3^2$, $x=Sy$, $S=\begin{pmatrix}1 & -2 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2.2. $y_1^2-3y_2^2-\frac{8}{3}y_3^2$, $x=Sy$, $S=\begin{pmatrix}1 & -1 & -\frac{5}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2.3. $y_1^2-y_2^2$, $x=Sy$, $S=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2.4. $y_1^2-2y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2$, $x=Sy$, $S=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

3.1. $x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2=y_1^2+3y_2^2>0$, $y_1=x_1-x_2$, $y_2=x_2$, $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, $\Delta_1=1$, $\Delta_2=3$, $r=2$, $p=2$, $\sigma=2$.

3.2. $-4x_1x_2=-4y_1^2+4y_2^2$, $y_1=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_2=\frac{x_1-x_2}{2}$, $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, $\Delta_1=0$, $\Delta_2=-4$, $r=2$, $p=1$, $\sigma=0$.

3.3. $x_1^2-10x_1x_2+26x_2^2=y_1^2+y_2^2>0$, $y_1=x_1-5x_2$, $y_2=x_2$, $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -5 & 26\end{pmatrix}$, $\Delta_1=1$, $\Delta_2=1$, $r=2$, $p=2$, $\sigma=2$.

3.4. $x_1^2+16x_1x_2+56x_2^2=y_1^2-8y_2^2$, $y_1=x_1+8x_2$, $y_2=x_2$, $A=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 8 & 56\end{pmatrix}$, $\Delta_1=1$, $\Delta_2=-8$, $r=2$, $p=1$, $\sigma=0$.

3.5. $x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3=y_1^2+y_2^2\geqslant 0$, $y_1=x_1-x_2+x_3$, $y_2=x_2-x_3$, $y_3=x_3$, $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $\Delta_1=1$, $\Delta_2=1$, $\Delta_3=0$, $r=2$, $p=2$, $\sigma=2$. Все главные миноры матрицы квадратичной формы неотрицательны.

3.6. $-x_1^2-5x_2^2-11x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=-y_1^2-y_2^2-y_3^2<0$, $y_1=x_1-2x_2-x_3$, $y_2=x_2-3x_3$, $y_3=x_3$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -5 & 1\\ 1 & 1 & -11\end{pmatrix}$, $\Delta_1=-1$, $\Delta_2=1$, $\Delta_3=-1$, $r=3$, $p=0$, $\sigma=-3$.

3.7. $\frac{1}{4}x_1^2+x_2^2+x_3^2+5x_4^2+2x_1x_4-2x_2x_3=y_1^2+y_2^2+y_3^2\geqslant 0$, $y_1=\frac{1}{2}x_1+2x_4$, $y_2=x_2-x_3$, $y_3=x_4$, $y_4=x_3$, $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $\Delta_1=\frac{1}{4}$, $\Delta_2=\frac{1}{4}$, $\Delta_3=0$, $\Delta_4=0$, $r=3$, $p=3$, $\sigma=3$. Все главные миноры матрицы квадратичной формы неотрицательны.

Глава 10

Линейные преобразования линейных пространств

§1. Преобразование координат вектора при замене базиса

1. Координаты вектора в заданном базисе

Напомним, что линейным (векторным) пространством называется множество V произвольных элементов, называемых векторами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число. Таким образом, любым двум векторам u и v поставлен в соответствие вектор $u+v$, называемый суммой векторов u и v, любому вектору V и любому числу λ из поля действительных чисел $\mathbb{R}$ поставлен в соответствие вектор λv, называемый произведением вектора v на число λ. При этом выполняются аксиомы линейного пространства (см. главу, посвященную векторной алгебре).

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства V. Каждый вектор $v \in V$ можно разложить по базису, т. е. представить в виде

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n,$$

причем коэффициенты $v_1, v_2, \ldots, v_n$ в разложении определяются однозначно. Эти коэффициенты $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называются координатами вектора v в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (или относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$). Координаты $v_1, v_2, \ldots, v_n$ вектора v будем рассматривать как упорядоченный набор чисел, представленный в виде вектор-столбца (матрицы-столбца)

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix} = (v_1 v_2 \ldots v_n)^T,$$

который мы будем называть координатным столбцом вектора v (в данном базисе). Вектор и его координатный столбец обозначаются одной и той же буквой.

Если базис (как упорядоченный набор векторов) представить в виде символической матрицы-строки $e = (e_1 e_2 \ldots e_n)$, то разложение вектора v по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ можно записать следующим образом:

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n = (e_1 e_2 \ldots e_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix} = ev.$$

Здесь умножение символической матрицы-строки e на числовую матрицу-столбец v производится по правилам умножения матриц.

При необходимости, если речь идет о разных базисах, у координатного столбца указывается обозначение базиса, относительно которого получены координаты, например, v — координатный столбец вектора v в базисе $e = (e_1 e_2 \ldots e_n)$.

Из определения базиса линейного пространства следует, что равные векторы имеют равные соответствующие координаты (в одном и том же базисе), и наоборот, если координаты векторов (в одном и том же базисе) соответственно равны, то равны и сами векторы.

Линейные операции в координатной форме

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства V, и пусть векторы u и v имеют в этом базисе координаты $u = (u_1 u_2 \ldots u_n)^T$ и $(v_1 v_2 \ldots v_n)^T$, соответственно, т. е.

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \ldots + u_n e_n, \quad v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$u + v = (u_1 + v_1) e_1 + (u_2 + v_2) e_2 + \ldots + (u_n + v_n) e_n,$$

т. е. при сложении векторов их координаты складываются.

Подобным образом получаем

$$\lambda v = (\lambda v_1) e_1 + (\lambda v_2) e_2 + \ldots + (\lambda v_n) e_n, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

т. е. при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число. Разумеется, все координаты рассматриваются в одном базисе $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Замечания. 1. Нетрудно показать, что координатный столбец линейной комбинации $\alpha a + \beta b + \ldots + \omega z$ векторов $a, b, \ldots, z$ равен линейной комбинации координатных столбцов этих векторов.

2. Если система векторов линейно зависима (линейно независима), то их координатные столбцы, рассматриваемые относительно одного базиса, образуют линейно зависимую (линейно независимую) систему.

3. Все свойства линейной зависимости и линейной независимости векторов переносятся без изменений на их координатные столбцы, рассматриваемые в одном и том же базисе. И наоборот, свойства матриц-столбцов переносятся на векторы, если матрицы-столбцы считать их координатными столбцами.

4. Выбрав в n-мерном вещественном линейном пространстве V некоторый базис, можно установить взаимно однозначное соответствие: каждому вектору поставить в соответствие его координатный столбец (в выбранном базисе), и наоборот, каждому координатному столбцу поставить в соответствие вектор. Другими словами, любой фиксированный базис n-мерного вещественного линейного пространства позволяет установить взаимно однозначное соответствие между всеми векторами вещественного пространства V и всеми столбцами n-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$. Для n-мерного комплексного линейного пространства V аналогичное взаимно однозначное соответствие устанавливается с пространством $\mathbb{C}^n$.

Преобразование координат вектора при замене базиса. Матрица перехода

Пусть заданы два базиса пространства V:

$$(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \quad \text{и} \quad (e') = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n).$$

Базис (e) будем условно называть «старым», а базис (e') — «новым». Пусть известны разложения каждого вектора нового базиса по старому базису:

$$e'_i = s_{1i}e_1 + s_{2i}e_2 + \ldots + s_{ni}e_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Записывая по столбцам координаты векторов $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ в базисе $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, составляем матрицу:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Квадратная матрица S, составленная из координатных столбцов векторов нового базиса $(e') = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ в старом базисе $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, называется *матрицей перехода* от старого базиса к новому. При помощи матрицы перехода S предыдущие формулы можно записать в следующем виде:

$$(e'_1 e'_2 \ldots e'_n) = (e_1 e_2 \ldots e_n)S \longleftrightarrow (e') = (e)S.$$

Умножение символической матрицы-строки $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ на матрицу перехода S производится по правилам умножения матриц.

Пусть в базисе (e) вектор v имеет координаты $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, а в базисе (e') — координаты $(v'_1, v'_2, \ldots, v'_n)$, т. е.

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n,$$
$$v = v'_1 e'_1 + v'_2 e'_2 + \ldots + v'_n e'_n.$$

Соответствующие вектор-столбцы ниже будем обозначать следующим образом:

$$\underset{e}{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T, \quad \underset{e'}{v} = (v'_1, v'_2, \ldots, v'_n)^T.$$

Подставляя в правую часть равенства $v = v'_1 e'_1 + v'_2 e'_2 + \ldots + v'_n e'_n$ выражения векторов $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ через векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$, получаем $\underset{e}{v} = S\underset{e'}{v}$ — два разложения вектора v в одном и том же базисе (e). Коэффициенты этих разложений должны совпадать, так как это координаты одного и того же вектора в одном базисе. Поэтому

$$\underset{e}{v} = S\underset{e'}{v} \;\leftrightarrow\; \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & \ldots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \ldots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \ldots \\ v'_n \end{pmatrix}.$$

Эта формула устанавливает связь координат вектора в разных базисах: координатный столбец вектора в старом базисе получается в результате умножения матрицы перехода от старого к новому базису на координатный столбец вектора в новом базисе.

Матрицу перехода S от базиса (e) к базису (e') ниже будем обозначать как $\underset{e\to e'}{S}$. Таким образом, предыдущие формулы можно записать так:

$$e' = e\,\underset{e\to e'}{S}, \quad \underset{e}{v} = \underset{e\to e'}{S}\,\underset{e'}{v}.$$

Пример 1. В пространстве $P_2(\mathbb{R})$ многочленов степени не выше второй даны две системы многочленов:

$$e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2, \quad f_1 = (x+1)^2, \quad f_2 = (x-1)^2, \quad f_3 = x^2.$$

Докажите, что каждая из этих систем является базисом пространства $P_2(\mathbb{R})$. Найдите матрицу $\underset{e\to f}{S}$ перехода от базиса (e) к базису (f). Определите координаты квадратного трехчлена $p = x^2 - x + 1$ относительно базисов (e) и (f).

Решение. Система многочленов $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$ является стандартным базисом пространства $P_2(\mathbb{R})$. Докажем, что система

$$f_1 = (x+1)^2, \quad f_2 = (x-1)^2, \quad f_3 = x^2$$

является базисом. Поступим следующим образом. Найдем координатные столбцы этих многочленов (f) в стандартном базисе. Раскладывая по базису (e), получаем

$$f_1 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3,$$
$$f_2 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = 1 \cdot e_1 - 2 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3,$$
$$f_3 = x^2 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3.$$

Составим из этих столбцов матрицу

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 3, так как $\det S = -4 \neq 0$. Следовательно, столбцы

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

линейно независимы, а тогда и многочлены f_1, f_2, f_3 линейно независимы. Итак, многочлены f_1, f_2, f_3 являются базисом пространства $P_2(\mathbb{R})$, а матрица $S = \underset{e \to f}{S}$ — искомая матрица перехода от базиса (e) к базису (f). Осталось найти координаты многочлена $p = x^2 - x + 1$ в этих базисах. Раскладывая $p = x^2 - x + 1$ по базисам, находим

$$p = x^2 - x + 1 = 1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3, \quad \underset{e}{p} = (1, -1, 1)^T,$$
$$p = x^2 - x + 1 = \frac{(x+1)^2 + 3(x-1)^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot f_1 + \frac{3}{4} \cdot f_2 + 0 \cdot e_3,$$
$$\underset{f}{p} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0\right)^T.$$

Проверим результат, вычисляя $\underset{e}{p}$ по указанной выше формуле:

$$\underset{e}{p} = S \underset{f}{p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Результаты совпадают.

2. Свойства матрицы перехода от одного базиса к другому

1. Пусть имеются три базиса $(e), (f), (g)$ пространства V и известны матрицы перехода: $\underset{e\to f}{S}$ — от базиса (e) к базису (f); $\underset{f\to g}{S}$ — от (f) к (g); $\underset{e\to g}{S}$ — от (e) к (g).

Тогда справедливо равенство

$$\underset{e\to g}{S} = \underset{e\to f}{S}\,\underset{f\to g}{S}.$$

Действительно, запишем связь для данных базисов:

$$f = e\,\underset{e\to f}{S}, \quad g = f\,\underset{f\to g}{S}, \quad g = e\,\underset{e\to g}{S}.$$

Подставляя первое выражение во второе равенство, получаем

$$g = e\,\underset{e\to f}{S}\,\underset{f\to g}{S}.$$

Сравнивая с третьим равенством, приходим к искомому равенству

$$\underset{e\to g}{S} = \underset{e\to f}{S}\,\underset{f\to g}{S}.$$

2. Если S — матрица перехода от базиса (e) к базису (f), то матрица S обратима и обратная матрица S^{-1} является матрицей перехода от базиса (f) к базису (e). Координаты вектора v в базисах (e) и (f) связаны формулами

$$\underset{e}{v} = S\underset{f}{v}, \quad \underset{f}{v} = S^{-1}\underset{e}{v}.$$

В самом деле, пусть Q — матрица перехода от базиса (f) к базису (e). Учитывая, что матрица перехода от базиса (e) к базису (e) единичная, применяем свойство 1 к трем базисам $(e), (f), (e)$:

$$E = SQ.$$

Для трех базисов $(f), (e), (f)$ аналогично получаем

$$E = QS.$$

Следовательно, $Q = S^{-1}$.

3. Всякая обратимая квадратная матрица n-го порядка может служить матрицей перехода от одного базиса n-мерного линейного пространства к другому базису.

Пример 2. В двумерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^2$ даны два базиса:

$$f_1 = (3, 2), \quad f_2 = (1, 1) \quad \text{и} \quad g_1 = (1, 2), \quad g_2 = (-1, 1).$$

Найдите матрицу $\underset{f\to g}{S}$ перехода от базиса (f) к базису (g) и координаты вектора $v = (6, 9)$ в каждом из базисов.

Решение. Рассмотрим стандартный базис $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ пространства $\mathbb{R}^2$. Найдем координаты векторов f_1, f_2, g_1, g_2 в этом стандартном базисе. Раскладывая векторы f_1, f_2, g_1, g_2 по векторам базиса (e), очевидно, получим

$$f_1 = 3e_1 + 2e_2, \quad f_2 = e_1 + e_2, \quad g_1 = e_1 + 2e_2, \quad g_2 = -e_1 + e_2.$$

В стандартном базисе (e) пространства $\mathbb{R}^2$ имеем вектор-столбцы

$$f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из этих вектор-столбцов составим матрицы перехода от стандартного базиса (e) к данным базисам (f) и (g):

$$\underset{e\to f}{S} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{e\to g}{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

По свойству 1 матриц перехода имеем $\underset{f\to g}{S} = \underset{f\to e}{S}\,\underset{e\to g}{S}$. По свойству 2 получаем $\underset{f\to e}{S} = (\underset{e\to f}{S})^{-1}$. Поэтому

$$\underset{f\to g}{S} = \underset{f\to e}{S}\,\underset{e\to g}{S} = (\underset{e\to f}{S})^{-1}\,\underset{e\to g}{S} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

В стандартном базисе (e) пространства $\mathbb{R}^2$ найдем координаты вектор-столбца $\underset{e}{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$. Найдем координаты этого вектора в базисе (f) (по свойству 2 матрицы перехода):

$$\underset{f}{v} = (\underset{e\to f}{S})^{-1}\underset{e}{v} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

В самом деле, справедливо разложение

$$\underset{e}{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 15\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем координаты вектора v в базисе (g) двумя способами:

$$\underset{g}{v} = \left(\underset{f\to g}{S}\right)^{-1}\underset{f}{v} = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-3\\ 15\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & 2\\ -4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ -1\end{pmatrix},$$

$$\underset{g}{v} = \left(\underset{e\to g}{S}\right)^{-1}\underset{e}{v} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}6\\ 9\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ -1\end{pmatrix}.$$

Полученный результат подтверждает разложение:

$$v = \begin{pmatrix}6\\ 9\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} = 5g_1 + (-1)g_2.$$

§ 2. Линейные операторы. Матрица линейного оператора

Ниже мы рассмотрим линейные преобразования (операторы) линейных пространств.

Определение. Преобразование H линейного пространства V называется *линейным оператором*, если:

1. $H(v)\in V\ \forall v\in V$;
2. $H(u+v)=H(u)+H(v)\ \forall u, v\in V$;
3. $H(\lambda v)=\lambda H(v)\ \forall v\in V,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

Заметим, что образом нулевого элемента пространства V должен быть также нулевой элемент этого пространства. Это следует из указанного выше третьего свойства линейных операторов. Действительно, при $v\in V,\ \lambda=0$ из третьего свойства следует, что $H(0)=H(0v)=0H(v)=0$.

Пусть в пространстве V задан некоторый базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда матрицей линейного оператора H в данном базисе называется квадратная матрица A размера $n\times n$, столбцами которой являются координатные вектор-столбцы векторов $H(e_1), H(e_2), \ldots, H(e_n)$ в указанном базисе. Таким образом, если

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

то

$$H(e_k) = a_{1k}e_1 + a_{2k}e_2 + \ldots + a_{nk}e_n,\quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Сокращенно можно записать это равенство так:

$$(H(e_1), H(e_2), \ldots, H(e_n)) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)A.$$

Координаты вектора $y = H(x)$, $x, y \in V$, в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ выражаются через координаты вектора x в том же базисе следующим образом:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

или, в матричной записи,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Определение. *Суммой* $H_1 + H_2$ линейных операторов H_1 и H_2 линейного пространства V называется преобразование, определяемое формулой

$$(H_1 + H_2)v = H_1 v + H_2 v, \quad v \in V.$$

Определение. *Произведением* $H_1 H_2$ линейных операторов H_1 и H_2 линейного пространства V называется преобразование, определяемое формулой

$$(H_1 H_2)v = H_1(H_2 v), \quad v \in V.$$

Определение. *Произведением* αH линейного оператора H линейного пространства V *на число* $\alpha \in \mathbb{R}$ называется преобразование, определяемое формулой

$$(\alpha H)v = \alpha(Hv), \quad v \in V.$$

Определение. Два оператора H_1 и H_2 линейного пространства V считаются *равными*: $H_1 = H_2$, если $H_1 v = H_2 v \ \forall v \in V$.

Нетрудно видеть, что если матрицы A_1 и A_2 являются матрицами операторов H_1 и H_2 в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то матрицы $A_1 + A_2$ и $A_1 A_2$ являются матрицами операторов $H_1 + H_2$ и $H_1 H_2$ соответственно в том же базисе. Аналогично если матрица A является матрицей оператора H в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то матрица αH является матрицей оператора αH в том же базисе.

Пусть в пространстве V заданы два базиса $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, и пусть матрица $S = \underset{e \to f}{S}$ является матрицей перехода от первого базиса ко второму (столбцы матрицы S являются координатными столбцами разложения векторов второго базиса по векторам первого базиса). Пусть, кроме того, матрицы A_e и A_f являются

матрицами оператора H в базисах e и f соответственно. Тогда имеет место равенство

$$A_f = S^{-1}A_eS.$$

Пример 1. Выясните, какие из следующих преобразований Q_k вещественного трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ являются линейными, и в случае линейности найдите их матрицы в том же базисе, в котором заданы координаты векторов x и $Q_k(x)$:

$$Q_1(x) = (x_1 + x_3, 3x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 - 4x_3);$$
$$Q_2(x) = (x_1 + 2, -x_2, x_1 - 4x_3 - 1);$$
$$Q_3(x) = (x_1 + x_2^2, 3x_1 - x_2, \sqrt[3]{x_1}).$$

Решение. Преобразование Q_1.

В этом случае для каждого вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ пространства $\mathbb{R}^3$ координатный столбец вектора $y = Q_1(x)$ имеет вид

$$y = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что выполняется матричное равенство

$$y = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Ax,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, преобразование Q_1 является линейным, и его матрицей служит матрица A.

Преобразование Q_2.

В этом случае можно заметить, что образом нулевого элемента $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ пространства $\mathbb{R}^3$ является вектор $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Но, как отмечалось выше, это противоречит третьему пункту определения линейного оператора. Следовательно, данное преобразование не является линейным. Вместе с тем такие преобразования играют большую роль

в различных задачах. Их также можно представить в матричном виде. В этом случае для каждого вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ пространства $\mathbb{R}^3$ координатный столбец вектора $y = Q_1(x)$ имеет вид

$$y = \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ -x_2 \\ x_1 - 4x_3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ x_1 - 4x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = Ax + b,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Такие отображения обычно называют линейными неоднородными отображениями.

Преобразование Q_3.

Данное преобразование не является линейным оператором, поскольку нарушаются второй и третий пункты определения линейных операторов. Действительно, векторы

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

связаны соотношением $v = 2u$. При этом

$$Q_3(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_3(v) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Однако согласно определению линейного оператора должно выполняться равенство $Q_3(v) = Q_3(2u) = 2Q_3(u)$, что противоречит предыдущим равенствам.

Пример 2. Покажите, что существует единственное линейное преобразование Q, которое переводит векторы

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

соответственно в векторы

$$a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу A преобразования Q в том же базисе, в котором заданы координаты указанных векторов.

Решение. Очевидно, что для матрицы A должны выполняться равенства $Aa_1 = a_2$, $Ab_1 = b_2$, $Ac_1 = c_2$. Следовательно, выполняется матричное равенство $AX = Y$, где столбцами матрицы X являются вектор-столбцы a_1, b_1, c_1, а столбцами матрицы Y являются вектор-столбцы a_2, b_2, c_2:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что матрица X является невырожденной ($\det X = 2$). Из равенства $AX = Y$ получаем $A = YX^{-1}$. Вычисляем матрицу X^{-1}. Это можно сделать, например, методом присоединенной матрицы:

$$(XE) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -0{,}5 & -1{,}5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем

$$X^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем

$$A = YX^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 8 \\ 8 & -1 & 7 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы два базиса: $e=(e_1, e_2, e_3)$ и $f=(f_1, f_2, f_3)$, причем $f_1=e_1+e_2$, $f_2=e_1+e_3$, $f_3=e_2+e_3$. Пусть оператор Q имеет в базисе e матрицу

$$A_e=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого оператора в базисе f.

Решение. Составим матрицу $S=\underset{e\to f}{S}$ перехода от базиса e к базису f. Столбцами этой матрицы будут служить координатные векторстолбцы векторов f_1, f_2, f_3 в базисе e:

$$S=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Матрицей оператора Q в базисе f будет матрица

$$A_f=S^{-1}AS=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 3 & -3\end{pmatrix}.$$

Пример 4. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы два базиса:

$$e=(e_1, e_2, e_3),\ \ e_1=(8,-6,7),\ \ e_2=(-16,7,-13),\ \ e_3=(9,-3,7);$$
$$f=(f_1, f_2, f_3),\ \ f_1=(1,-2,1),\ \ f_2=(3,-1,2),\qquad f_3=(2,1,2).$$

Линейный оператор H в базисе e имеет матрицу

$$A=\begin{pmatrix}1 & -18 & 15\\ -1 & -22 & 20\\ 1 & -25 & 22\end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу B данного оператора в базисе f.

Решение. Имеет место равенство $B=S^{-1}AS$, где S — матрица перехода от базиса e к базису f.

Пусть g — стандартный базис, в котором заданы векторы базисов e и f. Тогда имеет место равенство

$$S = \underset{e\to f}{S} = S_1S_2, \quad S_1 = \underset{e\to g}{S}, \quad S_2 = \underset{g\to f}{S}, \quad \underset{e\to g}{S} = (\underset{g\to e}{S})^{-1},$$

$$\underset{g\to e}{S} = \begin{pmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}, \quad \underset{g\to f}{S} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$B = S^{-1}AS = (S_1S_2)^{-1}A(S_1S_2) = QAQ^{-1},$$
$$Q = (S_1S_2)^{-1} = S_2^{-1}S_1^{-1}.$$

Вычислим матрицу

$$Q = S_2^{-1}S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & -5 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

После этого вычисляем матрицу

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

И наконец, вычисляем искомую матрицу B:

$$B = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. В пространстве $\mathbb{R}^2$ заданы два базиса:

$$e = (e_1, e_2), \quad e_1 = (-3, 7), \quad e_2 = (1, -2);$$
$$f = (f_1, f_2), \quad f_1 = (6, -7), \quad f_2 = (-5, 6).$$

Линейный оператор H_1 в базисе e имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а оператор H_2 в базисе f имеет матрицу $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу C оператора $H = H_1H_2$ в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

Решение. Пусть g — стандартный базис, в котором заданы координаты всех векторов. Тогда имеем следующие равенства:

$$\underset{g}{H} = \underset{g}{H_1}\underset{g}{H_2},$$

$$\underset{g}{H_1} = (\underset{e\to g}{S})^{-1}\underset{e}{H_1}\underset{e\to g}{S} = \underset{e\to g}{S}\underset{e}{H_1}(\underset{g\to e}{S})^{-1} = \begin{pmatrix}-3 & 1\\ 7 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 7 & -2\end{pmatrix}^{-1},$$

$$\underset{g}{H_2} = (\underset{f\to g}{S})^{-1}\underset{f}{H_2}\underset{f\to g}{S} = \underset{g\to f}{S}\underset{f}{H_2}(\underset{g\to f}{S})^{-1} = \begin{pmatrix}6 & -5\\ -7 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -5\\ -7 & 6\end{pmatrix}^{-1}.$$

Отсюда получаем

$$C = \underset{g}{H} = \begin{pmatrix}-3 & 1\\ 7 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 7 & -2\end{pmatrix}^{-1}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}6 & -5\\ -7 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -5\\ -7 & 6\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}109 & 93\\ 34 & 29\end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Докажите, что каждая из двух систем векторов является базисом, и найдите связь координат одного и того же вектора в этих двух базисах.

2.1. $e=(e_1, e_2, e_3)$, $e_1=(1, 2, 1)$, $e_2=(2, 3, 3)$, $e_3=(3, 7, 1)$, $f=(f_1, f_2, f_3)$, $f_1=(3, 1, 4)$, $f_2=(5, 2, 1)$, $f_3=(1, 1, -6)$.

2.2. $e=(e_1, e_2, e_3, e_4)$, $e_1=(1, 1, 1, 1)$, $e_2=(1, 2, 1, 1)$, $e_3=(1, 1, 2, 1)$, $e_4=(1, 3, 2, 3)$, $f=(f_1, f_2, f_3, f_4)$, $f_1=(1, 0, 3, 3)$, $f_2=(-2, -3, -5, -4)$, $f_3=(2, 2, 5, 4)$, $f_4=(-2, -3, -4, -4)$.

2.3. Как изменится матрица перехода, если:

а) поменять местами два вектора первого базиса;

б) поменять местами два вектора второго базиса;

в) записать векторы обоих базисов в обратном порядке?

2.4. Выясните, является ли преобразование $Q(x)$ линейным, и в случае линейности найдите матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором заданы координаты вектора x:

а) $Q(x)=Q(x_1, x_2, x_3)=(x_1+2x_2-x_3, -x_1-x_3, 3x_2)$;

б) $Q(x)=Q(x_1, x_2, x_3)=(x_1^2, -x_2, x_3)$.

2.5. Покажите, что дифференцирование является линейным оператором пространства всех многочленов степени не выше числа n, $n\geqslant 1$, одного неизвестного с вещественными коэффициентами. Найдите матрицу этого оператора в базисе:

а) $1, x, \ldots, x^n$; б) $1, x-c, \frac{(x-c)^2}{2!}, \ldots, \frac{(x-c)^n}{n!}$.

2.6. Линейное преобразование Q в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого преобразования в базисе:

а) e_1, e_2, e_3; б) e_1+e_3, e_2, e_1-e_3.

2.7. В пространстве $\mathbb{R}^2$ заданы два базиса: $e=(e_1, e_2)$, $e_1=(1, 1)$, $e_2=(1, 2)$ и $f=(f_1, f_2)$, $f_1=(3, 1)$, $f_2=(5, 2)$. Линейный оператор H_1 в базисе e имеет матрицу $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, а оператор H_2 в базисе f имеет матрицу $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу C оператора $H=H_1H_2$ в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

2.8. Покажите, что линейные операторы n-мерного векторного пространства относительно сложения и умножения на число сами образуют линейное векторное пространство. Найдите размерность этого пространства.

Ответы к задачам главы 10

2.1. Связь координат вектора v в указанных двух базисах задается формулой $\underset{e}{V} = \underset{e\to f}{S}\,\underset{f}{V}$; $\underset{e\to f}{S} = S_1^{-1}S_2$, где S_1 — матрица, составленная из вектор-столбцов базиса e, а S_2 — матрица, составленная из вектор-столбцов базиса f:

$$\underset{e\to f}{S} = S_1^{-1}S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

2.2. $\underset{e\to f}{S} = S_1^{-1}S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.3. а) Поменяются местами две строки;

б) поменяются местами два столбца;

в) произойдет симметричное отражение матрицы относительно ее центра.

2.4. а) Преобразование линейно. Его матрица $A_Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) преобразование не является линейным.

2.5. а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

2.6. а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 9 & 8 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 10 & 5 & -2 \\ 10 & 5 & -2 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. **2.7.** $C = \begin{pmatrix} 56 & -130 \\ 105 & -244 \end{pmatrix}$. **2.8.** n^2.

Библиографический список

1. *Ефимов Н. В.*, *Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометри. М.: Наука, 1970.
2. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2004.
4. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Добросвет, МЦНМО, 1998.
5. *Ильин В. А.*, *Поздняк Э. Г.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1984.
6. *Лобанов С. Г.*, *Бурмистрова Е. Б.* Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: учебное пособие. М.: Изд. дом ГУВШЭ, 2007.
7. *Логвенков С. А.*, *Мышкис П. А.*, *Самовол В. С.* Сборник задач по высшей математике. Учебное пособие для студентов социально-управленческих специальностей. М.: МЦНМО, 2014.
8. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. СПб.: Лань, 2007.

Оглавление

Предисловие 3

Глава 1. Векторная алгебра, линейные пространства и начала аналитической геометрии 5
§ 1. Векторная алгебра и линейные пространства 5
Задачи для самостоятельной работы 12
§ 2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов 13
Задачи для самостоятельной работы 17
§ 3. Базис, координаты, размерность линейного пространства. Ранг системы векторов 17
Задачи для самостоятельной работы 24
§ 4. Скалярное произведение. Элементы аналитической геометрии . . 25
Задачи для самостоятельной работы 32
Ответы к задачам главы 1 34

Глава 2. Матрицы и определители матриц. Системы линейных уравнений 36
§ 1. Алгебраические операции с матрицами 36
Задачи для самостоятельной работы 41
§ 2. Ранг матрицы. Определитель матрицы 42
Задачи для самостоятельной работы 49
§ 3. Обратная матрица. Матричные уравнения 50
Задачи для самостоятельной работы 55
§ 4. Системы линейных уравнений 56
Задачи для самостоятельной работы 65
Ответы к задачам главы 2 68

Глава 3. Собственные векторы и собственные значения матрицы . . . 70
§ 1. Основные понятия и теоремы 70
§ 2. Вычисление собственных векторов и собственных значений квадратной матрицы 74
Задачи для самостоятельной работы 79
Ответы к задачам главы 3 81

Глава 4. Многочленные матрицы (λ-матрицы) 83
§ 1. Основные понятия и теоремы 83
Задачи для самостоятельной работы 86
§ 2. Приведение многочленной матрицы к диагональному виду 86
Задачи для самостоятельной работы 93

§ 3. Инвариантные множители многочленной матрицы 93
Задачи для самостоятельной работы 97
Ответы к задачам главы 4 97

Глава 5. Подобие числовых матриц 98
§ 1. Свойства подобных матриц. Критерий подобия 98
§ 2. Приведение матрицы к диагональному виду при помощи преобразования подобия 99
Задачи для самостоятельной работы 106
Ответы к задачам главы 5 107

Глава 6. Элементарные делители многочленной матрицы (λ-матрицы) 108
§ 1. Основные понятия и теоремы 108
Задачи для самостоятельной работы 110
Ответы к задачам главы 6 110

Глава 7. Элементарные делители характеристической матрицы 111
§ 1. Основные понятия и теоремы 111
Задачи для самостоятельной работы 113
Ответы к задачам главы 7 114

Глава 8. Жордановы клетки и матрицы 115
§ 1. Основные понятия и теоремы 115
§ 2. Жорданова форма и элементарные делители матрицы 117
Задачи для самостоятельной работы 122
§ 3. Приведение матрицы к жордановой форме методом элементарных делителей 123
Задачи для самостоятельной работы 128
§ 4. Приведение матрицы к жордановой форме методом присоединенных векторов 129
Задачи для самостоятельной работы 140
Ответы к задачам главы 8 141

Глава 9. Квадратичные формы 143
§ 1. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду 143
Задачи для самостоятельной работы 150
§ 2. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду 151
Задачи для самостоятельной работы 159
§ 3. Закон инерции вещественных квадратичных форм. Знакоопределенность вещественных квадратичных форм 159
Задачи для самостоятельной работы 165
Ответы к задачам главы 9 165

Глава 10. Линейные преобразования линейных пространств 167
§ 1. Преобразование координат вектора при замене базиса 167
§ 2. Линейные операторы. Матрица линейного оператора 174
Задачи для самостоятельной работы 181
Ответы к задачам главы 10 182

Библиографический список 184

Учебное издание для вузов

Сергей Алексеевич Логвенков
Владимир Симхович Самовол

Линейная алгебра
Основы теории, примеры и задачи

Подписано в печать 05.10.2017 г. Формат $60 \times 90\ 1/16$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 12. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 745-80-31.
E-mail: biblio@mccme.ru