

БАКАЛАВР. ПРИКЛАДНОЙ КУРС



Н. Ю. Энатская

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



УМО ВО рекомендует



НИУ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА
ЭКОНОМИКИ»

 **Юрайт**
издательство

biblio-online.ru

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ЭНАТСКАЯ Наталия Юрьевна

кандидат физико-математических наук, профессор общеинститутской кафедры высшей математики Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

«Следует отметить удачный и логичный подбор тем и методическую проработку материала»

Г. И. Ивченко, доктор физико-математических наук, профессор общеинститутской кафедры высшей математики Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

«Широта охвата материала сочетается с доступностью»

В. Ф. Колчин, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук

Пособие прошло практическую апробацию и написано на основе читаемых авторами на протяжении многих лет одноименных курсов. Представленные в издании материалы дают студентам ориентацию при решении многих практических задач ряда направлений, составляют начальный уровень для получения более широкого и глубокого образования в области теории вероятностей.

Материал приводится на уровне, требующем для понимания математических основ начальных курсов вузов, таких как классический математический анализ и элементы линейной алгебры.

По каждой дисциплине изложены основные теоретические вопросы и приведены многочисленные примеры и задачи для иллюстрации теории и пояснения ее практического использования. Кроме уже решенных задач к каждой главе учебника предложены задачи для самостоятельного решения и теоретические вопросы для проверки качества усвоения материала.

You Tube

Видеокниговед Юрайт
Книжные обзоры



Webinar

Обучающие
Вебинары от Юрайт



ЮРАЙТ
издательство

biblio-online.ru

Электронная
Библиотечная
Система

электронная
книга доступна в

ЛитРес:

один клик до книг

ISBN 978-5-534-01338-2



9 785534 013382

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ» (НИУ ВШЭ) (Г. МОСКВА)

Н. Ю. Энатская

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ПРИКЛАДНОГО БАКАЛАВРИАТА

*Рекомендовано Учебно-методическим отделом
высшего образования в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по инженерно-техническим направлениям*

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ■ Юрайт ■ 2017

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73
Э61

Автор:

Энатская Наталья Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент Департамента прикладной математики Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

Рецензенты:

Ивченко Г. И. — доктор физико-математических наук, профессор общеинститутской кафедры высшей математики Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;

Колчин В. Ф. — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук.

Энатская, Н. Ю.

Э61 Теория вероятностей : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / Н. Ю. Энатская. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 203 с. — Серия : Бакалавр. Прикладной курс.

ISBN 978-5-9916-9033-1

По дисциплине «Теория вероятностей» изложены основные теоретические вопросы и приведены многочисленные примеры и задачи для иллюстрации теории и пояснения ее практического использования. Кроме решенных задач по всем главам пособия предложены задачи для самостоятельного решения и теоретические вопросы для самоконтроля понимания материала.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов инженерно-технических специальностей.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73

ISBN 978-5-9916-9033-1

© Энатская Н. Ю., 2016
© ООО «Издательство Юрайт», 2017

Оглавление

Предисловие	5
Основные обозначения	7
Глава 1. Основные формулы для вероятностей событий.....	8
1.1. Становление теории вероятностей	9
1.2. Операции над событиями	10
1.3. Комбинаторика.....	16
1.4. Классическое определение вероятности	20
1.5. Теоремы сложения и умножения вероятностей.....	27
1.5.1. Теорема сложения вероятностей	27
1.5.2. Теорема умножения вероятностей	28
1.6. Основные формулы теории вероятностей	35
1.6.1. Формула полной вероятности	35
1.6.2. Формула Байеса.....	36
1.7. Схемы независимых испытаний	37
1.7.1. Биномиальная схема	37
1.7.2. Пуассоновская схема.....	40
1.7.3. Полиномиальная схема	41
1.7.4. Обобщенная схема	42
1.8. Геометрические вероятности.....	43
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	<i>47</i>
Глава 2. Законы распределения случайных величин	48
2.1. Одномерная случайная величина	49
2.1.1. Задание дискретной случайной величины.....	49
2.1.2. Основные распределения дискретного типа	50
2.1.3. Связи распределений	52
2.1.4. Функция распределения случайной величины и ее свойства	54
2.1.5. Непрерывная случайная величина	57
2.1.6. Основные распределения непрерывного типа.....	60
2.2. Двумерная случайная величина.....	66
2.3. Числовые характеристики случайных величин	71
2.3.1. Математическое ожидание и его свойства	72
2.3.2. Дисперсия и ее свойства	74
2.3.3. Нахождение моментов основных распределений дискретного типа	74
2.3.4. Моменты основных распределений непрерывного типа	79
2.4. Элементы корреляционного анализа	82

2.4.1. Основные понятия	82
2.4.2. Математическое ожидание и дисперсия линейной формы.....	84
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	<i>89</i>
Глава 3. Предельные теоремы теории вероятностей	90
3.1. Методы производящих и характеристических функций.....	91
3.1.1. Метод производящих функций.....	91
3.1.2. Метод характеристических функций.....	96
3.2. Закон больших чисел	104
3.2.1. Определение и суть закона больших чисел.....	105
3.2.2. Неравенства группы закона больших чисел	105
3.2.3. Теоремы группы закона больших чисел.....	107
3.3. Центральная предельная теорема	113
3.3.1. Теоремы группы центральной предельной теоремы.....	113
3.3.2. Приближения биномиальной схемы.....	115
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	<i>123</i>
Глава 4. Дополнительные темы к основному курсу теории вероятностей	124
4.1. Нормальное распределение	125
4.2. Условные распределения	129
4.2.1. Способы задания закона распределения двумерной случайной величины.....	129
4.2.2. Условные распределения и условные математические ожидания.....	130
4.2.3. Формула полного математического ожидания	133
4.3. Дополнительные сведения о распределениях.....	139
4.3.1. Гамма-распределение.....	140
4.3.2. Распределение χ^2	142
4.3.3. Распределение Стьюдента	143
4.3.4. Распределение Фишера	144
4.3.5. Бета-распределение.....	145
4.4. Распределения функций от случайных величин.....	146
4.4.1. Одномерный случай.....	146
4.4.2. Многомерный случай	153
4.4.3. Закон распределения функционала от случайных величин	156
4.4.4. Смеси распределений	159
4.5. Композиции.....	160
4.5.1. Основные формулы для композиций	161
4.5.2. Задачи по композиции	162
4.5.3. Композиции равномерного закона	166
4.6. Связи распределений.....	174
4.7. Виды вероятностных сходимостей	184
<i>Контрольные вопросы и задания</i>	<i>192</i>
Литература	193
Приложение 1. Задачи для самостоятельного решения	195

Предисловие

Теория вероятностей занимается изучением закономерностей влияния случая на исход эксперимента с целью получения его количественных характеристик, дающих прогноз развития различных реальных процессов. Такие исследования приобретают все большее значение в различных отраслях, как фундаментальной науки, так и в приложениях, и в настоящее время в математическом вузовском образовании вероятностным дисциплинам отводится все большее место. Закладывая теоретические основы, теория вероятностей является основным базовым курсом для многочисленных востребованных временем вероятностных дисциплин, таких как математическая статистика, случайные процессы, стохастическое моделирование, теория надежности, теория массового обслуживания, статистическая физика, теории игр и др. Поэтому знакомство с начальным курсом теории вероятностей является обязательным для будущих специалистов инженерно-технических направлений. Для этой цели предлагается данное учебное пособие. В нем освещены основные вопросы теории вероятностей с выделением главных ее частей, связанных с обсуждением основных формул для вероятностей случайных событий, законов распределения и характеристик случайных величин и предельных теорем теории вероятностей. В условиях реальной ограниченности учебного времени доступность и целостность представления о предмете с достаточной строгостью изложения предлагается достигать за счет выбора и логики последовательности обсуждаемых тем с акцентом на основных понятиях теории, их смысле и связях на многочисленных примерах с исключением громоздких доказательств. В связи с этим пособие рассчитано на его использование в учебном процессе для аудиторной и самостоятельной работы студентов. Оно также может быть использовано как справочник для инженерно-технических работников.

Модуль «Теория вероятностей» является частью курса «Теория вероятностей и математическая статистика».

В результате изучения курса студенты должны:

знать

- основные формулы для вероятностей случайных событий;

- основные вероятностные распределения случайных величин и их числовые характеристики;
- предельные теоремы теории вероятностей;

уметь

- решать задачи по теории вероятностей;

владеть

- методами теории вероятностей для решения конкретных задач.

Основные обозначения

СВ — случайная величина;

ч.т.д. — что и требовалось доказать;

нз — независимые;

нк — некоррелированные;

MX — математическое ожидание СВ X ;

DX — дисперсия СВ X ;

K_{XY} — корреляция СВ X и Y ;

r_{XY} — коэффициент корреляции СВ X и Y ;

СВ $X \sim L(a)$ — означает, что СВ X имеет закон распределения $L(a)$,

где $a = (a_1, \dots, a_k)$ — k -мерный параметр распределения;

СВ $X \sim B(1, p)$ — бернуллиевское распределение;

СВ $X \sim B(n, p)$ — биномиальное распределение;

СВ $X \sim \pi(\lambda)$ — пуассоновское распределение;

СВ $X_i \sim G(p)$ — геометрическое распределение;

СВ $Y_i \sim \text{сд}G(p)$ — сдвинутое геометрическое распределение;

СВ $Z_1 \sim \text{Па}(r, p)$ — распределение Паскаля;

СВ $Z_2 \sim \text{ОБ}(r, p)$ — отрицательное биномиальное распределение;

СВ $X \sim H(N, M, n)$ — гипергеометрическое распределение;

СВ $X \sim R[a; b]$ — равномерное распределение на отрезке $[a; b]$;

СВ $X_0 \sim R[0; 1]$ — равномерное распределение на отрезке $[0; 1]$;

СВ $X \sim N(a, \sigma)$ — нормальное распределение с параметрами (a, σ) ;

СВ $X_0 \sim N(0, 1)$ — нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$;

СВ $X \sim \Gamma_{\alpha, \lambda}$ — гамма-распределение;

СВ $X \sim E(\lambda)$ — экспоненциальное распределение.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЙ

В результате изучения данной главы студенты должны:

знать

- свойства операций над событиями;
- основные формулы для вероятностей событий;

уметь

- решать задачи нахождения вероятностей случайных событий;

владеть

- навыками анализа связей событий и их вероятностей.
-

Основным предметом исследования теории вероятностей является понятие «событие» (или «явление», или «исход эксперимента»). Поэтому цель настоящей главы — знакомство с этим понятием, не совсем привычным или новым для студентов инженерно-технических специальностей 2—3-х курсов и требующим отдельного обсуждения. Главная трудность в математическом восприятии этого понятия состоит в способе установления соответствия между событием и его числовой мерой, являющейся в нашем курсе вероятностью события. Для этого вводится понятие вероятностного пространства, описывающего все исходы рассматриваемых опытов с соответствующей мерой этих исходов, называемых их вероятностями. Специфика этой вероятностной меры задается аксиоматически и является основой всех дальнейших рассмотрений.

Для изучения случайных событий, т.е. исходов опытов, которые могут меняться от случая к случаю, определяются операции над ними с их свойствами. Оказывается, что операции над событиями математически эквивалентны соответствующим операциям над множествами, которые известны студентам из начального курса высшей математики.

Далее в главе случайные события изучаются на основании понятия вероятностного пространства по моделям рассматриваемых

опытов, которые упрощенно и адекватно должны описывать реальные процессы.

Для вычисления вероятностей событий подробно выводятся основные формулы с комментариями и примерами их применения.

Материалы этой главы дают базовые знания, необходимые для дальнейшего изучения теории вероятностей и других вероятностных дисциплин.

1.1. Становление теории вероятностей

Возникновение теории вероятностей относится к XVII в. и связано с комбинаторными задачами азартных игр. Именно потребности азартных игр привели к задачам, не решаемым известными к тому времени математическими методами, и тем самым стимулировали появление новых понятий, подходов и идей. Этот период зарождения теории вероятностей связан с именами таких известных математиков, как Д. Бернулли, П.-С. Лаплас, К. Ф. Гаусс и др.

В конце XIX — начале XX в. к теории вероятностей проявился повышенный интерес в связи с нуждами естествознания. Это привело к становлению теории вероятностей как самостоятельного, полноправного раздела математики. До настоящего времени интерес к теории вероятностей не ослабевает, о чем свидетельствуют интенсивные научные исследования в этой области.

Название предмета «Теория вероятностей» звучит для непосвященных парадоксально, так как понятие «теория» связывается с наукой, которая изучает закономерности, а слово «вероятность» означает неопределенность, случайность. Попробуем объяснить правомерность такого названия.

На практике мы часто сталкиваемся с так называемыми массовыми случайными явлениями (событиями), которые могут появляться или не появляться при многократном воспроизведении одного и того же опыта и протекают по-разному, например при бросании монеты или игральной кости — выпадение той или другой стороны монеты или грани на кости. Неоднозначность (непредсказуемость) исхода опыта часто связана с тем, что при сохранении основных его условий второстепенные изменяются и суммарно влияют на исход опыта. Таким образом, понятие случайности в этих ситуациях возникает в связи с трудностью или невозможностью учесть влияние второстепенных факторов на результирующее событие.

Иногда же понятие «случайность» отражает физическую природу изучаемого явления (например, хаотического движения элементарных частиц).

Однако оказывается возможным изучать общие закономерности случайных явлений независимо от их конкретной природы. Так, замечено, что при большом числе опытов относительная частота интересующего нас случайного события A (отношения появления события A к числу проведенных опытов) обладает статистической устойчивостью, т.е. относительная частота события A (при многократном повторении больших серий опытов) колеблется около одного и того же числа $P(A)$, которое характеризует данное событие A . Это число $P(A)$ дает количественную оценку влияния случая на исход A эксперимента и в соответствующей математической модели называется вероятностью события A (это статистическое определение вероятности события A). Устойчивость частот — это объективное свойство массовых, случайных явлений реального мира. Отсутствие устойчивости частот в сериях испытаний свидетельствует об изменениях основных условий опыта и не является объектом, интересующим теорию вероятностей. Другие закономерности случайных исходов не столь очевидны и являются предметом изучения теории вероятностей.

Таким образом, теория вероятностей занимается изучением закономерностей случайных явлений для получения количественной оценки влияния случая на исход эксперимента, а также обоснованием математических методов обработки результатов наблюдения.

Теория вероятностей имеет дело не с самими явлениями, а с упрощающими эти явления математическими моделями, в которых должны быть сохранены существенные стороны явлений, а несущественные — отброшены. При этом надо иметь в виду, что неоправданное упрощение или усложнение модели может привести к нежелательным последствиям: упрощение — к грубым или неверным выводам, а усложнение — к трудностям или невозможности исследования.

Судить о качестве модели следует по ее соответствию практическим результатам.

1.2. Операции над событиями

Математические вероятностные модели случайных явлений исследуются на основании понятия вероятностного пространства, т.е. тройки объектов $\{\Omega, A, P\}$ или $\{U, A, P\}$. Объясним эти объекты, предварительно обсудив смысл операций над событиями и дав необходимые определения.

Определение 1.1. Назовем событие **достоверным**, если оно происходит при каждом повторении опыта (обозначается обычно буквами U , E или Ω).

Определение 1.2. Назовем событие **невозможным**, если оно никогда не происходит (обозначается значками V или $\emptyset$).

Определение 1.3. События **совместны**, если они могут появиться одновременно в одном опыте, и **несовместны** — в противном случае.

При рассмотрении операций над событиями оказывается, что при соответствующей интерпретации операции над событиями аналогичны операциям над множествами. А именно: пусть точка бросается в некоторую область достоверного события. Будем считать, что происходит событие A , если точка попадает в подмножество A . Тогда будем считать, что происходят события $A + B$, $A \cdot B$ и $A - B$, если точка, брошенная в Ω , попадет в соответствующие подмножества $A + B$, $A \cdot B$ и $A - B$. При таком понимании смысла операций над событиями они сводятся к соответствующим операциям над множествами, которые известны из курса математического анализа. Теперь более подробно и последовательно обсудим конкретно с вышеизложенных позиций операции над событиями.

1. Операция сложения: происходит событие $A + B = A \cup B$, если точка, брошенная в область достоверного события U , попадает в заштрихованное множество $A + B$ (рис. 1.1, а). Вообще (в случае любого числа слагаемых) происходит сумма событий, если происходит хотя бы одно из них.

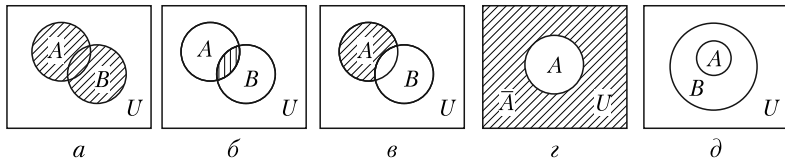


Рис. 1.1. Соответствие операций над событиями операциям над множествами. Операции:

а — сложения; б — умножения; в — вычитания; г — дополнения; д — влечения

2. Операция умножения: происходит событие $AB = A \cap B$, если точка, брошенная в область достоверного события U , попадает в заштрихованное множество (рис. 1.1, б). Вообще (в случае любого числа сомножителей) происходит произведение событий, если происходят все события.

3. Операция вычитания: происходит событие $A - B = A \setminus B$, если точка, брошенная в область достоверного события U , попадает в заштрихованное множество (рис. 1.1, в). Происходит событие $A - B$, если происходит событие A , но не происходит событие B .

4. Операция дополнения: происходит событие A , если точка, брошенная в область достоверного события U , попадает в заштрихованное множество (рис. 1.1, г). Происходит событие $\bar{A}$, если не

происходит событие A . Если не происходит событие $\bar{A}$, то происходит событие A .

5. Операция влечения: событие A влечет за собой событие B , если как только происходит событие A , так обязательно происходит событие B . Это означает, что событие A является подмножеством события B (рис. 1.1, δ).

Определение 1.4. События A и B **равносильны** ($A = B$), если они происходят или не происходят одновременно. Если события равносильны, то их дополнения также равносильны. Операция дополнения в четном числе, примененная к событию A , есть само событие A , а в нечетном числе — событие $\bar{A}$.

Определение 1.5. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют **полную группу несовместных событий**, если их сумма есть достоверное событие, а произведение каждой пары есть невозможное событие.

Ω или U — **пространство элементарных исходов** (ПЭИ), т.е. множество простейших (неделимых) исходов эксперимента, таких что в каждом опыте происходит ровно один из них. Мощность множества может быть разная: конечная, счетная и континуум.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Опыт — бросание монеты. Множество исходов состоит из двух элементов — «орел» и «решка».

Пример 2. Опыт — стрельба с неограниченным боезапасом до первого попадания. Множество исходов счетно и представляет собой все последовательности вида: $- - - \dots - +$, где « $-$ » означает промах, а « $+$ » — попадание.

Пример 3. Опыт — бросание точки на отрезок. Множество исходов имеет мощность континуум.

Определение 1.6. A — **сигма-алгебра** (σ -алгебра) событий (элементарно — это множество всех подмножеств Ω) — множество событий, замкнутое относительно операций дополнения, объединения и пересечения не более, чем в счетном числе (σ -алгебра — обобщение понятия «алгебра» на не более чем счетное число объектов).

$P = P(A)$ — числовая функция, определенная на σ -алгебре событий A , для которой верны две эквивалентные **системы аксиом** (I и II):

1) $0 \leq P(A) \leq 1$ (неотрицательность);

2) $P(U) = 1$ (нормированность);

3) если для $\forall i, j = 1, \dots, n$ $A_i A_j = \emptyset$, то $P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ (конеч-

ная аддитивность); n — конечное число;

4) если $A_1 \supset A_2 \dots$ и $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = V$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$ (непрерывность).

II. Аксиомы 1 и 2 те же;

3) если для $\forall i, j = 1, \dots, n$ $A_i A_j = V$, то $P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ (счетная

аддитивность).

Множество событий образуют **булеву алгебру** S . Булева алгебра представляет класс объектов, в котором определяются операции сложение, умножение и дополнение, обладающие следующими *свойствами*:

- 1) если $A \in S$ и $B \in S$, то $A + B \in S, AB \in S, \bar{A} \in S$ (замкнутость);
- 2) $AB = BA, A + B = B + A$ (коммутативность);
- 3) $A + (B + C) = (A + B) + C; A(BC) = (AB)C$ (ассоциативность);
- 4) $A(B + C) = AB + AC$ (дистрибутивность);
- 5) $A + A = AA = A$ (идемпотентность);
- 6) $A + B = B \Leftrightarrow AB = A$ (совместимость);
- 7) $A + V = A, AV = V, A + U = U, AU = U$ (S содержит «0» и «1»);
- 8) $A + \bar{A} = U, A\bar{A} = V, \bar{U} = V, \bar{V} = U$ (S содержит дополнительное

событие);

9) $A(A + B) = A$ (поглощение);

10) $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}, \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$ (двойственность де Моргана).

Следствия из аксиом.

1. $P(V) = 0$ — вероятность невозможного события равна нулю.

Доказательство. Имеем $U = U + V$; из несовместности слагаемых U и V по аксиоме конечной аддитивности имеем $P(U) = P(U) + P(V) = 0$, ч.т.д.

2. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Доказательство. Имеем $U = A + \bar{A}$; $P(U) = 1 \Rightarrow$ по аксиоме конечной аддитивности $P(U) = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$, ч.т.д.

3. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$.

Доказательство. $A_2 = A_1 + A_1 A_2$; из несовместности слагаемых $\Rightarrow P(A_2) = P(A_1 + A_1 A_2) = P(A_1) + P(A_1 A_2)$, ч.т.д.

Рассмотрим задачи на операции с событиями.

Задача 1.1. Бросается игральная кость. Событие A — выпадение четного числа; событие B — выпадение не более трех очков. Описать следующие события: $AB, \bar{A}\bar{B}, \bar{A}B, A + B, A \setminus B, \bar{A}\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A} + \bar{B}, A + \bar{B}$.

Решение

Имеем $A = \{2; 4; 6\}; B = \{1; 2; 3\}; \bar{A} = \{1; 3; 5\}; \bar{B} = \{4; 5; 6\}$. Тогда ясно, что $AB = \{2\}$ — выпадение двойки; $\bar{A}B = \{1; 3\}; \bar{A}\bar{B} = \{4; 6\}; A + B = \{1; 2; 3; 4; 6\}; A \setminus B = \{4; 6\}; \bar{A}\bar{B} = \{5\}; \bar{A}B = \{1; 3; 4; 5; 6\}; \bar{A} + \bar{B} = \{1; 3; 4; 5; 6\}; A + \bar{B} = \{5\}$.

Задание 1.1¹. Бросаются две игральные кости. Событие A — выпадение на двух костях очков, сумма которых нечетна; событие B — выпадение хотя бы одной единицы. Опишите те же события, что в задаче 1.1.

Указание: $A + B = AB + \overline{A}B + A\overline{B}$, где слагаемые несовместны (рис. 1.2).

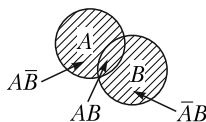


Рис. 1.2. Представление $A + B$ в виде суммы несовместных слагаемых

Задача 1.2. При каких условиях справедливы следующие отношения: а) $(A + B) = AB$; б) $A\overline{A} = A$.

Решение

а) $(A + B) = AB \Leftrightarrow A \equiv B$;

б) $A\overline{A} = A \Rightarrow A = V = \emptyset$; (V — невозможное событие).

Задание 1.2. Определите, при каких условиях справедливы следующие отношения: а) $(A + B) - B = A$; б) $(A + \overline{A}) = A$; в) $A + B = B$.

Задача 1.3. Производим два выстрела по мишени. Событие A — хотя бы одно попадание; событие B — хотя бы один промах («+» означает попадание, «-» — промах, а Ω — все пространство элементарных исходов). Образуют ли события A и B полную группу несовместных исходов?

Решение

Выпишем ПЭИ и обозначим на нем все события A и B :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} -- \\ -+ \\ +- \\ ++ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \\ \\ A \\ \end{array} \right\} B.$$

$A + B$ — это все исходы $\Rightarrow$ есть полнота событий $\Rightarrow$ это есть достоверное событие.

$A \cap B \neq V \Rightarrow$ события совместны $\Rightarrow$ события A и B не образуют полную группу несовместных исходов.

Задание 1.3. Бросаем игральную кость. Событие A — выпадение не более двух очков. Событие B — выпадение не менее трех очков. Определите, образуют ли события A и B полную группу несовместных исходов.

¹ Здесь и далее под рубрикой «Задание» предлагается самостоятельно решить в качестве самопроверки задачи, аналогичные тем, решение которых разобрано перед ними. Кроме того, задачи для самостоятельного решения по каждой главе предлагаются в приложении 1 к данному учебнику.

Задача 1.4. A, B и C — три произвольных события. Найти выражение для событий, состоящих в следующем:

- а) событие X_1 : происходит только событие A ;
- б) событие X_2 : происходят только события A и B ;
- в) событие X_3 : происходят все три события;
- г) событие X_4 : происходит по крайней мере одно из событий A, B или C ;

- д) событие X_5 : происходят хотя бы два из данных событий;
- е) событие X_6 : произойдет ровно одно из данных событий.

Решение

а) $X_1 = \overline{A} \overline{B} \overline{C}$ (рис. 1.3, а);

б) $X_2 = \overline{A} \overline{B} C$ (рис. 1.3, б);

в) $X_3 = \overline{A} \overline{B} C$ (рис. 1.3, в);

г) $X_4 = A + B + C$ (рис. 1.3, г);

д) $X_5 = AB + AC + BC$ (рис. 1.3, д);

е) $X_6 = \overline{A} \overline{B} C + \overline{A} B \overline{C} + A \overline{B} \overline{C}$ (рис. 1.3, е).

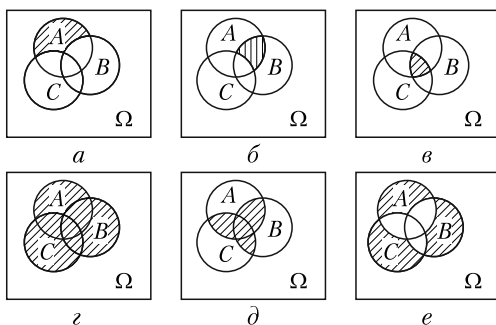


Рис. 1.3. К задаче 1.4

Задание 1.4. A, B и C — три произвольных события. Найдите выражения для событий, состоящих в следующем:

- а) событие X_7 : не произойдет ни одного события из данных;
- б) событие X_8 : произойдет ровно два события из данных;
- в) событие X_9 : произойдет не более двух событий из данных.

Задача 1.5. Упростить следующие выражения:

а) $(A + B)(B + C)$;

б) $(A + B)(A + \overline{B})(\overline{A} + B)$.

Решение

а) $(A + B)(B + C) = AB + BB + AC + BC = B(A + B + C) + AC = B + AC$;

б) $(A + B)(A + \overline{B})(\overline{A} + B) = (AA + BA + A\overline{B} + B\overline{B})(\overline{A} + B) =$
 $= [A + A(B + \overline{B})] \cdot ((\overline{A} + B) = A((\overline{A} + B) = AB.$

Задание 1.5. Упростите следующие выражения:

а) $(A + B)(\overline{A} + \overline{B}) + (\overline{A} + B)(A + \overline{B})$;

б) $(A + B)(A + B) + (\overline{A} + B)(A + B)$.

Задача 1.6. Образуют ли события $A, \overline{AB}, \overline{A+B}$ полную группу несовместных исходов?

Решение

Проверим полноту: $A + \overline{AB} + \overline{A+B} = A + \overline{AB} + \overline{A} \overline{B} = A + \overline{A}(B + \overline{B}) = A + U = U$, т.е. их сумма — достоверное событие.

Проверим на несовместность каждую пару событий: $A \cdot \overline{AB} = V$; $\overline{AB} \cdot \overline{A+B} = \overline{AB} \cdot \overline{A} \overline{B} = V$; $A(\overline{A+B}) = A \overline{A} \overline{B} = V \Rightarrow$ пересечение каждой пары событий есть невозможное событие $\Rightarrow$ данные события образуют полную группу несовместных исходов.

Замечание 1.1. Можно непосредственно убедиться в положительном ответе графически, штрихуя проверяемые события разными штриховками.

1.3. Комбинаторика

Комбинаторика занимается определением мощностей конечных множеств. Эта тема рассматривается здесь как вспомогательная в объеме, необходимом для вычисления вероятностей по классическому определению. Нас будут интересовать мощности конечных множеств исходов некоторых экспериментов. Опишем основные комбинаторные принципы и схемы.

• **Принцип умножения (ПУ).**

Если совершается k действий, i -е из которых можно совершить n_i способами ($i = 1, \dots, k$), то общее число способов совершения этих k действий есть

$$N = \prod_{i=1}^k n_i.$$

• **Схема делегаций (СД)** — следствие ПУ.

Имеется k групп различных элементов численностями $n_1, n_2, \dots, n_k$, тогда число различных наборов элементов, включающих по одному элементу от каждой группы, есть

$$N = \prod_{i=1}^k n_i.$$

• **Схема размещений (СР).**

В урне n шаров, различимых только номерами. Шары извлекают из урны по одному наугад без возвращения и записывают номера извлеченных шаров подряд в r позиций. Тогда число различных заполнений r позиций, которые могут отличаться друг от друга составом или порядком, есть

$$N = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = (n)_r = A_n^r$$

и называется **размещением** из n различных элементов по r .

Комбинаторный смысл размещений: число различных выборов из n элементов по r есть размещение A_n^r , если производится выбор из n различных элементов по r без возвращения и с учетом их порядка.

• **Схема перестановок (СП).**

Это частный случай СП при $r = n$. В этом случае исходы опыта могут отличаться друг от друга только порядком номеров выбранных шаров, а их общее число (по СП) есть

$$N = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = n!$$

и называется **перестановкой** из n элементов или n -факториалом.

Комбинаторный смысл $n!$: — это число различных порядков n различных элементов между собой.

• **Схема сочетаний (СС).**

В урне n шаров, различных только номерами. Шары извлекают из урны по одному наугад без возвращения и помещают в пустую урну. Тогда число различных заполнений этой урны меньше, чем в СП, в $r!$ раз, так как здесь различные исходы отличаются друг от друга только составом выбранных шаров. Поэтому общее число исходов СС есть

$$N = A_n^r / r! = \binom{n}{r} = C_n^r$$

и называется **сочетанием** из n различных элементов по r .

Комбинаторный смысл сочетаний: число различных выборов из n элементов по r есть сочетание C_n^r , если производится выбор из n различных элементов по r без возвращения и без учета их порядка.

Приведем две формулы для сочетаний, установление которых не представляет труда:

$$\text{а) } C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}; \text{ б) } C_n^r = C_n^{n-r}.$$

Доказательство: а) $C_n^r = (A_n^r / n!) \cdot ((n-r)! / (n-r)!) = n! / (r! \cdot (n-r)!)$;

б) получается применением формулы $C_n^r = n! / (r!(n-r)!)$ к обеим частям равенства б).

• **Схема n^r ($c.n^r$).**

В урне n шаров, различных только номерами. Шары извлекают из урны по одному наугад и записывают номера извлеченных шаров подряд в r позиций, всякий раз возвращая каждый извлеченный шар обратно в урну. Тогда число различных заполнений этих r позиций, которые могут отличаться друг от друга составом или порядком, есть $N = n^r$.

Комбинаторный смысл n^r : число различных выборов из n элементов по r есть n^r , если производится выбор из n различных элементов по r с возвращением и с учетом их порядка.

• **Схема перестановок с повторением (СПП).**

Эта схема может быть представлена в двух интерпретациях.

1-я интерпретация: k типов элементов, неразличимых внутри типа, численностями $n_1, n_2, \dots, n_k$ переставляют между собой. Обозначим

$$n = \sum_{i=1}^k n_i.$$

Тогда общее число исходов этого опыта есть

$$N = n! / \prod_{i=1}^k (n_i!) \quad (1.1)$$

(при $k = 2, m = n_1, N = C_n^r$).

Это можно объяснить следующим образом: $n!$ — число тасовок n различных элементов, среди которых есть такие, которые отличаются взаимным порядком элементов одного типа, а их число есть

$$N_1 = \prod_{i=1}^k (n_i!),$$

и эти перестановки не приводят к новым исходам.

2-я интерпретация: n различных элементов делят на k групп численностями $n_1, n_2, \dots, n_k$ ($\sum_{i=1}^k n_i = n$ и группы различимы).

Тогда число способов такого деления на группы вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} N &= C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \dots C_{n-\sum_{i=1}^{k-2} n_i}^{n_{k-1}} C_{n-\sum_{i=1}^{k-1} n_i}^{n_k} = \\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n!(n-n_1-n_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-\sum_{i=1}^{k-2} n_i)!}{n_{k-2}!(\sum_{i=1}^{k-1} n_i)!} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k (n_i!)}, \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (1.1). Это совпадение неслучайно. На самом деле 1-я и 2-я интерпретации описывают один и тот же опыт, так как тасовка описанных в 1-й интерпретации элементов и является делением различных элементов (мест для элементов при их тасовке) на группы во 2-й интерпретации.

• **Схема сочетаний с повторениями (СПП).**

Обычно эта схема приводится в следующей наглядной интерпретации: производится случайное размещение r неразличимых шаров по n различным ящикам. Если схематично изображать размещенные шары звездочками «*», а перегородки ящиков — палочками «|», то очевидно, что все варианты размещений этих r шаров

по этим n ящикам определяются взаимными расположениями элементов двух типов, неразличимых внутри типа: $r \ll * \gg$ и $(n - 1) \ll | \gg$ — и могут быть вычислены по СПП, т.е. их число по формуле (1.1) есть

$$N = \frac{(r + n - 1)!}{r!(n - 1)!} = C_{n+r-1}^r.$$

В данной схеме решим следующую частную задачу: при $r \geq n$ найдем число N_1 размещений шаров по ящикам без пустых ящиков. Для нахождения N_1 представим получение требуемых размещений шаров так: во все ящики разложим по шару, а остальные $(r - n)$ шаров раскидаем по n ящикам всеми способами. Тогда получим, что

$$N_1 = C_{r-1}^{n-1}.$$

Теперь, ограничившись приведенными комбинаторными схемами, подведем некоторые итоги.

С точки зрения выбора должны быть рассмотрены случаи упорядоченных и неупорядоченных исходов, произведенных без возвращения и с возвращением. А с точки зрения размещений нас интересуют размещения различных и неразличимых шаров с ограничением на число вмещающихся в один ящик шаров (ящик вмещает только один шар) и без такого ограничения. Установим соответствия между описанными процедурами выбора элементов и размещения шаров по ящикам. При размещении шара в ящик мы по существу производим выбор одного из n различных ящиков. Тогда очевидно, что упорядоченный (неупорядоченный) выбор элементов соответствует размещению различных (неразличимых) шаров, а выбор без возвращения (с возвращением) соответствует размещению шаров по ящикам с описанным ограничением на число шаров в ящике (без ограничения).

Большую часть приведенных здесь сведений из комбинаторики можно компактно представить в виде небольшой таблицы (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Связь схем выбора и размещения

Выбор из n элементов по r			
	Упорядоченный	Неупорядоченный	
Без возвращения	A_n^r	C_n^r	С ограничением (только один шар в ящике)
С возвращением	n^r	C_{n+r-1}^r	Без ограничения на число шаров в ящике
	Шары различимы	Шары неразличимы	
Размещение r шаров по n ящикам			

Здесь левые и верхние графы таблицы относятся к схеме **выбора** элементов, а соответствующие им нижние и правые графы — к схеме **размещения** шаров по ящикам.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Число телефонных семизначных номеров (без повторов цифр и запретов на первую цифру) есть A_{10}^7 .

Пример 2. Число порядков расстановки пяти книг на полке есть $5!$.

Пример 3. Число вариантов выбора трех человек из восьми есть C_8^3 .

Пример 4. Число размещений трех неразличимых шаров по пяти различным ящикам есть $C_{3+5-1}^3 = C_7^3$.

1.4. Классическое определение вероятности

Классическое определение вероятностей (КОВ) не универсально; оно применимо только в классической схеме (КС), которая определяется следующими требованиями:

- а) число всех исходов опыта конечно;
- б) все исходы опыта должны иметь равные шансы появиться.

Определение 1.7 (КОВ). $P\{X\} = \frac{m}{n}$, где n — общее число всех возможных исходов опыта; m — число тех из них, при которых происходит событие X .

Рассмотрим задачи на применение формулы вероятности. Во всех задачах требования КС выполнены; через X обозначено событие, вероятность которого ищется.

Задача 1.7. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей сумма выпавших очков равна семи, в случаях:

- а) кости различимы;
- б) кости неразличимы.

Решение

а) $n = 6^2 = 36$; $m = 6$; $P\{X\} = \frac{m}{n} = 1/6$;

б) $n = C_{6+2-1}^2 = 21$; $m = 3$; $P\{X\} = \frac{m}{n} = 1/7$.

Замечание 1.2. Разные ответы в случаях а) и б) получены при выборе разных математических моделей процесса бросания игральных костей. Статистическое исследование показывает, что верна модель а).

Задача 1.8. В урне шесть шаров с номерами от 1 до 6. Шары извлекают наугад по одному без возвращения. С какой вероятностью номера извлеченных шаров появляются в возрастающем порядке?

Решение

Имеем $n = 6!$; $m = 1$; $P\{X\} = \frac{m}{n} = 1/6! = 1/720$.

Задача 1.9. В урне N шаров с номерами от 1 до N . С какой вероятностью при извлечении наугад без возвращения M ($M < N$) из них номера извлеченных шаров появляются в возрастающем порядке?

Решение

Имеем $n = A_N^M$, $m = C_N^M$, так как благоприятное число исходов совпадает с общим числом разных составов выбранных номеров без учета их порядка. Тогда $P\{X\} = \frac{m}{n} = \frac{1}{M!}$.

Задача 1.10. Из ящика, в котором 15 различных деталей, из них 10 окрашено, наугад извлекают три детали. С какой вероятностью все извлеченные детали окрашены?

Решение

Имеем $n = C_{15}^3$; $m = C_{10}^3$; $P\{X\} = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{24}{91}$.

Задача 1.11. В ящике 10 шаров с номерами от 1 до 10. Наугад извлекают шесть шаров. Найти вероятность того, что среди них:

- а) окажется шар с номером 1;
- б) не окажется шара с номером 1;
- в) окажутся шары с номерами 1 и 2;
- г) не окажутся шары с номерами 1 и 2;
- д) окажется хотя бы один из шаров с номерами 1 и 2.

Решение

а) $n = C_{10}^6$ (по КС); $m = C_9^5$; $P\{X\} = \frac{C_9^5}{C_{10}^6}$;

б) $m = C_9^6$, $P\{X\} = \frac{C_9^6}{C_{10}^6}$;

в) $m = C_8^4$, $P\{X\} = \frac{C_8^4}{C_{10}^6}$;

г) $m = C_8^6$, $P\{X\} = \frac{C_8^6}{C_{10}^6}$;

д) $m = m_1 + m_2 + m_3$, где m_1 (m_2) — число исходов, содержащих шар с номером 1 (2) и не содержащих шар с номером 2 (1). Очевидно, что $m_1 = m_2 = C_8^5$; $m_3 = C_8^4$ найдено в пункте в). Таким образом, $m = 2C_8^5 + C_8^4$. Теперь

$$P\{X\} = \frac{2C_8^5 + C_8^4}{C_{10}^6}. \quad (1.2)$$

Если для события $\bar{X}$ число благоприятных исходов считается проще, то $P\{X\}$ определяют путем перехода к дополнительному событию (по следствию аксиом):

$$P\{X\} = 1 - P\{\bar{X}\}.$$

Для примера решим д) с использованием в): событие $\bar{X}$ состоит в том, что в выборке не окажется шаров с номерами 1 и 2. Тогда $P\{X\}$ определены в пункте г), откуда имеем:

$$P\{X\} = 1 - P\{\bar{X}\} = 1 - \frac{C_8^6}{C_{10}^6}. \quad (1.3)$$

Задание 1.6. В качестве упражнения для счета проверьте совпадение результатов по формулам (1.2) и (1.3).

Задание 1.7. В ящике 10 шаров с номерами от 1 до 10. Наугад извлекают шесть шаров. Найдите вероятность того, что среди них:

- а) не окажется хотя бы одного из шаров с номерами 1 и 2;
- б) окажется хотя бы один из шаров с номерами 1, 2 и 3.

Задача 1.12. Наугад формируется пятизначный номер так, что на каждом месте с равной вероятностью ставится любое число от 0 до 9. С какой вероятностью наугад выбранный номер читается слева направо и справа налево одинаково?

Решение

$$n = 10^5; m = 10^3; P\{X\} = \frac{m}{n} = 10^{-2}.$$

Задание 1.8. Наугад формируется пятизначный номер так, что на каждом месте с равной вероятностью ставится любое число от 0 до 9. С какой вероятностью наугад выбранный номер:

- а) кратен 5;
- б) состоит из нечетных цифр?

Задача 1.13. В телефонном номере забыты последние три цифры. Найти вероятность выбрать правильный номер, набирая последние три цифры наугад, если среди них две цифры совпадают.

Решение

$P\{X\} = \frac{m}{n}; n = A_{10}^3; m = 2 \cdot 3 \cdot C_{10}^2$, так как имеем C_{10}^2 вариантов выбора двух цифр, участвующих в забытой части номера, два варианта, связанного с выбором одной из двух цифр, участвующих в забытой части номера дважды, и три варианта выбора среди трех мест для однократной цифры в забытой части номера.

Задание 1.9. В телефонном номере забыты последние три цифры. Найдите вероятность выбрать правильный номер, набирая последние три цифры наугад, если:

- а) они различны;
- б) они одинаковы.

Задача 1.14. Замок из пяти дисков имеет на каждом диске 10 секторов с разными цифрами от 0 до 9. Замок открывает дверь при одной определенной установке дисков. Найти вероятность при случайной установке дисков открыть дверь.

Решение

Имеем $n = 10^5$; $m = 1$; $P\{X\} = \frac{m}{n} = 10^{-5}$.

Задача 1.15. На шахматную доску (8×8) наугад ставят две ладьи. С какой вероятностью они не побьют друг друга?

Решение

Имеем $n = A_{64}^2$; $m = 64 \cdot 49$; $P\{X\} = \frac{m}{n} = 7/9$.

Задача 1.16. На шахматную доску ($N \times N$) ставят наугад N ладей. С какой вероятностью они не побьют друг друга?

Решение

Имеем $n = A_{N^2}^N$; $m = (N!)^2$; $P\{X\} = \frac{m}{n}$.

Задача 1.17. В бригаде шесть мужчин и четыре женщины, из них наугад отобрано семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных ровно три женщины.

Решение

Имеем $n = C_{10}^7$; $m = C_4^3 \cdot C_6^4$; $P\{X\} = \frac{m}{n} = \frac{C_4^3 \cdot C_6^4}{C_{10}^7}$.

Решением задачи 1.17 является гипергеометрическая вероятность, которая возникает в гипергеометрической схеме. Приведем ее в общем виде.

• **Гипергеометрическая схема (ГГС).**

Имеется a различных элементов первого типа и b различных элементов второго типа. Из всей совокупности элементов $n = a + b$ наугад производится выборка объемом k элементов. Тогда вероятность того, что в выборку попадает ровно r элементов первого типа, есть

$$P\{X\} = \frac{C_a^r \cdot C_b^{k-r}}{C_n^k}.$$

Это общий вид гипергеометрической вероятности.

Гипергеометрическая схема допускает обобщение. Приведем его.

• **Обобщенная гипергеометрическая схема (ОГГС).**

Имеется m типов элементов численностями $n_1, n_2, \dots, n_m$ ($\sum_{i=1}^m n_i = n$), различных внутри каждого типа. Из всей совокупности n элементов производится выборка k элементов. Тогда вероятность того, что в выборке окажется ровно $r_i, i = 1, \dots, m$ ($\sum_{i=1}^m r_i = k$), элементов i -го типа, есть $P\{X\} = \prod_{i=1}^m C_{n_i}^{r_i} / C_n^k$ — это обобщенная гипергеометрическая вероятность.

Задание 1.10. Найдите вероятность угадать i счастливых номеров ($i = 0, 1, \dots, 6$) в спортлото (6 из 49).

Указание: это ГГС.

Задача 1.18. Колода карт (52 карты) раздается на четырех игроков (по 13 карт). Найдите вероятность того, что данный игрок получит три короля и два туза.

Решение

Это ОГГС. Тогда искомая вероятность

$$P\{X\} = \frac{C_4^3 \cdot C_4^2 \cdot C_{44}^8}{C_{52}^{13}}.$$

Задача 1.19. Найти вероятность того, что дни рождения r наугад выбранных человек различны ($r \leq 365$).

Решение

Имеем $n = 365^r$; $m = A_{365}^r$; $P\{X\} = \frac{m}{n}$ (оказывается, что при $r > 23$ $P\{X\} < 1/2$).

Задача 1.20 (парадокс де Мере). При многократном бросании трех игральных костей было замечено, что сумма выпавших очков 11 выпадает чаще, чем 12. Объяснить это.

Решение

Замеченный факт представлялся странным, так как обе суммы могут быть получены одним и тем же числом комбинаций очков на костях, а именно шестью. Действительно, перечислим их:

11: (6, 4, 1), (6, 3, 2), (5, 5, 1), (5, 4, 2), (5, 3, 3), (4, 4, 3);

12: (6, 5, 1), (6, 4, 2), (6, 3, 3), (5, 5, 2), (5, 4, 3), (4, 4, 4).

К парадоксу приводит ошибочное представление о неразличимости костей, что опровергается опытом. Для различных костей в указанных комбинациях чисел, дающих фиксированную сумму, будем иметь значение их порядка. С учетом этого имеем, что сумма 11 может быть получена 27, а сумма 12 — 25 способами. Поэтому вероятность первого из этих событий ($27/216$) больше, чем второго ($25/216$), что и наблюдалось.

Задача 1.21. N человек садятся в случайном порядке: а) за круглый стол; б) в ряд.

В обоих случаях найти вероятности того, что два фиксированных лица окажутся рядом, и сравнить их.

Решение

а) $n = N!$ (по СП); $m_1 = 2N(N-2)!$, так как имеем два варианта взаимного расположения двух лиц, N вариантов выбора двух мест подряд за столом и $(N-2)!$ вариантов расположения остальных людей за столом, и $P\{X_1\} = \frac{m_1}{n} = \frac{2N(N-2)}{N!} = \frac{2}{N-1}$;

б) $n = N!$; $m_2 = 2(N-1)(N-2)!$, так как имеем два варианта взаимного расположения двух лиц, $(N-1)$ вариантов выбора двух мест под-

$$\text{ряд и } (N-2)! \text{ вариантов расположения остальных людей, и } P\{X_2\} = \frac{m_2}{n} = \frac{2(N-1)}{N!} = \frac{2}{N}.$$

Сравниваем:

$$P\{X_1\} - P\{X_2\} = \frac{2}{N(N-1)}.$$

Задача 1.22. В США каждый из 52 штатов представлен в конгрессе двумя сенаторами. Найти вероятность того, что среди наугад выбранных 52 сенаторов конгресса:

- а) данный штат представлен;
- б) представлены все штаты.

Решение

а) эта задача может быть решена двумя способами аналогично задаче 5 д).

Имеем $n = C_{104}^{52}$; $m = C_{102}^{50} + 2C_{102}^{51}$; $P\{X\} = \frac{m}{n} = \frac{C_{102}^{50} + 2C_{102}^{51}}{C_{104}^{52}}$, или по-другому (через дополнительное событие) — $P\{X\} = 1 - \frac{C_{102}^{52}}{C_{104}^{52}}$;

$$\text{б) так как } n = C_{104}^{52} \text{ (по СС), а } m = 2^{52} \text{ (по СД), то } P\{X\} = \frac{m}{n} = \frac{2^{52}}{C_{104}^{52}}.$$

Задача 1.23. Имеется r неразличимых букв А и s неразличимых букв Б. Найти вероятность того, что при случайной тасовке всех букв n -й букве А предшествует m букв Б.

Решение

Имеем $n = C_{r+s}^r$ (по СПП); $m = C_{n+m-1}^m C_{r+s-m-n}^{s-m}$ (по ПУ и СПП) и

$$P\{X\} = \frac{m}{n} = \frac{C_{n+m-1}^m C_{r+s-m-n}^{s-m}}{C_{r+s}^r}.$$

Задача 1.24. Найти вероятность, что при случайной группировке 15 детей, среди которых 5 мальчиков и 10 девочек, на пять троек в каждой окажется по одному мальчику.

Решение

$$\text{Имеем (по СПП и ПУ) } n = \frac{15!}{(3!)^5}; m = \frac{10! \cdot 5!}{(2!)^5} \text{ и } P\{X\} = \frac{m}{n} = 3^5 / C_{15}^5.$$

Задача 1.25. Найти вероятность наугад извлечь из всех костей обычного домино заданную.

Решение

$$\text{Имеем } n = C_{7+2-1}^2 = 28 \text{ (по ССП); } m = 1 \text{ и } P\{X\} = \frac{m}{n} = 1/28.$$

||| **Задание 1.11.** Найдите вероятность наугад извлечь из всех костей домино из фишек с тремя концами заданную.

Указание: использовать ССП.

Задача 1.26. По n ящикам случайным образом разбрасывают k_1 красных, k_2 белых и k_3 черных шаров. Шары различаются только цветом. Найти вероятность того, что при этом:

- а) в фиксированном ящике не окажется белых и черных шаров;
- б) при $k_1 \geq n - 1$ ровно в одном ящике не будет красных шаров;
- в) в одном ящике окажется k_1 красных, в другом — k_2 белых и в третьем — k_3 черных шаров;
- г) при $k_1, k_2, k_3 \geq n$ во всех ящиках будут шары двух цветов;
- д) при $k_1 + k_2 + k_3 \geq n$ шары лягут по одному в ящик;
- е) при $k_1 + k_2 + k_3 = n$ шары одного цвета будут лежать подряд;
- ж) при $s = \min(k_1, k_2, k_3)$ в s ящиках будут шары трех цветов.

Решение

Используем формулу $P\{X\} = \frac{m}{n}$, где во всех пунктах $n = C_{n+k_1-1}^{k_1} C_{n+k_2-1}^{k_2} C_{n+k_3-1}^{k_3}$ (по ССП и ПУ), поэтому решение пунктов теперь состоит в нахождении чисел m , для чего пользуемся ПУ и соответствующими схемами:

- а) $m = C_{n+k_1-1}^{k_1} C_{n+k_2-2}^{k_2} C_{n+k_3-2}^{k_3}$ (по ССП);
- б) $m = n C_{n+k_2-1}^{k_2} C_{n+k_3-1}^{k_3} C_{k_1-1}^{n-2}$ (по ССП);
- в) $m = A_n^3$ (по СР).

Задание 1.12. По n ящикам случайным образом разбрасывают k_1 красных, k_2 белых и k_3 черных шаров. Шары различаются только цветом. Найти вероятность того, что при этом:

- а) при $k_1, k_2, k_3 \geq n$ во всех ящиках будут шары двух цветов;
- б) при $k_1 + k_2 + k_3 \geq n$ шары лягут по одному в ящик;
- в) при $k_1 + k_2 + k_3 = n$ шары одного цвета будут лежать подряд;
- г) при $s = \min(k_1, k_2, k_3)$ в s ящиках будут шары трех цветов.

Задача 1.27. Пусть r неразличимых шаров случайным образом разбрасывают по n ящикам. Найти вероятность, что при этом:

- а) ровно k ящиков окажется пустыми при $r \geq n - k$ (занятыми при $r \geq k$);
- б) хотя бы k фиксированных ящиков окажутся пустыми (занятыми при $r \geq k$);

Решение

Используем формулу $P\{X\} = \frac{m}{n}$, где во всех пунктах $n = C_{n+r-1}^r$ (по ССП), поэтому решение пунктов теперь состоит в нахождении чисел m , для чего пользуемся ПУ и в основном ССП:

- а) $m = C_n^k C_{r-1}^{n-k-1}$ ($m = C_n^k C_{r-1}^{k-1}$) (по ССП и СС);
- б) $m = C_{n-k+r-1}^r$ ($m = C_{n+k-r-1}^{r-k} = C_{n+r-k-1}^{n-1}$) (по ССП).

Задание 1.13. Пусть r неразличимых шаров случайным образом разбрасывают по n ящикам. Найти вероятность, что при этом:

- а) в k фиксированных ящиках окажется по шару, а в остальных будет не пусто ($r \geq n$);
- б) в k фиксированных ящиках окажется хотя бы по два шара, а в остальных ящиках будет не пусто ($r \geq k + n$).

1.5. Теоремы сложения и умножения вероятностей

1.5.1. Теорема сложения вероятностей

Изложение этой темы приводим в основном в форме решения отдельных задач.

1. Для двух произвольных событий A и B теорема сложения имеет вид

$$P\{A + B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}. \quad (1.4)$$

Доказательство. По аксиоме конечной аддитивности имеем

$$\begin{aligned} P\{A + B\} &= P\{AB\} + P\{\bar{A}B\} + P\{A\bar{B}\}; \\ P\{A\} &= P\{AB\} + P\{A\bar{B}\}; \quad P\{B\} = P\{AB\} + P\{\bar{A}B\}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

откуда

$$P\{AB\} = P\{A\} - P\{A\bar{B}\}; \quad P\{AB\} = P\{B\} - P\{\bar{A}B\}. \quad (1.6)$$

Подставив теперь соотношения (1.6) в равенство (1.5), получим формулу (1.4).

2. Для трех произвольных событий A, B, C теорема сложения имеет вид

$$\begin{aligned} P\{A + B + C\} &= P\{A\} + P\{B\} + P\{C\} - \\ &- P\{AC\} - P\{AB\} - P\{BC\} + P\{ABC\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Доказательство. По формуле (1.4) имеем

$$\begin{aligned} P\{A + B + C\} &= P\{A + B\} + P\{C\} - P\{(A + B)C\} = \\ &= P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\} + P\{C\} - P\{AC\} - P\{BC\} + P\{ABC\}, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

3. Общая формула для вероятности суммы n произвольных событий:

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{i=1}^n A_i\right\} &= \sum_{i=1}^n P\{A_i\} - \sum_{i < j} P\{A_i A_j\} + \sum_{i < j < k} P\{A_i A_j A_k\} + \dots + \\ &+ (-1)^{n+1} P\{A_1 A_2 \dots A_n\}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Доказательство. Проведем его методом математической индукции аналогично доказательству формулы (1.7).

При $n = 1$ и 2 формула (1.8) доказана в п. 1 и 2. Пусть (1.8) — предположение индукции. Тогда для $(n + 1)$ -го события аналогично п. 2 имеем

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n+1} A_i\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^n A_i + A_{n+1}\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^n A_i\right\} + P\{A_{n+1}\} - P\left\{\sum_{i=1}^n A_{n+1} A_i\right\},$$

откуда с учетом предположения индукции, применяемого к $P\left\{\sum_{i=1}^n A_i\right\}$

и $P\left\{\sum_{i=1}^n A_{n+1} A_i\right\}$, получаем ту же структуру формулы, что и в формуле (1.8):

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n+1} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{n+1} P\{A_i\} - \sum_{i < j} P\{A_i A_j\} + \dots + (-1)^n P\{A_1 A_2 \dots A_{n+1}\}, \text{ ч.т.д.}$$

Замечание 1.3. В случае несовместных слагаемых событий формула (1.8) упрощается и принимает частный вид, следующий непосредственно из аксиомы конечной аддитивности, а именно:

$$P\left\{\sum_{i=1}^n A_i\right\} = \sum_{i=1}^n P\{A_i\}. \quad (1.9)$$

4. Докажем методом математической индукции, что

$$P\left\{\sum_{i=1}^n A_i\right\} \leq \sum_{i=1}^n P\{A_i\}. \quad (1.10)$$

Доказательство. При $n = 2$ формула (1.10) сразу следует из формулы (1.4). При $n = 3$ формула (1.10) следует из доказанного утверждения при $n = 2$ и формулы (1.4):

$$P\{A_1 + A_2 + A_3\} \leq P\{A_1 + A_2\} + P\{A_3\} \leq P\{A_1\} + P\{A_2\} + P\{A_3\}.$$

Теперь, предполагая по индукции, что формула (1.10) верна для $(n - 1)$, аналогично предыдущему получаем

$$P\left\{\sum_{i=1}^n A_i\right\} \leq P\left\{\sum_{i=1}^{n-1} A_i\right\} + P\{A_n\} \leq \sum_{i=1}^n P\{A_i\}, \text{ ч.т.д.}$$

1.5.2. Теорема умножения вероятностей

Введем понятие условной вероятности (в КС). Пусть $P\{A\} = N_A/N$ — (безусловная) вероятность события A , где N — общее число равновероятных исходов опыта; N_A — число исходов, благоприятствующих появлению события A .

Определение 1.7. $P\{A/B\} = N_{AB}/N_B$ — **условная вероятность** события A при условии события B .

Смысл условной вероятности: сужение пространства всех исходов до числа исходов, благоприятствующих появлению условия.

1. Теорема умножения для двух произвольных событий имеет вид

$$P\{AB\} = P\{A\}P\{B/A\} = P\{B\}P\{A/B\}. \quad (1.11)$$

Доказательство. В классической схеме

$$P\{AB\} = N_{AB}/N = (N_{AB}/N)(N_A/N_A) = P\{A\}P\{B/A\}$$

или аналогично

$$P\{AB\} = (N_{AB}/N)(N_B/N_B) = P\{B\}P\{A/B\}, \text{ ч.т.д.}$$

Отсюда следует, что $P\{A/B\} = P\{AB\}/P\{B\}$ — формула, выражающая условную вероятность через безусловные.

2. Докажем, что

$$P\left\{\prod_{i=1}^n A_i\right\} = P\{A_1\}P\{A_2/A_1\}P\{A_3/A_1A_2\}...P\{A_n/A_1...A_{n-1}\}. \quad (1.12)$$

Доказательство. Формула (1.12) доказывается по индукции. При $n = 3$ установим из формулы (1.11):

$$P\{ABC\} = P\{AB\}P\{C/AB\} = P\{A\}P\{B/A\}P\{C/AB\}.$$

Пусть формула (1.12) верна для $(n - 1)$ событий, тогда по формуле (1.11)

$$P\left\{\prod_{i=1}^n A_i\right\} = P\left\{\prod_{i=1}^{n-1} A_i\right\}P\{A_n/A_1...A_{n-1}\}, \text{ ч.т.д.}$$

Дадим теперь определения независимости событий парной и в совокупности.

Определение 1.8 (парной независимости). События A и B **независимы**, если выполнено любое из соотношений

$$P\{A/B\} = P\{A\}; \quad P\{B/A\} = P\{B\}; \quad P\{AB\} = P\{A\}P\{B\}. \quad (1.13)$$

Замечание 1.4: а) Равенства (1.13) есть три эквивалентных определения парной независимости; б) первые два равенства показывают, что понятие парной независимости симметричное (взаимное); в) третье равенство есть частный вид теоремы умножения для двух независимых событий.

Причем все соотношения (1.13) выполняются или не выполняются одновременно.

Определение 1.9 (независимости событий в совокупности). События $A_1, ..., A_n$ **независимы в совокупности**, если для любого подмножества этого множества событий его вероятность равна произведению вероятностей входящих в него событий.

Замечание 1.5. В случае n независимых в совокупности событий теорема умножения имеет частный вид

$$P\left\{\prod_{i=1}^n A_i\right\} = \prod_{i=1}^n P\{A_i\}.$$

Замечание 1.6. Приведенное определение независимости в совокупности объясняется тем, что можно привести пример, когда для подмножества событий вероятность их произведения не совпадает с произведением вероятностей этих событий, в то время как для

множества n событий $P\left\{\prod_{i=1}^n A_i\right\} = \prod_{i=1}^n P\{A_i\}$. Рассмотрим этот пример.

Пример. Имеется шесть карточек, на которых соответственно стоят буквы a, ab, ac, bc, abc , и две пустые карточки. Наугад выбирается одна карточка. Будем считать, что происходят события A, B или C , когда соответственно на выбранной карточке есть буквы a, b или c . Тог-

да $P\{A\} = P\{B\} = P\{C\} = 1/2$; $P\{AB\} = P\{AC\} = 1/4$; $P\{BC\} = 3/8$; $P\{ABC\} = 1/8$. Оказывается, что $P\{ABC\} = P\{A\}P\{B\}P\{C\} = 1/8$; $P\{AB\} = P\{A\}P\{B\} = 1/4$; $P\{AC\} = P\{A\}P\{C\} = 1/4$, а $P\{BC\} = 3/8 \neq P\{B\}P\{C\} = 1/4$.

Из приведенных определений видно, что парная независимость следует из независимости в совокупности. Обратное неверно. Это иллюстрируют задача 1.28 и задания 1.14, 1.15, где проверяется парная и совокупная независимость данных событий.

Задача 1.28 (Бернштейна). На плоскость бросают тетраэдр, грани которого (правильные треугольники) окрашены так: одна грань в красный, другая — в белый, третья — в черный цвет, а четвертая — участками в красный, белый и черный цвета. Исходом опыта считаем событие, связанное с нижней выпавшей гранью. Пусть события A , B и C состоят соответственно в наличии красного, белого и черного цвета на выпавшей грани. Исследовать характер независимости событий A , B и C .

Решение

$$P\{A\} = P\{B\} = P\{C\} = 1/2; \quad P\{AB\} = P\{AC\} = P\{BC\} = 1/4;$$

$$P\{ABC\} = 1/4 \neq P\{A\}P\{B\}P\{C\} = 1/8.$$

Поэтому события A , B и C попарно независимы, но зависимы в совокупности.

Задание 1.14. Бросают две монеты. Событие A — выпадение «орла» на первой монете, событие B — выпадение «орла» на второй монете, событие C — выпадение на монетах одинаковых граней (грани монеты: «орел» и «решка»). Исследовать независимость событий A , B и C .

Задание 1.15. В условиях задания 1 события A , B те же, а C — выпадение на монетах разных граней. Исследовать независимость событий A , B и C .

Задача 1.29. Доказать, что если события A и B , A и C независимы и BC — пустое множество V , то события A и $B + C$ независимы.

Решение (доказательство)

$$P\{A(B + C)\} = P\{AB\} + P\{AC\} - P\{ABC\} = P\{AB\} + P\{AC\} = P\{A\}P\{B\} + P\{A\}P\{C\} = P\{A\}(P\{B\} + P\{C\}) = P\{A\}P\{B + C\}, \text{ ч.т.д.}$$

Замечание 1.7. В задаче 1.29 условие $BC = V$ при независимости пар событий A и B , A и C является достаточным, но не необходимым для независимых событий A и $(B + C)$. Приведем пример — это нижеследующая задача 1.30.

Задача 1.30. Из колоды игральных карт (52 карты) наугад выбирают одну карту. Событие A — это туз, B — это карта червовой масти, C — это карта красной масти. Проверить выполнение условий задачи 4.

Решение

$$P\{A\} = 1/13; \quad P\{B\} = 1/4; \quad P\{C\} = 1/2; \quad P\{A/B\} = 1/13; \quad P\{A/C\} = 1/13;$$

$$P\{B + C\} = P\{C\} = 1/2; \quad P\{A/(B + C)\} = 1/13, \text{ поэтому события } A \text{ и } B, A \text{ и } C, A \text{ и } (B + C) \text{ независимы, в то время как } BC \neq V.$$

Задача 1.31. Доказать, что если события A и B , A и C независимы, то события A и $(B + C)$ независимы тогда и только тогда, когда независимы события A и BC .

Решение (доказательство)

Пусть сначала события A и B , A и C , A и BC независимы, тогда докажем независимость событий A и $(B + C)$:

$$P\{A(B + C)\} = P\{AB\} + P\{AC\} - P\{ABC\} = P\{A\}P\{B + C\},$$

ч.т.д. (достаточность).

Пусть теперь события A и B , A и C , A и $(B + C)$ независимы, тогда докажем независимость событий A и BC :

$$\begin{aligned} P\{ABC\} &= -P\{A(B + C)\} + P\{AB\} + P\{AC\} = \\ &= P\{A\}(-P\{B + C\} + P\{B\} + P\{C\}) = P\{A\}P\{BC\}, \end{aligned}$$

ч.т.д. (необходимость).

Задача 1.32. При извлечении наугад одной игральной карты из 52 провести классификацию событий A и B по признакам совместности (несовместности) и зависимости (независимости) в случаях:

- A — извлечения туза, B — извлечения красной карты;
- A — извлечения красного туза, B — извлечения красной карты.

Решение:

а) $P\{A\} = 1/13$; $P\{B\} = 1/2$; $P\{AB\} = 1/26 = P\{A\}P\{B\}$, следовательно, события A и B совместны и независимы;

б) $P\{A\} = 1/26$; $P\{B\} = 1/2$; $P\{AB\} = 1/26 = P\{A\}P\{B\} = 1/52$, следовательно, события A и B совместны и зависимы.

Задача 1.33. Доказать, что если события A и B независимы, то независимой является любая из пар событий: а) A и $\bar{B}$; б) $\bar{A}$ и B ; в) $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Решение (доказательство)

Для полного решения задачи достаточно доказать один из пунктов, например пункт а), так как пункт б) совпадает с пунктом а) с точностью до обозначений, а обозначив в б) и в) $\bar{A} = C$, приходим в в) к доказательству а). Представим событие A в виде $A = AB + A\bar{B}$, где слагаемые правой части — несовместные события, поэтому $P\{A\} = P\{AB\} + P\{A\bar{B}\} \Rightarrow P\{A\bar{B}\} = P\{A\} - P\{AB\} = P\{A\}(1 - P\{B\}) = P\{A\}P\{\bar{B}\}$, откуда и следует доказываемое утверждение пункта а), а значит, и пунктов б) и в).

Задача 1.34. Доказать по индукции обобщение утверждения задачи 8 на случай n событий: если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ такие, что

$$P\left\{\prod_{i=1}^n A_i\right\} = \prod_{i=1}^n P\{A_i\},$$

то вероятность совокупности этих событий или их дополнений равна произведению их вероятностей.

Решение (доказательство)

Утверждение означает, что если любое число любых событий из совокупности $A_1, A_2, \dots, A_n$ заменить на их дополнения, то вероятность этой совокупности распадается в произведение вероятностей составляю-

щих ее событий. Оказывается, достаточно доказать, что так ведет себя вероятность множества событий $\bar{A}_1, A_2, \dots, A_n$, так как из симметрии не важно, какие из событий заменены на свои дополнения, и если это доказано для совокупности событий $A_1, \dots, \bar{A}_k, A_{k+1}, \dots, A_n$, то, переобозначив событие A_k на B_k в исходной совокупности событий $A_1, \dots, \bar{A}_k, A_{k+1}, \dots, A_n$ и в совокупности $A_1, \dots, \bar{A}_k, \bar{A}_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$, приходим к доказанному выше утверждению для последней совокупности. Таким образом, такими $(k-1)$ переобозначениями приходим к доказательству утверждения для совокупности событий $\bar{A}_1, A_2, \dots, A_n$. Остается доказать, что из утверждения для совокупности событий $A_1, \dots, A_n$ следует то же и для совокупности событий $\bar{A}_1, A_2, \dots, A_n$. Действительно, обозначим $A_2 \dots A_n = C$. Тогда задача сводится к доказательству того, что из независимости событий A_1 и C следует независимость событий $\bar{A}_1$ и C , что было доказано в задаче 1.33.

Задача 1.35. Производится три независимых выстрела по мишени с вероятностями попаданий, соответственно равными 0,4; 0,5; 0,7. Найти вероятности того, что при этом произойдут следующие события: а) X — ровно одно попадание; б) Y — хотя бы одно попадание; в) Z — хотя бы два попадания.

Решение

Введем события A, B, C — попадания соответственно при первом, втором и третьем выстрелах. Тогда:

а) $X = \bar{A}BC + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}$. Применив теперь к $P\{X\}$ последовательно теоремы сложения и умножения вероятностей с учетом утверждения задачи 9, получим

$$\begin{aligned} P\{X\} &= P\{\bar{A}\}P\{B\}P\{\bar{C}\} + P\{\bar{A}\}P\{B\}P\{\bar{C}\} + P\{\bar{A}\}P\{\bar{B}\}P\{C\} = \\ &= 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,36; \end{aligned}$$

б) $P\{Y\} = P\{A + B + C\} = P\{A\} + P\{B\} + P\{C\} - P\{AB\} - P\{AC\} - P\{BC\} + P\{ABC\}$. Так решать можно, но проще перейти к дополнительному событию $\bar{Y}$ — ни одного попадания: $P\{Y\} = 1 - P\{\bar{Y}\}$, где $\bar{Y} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, поэтому $P\{\bar{Y}\} = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,09$, откуда $P\{Y\} = 1 - 0,09 = 0,91$.

Задача 1.36 (о совпадениях). Пусть n писем, написанных n адресатам, наугад раскладывают по конвертам с написанными заранее адресами. С какой вероятностью ни одно письмо не попадет в свой конверт?

Решение

Пусть X — искомое событие, а A_i — событие, состоящее в том, что i -е письмо попало в свой конверт ($i = 1, \dots, n$). Тогда $\bar{X}$ — событие, состоящее в том, что хотя бы одно письмо попадет в свой конверт,

и $P\{\bar{X}\} = P\left\{\sum_{i=1}^n A_i\right\}$, которая раскрывается по (1.8). Вычисляем:

$$\begin{aligned} P\{A_i\} &= (n-1)!/n! = 1/n; \quad P\{A_i A_j\} = (n-2)!/n! = 1/[n(n-1)]; \\ P\{A_i A_j A_k\} &= (n-3)!/n! = 1/[n(n-1)(n-2)]; \dots; \quad P\{A_1 A_2 \dots A_n\} = 1/n!, \end{aligned}$$

откуда имеем

$$P\{X\} = 1 - P\{\bar{X}\} = 1 - C_n^1 \cdot 1/n + C_n^2 \cdot 1/[n(n-1)] - C_n^3 \cdot 1/[n(n-1)(n-2)] + \dots + (-1)^{n+1} (1/n!) = 1/2! - 1/3! + \dots + (-1)^{n+1}/n!.$$

Задача 1.37. Четыре лампы из шести — хорошие. Из всех наугад выбирают три. Найти вероятность того, что все выбранные — хорошие.

Решение

1-й способ. По классическому определению вероятности имеем: $P\{X\} = m/n$, где $n = C_6^3$, $m = C_4^3$, откуда $P\{X\} = 1/5$.

2-й способ. Пусть X — искомое событие, а A, B, C — события, состоящие в том, что соответственно первая, вторая или третья выбранная лампа — хорошая. Тогда по теореме умножения для зависимых событий A, B и C получаем

$$P\{X\} = P\{ABC\} = P\{A\}P\{B/A\}P\{C/AB\} = (4/6)(3/5)(2/4) = 1/5.$$

Замечание 1.8. Выбор элементов без возвращения — зависимый, а с возвращением — независимый.

Задача 1.38. При раздаче игральных карт (52 карты) четверем игрокам по 13 карт найти вероятность того, что данный игрок получил трех королей, если известно, что он имеет два туза.

Решение

Пусть событие A — игрок получил трех королей, событие B — он получил два туза. Тогда требуется найти $P\{A/B\}$:

$$P\{A/B\} = P\{AB\}/P\{B\},$$

где $P\{B\} = C_4^2 C_{48}^{11} / C_{52}^{13}$, $P\{AB\} = C_4^3 C_{44}^8 / C_{52}^{13}$.

Задача 1.39. С использованием теорем сложения и умножения составить справочную таблицу для расчета надежности электрических цепей, включающих последовательные и параллельные соединения.

Решение

Будем рассматривать *исходные данные* об элементах схемы двух видов: 1) даны $\{p_i\}$, где p_i — надежность i -го элемента ($i = 1, \dots, n$); 2) даны $\{q_i\}$, где q_i — вероятность отказа i -го элемента ($i = 1, \dots, n$), так что $p_i + q_i = 1$. В качестве *выходных данных* нас будут интересовать P — надежность схемы и Q — вероятность отказа схемы, так что $P + Q = 1$. Будем решать задачи нахождения P и Q при исходных данных видов 1) и 2) отдельно для n последовательно и n параллельно соединенных элементов (табл. 1.2).

Замечание 1.9. Для расчета надежности произвольной цепи, состоящей из последовательных и параллельных соединений, будем использовать справочную таблицу для *чистых* соединений (только последовательных или только параллельных) путем объединения на каждом шаге частей схемы, а далее исследуя надежность этих

Таблица расчета надежности электрической цепи

n последовательно соединенных элементов		n параллельно соединенных элементов	
1) $P = \prod_{i=1}^n p_i$	p^n	1) $P = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$	$1 - (1 - p)^n$
$Q = 1 - \prod_{i=1}^n p_i$	$1 - p^n$	$Q = \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$	$(1 - p)^n$
2) $P = \prod_{i=1}^n (1 - q_i)$	$(1 - q)^n$	2) $P = 1 - \prod_{i=1}^n q_i$	$1 - q^n$
$Q = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - q_i)$	$1 - (1 - q)^n$	$Q = \prod_{i=1}^n q_i$	q^n

частей тем же приемом до того шага, пока исследуемые участки схемы не окажутся чистыми соединениями простейших составляющих схему элементов. После этого результаты анализа надежностей участков в обратном порядке подставляем друг в друга до получения результата надежности первого шага, выраженного через надежность его элементов. Рассмотрим это в следующей задаче.

Задача 1.40. Найти надежность схемы (рис. 1.4), если надежности всех ее элементов одинаковы и равны p .

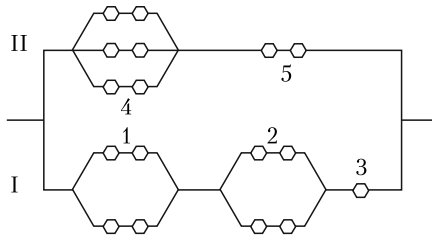


Рис. 1.4. К задаче 1.40

Решение

Обозначим объединенные участки на 1-м шаге — I и II с надежностями P_I и P_{II} , а на втором шаге — 1, 2, 3, 4, 5 с надежностями соответственно P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 . Тогда по таблице получаем

$$P = 1 - (1 - P_I)(1 - P_{II}),$$

где $P_I = P_1 P_2 P_3$; $P_{II} = P_4 P_5$; $P_1 = 1 - (1 - p^2)^2$; $P_2 = p_1$; $P_3 = p$; $P_4 = 1 - (1 - p^2)^3$; $P_5 = p^2$.

Теперь, подставляя результаты в обратном порядке, получаем P — надежность схемы.

1.6. Основные формулы теории вероятностей

1.6.1. Формула полной вероятности

Формула полной вероятности (ФПВ) имеет вид

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i), \quad (1.14)$$

где A — искомое событие, а под $\{H_i\}$ можно понимать полную группу несовместных событий или те из них, которые совместны с A .

ФПВ применяется, когда опыт усложняется и становится как бы двухэтапным. Тогда неопределенность предсостояния, т.е. результаты первого этапа, заменяется гипотезами $\{H_i\}$, $i = 1, \dots, n$.

Признаки задач на ФПВ:

- а) неопределенность предсостояния системы;
- б) незавершенность опыта (т.е. результат A опыта неизвестен).

Постановка задач на ФПВ. В условиях неопределенности предсостояния системы проводится опыт. Найти вероятность определенного его исхода A .

Вывод ФПВ. Верно представление: $A = \sum_{i=1}^n AH_i$, где $\{AH_i\}$ — несовместные события. Отсюда по аксиоме конечной аддитивности и теореме умножения имеем $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$, т.е. формулу (1.14).

Рассмотрим задачи на использование ФПВ.

Задача 1.41. В урну, содержащую два шара неизвестного цвета, опущен белый шар. Найти вероятность того, что извлеченный после этого шар — белый, если все возможные количества белых шаров среди первых двух равновероятны.

Решение

Событие A — извлечь белый шар; H_i ($i = 0, 1, 2$) — среди первых двух шаров i белых. Имеем: $P(H_0) = P(H_1) = P(H_2) = 1/3$; $P(A/H_0) = 1/3$; $P(A/H_1) = 2/3$; $P(A/H_2) = 1$. Теперь по ФПВ получаем $P(A) = 1/3 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 1 = 2/3$.

Задача 1.42. В первой урне 10 шаров, из них 8 белых, во второй урне 20 шаров, из них 4 белых (шары различимы). Из каждой урны берут наугад по шару и помещают в пустую третью урну, после чего из нее извлекают наугад шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение

1-й способ. H_i — состав третьей урны ($i = 1, \dots, 4$): H_1 — «бб», H_2 — «бч», H_3 — «чб», H_4 — «чч», где «б» и «ч» соответственно означают извлечение белого и черного шаров из первой и второй урн в порядке написания. Имеем:

$$\begin{aligned}
P(H_1) &= 0,8 \cdot 0,2 = 0,16; P(A/H_1) = 1; \\
P(H_2) &= 0,8 \cdot 0,8 = 0,64; P(A/H_2) = 0,5; \\
P(H_3) &= 0,2 \cdot 0,2 = 0,04; P(A/H_3) = 0,5; \\
P(H_4) &= 0,2 \cdot 0,8 = 0,16; P(A/H_4) = 0; \\
P(A) &= 0,16 + 0,5(0,64 + 0,04) = 0,5.
\end{aligned}$$

2-й способ. H_1 — извлеченный из третьей урны шар был в первой урне; H_2 — во второй урне. Имеем:

$$\begin{aligned}
P(H_1) &= P(H_2) = 0,5; P(A/H_1) = 0,8; P(A/H_2) = 0,2; \\
P(A) &= 0,5(0,8 + 0,2) = 0,5.
\end{aligned}$$

Таким образом, гипотезы можно выбирать по-разному. При удачно выбранных гипотезах задача решается проще.

Задание 1.16. Из полного набора домино наугад извлекают кость. Определите, с какой вероятностью к ней можно приставить вторую, выбранную наугад.

Задание 1.17. Пусть правило переливания крови следующее: номер группы крови донора меньше либо равен номеру группы крови больного. Определите, с какой вероятностью случайно взятому больному можно перелить кровь от произвольно взятого донора (первая группа крови — у 33,7%, вторая — у 37,5, третья — у 20,9, четвертая — у 7,9% населения).

1.6.2. Формула Байеса

Формула Байеса (ФБ) имеет вид

$$P(H_j/A) = \frac{P(H_j)P(A/H_j)}{P(A)}, \quad (1.15)$$

где $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$ — ФПВ (1.14); $\{P(H_i)\}, i = 1, \dots, n$, — априорные (доопытные) вероятности гипотез $\{H_i\}$; $\{P(H_j/A)\}, j = 1, \dots, n$, — апостериорные (послеопытные) вероятности гипотез $\{H_j\}$ — байесовские вероятности. Таким образом, ФБ (1.15) дает апостериорную вероятность гипотезы H_j .

Признаки задач на ФБ:

- а) неопределенность предсостояния системы;
- б) завершенность опыта с известным результатом A .

Постановка задач на ФБ. В условиях неопределенности предсостояния системы проводится опыт, который заканчивается результатом A . Найти вероятность определенного предсостояния системы.

Отличительный признак задач на ФБ от задач на ФПВ — завершенность опыта с известным результатом A .

Вывод ФБ. $P(AH_j) = P(A)P(H_j/A) = P(H_j)P(A/H_j) \Rightarrow P(H_j/A) = \frac{P(H_j)P(A/H_j)}{P(A)}$, где $P(A)$ заменяется на выражение (1.14), откуда и следует формула (1.15).

Рассмотрим задачи на применение ФБ.

Задача 1.43. В условиях задачи 1 извлеченный шар оказался белым. С учетом этого найти вероятность всех возможных начальных составов урны.

Решение

$\{H_i\}, i = 0, 1, 2$, и A определены в задаче 1; $P(H_0) = P(H_1) = P(H_2) = 1/3$; $P(A/H_0) = 1/3$; $P(A/H_1) = 2/3$; $P(A/H_2) = 1$, откуда $P(A) = 2/3$ получено в задаче 1, откуда по формуле (1.15) имеем:

$$P(H_0/A) = (1/3)(1/3)/(2/3) = 1/6; \quad P(H_1/A) = (1/3)(2/3)/(2/3) = 1/3; \\ P(H_2/A) = (1/3)(2/3) = 1/2.$$

Задача 1.44. Имеется 10 винтовок, из них 4 — с оптическим прицелом. Вероятность стрелку попасть из простой винтовки равна 0,8, с оптическим прицелом — 0,9. Стрелок попал из наугад взятой винтовки. Из какой винтовки вероятнее он стрелял: из простой или с оптическим прицелом?

Решение

Событие A — попасть в цель, H_1 — взята простая винтовка, H_2 — с оптическим прицелом. Тогда $P(H_1) = 0,6$; $P(H_2) = 0,4$; $P(A/H_1) = 0,8$; $P(A/H_2) = 0,9$;

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,9 = 0,84; \quad P(H_1/A) = \frac{0,6 \cdot 0,8}{0,84} > 0,5 \Rightarrow \text{вероятнее, что стрелок стрелял из простой винтовки.}$$

Задание 1.18. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить туберкулез у больного туберкулезом равна α , вероятность принять здорового за больного — β , а доля больных туберкулезом среди населения — γ . Найдите вероятность того, что человек здоров, если он признан больным при обследовании.

Задание 1.19. Из n чисел наугад выбрано два числа k и m . Найдите вероятность того, что $k - m \geq r$.

1.7. Схемы независимых испытаний

1.7.1. Биномиальная схема

Определение 1.10. Испытания Бернулли — независимые испытания, в каждом из которых различают два исхода: A — успех ($P(A) = p$), $\bar{A}$ — неуспех ($P(\bar{A}) = q$). При этом $p + q = 1$ и вероятности $P(A)$ и $P(\bar{A})$ не меняются от опыта к опыту.

Проводится n испытаний Бернулли. Тогда вероятность, что в n испытаниях происходит m успехов, равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (1.16)$$

где $p^m q^{n-m}$ — вероятность m успехов, а C_n^m — число различных фиксаций m мест для успехов среди n опытов.

Определим наивероятнейшее число успехов m^* в биномиальной схеме (1.16). Проводится n испытаний Бернулли. В них может быть успехов $m = 0, 1, \dots, m^*, \dots, n$ с вероятностями соответственно $P_n(0), P_n(1), \dots, P_n(m^*), \dots, P_n(m)$, где m^* — наивероятнейшее число успехов — это то число успехов, которому соответствует наибольшая вероятность $P_n(m^*)$.

Выпишем соотношения, из которых находится m^* :

$$\text{а) } \frac{P_n(m^*)}{P_n(m^* - 1)} \geq 1;$$

$$\text{б) } \frac{P_n(m^*)}{P_n(m^* + 1)} \geq 1.$$

Решим эти неравенства относительно m^* . Подставим выражение $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ в формулу (1.16). Получим:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{C_n^{m^*} p^{m^*} q^{n-m^*}}{C_n^{m^*-1} p^{m^*-1} q^{n-m^*+1}} &= \frac{n!}{m^*!(n-m^*)!} \frac{(m^*-1)!(n-m^*+1)!}{n!} \frac{p}{q} = \\ &= \frac{(n-m^*+1)p}{m^*q} \geq 1, \text{ откуда } m^* \leq np + p; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{C_n^{m^*} p^{m^*} q^{n-m^*}}{C_n^{m^*+1} p^{m^*+1} q^{n-m^*-1}} &= \frac{n!}{m^*!(n-m^*)!} \frac{(m^*+1)!(n-m^*-1)!}{n!} \frac{q}{p} = \\ &= \frac{(m^*+1)q}{(n-m^*)p} \geq 1, \text{ откуда: } np - q \leq m^*. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем:

$$np - q \leq m^* \leq np + p. \quad (1.17)$$

Отрезок, заключающий в себе значение m^* , имеет длину единица, поэтому или оба его конца являются целыми, или оба нецелые:

а) если оба конца целые, то m^* принимает два значения в концах этого отрезка;

б) если оба конца дробные, то m^* принимает единственное значение, заключенное в отрезке.

Рассмотрим задачи на испытания Бернулли.

Задача 1.45. Изготавливается 20 деталей. Вероятность брака — 0,3. Найти вероятность наивероятнейшего числа брака $P_n(m^*)$.

Решение

Имеем $n = 20, p = 0,3, q = 1 - p = 1 - 0,3 = 0,7$.

По соотношениям (1.17)

$$20 \cdot 0,3 - 0,7 \leq m^* \leq 20 \cdot 0,3 + 0,3 \Rightarrow 5,3 \leq m^* \leq 6,3 \Rightarrow m^* = 6,$$

$$P_{20}(m^* = 6) = C_{20}^6 0,3^6 0,7^{14}.$$

Задача 1.46. Монету бросают n раз. Найти вероятности наимвероятнейшего числа выпадения «орла» при: а) $n = 11$ и б) $n = 10$.

Решение

По соотношениям (1.17) получаем:

а) $11 \cdot 0,5 - 0,5 \leq m^* \leq 11 \cdot 0,5 + 0,5$, или $5 \leq m^* \leq 6 \Rightarrow m_1^* = 5, m_2^* = 6$;

$P_{11}(m_1^* = 5) = C_{11}^5 \cdot 0,5^{11}$; $P_{11}(m_2^* = 6) = C_{11}^6 \cdot 0,5^{11} \Rightarrow P_{11}(5) = P_{11}(6)$ (так как $C_n^k = C_n^{n-k}$);

б) $10 \cdot 0,5 - 0,5 \leq m^* \leq 10 \cdot 0,5 + 0,5$, или $4,5 \leq m^* \leq 5,5 \Rightarrow m^* = 5$;
 $P_{10}(m^* = 5) = C_{10}^5 \cdot 0,5^{10}$.

Задача 1.47. Имеется 10 независимых рабочих элементов. Надежность каждого p . Найти вероятности следующих событий: а) ни один не откажет; б) хотя бы один откажет; в) хотя бы 3 отказа.

Решение

а) Успех A определяется как один из исходов испытания Бернулли. Рассмотрим два разных выбора успеха A . Испытание одного элемента — испытание Бернулли:

1) пусть $\bar{A}$ — отказ одного элемента, $P(A) = p$, $\bar{A}$ — отказ одного элемента, $P(\bar{A}) = 1 - p = q$. Тогда $P(X) = P_{10}(10) = C_{10}^{10} p^{10} q^0 = p^{10}$;

2) пусть A — отказ одного элемента, $P(A) = q$, $\bar{A}$ — отказ одного элемента $P(\bar{A}) = p$. Тогда $P(X) = P_{10}(0) = C_{10}^0 q^0 p^{10} = p^{10}$;

б) пусть A — отказ одного элемента, $P(A) = 1 - p = q$, $\bar{A}$ — отказ одного элемента, $P(\bar{A}) = p$. Тогда $P(X) = P_{10}(1) + P_{10}(2) + \dots + P_{10}(10)$.

Переходим к дополнительному событию $\bar{X}$ — ни один не откажет:

$$P(X) = 1 - P(\bar{X}) = 1 - P_{10}(0) = 1 - p^{10};$$

в) пусть A — отказ одного элемента, $P(A) = p$, $\bar{A}$ — отказ одного элемента $P(\bar{A}) = q$. Тогда

$$\begin{aligned} P(X) &= P_{10}(3) + P_{10}(4) + \dots + P_{10}(10) = 1 - P_{10}(0) - P_{10}(1) - P_{10}(2) = \\ &= 1 - C_{10}^0 q^{10} - C_{10}^1 p^1 q^9 - C_{10}^2 p^2 q^8 = 1 - q^{10} - 10pq^9 - 45p^2q^8. \end{aligned}$$

Замечание 1.10. Рекомендуется за успех испытания Бернулли брать тот исход, который фигурирует в вопросе задачи.

Замечание 1.11. Переход к дополнительному событию совершается, когда это упрощает вычисления. Используется соотношение $P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(n) = 1$, так как это сумма полной группы

несовместных событий. Поэтому если $P(X) = \sum_{i=1}^k P_n(i)$, то $P(\bar{X}) =$
 $= \sum_{i=k+1}^n P_n(i)$.

Обобщения биномиальной схемы. Обобщить биномиальную схему можно в двух направлениях:

а) по изменению вероятностей (успеха и неуспеха) различных исходов от опыта к опыту, тогда получается **пуассоновская схема**;

б) по числу исходов каждого опыта, тогда получается **полиномиальная схема**.

Если обобщение ведется в обоих направлениях одновременно, тогда получается **обобщенная схема**.

Пример. Пусть студенты сдают зачеты и экзамены независимо друг от друга. Тогда эти испытания представляют следующие схемы:

- 1) все студенты равносильны и сдают зачет — биномиальная схема;
- 2) все студенты разной подготовки и сдают зачет — пуассоновская схема;
- 3) все студенты равносильны и сдают экзамен — полиномиальная схема;
- 4) все студенты разной подготовки и сдают экзамен — обобщенная схема.

1.7.2. Пуассоновская схема

Проводится n независимых испытаний, в каждом два исхода: A — успех и $\bar{A}$ — неуспех. Вероятности в i -м опыте: $P(A) = p_i$, $P(\bar{A}) = q_i$, $p_i + q_i = 1$, $i = 1, \dots, n$ (при $p_i = p$ для $\forall i$ получаем биномиальную схему).

Нас интересует вероятность того, что в n испытаниях этой схемы получается m успехов. Определим ее по формулам сложения и умножения вероятностей. Вероятность нуля успехов ($m = 0$):

$$P_n(0) = q_1 q_2 \cdots q_n.$$

Вероятность одного успеха ($m = 1$):

$$P_n(1) = \underbrace{p_1 q_2 \cdots q_n + q_1 p_2 q_3 \cdots q_n + \dots + q_1 q_2 \cdots q_{n-1} p_n}_{\text{Число слагаемых } C_n^1}.$$

Вероятность двух успехов ($m = 2$):

$$P_n(2) = \underbrace{p_1 p_2 q_3 \cdots q_n + p_1 q_2 p_3 \cdots q_n + \dots + q_1 q_2 \cdots q_{n-2} p_{n-1} p_n}_{\text{Число слагаемых } C_n^2}.$$

И т.д.

По-другому для определения вероятностей $P_n(m)$, $m = 0, 1, \dots, n$, составляют функцию

$$\varphi(z) = \prod_{i=1}^n (p_i z + q_i) = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n.$$

Легко заметить, что коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n$ совпадают с соответствующими вероятностями вида $P_n(m)$, т.е. $a_0 = P_n(0)$; ...; $a_n = P_n(n)$.

Вывод: для нахождения вероятности $P_n(m)$ надо построить $\varphi(z)$ и найти коэффициент a_m : $P_n(m) = a_m$. Причем сумма всех коэффициентов $a_0 + a_1 + \dots + a_n = 1$, так как это сумма вероятностей полной группы несовместных исходов.

Задача 1.48. Проводится четыре независимых выстрела по мишени с вероятностями попадания 0,1; 0,2; 0,3; 0,4. Найти вероятности всех возможных количеств попаданий.

Решение

Составляем уравнение:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= (0,1z + 0,9) \cdot (0,2z + 0,8) \cdot (0,3z + 0,7) \cdot (0,4z + 0,6) = \\ &= 0,302 + 0,460z + 0,205z^2 + 0,031z^3 + 0,002z^4.\end{aligned}$$

Тогда коэффициенты при степенях z и являются искомыми вероятностями всех возможных количеств попаданий от 0 до 4 соответственно.

1.7.3. Полиномиальная схема

Проводится n независимых испытаний. В каждом из испытаний различается k исходов: $A_1, A_2, \dots, A_k$, где вероятность $P(A_i) = p_i, i = 1, \dots, k$ (вероятность p_i от опыта к опыту не меняется), $\sum_{j=1}^k p_j = 1$.

В этой схеме нас интересует вероятность $P_n(m_1, \dots, m_n)$ — вероятность того, что в n исходах этой схемы произойдет m_1 исходов A_1, m_2 исходов $A_2, \dots, m_n$ исходов A_n , причем сумма $\sum_{j=1}^k m_j = n$:

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_n) = \frac{n!}{\underbrace{m_1! m_2! \dots m_n!}_{\substack{\text{Перестановка с повторениями} \\ \text{есть число способов деления } n \\ \text{на } n \text{ групп с заданными} \\ \text{численностями } m_1, \dots, m_n}}} \underbrace{p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}}_{\substack{\text{Вероятность одного} \\ \text{из благоприятных испытаний} \\ \text{(исходов), когда места} \\ \text{исходов каждого вида} \\ \text{в нужном числе фиксированы}}}$$

Если $k = 2$, то при $m_1 = m; m_2 = n - m; p_1 = p; p_2 = q$. Тогда

$$P_n(m, n - m) = \frac{n!}{m!(n - m)!} p^m q^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m} = P_n(m).$$

Задача 1.49. При стрельбе по мишени (рис. 1.5) вероятность попадания в «10» есть $p_1 = 0,1$; в «9» — $p_2 = 0,2$; в «8» — $p_3 = 0,3$.

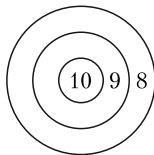


Рис. 1.5. К задаче 1.49

Число исходов $k = 4$, так как можно с вероятностью p_4 не попасть в мишень.

Найти вероятность того, что:

- за 3 выстрела мы сможем выбить не менее 29 очков;
- за 5 выстрелов выбить 28 очков.

Решение

а) Рассматриваемое событие есть сумма двух несовместных способов выбить не менее 29 очков: $X = X_1 + X_2$. Тогда

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X_1) + P(X_2) = P_3(2, 1, 0, 0) + P_3(3, 0, 0, 0) = \\ &= \frac{3!}{2! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot 0,1^2 \cdot 0,2 + \frac{3!}{3! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot 0,1^3 = 3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,2 + 0,1^3 = 0,007. \end{aligned}$$

б) Аналогично имеем $X = X_1 + X_2$, где X_1 и X_2 — два несовместных способа выбить 28 очков. Тогда

$$\begin{aligned} P(X) &= P_5(2, 0, 1, 2) + P_5(1, 2, 0, 2) = \\ &= \frac{5!}{2! \cdot 2!} \cdot 0,1^2 \cdot 0,3 \cdot 0,4^2 + \frac{5!}{2! \cdot 2!} \cdot 0,1 \cdot 0,2^2 \cdot 0,4^2. \end{aligned}$$

1.7.4. Обобщенная схема

Проводится n независимых испытаний. В каждом испытании k исходов вида $A_1, A_2, \dots, A_k$, в i -м испытании вероятность исхода A_j равна p_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$ (i — номер опыта, j — номер исхода); $\sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$ (т.е. в каждом опыте происходит один из исходов $A_1, A_2, \dots, A_k$).

Нас интересует вероятность $P_n(m_1, \dots, m_n)$, введенная в полиномиальной схеме, где $\sum_{j=1}^k m_j = n$, тогда $P_n(m_1, \dots, m_n)$ равна коэффициенту при $z_1^{m_1}, \dots, z_k^{m_k}$ в разложении по степеням следующей функции:

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n (p_{i1}z_1 + p_{i2}z_2 + \dots + p_{in}z_n) = \sum a_{m_1 m_2 \dots m_k} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_k^{m_k},$$

где $m_1, m_2, \dots, m_k$ — целые числа $m_j \geq 0$, а $\sum_{j=1}^k m_j = n$.

Тогда $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = a_{m_1 m_2 \dots m_k}$.

Задача 1.50. Пусть производится три независимых опыта ($n = 3$), в каждом возможно четыре исхода A_1, A_2, A_3, A_4 и заданы вероятности $\{p_{ij}\}$, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$.

Найти вероятность того, что произойдет два исхода A_1 и один исход A_2 .

Решение

P (два исхода A_1 и один исход A_2) = $P_3(2, 1, 0, 0)$, $n = 3$, $k = 4$.

Составим функцию

$$\begin{aligned} \varphi(z_1, z_2, z_3, z_4) &= \prod_{i=1}^n (p_{i1}z_1 + p_{i2}z_2 + p_{i3}z_3 + p_{i4}z_4) = \\ &= (p_{11}z_1 + p_{12}z_2 + p_{13}z_3 + p_{14}z_4) \cdot (p_{21}z_1 + p_{22}z_2 + p_{23}z_3 + p_{24}z_4) \times \\ &\quad \times (p_{31}z_1 + p_{32}z_2 + p_{33}z_3 + p_{34}z_4). \end{aligned}$$

Тогда $P(2, 1, 0, 0) = (\text{коэффициенту при } z_1^2 z_2 = a_{2100}) = p_{11} p_{21} p_{32} + p_{11} p_{31} p_{22} + p_{12} p_{21} p_{31}$, полученному непосредственно из выражения для $\Phi(z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Задача 1.51. Производится 20 залпов по 10 независимых выстрелов. Вероятность попадания при каждом равна 0,7. Найти вероятность событий:

- а) в двух залпах ровно три попадания;
- б) хотя бы в двух залпах не менее двух попаданий.

Решение

Имеем биномиальную схему в биномиальной:

а) пусть событие A — успешный залп: в залпе 3 попадания. Имеем $P(A) = C_{10}^3 \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^7$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Тогда

$$\begin{aligned} P(X) &= P_{20}(2) = C_{20}^2 (P(A))^2 (1 - P(A))^{18} = \\ &= C_{20}^2 (C_{10}^3 \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^7)^2 \cdot (1 - C_{10}^3 \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^7)^{18}, \end{aligned}$$

б) пусть событие A — успешный залп: в залпе не менее двух попаданий. Вероятность успешного залпа $P(A) = 1 - P_{10}(0) - P_{10}(1) = 1 - C_{10}^0 \cdot 0,7^{10} \cdot 0,3^0 - C_{10}^1 \cdot 0,7^9 \cdot 0,3^1$. Тогда

$$\begin{aligned} P(X) &= 1 - P_{20}(0) - P_{20}(1) = \\ &= 1 - C_{20}^0 (P(A))^0 (1 - P(A))^{20} - C_{20}^1 (P(A))^1 (1 - P(A))^{19}, \end{aligned}$$

где $P(A)$ получена выше.

1.8. Геометрические вероятности

Если вероятность события A — попадания случайной точки в любую часть области — пропорциональна мере этой области, т.е. $P(A) = S_A/S$, где S — мера всей области, а S_A — мера той ее части, попадание случайной точки в которую есть событие A , тогда $P(A)$ называется **геометрической вероятностью**. Для вычисления геометрических вероятностей классическое определение вероятностей не годится, так как число всех возможных исходов опыта здесь бесконечно.

Рассмотрим задачи на использование геометрической вероятности. Во всех задачах искомое событие обозначено X .

Задача 1.52. Плоскость разграфлена параллельными прямыми на расстоянии $2a$. На плоскость случайным образом брошена монета радиусом $r < a$ (рис. 1.6). Найти вероятность того, что она не пересечет ни одной прямой.

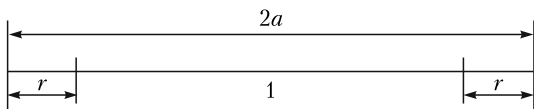


Рис. 1.6. К задаче 1.52

Решение

$$P(X) = \frac{1}{2a} = \frac{2(a-r)}{2a} = 1 - \frac{r}{a}.$$

Задание 1.20. На плоскости нанесена сетка квадратов со стороной a и наугад брошена монета радиусом $r < a/2$. Найдите вероятность того, что:

- она не пересечет обе стороны квадратов сетки;
- она не пересечет более одной стороны сетки.

Задача 1.53 (Бюффона). Плоскость разграфлена параллельными прямыми на расстоянии $2a$, на плоскость брошена игла длиной $2l$. Найти вероятность того, что она пересечет одну из прямых.

Решение

Пусть x — кратчайшее расстояние от середины иглы до одной из прямых, φ — угол между иглой и направлением оси Ox (рис. 1.7, а) тогда x и φ полностью определяют положение иглы относительно графления плоскости, x меняется от 0 до a , φ — от 0 до π . Тогда прямоугольник со сторонами a и π есть область возможных положений иглы, а заштрихованная ее часть — область благоприятных исходов (рис. 1.7, б).

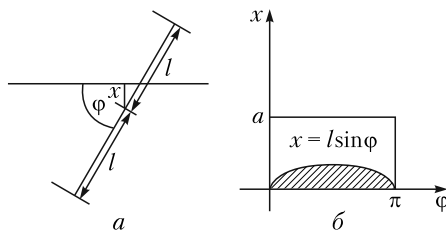


Рис. 1.7. К задаче 1.53

Искомая вероятность есть

$$P(x) = \frac{\int_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi}{a\pi} = \frac{-l \cos \varphi \Big|_0^{\pi}}{a\pi} = \frac{2l}{a\pi}.$$

Задание 1.21 (о встрече). Двое договорились встретиться в течение часа, причем пришедший первым ждет второго четверть часа. Найдите вероятность того, что они встретятся, если каждый выбирает момент своего прихода случайно в течение часа.

Задача 1.54. В единичный квадрат, лежащий в первой четверти, наугад брошена точка с координатами ξ и η . Найти вероятность того, что: а) $\xi\eta < a$; б) $\min(\xi\eta) < a$ для $0 \leq a \leq 1$.

Решение

Задача проиллюстрирована рис. 1.8. Получаем:

$$\text{а) } P(X) = a + \int_0^1 a \frac{dz}{z} = a(1 - \ln a); \text{ б) } P(X) = 1 - (1 - a)^2 = a(2 - a).$$

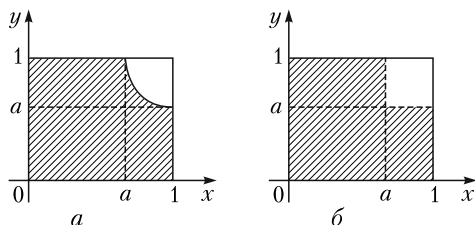


Рис. 1.8. К задаче 1.54

Задание 1.22. В единичный квадрат, лежащий в первой четверти, наугад брошена точка с координатами ξ и η . Найдите вероятность того, что для $0 \leq a \leq 1$:

- а) $\xi < x, \eta < y$ (при $0 \leq x, y \leq 1$);
- б) $|\xi - \eta| < a$;
- в) $\max(\xi\eta) < a$;
- г) $2(\xi + \eta) < a$ (рассмотреть случаи $a < 1/2$ и $a > 1/2$).

Задача 1.55. На отрезке AB длиной 1 поставлено наугад две точки L и M . Найти вероятность $P(X)$ того, что точка L ближе к точке M , чем к точке A , т.е. $LM < AL$ (рис. 1.9).

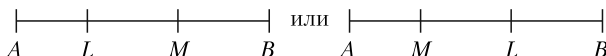


Рис. 1.9. К задаче 1.55

Решение

Обозначим длины отрезков AL и AM через x и y соответственно. Тогда условие появления благоприятного события есть $|y - x| < x$, или $y < 2x$ при $x < y$ и $y > 0$ при $x > y$, откуда из геометрических соображений (рис. 1.10) следует, что $P(X) = 3/4$.

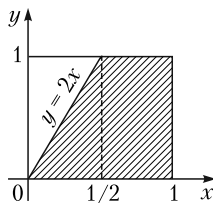


Рис. 1.10. К решению задачи 1.55

Задание 1.23. На отрезок длины 1 наугад поставлены две точки. Найдите, с какой вероятностью из получившихся отрезков можно построить треугольник.

Задача 1.56. На окружность наугад поставлены три точки. С какой вероятностью они попадут на одну полуокружность?

Решение

Пусть X — искомое событие, т.е. означает, что треугольник, образованный поставленными точками A, B, C , тупоугольный, и событие $\bar{X}$ —

что этот треугольник остроугольный. Тогда $P(X) = 1 - P(\bar{X})$, а при появлении события $\bar{X}$ для дуг $\widehat{AB} = x$ и $\widehat{BC} = y$ должны выполняться условия

$$\begin{cases} 0 < x + y < 2\pi r, \\ x + y > \pi r, \\ x < \pi r, \\ y < \pi r, \end{cases}$$

что приводит к чертежу с заштрихованной благоприятной для появления события $\bar{X}$ областью. Область всех возможных значений — $x, y > 0$; $0 < x + y < 2\pi r$. Отсюда получаем $P(\bar{X}) = 0,25$, а значит, $P(X) = 0,75$.

Задание 1.24. Найдите ошибку в следующем рассуждении: ставим первую точку на окружность произвольно, тогда вторая точка всегда находится на той же полуокружности, а для третьей точки вероятность попасть в ту же полуплоскость равна $1/2$.

Задача 1.57 (парадокс Бертрана). Найти вероятность того, что длина случайно взятой хорды в окружности единичного радиуса превысит $\sqrt{3}$ (т.е. сторону правильного вписанного треугольника).

Решение

Приведем три решения задачи (с разными ответами) в зависимости от процедуры случайного выбора хорды, которая приводит к трем разным задачам (т.е. без уточнения этой процедуры исходная задача поставлена некорректно, что и приводит к парадоксу). Таким образом, все три представленных ниже решения верны и относятся к разным задачам.

1. Для выбора случайно хорды наугад берем на окружности две точки. Возьмем одну из них за вершину правильного вписанного в окружность треугольника. Тогда (рис. 1.11, а) благоприятная область выбора второй точки выделена на рисунке утолщением линии. Область всех возможных вариантов выбора второй точки — вся окружность, поэтому $P(X) = 1/3$.

2. Выбор случайно хорды зададим случайным выбором точки основания перпендикуляра, опущенного из центра окружности на хорду. Тогда область благоприятных исходов есть вписанный в правильный треугольник круг радиусом $r = 1/2$ (рис. 1.11, б), поэтому

$$P(X) = \frac{\pi(1/2)^2}{\pi} = 1/4.$$

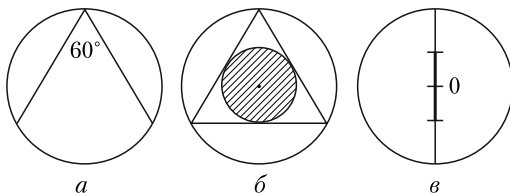


Рис. 1.11. К задаче 1.57

3. Выбор случайно хорды зададим случайным выбором расстояния по произвольному диаметру от центра окружности (рис. 1.11, в). Тогда, чтобы длина хорды была больше $\sqrt{3}$, расстояние от выбранной точки до центра окружности должно быть меньше $1/2$, так что $P(X) = 1/2$.

Контрольные вопросы и задания

1. Как проверяется адекватность модели? Приведите примеры выбора моделей.
2. Каково соответствие схем выбора и размещений?
3. Что такое гипергеометрическая схема и ее обобщение? Приведите примеры.
4. Выпишите формулу сложения вероятностей для трех произвольных событий.
5. Выпишите формулу умножения вероятностей для пяти произвольных событий.
6. В чем сходство и различие в постановках задач на ФПВ и ФБ?
7. Когда пуассоновская, полиномиальная и обобщенная схемы независимых испытаний совпадают с биномиальной?

Глава 2

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В результате изучения данной главы студенты должны:

знать

- основные вероятностные распределения дискретного и непрерывного типов и их моменты;

уметь

- решать задачи на свойства вероятностных распределений;

владеть

- навыками нахождения вероятностных распределений и их числовых характеристик.
-

В главе вводятся понятия случайной величины (СВ) и закона ее распределения — это одни из главных понятий теории вероятностей. Изучаются способы задания законов распределения СВ дискретного и непрерывного типов и их свойства. Акцентируется внимание на наиболее важных с теоретической и практической точек зрения распределениях дискретного и непрерывного типов с подробным их рассмотрением и установлением связей между ними — точных и асимптотических.

Вводятся понятия различных числовых характеристик (моментов) СВ, выделяются наиболее важные и используемые из них, прежде всего это математическое ожидание и дисперсия СВ, и подробно изучаются их свойства.

Изучается корреляционная теория и объясняется ее применение для расширения ранее рассмотренных свойств основных моментов распределений.

Вопросы настоящей главы лежат в основе освоения всех других вероятностных дисциплин и составляют главную часть вероятностного образования современного выпускника вуза.

2.1. Одномерная случайная величина

Определение 2.1. *Случайной величиной* (СВ) $\xi = \xi(\omega)$ называется любая действительная функция, определенная на пространстве элементарных исходов $\Omega = \{\omega\}$, такая что для любого действительного x $\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathbf{A}$ — алгебре событий.

Смысл этого определения в том, что, так как для любого элемента множества $\mathbf{A}$ определена его вероятность, имеет смысл говорить о вероятности события $\{\xi < x\}$.

Для дальнейшего покажем, что тогда выполнены аналогичные соотношения для следующих событий:

- а) $\{\xi \geq x\} \in \mathbf{A}$;
- б) для $x_1 < x_2$ $\{x_1 \leq \xi < x_2\} \in \mathbf{A}$;
- в) $\{\xi = x\} \in \mathbf{A}$,

а значит, определены вероятности этих событий.

Доказательство. Так как множество $\mathbf{A}$ замкнуто относительно операций сложения, умножения и дополнения не более чем в счетном числе, то можно записать:

- а) $\{\xi \geq x\} = \overline{\{\xi < x\}} \in \mathbf{A}$;
- б) для $x_1 < x_2$ $\{x_1 \leq \xi < x_2\} = \{\xi \geq x_1\} \cap \{\xi < x_2\} \in \mathbf{A}$;
- в) $\{\xi = x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \leq \xi < x + 1/n\} \in \mathbf{A}$.

Задать закон распределения СВ — это значит установить соответствие между всеми возможными значениями и вероятностями этих значений.

По способам задания законов распределения СВ делят на дискретные и непрерывные.

Дискретная СВ принимает конечное или счетное множество значений.

Непрерывная СВ заполняет сплошь конечный или бесконечный промежуток числовой оси (т.е. принимает множество значений мощностью континуум).

2.1.1. Задание дискретной случайной величины

Рассмотрим наиболее распространенный способ задания закона распределения в виде ряда распределения на примерах основных распределений дискретного типа.

Ряд распределения — это таблица, состоящая из двух граф: в верхней — имя случайной величины X и все ее возможные значения в возрастающем порядке без повторов, в нижней — вероятности этих значений $p_k = P(X = x_k)$, т.е. ряд распределения представляет из себя способ задания закона распределения дискретной СВ X :

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Свойства ряда распределения:

1) так как события $\{X = x_1\}, \dots, \{X = x_k\}$ есть полная группа несовместных событий, то $\sum_{k=1}^n p_k = 1$;

2) $p_k \geq 0$.

Замечание 2.1. Для проверки на ряд распределения нужно проверить выполнение свойств 1 и 2.

2.1.2. Основные распределения дискретного типа

1. Вырожденное распределение.

СВ $X = C$ ($C = \text{const}$).

X	C
P	1

2. Бернуллиевское распределение.

СВ X_i — число успехов в одном из испытаний Бернулли; $p = P(A)$; $q = P(\bar{A})$; $p + q = 1$.

X	0	1
P	q	p

Обозначение распределения: СВ $X_i \sim B(1, p)$.

3. Биномиальное распределение.

СВ X — число успехов в n испытаний Бернулли; вероятности

$$p_k = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, \dots, n,$$

где p — вероятность успеха в одном испытании Бернулли.

X	0	1	...	n
P	p_0	p_1	...	p_n

Проверка на распределение:

$$\sum_{k=0}^n p_k = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1^n = 1.$$

Обозначение распределения: СВ $X \sim B(n, p)$.

4. Пуассоновское распределение.

СВ X — число редких событий. X имеет пуассоновское распределение, если

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}; \lambda > 0, k = 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

Проверка на распределение:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1.$$

Обозначение распределения: $X \sim \pi(\lambda)$.

5. Геометрическое распределение.

СВ X_i — число испытаний Бернулли до появления первого успеха включительно. Пусть p — вероятность успеха в одном испытании Бернулли. Тогда

$$p_k = P(X_i = k) = pq^{k-1}, k = 1, 2, \dots, \infty.$$

Проверка на распределение:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \frac{1}{1-q} = 1.$$

Обозначение распределения: СВ $X_i \sim G(p)$.

6. Сдвинутое геометрическое распределение.

СВ Y_i — число неудач до появления первого успеха в испытании Бернулли. Вероятности

$$p_k = P(Y_i = k) = pq^k, k = 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

Проверка на распределение:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} pq^k = p \sum_{k=0}^{\infty} q^k = p \frac{1}{1-q} = 1.$$

Обозначение распределения: СВ $Y_i \sim \text{сд}G(p)$.

7. Распределение Паскаля.

СВ Z_1 — число испытаний Бернулли до r -го успеха включительно. Вероятности

$$p_k = P(Z_1 = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}, k = r, r+1, \dots, \infty.$$

Проверка на распределение:

$$\begin{aligned} \sum_{k=r}^{\infty} p_k &= \sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r} = \frac{p^r}{(r-1)!} \sum_{k=r}^{\infty} A_{k-1}^{r-1} q^{k-r} = \frac{p^r}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{dq^{r-1}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} \right) = \\ &= \frac{p^r}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{dq^{r-1}} \left(\frac{1}{1-q} \right) = \frac{p^r}{(r-1)!} \frac{(r-1)!}{(1-q)^r} = 1. \end{aligned}$$

Обозначение распределения: $Z_1 \sim \text{Па}(r, p)$.

8. Отрицательное биномиальное распределение.

СВ Z_2 — число неудач r -го успеха включительно. Вероятности

$$p_k = P(Z_2 = k) = C_{k+r-1}^k p^r q^k, k = 0, 1, \dots, \infty.$$

Проверка на распределение:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+r-1}^k p^r q^k = \langle k+r=m \rangle = \sum_{m=r}^{\infty} C_{m-1}^{m-r} p^r q^{m-r} = \sum_{m=r}^{\infty} C_{m-1}^{r-1} p^r q^{m-r} = 1$$

по результату проверки распределения Паскаля в п. 7.

Обозначение распределения: $Z_2 \sim OB(r, p)$.

9. Гипергеометрическое распределение.

X — число элементов первого типа в выборке объема n из N различных элементов, среди которых M — первого типа. Вероятность

$$p_k = P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Проверка на распределение: требуется доказать, что при $k_1 \leq k \leq k_2$, где $k_1 = \max\{0, n - N + M\}$, $k_2 = \min\{M, n\}$,

$$\sum_k p_k = \sum_k \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = 1,$$

а это эквивалентно равенству $\sum_k C_M^k C_{N-M}^{n-k} = C_N^n$ (равенство Вандермонда), которое следует по формуле бинома Ньютона из очевидного соотношения $(1+x)^N = (1+x)^M (1+x)^{N-M}$ приравниванием коэффициентов при x^n справа и слева.

Обозначение распределения: $X \sim H(N, M, n)$.

2.1.3. Связи распределений

Сначала рассмотрим точные связи распределений.

1. Связь биномиальной СВ с бернуллиевскими.

Если СВ $X \sim B(n, p)$, СВ $X_i \sim B(1, p)$ и СВ $\{X_i\}$ независимы, тогда:

а) $B(n, p)_{n=1} = B(1, p)$;

б) $X = \sum_{i=1}^n X_i$.

2. Связи между случайными величинами, приведенными в предыдущем подпараграфе в п. 5–7, представлены на рис. 2.1. Здесь схематично изображены серии испытаний Бернулли с обозначениями: «-» — неудача; «+» — удача; X_i — длина i -й серии; Y_i — количество подряд идущих неудач i -й серии, $i = 1, \dots, r$; Z_1 — суммарная длина r серий; Z_2 — суммарное число неудач в r сериях.

Можно отметить следующие соотношения:

1) $X_i = Y_i + 1$;

2) $Z_1 = Z_2 + r$;

3) $Z_1 = \sum_{i=1}^r X_i$, где $\{X_i\}$ — независимые случайные величины, одинаково распределенные по закону $G(p)$;

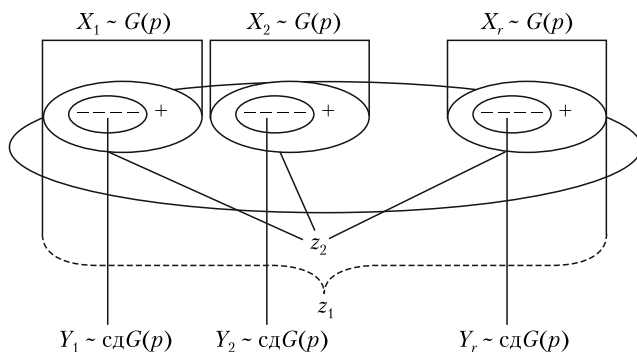


Рис. 2.1. Связи между случайными величинами

4) $Z_2 = \sum_{i=1}^r Y_i$, где $\{Y_i\}$ — независимые случайные величины, одинаково распределенные по закону $\text{сд}G(p)$;

5) $G(p) \sim \text{Па}(r = 1, p)$;

6) $\text{сд}G(p) \sim \text{ОВ}(r = 1, p)$.

Следующие два утверждения задают асимптотические связи распределений.

Утверждение 2.1. Пусть СВ $X \sim H(N, M, n)$ и условия асимптотики следующие:

$$N, M \rightarrow \infty, \quad \frac{N}{M} \rightarrow p, \quad 0 < p < 1, \quad (2.1)$$

тогда

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \rightarrow C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Доказательство. В условиях асимптотики (2.1) будем исследовать поведение гипергеометрической вероятности $P(X = k)$:

$$\begin{aligned} \lim_{(2.1)} \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} &= \left\{ C_n^r = \frac{A_n^r}{r!}, A_n^r = n(n-1) \cdots (n-r+1) \right\} = \lim_{(2.1)} \frac{A_M^k A_{N-M}^{n-k} n!}{k!(n-k)! A_N^n} = \\ &= C_n^k \lim_{(2.1)} \frac{M(M-1) \cdots (M-k+1) \cdot (N-M)(N-M+1) \cdots (N-M-n+k+1) / N^n}{N(N-1) \cdots (N-n+1) / N^n} = \\ &= C_n^k \lim_{(2.1)} \frac{\frac{M}{N} \cdots \frac{M-k+1}{N} \cdots \frac{N-M}{N} \cdots \frac{N-M-n+k+1}{N}}{\frac{N}{N} \cdots \frac{N-n+1}{N}} = C_n^k p^k q^{n-k}, \end{aligned}$$

так как

$$\frac{M}{N} \cdots \frac{M-k+1}{N} \xrightarrow{(2.1)} p^k, \quad \frac{N-M}{N} \cdots \frac{N-M-n+k+1}{N} \xrightarrow{(2.1)} 1.$$

Утверждение 2.2 (Теорема Пуассона). Пусть СВ $X \sim B(n, p)$ и условия асимптотики следующие:

$$n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0 \text{ (успех — редкое событие)}, np = \lambda - \text{const} > 0. \quad (2.2)$$

Тогда

$$\lim_{(2.2)} C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Доказательство. В условиях асимптотики (2.2) будем исследовать поведение биномиальной вероятности $P(X = k)$:

$$\begin{aligned} \lim_{(2.2)} C_n^k p^k q^{n-k} &= \lim_{(2.2)} \frac{A_n^k}{k!} \left(\frac{\lambda}{n} \right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{(2.2)} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

2.1.4. Функция распределения случайной величины и ее свойства

Определение 2.2. Функцией распределения называется функция $F(x) = P(X < x)$, где X — случайная величина; x — любое действительное значение.

Функция $F(x)$ — это способ задания закона распределения любой случайной величины: дискретной или непрерывной.

Свойства $F(x)$:

- 1) $0 \leq F(x) \leq 1$;
- 2) $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$;
- 3) $F(x)$ — неубывающая функция по x ;
- 4) $F(x)$ — непрерывная функция слева.

Доказательство. 1. Очевидно, так как $F(x)$ — это вероятность события $(X < x)$.

2. $F(x) = P(X < x)$, поэтому $F(-\infty) = 0$ как вероятность невозможного события, а $F(\infty) = 1$ как вероятность достоверного события.

3. Пусть $x_1 < x_2$. Рассмотрим события $A = (X < x_1)$; $B = (X < x_2)$; $C = (x_1 \leq X < x_2)$ (рис. 2.2).

Тогда $B = A + C$, где события A и C несовместны, поэтому по аксиоме конечной аддитивности $P(B) = P(A) + P(C)$, или $P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2)$, или $F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leq X < x_2)$, откуда в силу неотрицательности слагаемого $P(x_1 \leq X < x_2)$ следует $F(x_2) \geq F(x_1)$, ч.т.д.

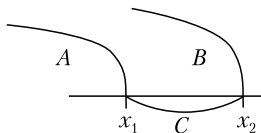


Рис. 2.2. К доказательству свойств $F(x)$

4. Выберем возрастающую последовательность $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$, сходящуюся к x (например, $x_n = x - 1/n$). Пусть $A_n = \{x_n \leq X < x\}$, тогда $\{A_n\}$ удовлетворяет аксиоме непрерывности, т.е. $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, так что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n \leq X < x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(x) - F(x_n)) = \\ &= F(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x) - F(x-0), \end{aligned}$$

т.е. $F(x-0) \rightarrow F(x)$, ч.т.д.

Следствия из свойства 3 функции распределения $F(x)$:

1) $P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ для $x_1 < x_2$;

2) $P(X = \alpha) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} (F(\beta) - F(\alpha))$. Значит, если $X = \alpha$ — точка непрерывности $F(x)$, то $P(X = \alpha) = 0$, а если в точке $X = \alpha$ функция $F(x)$ разрывна, то $P(X = \alpha)$ равна величине скачка $F(x)$ в точке α .

Рассмотрим задачи на построение $F(x)$ (графически и аналитически).

Задача 2.1. Дан ряд распределения дискретной СВ X :

X	1	2	4
P	0,2	0,3	0,5

Найти $F(x)$ графически и аналитически.

Решение

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 0,2, & 1 < x \leq 2, \\ 0,2 + 0,3, & 2 < x \leq 4, \\ 0,2 + 0,3 + 0,5, & x > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 0,2, & 1 < x \leq 2, \\ 0,5, & 2 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$F(x)$ — ступенчатая функция — функция распределения дискретной случайной величины (рис. 2.3).

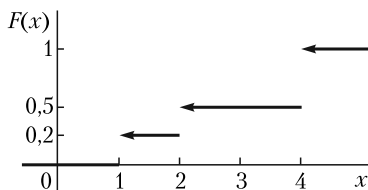


Рис. 2.3. К задаче 2.1

Задача 2.2. Дана $F(x)$ СВ X , полученная в задаче 2.1. Найти ряд распределения СВ X .

Решение

По следствию 2 СВ X принимает с ненулевой вероятностью те же значения, в которых ее функция распределения $F(x)$ разрывна, т.е. верх-

няя графа ряда распределения СВ X есть числа 1; 2; 4. По тому же следствию 2 значения вероятностей СВ X в этих точках есть скачки функции распределения в этих точках. По данным $F(x)$ получаем $P(X = 1) = 0,2 - 0 = 0,2$; $P(X = 2) = 0,5 - 0,2 = 0,3$; $P(X = 4) = 1 - 0,5 = 0,5$, т.е. в нижней графе ряда распределения получаем соответственно числа 0,2; 0,3; 0,5. Полученный ряд распределения совпадает с данными в задаче 1.

Замечание 2.2. В задаче 2.1 хорошо прослеживаются все перечисленные выше свойства $F(x)$ на ее графике.

Замечание 2.3. Из рассмотренных задач очевидно, что для дискретной СВ X ряд распределения (который является способом задания закона распределения дискретной СВ X) и функция распределения $F(x)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии. А значит, $F(x)$ является способом задания закона распределения СВ X .

Задача 2.3. Из пяти ключей два подходят к двери. Построить ряд распределения (а также $F(x)$ в случае а)) для числа x выборов ключей до нужного, если ключи выбирают:

- а) без возвращения;
- б) с возвращением.

Решение

а) $p_1 = 2/5 = 0,4$; $p_2 = 3/5 \cdot 2/4 = 0,3$; $p_3 = 3/5 \cdot 2/4 \cdot 2/3 = 0,2$; $p_4 = 3/5 \cdot 2/4 \cdot 1/3 \cdot 1/2 = 0,1$;

X	1	2	3	4
P	p_1	p_2	p_3	p_4

$F(x)$ построить самостоятельно;

б) $p_k = pq^{k-1} = 0,4 \cdot 0,6^{k-1}$ (A — успех: выбор нужного ключа; $p(A) = 0,4 = p$; $q = 1 - p = 0,6$).

X	1	2	3	...	k	...
P	p_1	p_2	p_3	...	p_k	...

Задание 2.1. Из шести ключей один подходит к двери. Построить ряд распределения (а также $F(x)$ в случае а)) для числа x выборов ключей до нужного, если ключи выбирают:

- а) без возвращения;
- б) с возвращением.

Задача 2.4. Стрелок имеет четыре патрона и ведет стрельбу:

- а) до первого попадания;
 - б) двух попаданий подряд;
 - в) двух попаданий не обязательно подряд;
 - г) двух попаданий не обязательно подряд или пока есть такая возможность;
 - д) двух попаданий подряд или пока есть такая возможность.
- Построить ряд распределения числа x выстрелов.

Решение

Пусть p — вероятность попадания при каждом выстреле.

а) Строим ряд: $p_1 = p$; $p_2 = qp$; $p_3 = q^2p$; $p_4 = q^3$.

Проверка: $p + qp + q^2p + q^3 = 1 - q + q(1 - q) + q^2(1 - q) + q^3 = 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + q^3 = 1$.

б) Строим ряд: $p_2 = p^2$; $p_3 = qp^2$; $p_4 = pq + pq^2 + q^2$.

Проверка: $p^2 + qp^2 + pq + pq^2 + q^2 = p^2 + q^2 + pq(p + q + 1) = p^2 + q^2 + 2pq = (p + q)^2 = 1$.

в) Строим ряд: $p_2 = p^2$; $p_3 = 2qp^2$; $p_4 = q + 2pq^2$.

Проверка: $p^2 + 2qp^2 + 2pq^2 + q^2 = p^2 + q^2 + 2pq(p + q) = (p + q)^2 = 1$.

г) $p_2 = p^2$; $p_3 = 2qp^2$; $p_4 = 3pq^2$.

Проверка: $p^2 + 2qp^2 + 3pq^2 + q^3 = p^2 + q^3 + pq(2p + 3q) = p^2 + q^3 + pq(2 - 2q + 3q) = p^2 + q^3 + pq(2 + q) = p^2 + q^3 + 2pq + pq^2 = p^2 + 2pq + q^2(p + q) = (p + q)^2 = 1$.

д) $p_2 = p^2$; $p_3 = p^2 + 2q^2p + q^3 = q(p^2 + 2qp + q^2) = q$; $p_4 = pq^2 + p^2q = pq$.

Проверка: $p^2 + q + pq = p^2 + 1 - p + p(1 - p) = p^2 + 1 - p + p - p^2 = 1$.

Задание 2.2. Решить задачу 2.4 в случаях трех (а затем пяти) патронов.

Задача 2.5. Два бомбардировщика поочередно сбрасывают бомбы на цель до первого попадания. Вероятности попадания в цель первого $p_1 = 0,7$, а второго — $p_2 = 0,8$. Построить ряд распределения числа x сброшенных бомб, если их боезапас неограничен.

Решение

X	1	2	3	4	...	...	$2n$	...
P	0,7	$0,3 \cdot 0,8$	$0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,8$	$0,3^2 \cdot 0,2 \cdot 0,8$	...	...	$0,3^n \cdot 0,2^{n-1} \cdot 0,8$	...

Проведите проверку на распределение самостоятельно.

Задание 2.3. Решите задачу 2.5, если у каждого бомбардировщика по три бомбы.

Задание 2.4. В урне четыре шара с номерами 1, 2, 3, 4. Вынули наугад два шара. Постройте ряд распределения суммы x номеров извлеченных шаров и $F(x)$ для СВ X .

Задание 2.5. В урне шесть шаров с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Шары извлекают наугад без возвращения до извлечения шара с номером > 4 . Постройте ряд распределения числа x номеров извлеченных шаров.

Задание 2.6. Из колоды (52 карты) наугад извлекают 12 карт. Постройте ряд распределения числа x тузов среди выбранных карт.

2.1.5. Непрерывная случайная величина

Дан ряд распределения СВ X

X	x_1	x_2	...	x_k
P	p_1	p_2	...	p_k

Это система точек с координатами $x_1, \dots, x_k$, в которых соответственно находятся массы $p_1, \dots, p_k$, так что суммарная масса равна 1.

Будем неограниченно уплотнять эти точки, сохраняя суммарную единичную массу. Тогда в пределе мы будем размазывать эту единичную массу по всей оси абсцисс или ее части. В этом случае вероятность попадания на любой интервал будет интерпретироваться как масса этого участка оси абсцисс. Введем функцию $f(x)$ — удельную плотность массы в точке x , или плотность распределения СВ X . Тогда

$$f(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + dx)}{dx},$$

что по следствию 1 из свойства 3 функции распределения означает:

$$f(x) = F'(x); \quad (2.2)$$

$$f(x)dx = P(X \in (x, x + dx)) \text{ (элемент вероятности).}$$

Тогда

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt. \quad (2.3)$$

В связи с формулами (2.2) и (2.3) $f(x)$ называют еще дифференциальной функцией распределения, а $F(x)$ — интегральной функцией распределения.

Дадим графическую иллюстрацию связи $f(x)$ с $F(x)$ (рис. 2.4).

Вероятность попадания в интервал (α, β) для непрерывной СВ X (рис. 2.5):

$$P(\alpha < X < \beta) = P.$$

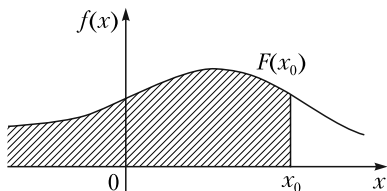


Рис. 2.4. Связь $f(x)$ с $F(x)$

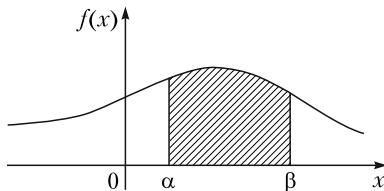


Рис. 2.5. Вероятность попадания в интервал

1. Пусть известно $f(x)$. Тогда из (2.2) $P = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

2. Пусть известно $F(x)$. Тогда из (2.3) $P = F(\beta) - F(\alpha)$.

А это значит, что через задание $F(x)$ и $f(x)$ устанавливаются соответствия между любыми интервалами оси абсцисс и вероятностью туда попасть СВ X , а значит, они являются способами задания закона распределения непрерывной СВ X .

Свойства $f(x)$:

1) $f(x) \geq 0$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ (условие нормировки).

Замечание 2.4: а) для проверки функций на плотность распределения нужно проверять свойства 1 и 2; б) плотность распределения можно задавать с точностью до константы, которая определяется из условия нормировки; в) бесконечные пределы интегрирования нужно заменять на концы интервала, на котором $f(x) \neq 0$.

Задача 2.6. Дана

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти $F(x)$.

Решение

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 dt, & x < 0, \\ \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \sin t dt, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^x 0 dt, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Задание 2.7. Дана плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A(3x - x^2), & x \in [0; 3], \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Найдите: а) неизвестную константу A (из условия нормировки); б) $P(1 < X < 2)$. Постройте график $f(x)$.

Задание 2.8. Дана плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ (x-1)/2, & x \in [1; 3], \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найдите: а) $P(1,5 < X < 2,5)$; б) $P(2,5 < X < 3,5)$.

Задание 2.9. Дана функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найдите $f(x)$.

Задание 2.10. Дана функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ 0,5x - 1, & 2 \leq x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найдите: а) $P(X < 0,2)$; б) $P(X < 3)$; в) $P(X \geq 5)$.

2.1.6. Основные распределения непрерывного типа

Сначала рассмотрим вспомогательную задачу.

Задача 2.7. СВ X имеет $F_X(x)$ и $f_X(x)$, $Y = AX + B$, где A и B — const. Найдите $F_Y(x)$ и $f_Y(x)$.

Решение

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y < x) = P(AX + B < x) = \\ &= \begin{cases} P\left(X < \frac{x-B}{A}\right) = F_X\left(\frac{x-B}{A}\right), & A > 0 \\ P\left(X > \frac{x-B}{A}\right) = 1 - F_X\left(\frac{x-B}{A}\right), & A < 0 \end{cases}; \\ f_Y(x) = F'_Y(x) &= \begin{cases} \frac{1}{A} f_X\left(\frac{x-B}{A}\right), & A > 0 \\ -\frac{1}{A} f_X\left(\frac{x-B}{A}\right), & A < 0 \end{cases} = \frac{1}{|A|} f_X\left(\frac{x-B}{A}\right). \end{aligned}$$

1. Равномерное распределение на отрезке $[a; b]$.

Определение 2.3. Распределение *равномерно* на отрезке, если его плотность на этом отрезке постоянна, а вне отрезка равна нулю.

Обозначение: СВ $Y \sim R[a; b]$ означает, что СВ Y равномерно распределена на отрезке $[a; b]$. В частности, при $a = 0$ и $b = 1$ имеем приведенное равномерное распределение на отрезке $[0; 1]$ СВ X .

Графики плотностей распределения СВ X и Y приведены на рис. 2.6.

Аналитически плотности распределения СВ X и Y имеют вид

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0; 1], \\ c_1 = 1, & x \in [0; 1]; \end{cases} \quad f_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a; b], \\ c_2 = \frac{1}{b-a}, & x \in [a; b]. \end{cases}$$

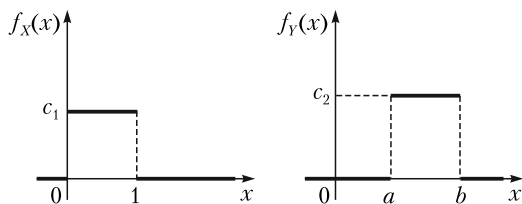


Рис. 2.6. Графики плотности распределения равномерно распределенной СВ

Константы c_1 и c_2 определены из условий нормировки:

$$c_1 = 1; \quad c_2 = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\int_a^b dx}.$$

Связь СВ X и Y выражается соотношениями

$$X = \frac{Y-a}{b-a} \text{ и } Y = X(b-a) + a.$$

Функции распределения СВ X и Y :

$$F_Y(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 dt, & x < a, \\ \int_{-\infty}^x 0 dt + \int_a^x \frac{1}{b-a} dt, & x \in [a; b], \\ \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^b \frac{1}{b-a} dt + \int_b^x 0 dt, & x > b \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a; b], \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Отсюда, в частности, при $a = 0$, $b = 1$ следует, что

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \in [0; 1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Графики функций распределения СВ X и Y $F_X(x)$ и $F_Y(x)$ приведены на рис. 2.7.

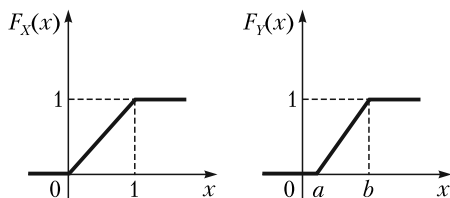


Рис. 2.7. Графики функции распределения равномерно распределенной СВ

Замечание 2.5. Плотности распределения и функции распределения можно пересчитывать друг из друга по вышеприведенной вспомогательной задаче 2.7.

2. Нормальное распределение.

Определение 2.4. СВ X имеет **нормальное** распределение (обозначается это так: $X \sim N(a, \sigma)$), если ее плотность распределения

$$f_X = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальное распределение СВ X_0 называется *стандартным*, если $a = 0$, $\sigma = 1$ (обозначается $X_0 \sim N(0, 1)$). Плотность распределения f_{X_0} , очевидно, имеет вид

$$f_{X_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Проверка на распределение $f_X(x)$: $f_X(x) \geq 0$ (это очевидно) и

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-a}{\sigma} = t; x = \sigma t + a \\ dx = \sigma dt \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1, \end{aligned}$$

так как $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$ (интеграл Пуассона), т.е. условие нормирования выполняется.

Графики плотности распределения СВ X и X_0 представлены на рис. 2.8.

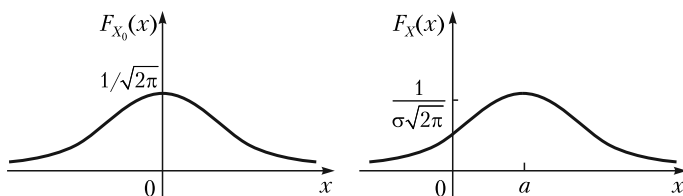


Рис. 2.8. Графики плотности нормального распределения

Отсюда видно, что a — параметр сдвига (a — абсцисса оси симметрии графика $f_X(x)$ и его максимума), а σ — величина, обратно пропорциональная крутизне (ординате максимума).

Связь СВ X и X_0 . Из графиков плотности СВ X и X_0 следует, что эти СВ линейно связаны: $X_0 = (X - a)/\sigma$ и $X = \sigma X_0 + a$.

Функции распределения СВ $F_X(x)$ и $F_{X_0}(x)$ следующие:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt;$$

$$F_{X_0}(x) = \int_{-\infty}^x f_{X_0}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Для определения значений функций нормального распределения используются специальные табличные функции:

- $\varphi(x) = f_{X_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ — четная функция «фи»;
- $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F_{X_0}(x) - 0,5$ — нечетная функция Лапласа.

Для установления полезности табличных функций для произвольного нормального распределения СВ $X \sim N(a, \sigma)$ рассмотрим несколько задач.

Задача 2.8. Пусть $X \sim N(a, \sigma)$, α и β — const. Найти $P = P(\alpha < X < \beta)$.

Решение

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-a}{\sigma} = t, \\ x = \sigma t + a, \\ dx = \sigma dt, \\ \frac{\alpha-a}{\sigma} \leq t \leq \frac{\beta-a}{\sigma} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Это вероятность попадания нормальной величины $X \sim N(a, \sigma)$ в произвольный промежуток $(\alpha; \beta)$.

Задача 2.9. Пусть $X \sim N(a, \sigma)$. Найти $P(|X - a| < \delta)$.

Решение

$$P(|X - a| < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) = \{\text{по задаче 1}\} =$$

$$= \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Таким образом, $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

В частности, при $\delta = 3\sigma$ и по таблицам $\varphi(x)$ имеем

$$P(|X - a| < 3\delta) = 2\varphi(3) = 0,9973.$$

Полученная в задаче 2.9 формула выражает **правило трех сигм**. Оно означает, что с вероятностью 0,9973 (близкой к 1) значения СВ для нормального распределения заключены в интервале $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$, что является характерным свойством нормального распределения $X \sim N(a; \sigma)$.

Задача 2.10. Установить связь $F_X(x)$ и $f_X(x)$ с $F_{X_0}(x)$, $f_{X_0}(x)$, $\Phi(x)$ и $\Phi(x)$.

Решение

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(-\infty < X < x) = \\ &= \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + \Phi(\infty) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + 0,5 = \\ &= F_{X_0}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sigma} f_{X_0}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

3. Гамма-распределение $\Gamma_{\alpha, \lambda}$.

Определение 2.5. СВ X имеет **гамма-распределение** ($X \sim \Gamma_{\alpha, \lambda}$), если ее плотность имеет вид

$$f(x; \alpha, \lambda) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}, & x \geq 0, \end{cases}$$

где $\alpha > 0, \lambda > 0 - \text{const}$; $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ — гамма-функция.

Функция распределения

$$F(x; \alpha, \lambda) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x e^{-\lambda t} t^{\alpha-1} dt, & x \geq 0. \end{cases}$$

Подробно про гамма-распределение см. в параграфе 4.3.

Важный частный случай — $\alpha = 1$ — соответствует экспоненциальному распределению.

За. Экспоненциальное (показательное) распределение.

Плотность экспоненциального распределения

$$f(x; \alpha = 1, \lambda) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \end{cases}$$

функция распределения

$$F(x; \alpha = 1, \lambda) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Их графики представлены на рис. 2.9.

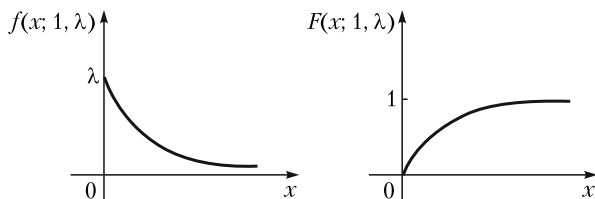


Рис. 2.9. Плотность и функция экспоненциального распределения

4. Распределение Коши.

Определение 2.6. СВ X имеет *распределение Коши* ($X \sim K$), если ее плотность есть $f(x) = 1/[\pi(1 + x^2)]$.

Связь с равномерным распределением. Распределение Коши имеют точки пересечения с осью Ox равномерно вращающегося вокруг точки O_1 с координатами $(0; 1)$ луча (рис. 2.10), φ — угол поворота луча от оси Oy ; СВ $\varphi \sim R\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

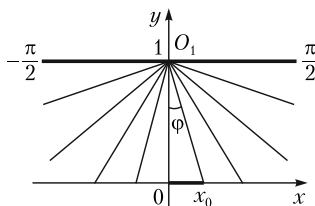


Рис. 2.10. Связь распределения Коши с равномерным распределением

Доказательство. Пусть СВ $X \sim R[a; b]$, где $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$, причем СВ X и φ связаны координатами $X = \operatorname{tg} \varphi$, тогда $\varphi = \operatorname{arctg} x$.

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a; b] \\ 1, & x > b \end{cases} \Rightarrow F_\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\varphi + \frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi} + \frac{1}{2}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

— это функция распределения Коши, ч.т.д.

Рассмотрим задачи на применение законов распределения.

Задача 2.11. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Параметры этой величины a и соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(10; 50)$.

Решение

Воспользуемся формулой $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$. По условию $\alpha = 10$, $\beta = 50$, $\sigma = 10$, следовательно,

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2).$$

По таблице находим $\Phi(2) = 0,4772$. Отсюда искомая вероятность $P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544$.

Задача 2.12. СВ $X \sim N(a, \sigma)$, $a = 20$, $\sigma = 10$. Найти $P(|X - a| < 3)$.

Решение

Воспользуемся формулой $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. По условию $a = 20$, $\sigma = 10$, $\delta = 3$, следовательно,

$$P(|X - 20| < 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{10}\right) = 2\Phi(0,3).$$

По таблице находим $\Phi(0,3) = 0,1179$. Отсюда искомая вероятность $P(|X - 20| < 3) = 0,2358$.

Задача 2.13. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал $(0,3; 1)$.

Решение

По условию $\lambda = 2$. Воспользуемся формулой $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

$$P(0,3 < X < 1) = e^{-2 \cdot 0,3} - e^{-2 \cdot 1} = 0,41.$$

2.2. Двумерная случайная величина

Определение 2.7. *Двумерная случайная величина* — это пара случайных чисел (X, Y) , или точка на координатной плоскости (рис. 2.11).

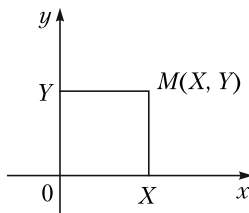


Рис. 2.11. Двумерная случайная величина

Двумерная случайная величина — это частный случай многомерной случайной величины, или случайного вектора.

Определение 2.8. Случайный вектор — это случайная функция $\xi(t)$ с конечным множеством возможных значений аргумента t , значение которой при любом значении t является случайной величиной.

Двумерная случайная величина называется непрерывной, если ее координаты непрерывны, и дискретной, если ее координаты дискретны.

Задать закон распределения двумерных случайных величин — это значит установить соответствие между ее возможными значениями и вероятностью этих значений. По способам задания случайные величины делятся на непрерывные и дискретные, хотя есть общие способы задания закона распределения любой СВ.

Дискретная двумерная случайная величина

Дискретная двумерная случайная величина задается с помощью таблицы распределений (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Таблица распределения (совместное распределение) СВ (X, Y)

X	Y					
	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1j}	...	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2j}	...	p_{2m}
...	...	...	...	...	...	...
x_i	p_{i1}	p_{i2}	...	p_{ij}	...	p_{im}
...	...	...	...	...	...	...
x_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nj}	...	p_{nm}

Элементы таблицы определяются формулой

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

Свойства элементов таблицы распределения:

- 1) $p_{ij} \geq 0$;
- 2) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$.

Распределение по каждой координате называется *одномерным* или *маргинальным*:

$p_i^{(1)} = P(X = x_i)$ — маргинальное распределение СВ X ;

$p_j^{(2)} = P(Y = y_j)$ — маргинальное распределение СВ Y .

Связь совместного распределения СВ X и Y , заданного множеством вероятностей $\{p_{ij}\}$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$ (таблицей распределения), и маргинального распределения.

Для СВ X

$$\begin{aligned} p_i^{(1)} &= P(X = x_i) = \sum_{j=1}^m P(Y = y_j) P(X = x_i / Y = y_j) = \\ &= \sum_{j=1}^m P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^m p_{ij}. \end{aligned}$$

Аналогично для СВ Y $p_i^{(2)} = \sum_{j=1}^n p_{ij}$.

Задача 2.14. Дано:

X	Y		
	6	7	8
5	0	0,2	0,3
9	0,1	0	0,4

Найти маргинальные распределения.

Решение

Из связи совместного и маргинальных распределений получим следующие маргинальные ряды распределений СВ X и Y :

X	5	9
P	0,5	0,5

Y	6	7	8
P	0,1	0,2	0,7

Непрерывная двумерная случайная величина

$f(x, y)dxdy$ — элемент вероятности для двумерной случайной величины (X, Y) — вероятность попадания случайной величины (X, Y) в прямоугольник со сторонами dx, dy при $dx, dy \rightarrow 0$:

$$f(x, y)dxdy = P((X, Y) \in \square dxdy).$$

$f(x, y)$ — *плотность распределения* двумерной случайной величины (X, Y) . Заданием $f(x, y)$ мы даем полную информацию о распределении двумерной случайной величины.

Маргинальные распределения задаются следующим образом: по X — плотностью распределения СВ X $f_1(x)$; по Y — плотностью распределения СВ Y $f_2(y)$.

Задание закона распределения двумерной случайной величины функцией распределения

Универсальным способом задания закона распределения для дискретной или непрерывной двумерной случайной величины является функция распределения $F(x, y)$.

Определение 2.9. *Функция распределения $F(x, y)$* — вероятность совместного появления событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$, т.е. $F(x_0, y_0) = P(X < x_0, Y < y_0)$ — это вероятность точки с координатами (x, y) , брошенной на координатную плоскость, попасть в бесконечный квадрант с вершиной в точке $M(x_0, y_0)$ (в заштрихованную на рис. 2.12 область).

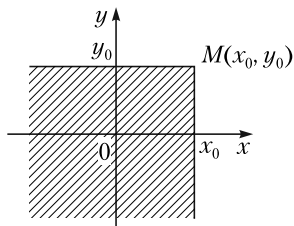


Рис. 2.12. Иллюстрация функции распределения $F(x, y)$

Свойства функции $F(x, y)$:

- 1) $0 \leq F(x, y) \leq 1$;
 - 2) $F(-\infty, -\infty) = F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$; $F(\infty, \infty) = 1$;
 - 3) $F(x, y)$ — неубывающая по каждому аргументу;
 - 4) $F(x, y)$ — непрерывна слева и снизу;
 - 5) согласованность распределений:
 $F(x, \infty)$ — маргинальное распределение по X : $F(x, \infty) = F_1(x)$;
 $F(y, \infty)$ — маргинальное распределение по Y : $F(\infty, y) = F_2(y)$.
- Связь $f(x, y)$ с $F(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y); \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv.$$

Связь совместной плотности с маргинальной. Дана $f(x, y)$. Получим маргинальные плотности распределения $f_1(x)$, $f_2(y)$:

$$f_1(x) = F'_1(x) = \frac{d}{dx} F(x, \infty) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv;$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du.$$

Случай независимых координат двумерной случайной величины

Определение 2.10. СВ X и Y **независимы** (нз), если независимы любые события, связанные с каждой из этих СВ. Из определения нз СВ следует:

- 1) $p_{ij} = p_i^{(1)} p_j^{(2)}$;
- 2) $F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$.

Оказывается, что для независимых СВ X и Y выполнено и

- 3) $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$.

Докажем, что для независимых СВ X и Y 2) $\Leftrightarrow$ 3).

Доказательство. а) Пусть выполнено 2), т.е.

$$F(x, y) = F_1(x) F_2(y) = \int_{-\infty}^x f_1(u) du \int_{-\infty}^y f_2(v) dv = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_1(u) f_2(v) du dv,$$

в то же время $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$, откуда и следует 3);

б) пусть теперь выполнено 3), тогда

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_1(u) f_2(v) du dv = \\ &= \int_{-\infty}^x f_1(u) du \int_{-\infty}^y f_2(v) dv = F_1(x) F_2(y), \end{aligned}$$

т.е. верно 2).

Рассмотрим задачи.

Задача 2.15. Распределение задано следующей таблицей:

X	Y	
	4	5
3	0,17	0,10
10	0,13	0,30
12	0,25	0,05

Зависимы ли СВ X и Y? Построить $F(x, y)$.

Решение

Строим маргинальные распределения:

X	3	10	12	Y	4	5
P_1	0,27	0,33	0,3	P_2	0,55	0,45

Получаем $P(X = 3, Y = 4) = 0,17 \neq P(X = 3)P(Y = 4) = 0,1485 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ СВ X и Y зависимы.

Функция распределения:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3 \text{ или } y \leq 4, \\ 0,17 & \text{при } 3 < x \leq 10, 4 < y \leq 5, \\ 0,27 & \text{при } 3 < x \leq 10, y > 5, \\ 0,3 & \text{при } 10 < x \leq 12, 4 < y \leq 5, \\ 0,7 & \text{при } 10 < x \leq 12, y > 5, \\ 0,55 & \text{при } x > 12, 4 < y \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 12, y > 5. \end{cases}$$

Задача 2.16. Распределение задано следующей таблицей:

X	Y	
	2	4
1	0,06	0,14
3	0,24	0,56

Зависимы ли СВ X и Y?

Решение

Строим маргинальные распределения:

X	1	3	Y	2	4
P_1	0,2	0,8	P_2	0,3	0,7

Получаем $P_{11} = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$; $P_{12} = 0,2 \cdot 0,7 = 0,14$; $P_{21} = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24$; $P_{22} = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56 \Rightarrow$ СВ X и Y нз.

Задача 2.17. Дана $f(x, y) = 1/\pi \cdot \exp[-0,5(x^2 + 2xy + 5y^2)]$. Найти $f_1(x)$ и $f_2(y)$.

Решение

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-0,5(x^2 + 2xy + 5y^2)] dy = \dots$$

(досчитайте самостоятельно).

2.3. Числовые характеристики случайных величин

Основными числовыми характеристиками случайных величин являются:

- α_s — s -й начальный момент СВ X ;
- μ_s — s -й центральный момент СВ X .

Если X — дискретная СВ, то ее ряд распределения есть

X	x_1	x_2	...
P	p_1	p_2	...

Если X — непрерывная СВ, то $f(x)$ — ее плотность распределения. Тогда моменты СВ определяются следующим образом.

Начальные моменты:

$$\alpha_s = \begin{cases} \sum_i x_i^s p_i, & \text{если } X \text{ — дискретная СВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx, & \text{если } X \text{ — непрерывная СВ.} \end{cases}$$

При $s = 1$ получаем

$$\alpha_1 = \begin{cases} \sum_i x_i p_i, & \text{если } X \text{ — дискретная СВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, & \text{если } X \text{ — непрерывная СВ;} \end{cases}$$

$\alpha_1 = MX$ — **математическое ожидание** (МО) СВ X .

Центральные моменты:

$$\mu_s = \begin{cases} \sum_i (x_i - MX)^s p_i, & \text{если } X \text{ — дискретная СВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^s f(x) dx, & \text{если } X \text{ — непрерывная СВ.} \end{cases}$$

При $s = 2$ получаем

$$\mu_2 = \begin{cases} \sum_i (x_i - MX)^2 p_i, & \text{если } X - \text{дискретная СВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f(x) dx, & \text{если } X - \text{непрерывная СВ;} \end{cases}$$

$\mu_2 = DX$ — **дисперсия** СВ X .

Также характеристиками являются:

$\sigma_X = +\sqrt{DX}$ — *среднее квадратическое отклонение* случайной величины X ;

M_x — *мода* СВ X — наиболее вероятное значение СВ X ;

x_m — *медиана* СВ X — значение СВ, для которого $P(X > x_m) = P(X < x_m) = 0,5$ (определяется для непрерывной СВ);

Sk — *коэффициент асимметрии* (характеристика скошенности распределения, рис. 2.13, а):

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3};$$

ε_x — *эксцесс* (характеристика «крутости» распределения, рис. 2.13, б):

$$\varepsilon_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

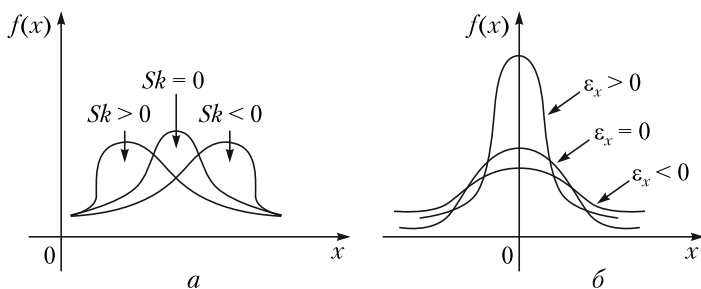


Рис. 2.13. Асимметрия (а) и эксцесс (б)

2.3.1. Математическое ожидание и его свойства

MX существует при абсолютной сходимости ряда $\sum_i x_i p_i$ (в дискретном случае) и интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ (в непрерывном случае);

MX — вероятностное среднее случайной величины.

Рассмотрим свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание постоянной равно этой постоянной: при $X = C$ ($C = \text{const}$) $MX = C$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания ($MCX = CMX$):

$$MCX = \sum_i Cx_i p_i = C \sum_i x_i p_i = CMX$$

— для дискретной случайной величины X ;

$$MCX = \int_{-\infty}^{\infty} Cxf(x)dx = C \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = CMX$$

— для непрерывной случайной величины X .

3. Математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий ($M(X + Y) = MX + MY$):

$$\begin{aligned} M(X + Y) &= \sum_i \sum_j (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i p_{ij} + \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = \\ &= \sum_i x_i \sum_j p_{ij} + \sum_j y_j \sum_i p_{ij} = \sum_i x_i p_i^{(1)} + \sum_j y_j p_j^{(2)} = MX + MY \end{aligned}$$

— для дискретной случайной величины X ;

$$\begin{aligned} M(X + Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right] dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right] dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} yf(y) dy = MX + MY \end{aligned}$$

— для непрерывной случайной величины X .

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин X и Y равно произведению их математических ожиданий ($MXY = MX \cdot MY$):

$$MXY = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i y_j p_i^{(1)} p_j^{(2)} = \sum_i x_i p_i^{(1)} \sum_j y_j p_j^{(2)} = MX \cdot MY$$

— для дискретной случайной величины X ;

$$\begin{aligned} MXY &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf_1(x)f_2(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y) dy = MX \cdot MY \end{aligned}$$

— для непрерывной случайной величины X .

Пример. Приведем примеры СВ, для которых математическое ожидание не существует:

а) $p_i = P(X = 2^i) = 2^{-i}, i = 1, 2, \dots;$

б) $p_i = P(X = (-1)^i 2^i) = 2^{-i}, i = 1, 2, \dots;$

в) $p_i = P(X = (i\pi)^2/6) = 6/(\pi i)^2, i = 1, 2, \dots$

Проверьте самостоятельно, что а) – в) задают распределения вероятностей, и убедитесь, что математических ожиданий для СВ с указанными распределениями не существует.

2.3.2. Дисперсия и ее свойства

Формулы для DX :

$DX = M(X - MX)^2$ — формула по определению;

$$DX = M(X - MX)^2 = M(X^2 - 2X \cdot MX + (MX)^2) = MX^2 - 2(MX)^2 + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2 \text{ — расчетная формула для дисперсии.}$$

DX — мера рассеяния (размытости) распределения вокруг своего среднего, так же как и среднее квадратическое отклонение $\sigma_X = +\sqrt{DX}$.

Рассмотрим свойства дисперсии.

1. Если $C = \text{const}$, то $DC = 0$.

Доказательство. $DX = MX^2 - (MX)^2 = MC^2 - (MC)^2 = C^2 - C^2 = 0$.

2. Если $C = \text{const}$, то $DCX = C^2 DX$.

Доказательство. $DCX = M(CX)^2 - (MCX)^2 = C^2 MX^2 - C^2 (MX)^2 = C^2 (MX^2 - (MX)^2) = C^2 DX$.

3. $D(X + Y) = DX + DY$, если СВ X и Y независимы.

Доказательство. $D(X + Y) = M(X + Y)^2 - (M(X + Y))^2 = M(X^2 + 2XY + Y^2) - (MX + MY)^2 = MX^2 + 2MXY + MY^2 - (MX)^2 - (MY)^2 - 2MXMY = DX + DY$ (где $2MXMY = 2MXY$, так как X и Y независимы).

2.3.3. Нахождение моментов основных распределений дискретного типа

Рассмотрим задачи на нахождение моментов распределений.

Задача 2.18. СВ $X_i \sim B(1, p)$. Найти MX_i и DX_i .

Решение

Имеем таблицу распределения

X_i	0	1
P	q	p

где $q = 1 - p$; $MX_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$; $MX_i^2 = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p$; $DX_i = MX_i^2 - (MX_i)^2 = pq$.

Задача 2.19. СВ $X \sim B(n, p)$. Найти MX и DX .

Решение

СВ X_i — число успехов в i -м испытании Бернулли, тогда

$$X = \sum_{i=1}^n X_i; \quad MX = \sum_{i=1}^n MX_i, \text{ где СВ } X_i \sim B(1, p). \quad MX_i = p \Rightarrow MX = np;$$

$$DX = \sum_{i=1}^n DX_i, \quad DX_i = pq \Rightarrow DX = npq.$$

Задача 2.20. СВ $X \sim \pi(\lambda)$. $p_i = P(X = i) = \lambda^i e^{-\lambda} / i!$, $\lambda > 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$.
Найти MX и DX .

Решение

$$\begin{aligned} MX &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i \lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda; \\ MX^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2 \lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i \lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(i-1) \lambda^{i-1}}{(i-1)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \right) = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \left(\lambda \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \right) = \lambda^2 + \lambda; \\ DX &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \end{aligned}$$

Задача 2.21. Найти MX и DX для СВ $X \sim G(p)$, где $P(X = k) = pq^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$.

Решение

$$\begin{aligned} MX &= p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = p \frac{d}{dq} \sum_{k=1}^{\infty} q^k = p \frac{d}{dq} \left(\frac{q}{1-q} \right) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}; \\ MX^2 &= p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1}. \end{aligned}$$

Умножим на q ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = 1/(1-q)^2$. Получим $\sum_{k=1}^{\infty} k q^k = q/(1-q)^2$.

Продифференцируем этот ряд по q :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} \sum_{k=1}^{\infty} k q^k &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = d(q/(1-q)^2) = \frac{1+q}{(1-q)^3} \Rightarrow \\ \Rightarrow MX^2 &= \frac{p(1+q)}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{1-q^3} = \frac{1+q}{(1-q)^2}; \\ DX &= MX^2 - (MX)^2 = \frac{1+q}{(1-q)^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}. \end{aligned}$$

Задание 2.11. Найдите MY и DY для СВ $Y \sim \text{сд}G(p)$, где $P(Y = k) = pq^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, используя связь этой СВ со СВ X из задачи 4.

Задание 2.12. СВ Z_1 имеет распределение Паскаля (число опытов в испытании Бернулли до r -го успеха (СВ $Z_1 \sim \text{Pa}(r, p)$)). Найдите MZ_1 и DZ_1 .

Указание. Представьте СВ Z_1 в виде суммы независимых СВ, распределенных по геометрическому закону распределения.

Задание 2.13. Найдите математическое ожидание и дисперсию СВ Z_2 , имеющей отрицательное биномиальное распределение ($CB Z_2 \sim \sim OB(r, p)$).

Задача 2.22. СВ $X \sim H(N, M, n)$. Найти MX и DX .

Решение

$$P_i = P(X = i) = \frac{C_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n},$$

где $i \in [\max(0, n - N + M), \min(M, n)]$, но так как $C_A^B = 0$ при $B \notin [0; A]$, то можно считать, что $i \in [0, n]$.

При вычислении MX и DX будем использовать формулу $C_N^n = \sum_{i=0}^n C_M^i C_{N-M}^{n-i}$, следующую из того, что $\sum_{i=0}^n p_i = 1$, и эквивалентные ей формулы $C_{N-1}^{n-1} = \sum_{i=1}^n C_{M-1}^{i-1} C_{N-M}^{n-i}$ и $C_{N-2}^{n-2} = \sum_{i=2}^n C_{M-2}^{i-2} C_{N-M}^{n-i}$, а также легко проверяемое равенство $iC_M^i = MC_{M-1}^{i-1}$ (действительно, $iC_M^i = i \frac{M!}{i!(M-i)!} = \frac{M!}{(i-1)!(M-i)!}$, а $MC_{M-1}^{i-1} = M \frac{(M-1)!}{(i-1)!(M-i)!} = \frac{M!}{(i-1)!(M-i)!}$).

$$MX = \sum_{i=1}^n \frac{iC_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n} = \frac{M}{C_N^n} \sum_{i=1}^n C_{M-1}^{i-1} C_{N-M}^{n-i} = \frac{M}{C_N^n} C_{N-1}^{n-1} = \frac{nM}{N}.$$

При вычислении MX^2 используем представление $i = (i-1) + 1$:

$$\begin{aligned} MX^2 &= \sum_{i=1}^n \frac{i^2 C_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n} = \frac{M}{C_N^n} \sum_{i=1}^n \frac{i(M-1)!}{(i-1)!(M-1)!} C_{N-M}^{n-i} = \\ &= \frac{M}{C_N^n} \left(\sum_{i=2}^n \frac{(M-1)(M-2)!}{(i-2)!(M-i)!} C_{N-M}^{n-i} + \sum_{i=1}^n \frac{(M-1)!}{(i-1)!(M-i)!} C_{N-M}^{n-i} \right) = \\ &= \frac{M}{C_N^n} \left((M-1) \sum_{i=2}^n C_{M-2}^{i-2} C_{N-M}^{n-i} + \sum_{i=1}^n C_{M-1}^{i-1} C_{N-M}^{n-i} \right) = \\ &= \frac{M}{C_N^n} [(M-1)C_{N-2}^{n-2} + C_{N-1}^{n-1}] = \frac{M(M-1)(N-2)!n!(N-n)!}{(n-2)!(N-n)!} + \\ &+ \frac{M(N-1)n!(N-n)!}{(n-1)!(N-n)!N!} = \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{Mn}{N} = \frac{Mn}{N} \left(\frac{(M-1)(n-1)}{N-1} + 1 \right); \\ DX &= MX^2 - (MX)^2 = \\ &= \frac{Mn}{N} \left(\frac{(M-1)(n-1)}{N-1} + 1 - \frac{Mn}{N} \right) = \frac{Mn(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)}. \end{aligned}$$

Задача 2.23. Доказать, что если СВ X принимает значения $0, 1, 2, \dots$, то

$$MX = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n).$$

Решение

$$\begin{aligned} MX &= \sum_{k=0}^{\infty} kp(X=k) = P(X=1) + 2P(X=2) + 3P(X=3) + \dots = \\ &= \{P(X=1) + P(X=2) + \dots\} + \{P(X=2) + P(X=3) + \dots\} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} P(X=k) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n). \end{aligned}$$

Задача 2.24. Бросают N раз по n игральных костей. Найти математическое ожидание и дисперсию числа X таких бросаний, в каждом из которых выпадает ровно m «шестерок».

Решение

СВ $X \sim H(N, P)$, где $P = C_n^m p^m q^{n-m}$, $p = \frac{1}{6}$, $q = 1 - p$.

Тогда известно, что $MX = NP$, а $DX = NP(1 - p)$, откуда окончательно получаем

$$MX = NC_n^m p^m q^{n-m}, \quad DX = NC_n^m p^m q^{n-m} (1 - C_n^m p^m q^{n-m}).$$

Задание 2.14. Симметричную монету подбрасывают не более n раз. Если она падает «гербом» при j -м броске, то игрок выигрывает 2^j руб. ($j = 1, \dots, n$). Если при всех бросаниях монеты «герб» не выпадает, то игрок проигрывает $n2^n$ руб. Доказать «безобидность» игры (т.е. что математическое ожидание выигрыша равно нулю).

Задача 2.25. Стрельбу ведут с неограниченным боезапасом до двух попаданий, с вероятностью попадания при одном выстреле $p = 0,2$. Построить ряд распределения числа X выстрелов и найти MX .

Решение

$$p_k = (X=k) = (k-1) \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots;$$

$$MX = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{k-2}.$$

Проверка $\{p_k\}$ на распределение производится с использованием следующих равенств (при $q = 1 - p$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} q^k &= \frac{q^2}{1-q}; \quad \sum_{k=2}^{\infty} kq^{k-2} = \frac{1}{q} \sum_{k=2}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{q} \left(\sum_{k=2}^{\infty} q^k \right); \\ \sum_{k=2}^{\infty} kq^{k-1} &= q \sum_{k=2}^{\infty} kq^{k-2}; \quad \sum_{k=2}^{\infty} k^2 q^{k-2} = \left(\frac{1}{q} \sum_{k=2}^{\infty} kq^{k-1} \right). \end{aligned}$$

Проверка на распределение:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} p_k &= 0,2^2 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)0,8^{k-2} = 0,2^2 \left(\frac{1}{0,8} \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot 0,8^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot 0,8^{k-2} \right) = \\ &= \left\{ \sum_{k=0,1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right) = \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1-q} \right) = \frac{1}{(1-q)^2} \Rightarrow \right. \\ &\quad \left. \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot 0,8^{k-1} = \frac{1}{(1-0,8)^2} = \frac{1}{0,2^2} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0,2^2 \left[\frac{1}{0,8} \left(\frac{1}{0,2^2} - \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot 0,8^{k-1} \right) - \frac{1}{1-0,8} \right] = 0,2^2 \left(\frac{1}{0,8} \frac{1}{0,2^2} - \frac{1}{0,8} - \frac{1}{0,2} \right) = \\
 &= 0,2^2 \frac{1-0,2^2-0,2 \cdot 0,8}{0,8 \cdot 0,2^2} = \frac{1-0,04-0,16}{0,8} = \frac{0,8}{0,8} = 1.
 \end{aligned}$$

Задача 2.26. Дано $p_k = P(X = (-1)^k k) = \frac{1}{(1+k)k}$, $k = 1, 2, \dots$. Проверить последовательность $\{p_k\}$ на распределение. Существует ли MX ?

Решение

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} p_k &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1+k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots = 1; \\
 MX &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k(1+k)} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{1+k} = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}; \\
 M|X| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k} - \text{расходящийся ряд} \Rightarrow MX \text{ не существует.}
 \end{aligned}$$

Задача 2.27. Имеется n ключей. Из них один подходит к двери. Ключи извлекают по одному из связки без возвращения до появления нужного. Построить ряд распределения числа X извлечения ключей и найти MX .

Решение

Строим ряд:

$$p_k = P(X = k) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \dots \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}; k = 1, \dots, n.$$

Проверка на распределение: $\sum_{k=1}^n p_k = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$

Ищем математическое ожидание:

$$MX = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{n} (1+n) \frac{n}{2} = \frac{1+n}{2}.$$

Задача 2.28. Доказать, что если СВ X и Y независимы и $MX = m$, $MY = n$, то $DXY = DX \cdot DY + n^2 \cdot DX + m^2 \cdot DY$.

Решение

$$\begin{aligned}
 DXY &= M(XY)^2 - (MXY)^2 = MX^2 MY^2 - (mn)^2 = \\
 &= (DX + m^2) \cdot (DY + n^2) - m^2 n^2 = \\
 &= DX \cdot DY + m^2 DY + n^2 DX + m^2 n^2 - m^2 n^2, \text{ ч.т.д.}
 \end{aligned}$$

Задача 2.29. Доказать, что $\min_a M(x-a)^2 = DX$, где $a = \text{const}$.

Решение

Пусть $a = MX$, тогда $M(X - MX)^2 = DX$. Пусть теперь $a \neq MX$, тогда

$$\begin{aligned}
 M(X-a)^2 &= MX^2 - 2aMX + a^2 = \\
 &= \underbrace{MX^2 - (MX)^2}_{DX} + (MX)^2 - 2aMX + a^2 = DX + \underbrace{(MX-a)^2}_{\geq 0}, \text{ ч.т.д.}
 \end{aligned}$$

Задача 2.30. Бросают n игральных костей. Найти MX и DX , где СВ X — сумма выпавших очков.

Решение

СВ X_i — очки, выпавшие на i -й кости, $i = 1, \dots, n$.

$X = \sum_{i=1}^n X_i$, где $\{X_i\}$ — независимые СВ, принимающие значения от 1 до 6, каждое с вероятностью $1/6$. Тогда $MX = nMX_i$; $DX = nDX_i$. Вычисляем:

$$MX_i = \frac{1}{6}(1+2+\dots+6) = \frac{1}{6} \cdot (1+6) \cdot \frac{6}{2} = 3,5;$$

$$MX_i^2 = \frac{1}{6}(1^2+2^2+\dots+6^2) = \frac{91}{6};$$

$$DX_i = MX_i^2 - (MX_i)^2 = \frac{91}{6} - 3,5^2 = \frac{35}{12};$$

$$DX = \frac{35n}{12}; \quad MX = 3,5n.$$

В параграфе 3.1 будет рассмотрено вычисление моментов с помощью метода производящих функций.

2.3.4. Моменты основных распределений непрерывного типа

Рассмотрим вспомогательную задачу.

Задача 2.31. Пусть СВ $X \sim F_X(x)$ и ее плотность есть $f_X(x)$, $Y = AX + B$, где A и $B = \text{const}$. Найти MY и DY .

Решение

$$MY = A \cdot MX + B; \quad DY = A^2 \cdot DX.$$

Далее эти формулы могут использоваться при вычислении линейно связанных случайных величин.

1. Равномерное распределение. СВ $X \sim R[a; b]$ с плотностью $f_X(x)$; СВ $X_0 \sim R[0; 1]$ с плотностью $f_{X_0}(x)$.

Вычислим моменты для СВ X_0 , а потом пересчитаем их для СВ X , используя формулу перехода $X = X_0(b - a) + a$:

$$MX_0 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}; \quad MX_0^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3};$$

$$DX_0 = MX_0^2 - (MX_0)^2; \quad DX_0 = \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MX = \frac{a+b}{2}; \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. Нормальное распределение. СВ $X_0 \sim N(0, 1)$ с плотностью $f_{X_0}(x)$; СВ $X \sim N(a, \sigma)$ с плотностью $f_X(x)$, где

$$f_{X_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Связь СВ X и X_0 : $X_0 = \frac{X-a}{\sigma} \Rightarrow X = X_0\sigma + a$.

$$MX_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0;$$

$$\begin{aligned} DX_0 &= MX_0^2 - (MX_0)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{интегрирование по частям: } \int u dv = uv - \int v du; \\ u = x; \quad du = dx; \quad v = -e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = dv \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - e^{-\frac{x^2}{2}} x \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \Rightarrow MX_0 = 0; \quad DX_0 = 1. \end{aligned}$$

По формулам перехода рассчитываем момент для СВ $X \sim N(a, \sigma)$:

$$MX = \sigma MX_0 + a = a; \quad DX = \sigma^2 DX_0 + Da = \sigma^2.$$

Таким образом, $MX = a$, $DX = \sigma^2$. В этом состоит вероятностный смысл параметров нормального закона.

3. Гамма-распределение. СВ $X \sim \Gamma_{\alpha, \lambda}$ с плотностью

$$f(x; \alpha, \lambda) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}, & x \geq 0, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ — const; $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ — гамма-функция.

Моменты:

$$\begin{aligned} MX &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^\alpha e^{-\lambda x} dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{замена переменной} \\ \lambda x = y; \quad x = \frac{y}{\lambda}; \quad dx = \frac{dy}{\lambda} \end{array} \right\} = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^\alpha e^{-y} \frac{dy}{\lambda} = \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha) \lambda^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} y^\alpha e^{-y} dy = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha) \lambda} = \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha) \lambda} = \frac{\alpha}{\lambda}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
MX^2 &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^2 x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\lambda x} dx = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{замена переменной} \\ \lambda x = y; x = \frac{y}{\lambda}; dx = \frac{dy}{\lambda} \end{array} \right\} = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha+1} e^{-y} \frac{dy}{\lambda} = \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha) \lambda^{\alpha+1}} \int_0^\infty y^{\alpha+1} e^{-y} dy = \frac{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha) \lambda^{\alpha+2}} = \frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha) \lambda^2} = \\
&= \frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha) \lambda^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}; \\
DX &= MX^2 - (MX)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

3а. Экспоненциальное (показательное) распределение. СВ $X \sim E(\lambda)$ с плотностью

$$f(x) = \gamma(x; \alpha = 1, \lambda) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

MX и DX получаем из п. 3 подстановкой $\alpha = 1$ $MX = \frac{1}{\lambda}$; $DX = \frac{1}{\lambda^2}$.

4. χ^2 -распределение имеет сумма квадратов приведенных нормальных независимых СВ, т.е. $X \sim \chi_n^2 = \sum_{i=1}^n X_{0i}^2$, где $X_{0i} \sim N(0, 1)$. В гл. 4 будет показано, что СВ $\chi_n^2 \sim \Gamma_{\alpha=\frac{n}{2}; \lambda=\frac{1}{2}}$, и тогда $MX_n^2 = \frac{\alpha}{2} = \frac{n \cdot 2}{2} = n$; $DX_n^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{n \cdot 4}{2} = 2n$.

5. Бета-распределение. Обозначение: СВ $\sim B_{p,q}$. Плотность распределения

$$f(x) = f(x; p, q) = \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1},$$

$$\text{где } p, q \geq 0, B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Найдем n -й начальный момент λ_n бета-распределения:

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \int_0^1 x^n f_\beta(x; p, q) dx = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 x^{n+p-1} (1-x)^{q-1} dx = \\
&= \frac{\Gamma(p+q)B(n+p, q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = \frac{\Gamma(p+q)\Gamma(n+p)\Gamma(q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(n+p+q)} = \frac{\Gamma(p+q)\Gamma(n+p)}{\Gamma(p)\Gamma(n+p+q)},
\end{aligned}$$

отсюда

$$\lambda_1 = \frac{\Gamma(p+q)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+1)} = \frac{p}{p+q};$$

$$\lambda_2 = \frac{\Gamma(p+q)\Gamma(p+2)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+2)} = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)};$$

$$DX = \lambda_2 - (\lambda_1)^2 = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}.$$

2.4. Элементы корреляционного анализа

2.4.1. Основные понятия

Определение 2.13. *Корреляцией (ковариацией)* случайных величин X, Y (обозначается $K_{XY} = \text{cov}(X, Y)$), называют второй смешанный момент случайных величин X и Y , т.е.

$$K_{XY} = M(X - MX)(Y - MY).$$

Расчетная формула для K_{XY} :

$$\begin{aligned} K_{XY} &= M(XY - XMY - YMX + MXMY) = \\ &= MXY - MXMY - MYMX + MXMY = MXY - MXMY. \end{aligned}$$

Если $K_{XY} = 0$, то СВ X и Y — некоррелированные (нк) СВ.

Утверждение 2.3. а) Из независимости СВ следует ее некоррелированность (нк); б) обратное неверно.

Доказательство. а) $K_{XY} = MXY - MXMY = 0$, так как если X и Y независимые СВ, то $MXY = MXMY$. Для доказательства б) достаточно привести пример зависимых и нк СВ:

X и Y — СВ; $Y = X^2$; для СВ X дан ряд распределения:

X	-2	-1	1	2
P	1/4	1/4	1/4	1/4

Найдем ряды распределения для СВ Y и XY :

$Y = X^2$	1	4
P	1/2	1/2

$XY = X^3$	-8	-1	1	8
P	1/4	1/4	1/4	1/4

Отсюда по расчетной формуле для K_{XY} получаем

$$MX = 0, MY = 2,5 \Rightarrow K_{XY} = MXY - MXMY = 0. MXY = 0,$$

т.е. получаем, что СВ X и Y — некоррелированные, но зависимые, что и доказывает б).

Свойства корреляции:

- 1) $K_{XY} = K_{YX}$;
- 2) $K_{XX} = M(X - MX)(X - MX) = DX$;
- 3) $K_{aX+b, cX+d} = M(aX + b - M(aX + b))(cX + d - M(cX + d)) =$
 $= M(aX + b - aMX - b)(cX + d - cMX - d) =$
 $= M(ac(X - MX) \cdot (X - MX)) = acDX$;
- 4) $K_{aX+b, cY+d} = M(aX + b - M(aX + b))(cY + d - M(cY + d)) =$
 $= M(aX + b - aMX - b)(cY + d - cMY - d) =$
 $= M(ac(X - MX) \cdot (Y - MY)) = acK_{XY}$.

В частности, из указанных свойств корреляции следуют формулы

$$K_{X+b, X+d} = DX; K_{X+b, Y+d} = K_{XY}; K_{aX, cX} = acDX; K_{aX, cY} = acK_{XY}.$$

Коэффициент корреляции r_{XY}

Коэффициент корреляции используют в качестве количественной оценки тесноты связи между случайными величинами:

$$r_{XY} = K_{XY}/(\sigma_X \sigma_Y), \sigma_X \neq 0, \sigma_Y \neq 0, \sigma_X = +\sqrt{DX}, \sigma_Y = +\sqrt{DY},$$

где DX, DY — дисперсии СВ X и Y соответственно.

Простейшие свойства r_{XY} :

- 1) $r_{XY} = r_{YX}$;
- 2) $r_{XX} = K_{XX}/(\sigma_X \sigma_X) = DX/DX = 1$;
- 3) $r_{aX+b, cX+d} = \frac{K_{aX+b, cX+d}}{\sqrt{D(ax+b)D(cx+d)}} = \frac{acDX}{\sqrt{a^2 c^2 DX^2}} = \begin{cases} 1, ac > 0 \\ -1, ac < 0 \end{cases}$;
- 4) $r_{aX+b, cY+d} = \frac{K_{aX+b, cY+d}}{\sqrt{D(ax+b)D(cy+d)}} = \frac{acK_{XY}}{|ac|\sqrt{DXDY}} = \begin{cases} r_{XY}, ac > 0 \\ -r_{XY}, ac < 0 \end{cases}$.

Замечание 2.6: а) множество некоррелированных величин шире, чем множество независимых СВ; б) свойство $MX Y = M X M Y$ верно не только для независимых СВ, но и для некоррелированных, так как $K_{XY} = M X Y - M X M Y = 0$; в) свойство $D(X + Y) = DX + DY$ верно не только для независимых СВ, но и для некоррелированных, так как при доказательстве этого свойства независимость СВ X и Y использовалась в форме равенства $MX Y = M X M Y$, которое верно для некоррелированных СВ; г) свойства 2) и 3) легко по индукции обобщаются на любое конечное число некоррелированных СВ.

Ниже будет доказано, что коэффициент корреляции изменяется в пределах $[-1; 1]$, а для некоррелированных СВ он, очевидно, равен нулю. Близость значения коэффициента корреляции к 1 свидетельствует о существовании между исследуемыми СВ почти строгой функциональной линейной зависимости и о малом влиянии случайных факторов.

При $r_{XY} > 0$ с возрастанием одной СВ в среднем возрастает и другая. При $r_{XY} < 0$ с возрастанием одной СВ другая убывает. Принято считать, что при $0 < |r_{XY}| \leq 0,2$ между исследуемыми величинами практически нет связи, при $0,2 < |r_{XY}| \leq 0,5$ существует слабая связь, при $0,5 < |r_{XY}| \leq 0,95$ — сильная связь и при $0,95 < |r_{XY}| \leq 1,00$ — практически функциональная связь.

2.4.2. Математическое ожидание и дисперсия линейной формы

Определение 2.14. Выражение вида $L = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b$, где $\{X_i\}$, $i = 1, \dots, n$, — СВ, $\{a_i\}$ и b — const, называется **линейной формой**.

$ML = \sum_{i=1}^n a_i MX_i + b$ — это следует из свойств MX . Для вычисления DL решим сначала более простую задачу нахождения DS_n , где $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, Y_i — СВ.

$$\begin{aligned} \text{Обозначим } MY_i &= m_i. \text{ Тогда } MS_n = \sum_{i=1}^n m_i; S_n - MS_n = \sum_{i=1}^n (Y_i - m_i); \\ DS_n &= M(S_n - MS_n)^2 = M \sum_{i=1}^n (Y_i - m_i)^2 + 2 \sum_{i < j} M(Y_i - m_i)(Y_i - m_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n DY_i + 2 \sum_{i < j} K_{X_i Y_j}. \end{aligned}$$

Положим $Y_i = a_i X_i$. Тогда

$$DS_n = \sum_{i=1}^n a_i^2 DX_i + 2 \sum_{i < j} a_i a_j K_{X_i Y_j} = DL,$$

так как $S_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ отличается от L на константу b , которая не влияет на дисперсию DL . Таким образом,

$$ML = \sum_{i=1}^n a_i MX_i + b; \quad DL = \sum_{i=1}^n a_i^2 DX_i + 2 \sum_{i < j} a_i a_j K_{X_i Y_j}.$$

Из последней формулы очевидно, что для некоррелированных СВ дисперсия их суммы равна сумме их дисперсий.

Докажем теорему о коэффициенте корреляции r_{XY} .

Теорема 2.1 (о коэффициенте корреляции). а) $|r_{XY}| \leq 1$; б) $|r_{XY}| = 1 \Leftrightarrow$ СВ X и Y линейно зависимы.

Доказательство. Введем новые СВ $X^* = \frac{X - MX}{\sqrt{DX}}$; $Y^* = \frac{Y - MY}{\sqrt{DY}}$ и вычис-

лим их моменты:

$$\begin{aligned}
MX^* &= \frac{MX - MX}{\sqrt{DX}} = 0 = Y^*; \\
DX^* &= (1/\sqrt{DX})^2 \cdot D(X - MX) = 1 = Y; \\
K_{X^*Y^*} &= M(X^* - MX^*)(Y^* - MY^*) = MX^*Y^* = \\
&= M\left(\frac{(X - MX)(Y - MY)}{\sqrt{DX \cdot DY}}\right) = K_{XY} / \sqrt{DXDY} = r_{XY}.
\end{aligned}$$

а) $D(X^* \pm Y^*) = DX^* + DY^* + 2K_{XY} = 2(1 \pm r_{XY}) \geq 0 \Rightarrow |r_{XY}| \leq 1$, ч.т.д.

б) Пусть X и Y линейно зависимы, т.е. $Y = aX + b$, где a, b — const. Тогда

$$\begin{aligned}
r_{XY} &= \frac{K_{XY}}{\sqrt{DX \cdot DY}} = \{K_{X, aX+b} = K_{XY} = aDX, DY = a^2DX\} = \\
&= \frac{aDX}{\sqrt{a^2DX^2}} = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases} \Rightarrow |r_{XY}| = 1.
\end{aligned}$$

Пусть сначала $|r_{XY}| = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
D(X^* - Y^*) &= 2(1 - r_{XY}) = 0 \Rightarrow X^* - Y^* = \text{const} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{X - MX}{\sqrt{DX}} - \frac{Y - MY}{\sqrt{DY}} = C_1 = \text{const},
\end{aligned}$$

а это линейная зависимость между X и Y .

Пусть теперь $r_{XY} = -1$. Тогда

$$\begin{aligned}
D(X^* + Y^*) &= 2(1 + r_{XY}) = 0 \Rightarrow X^* + Y^* = \text{const} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{X - MX}{\sqrt{DX}} + \frac{Y - MY}{\sqrt{DY}} = C_2 = \text{const},
\end{aligned}$$

а это линейная зависимость между X и Y , ч.т.д.

Рассмотрим задачи на исследование корреляции.

Задача 2.32. Дана таблица распределений. Найти $MX, MY, DX, DY, r_{XY}, K_{XY}$.

X	Y		
	0	2	5
1	0,1	0	0,2
2	0	0,3	0
4	0,1	0,3	0

Решение

Найдем маргинальное распределение СВ X :

X	1	2	4
P	0,3	0,3	0,4

$$MX = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,4 = 2,5;$$

$$MX^2 = 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,4 = 7,9;$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 1,65.$$

Аналогично получаем $MY = 2,2$; $DY = 2,56$. Далее:

$$\begin{aligned} K_{XY} &= MXY - MX \cdot MY = 4,6 - 2,5 \cdot 2,2 = -0,9; \\ r_{XY} &= K_{XY} / (\sigma_X \sigma_Y), \quad \sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{1,65}, \quad \sigma_Y = \sqrt{DY} = \sqrt{1,6}; \\ r_{XY} &= -0,9 / \sqrt{1,65 \cdot 1,6} = -0,44. \end{aligned}$$

Задача 2.33. Проанализировать на зависимость и коррелированность СВ ξ и η :

- а) пусть СВ ξ и η независимы, $M\xi = M\zeta = 0$, $\eta = \xi \cdot \zeta$;
 б) $\eta = \xi^2 - 1$, СВ $\xi \sim N(0, 1)$;
 в) $\xi = \sin \alpha$; $\eta = \cos \alpha$, где СВ α имеет ряд распределения

α	0	$\pi/2$	π
p	1/3	1/3	1/3

Решение

а) $K_{\xi\eta} = M\xi\eta - M\xi \cdot M\eta = M\xi^2\zeta - M\xi \cdot M\eta = M\xi^2\zeta = M\xi^2M\zeta = 0 \Rightarrow$ СВ ξ и η некоррелированы, но зависимы.

б) $M\xi = 0$; $M\xi^2 = D\xi + (M\xi)^2 = 1$; $M\xi^3 = 0$; $M\xi^4 = 3!! = 1 \cdot 3 = 3$;

$$M\eta = M\xi^2 - 1 = 1 - 1 = 0;$$

$$D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2 = M(\xi^2 - 1)^2 = M(\xi^4 - 2\xi^2 + 1) = 3 - 2 + 1 = 2;$$

$$K_{\xi\eta} = M\xi\eta - M\xi \cdot M\eta = M\xi\eta = M\xi(\xi^2 - 1) = M\xi^3 - M\xi = 0 - 0 = 0.$$

Следовательно, СВ ξ и η некоррелированы, но зависимы.

в) Составим маргинальные ряды:

ξ	0	1
p	2/3	1/3

η	-1	0	+1
p	1/3	1/3	1/3

$M\xi = 1/3$; $M\eta = 0$; $K_{\xi\eta} = M\xi\eta - M\xi \cdot M\eta = 0 \Rightarrow \xi\eta \equiv 0 \Rightarrow M\xi\eta = 0$. Отсюда следует, что СВ ξ и η некоррелированы, но зависимы.

Задача 2.34. Пусть СВ X и Y связаны зависимостью $Y = 2 - 3X$; $MX = -1$; $DX = 4$. Найти MY , DY , r_{XY} , K_{XY} .

Решение

$$MY = 2 - 3 \cdot (-1) = 5; \quad DY = (-3)^2 \cdot 4 = 36;$$

$$K_{XY} = MX(2 - 3X) - MX \cdot MY = 2MX - 3MX^2 + 5 = -12;$$

$$r_{XY} = -12 / \sqrt{4 \cdot 36} = -1.$$

Задача 2.35. Случайная величина (X, Y) распределена с постоянной вероятностью в области D (рис. 2.14).

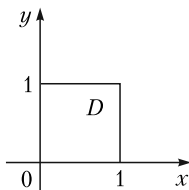


Рис. 2.14. К задаче 2.35

Найти $f(x, y)$, $f_1(x)$, $f_2(y)$, $F(x, y)$. Исследовать СВ на зависимость. Найти K_{XY} .

Решение

Так как площадь области D равна 1, $f(x, y)$ имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } (x, y) \notin D, \\ 1 & \text{при } (x, y) \in D. \end{cases}$$

Найдем маргинальные плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$ по формулам

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Получаем

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin [0; 1], \\ 1 & \text{при } x \in [0; 1]; \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \notin [0; 1], \\ 1 & \text{при } y \in [0; 1]. \end{cases}$$

Так как $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, то СВ X и Y независимы с маргинальными функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(y)$:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } x \in [0; 1], \\ 1 & \text{при } x > 1; \end{cases} \quad F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < 0, \\ y & \text{при } y \in [0; 1], \\ 1 & \text{при } y > 1. \end{cases}$$

Из независимости СВ X и Y следует, что $r_{XY} = K_{XY} = 0$ и

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0, \\ xy & \text{при } x \in [0; 1], y \in [0; 1], \\ x & \text{при } x \in [0; 1], y > 1, \\ y & \text{при } x > 1, y \in [0; 1], \\ 1 & \text{при } x > 1, y > 1. \end{cases}$$

Задача 2.36. На отрезке $[0; 1]$ зафиксирована точка a , X — случайная точка на $[0; 1]$, $Y = |a - X|$ — расстояние между точками a и X . Найдите r_{XY} , K_{XY} . При каком значении a $r_{XY} = 0$?

Решение

$$K_{XY} = MXY - MX \cdot MY, \quad MX = 1/2;$$

$$MY = \int_0^1 a - x |dx| = \int_0^a (a - x) dx - \int_a^1 (a - x) dx = a^2 - a + 1/2;$$

$$MXY = \int_0^1 x |a - x| dx = \int_0^a x(a - x) dx - \int_a^1 x(a - x) dx = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{12};$$

$$K_{XY} = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \cdot (a^2 - a + 1/2) = \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{12};$$

$$\theta_x = +\sqrt{DX} = 1/\sqrt{12} = 1/(2\sqrt{3}) \neq 0;$$

$$MY^2 = \int_0^a (a - x)^2 dx = a^2 - a + 1/3;$$

$$DY = MY^2 - (MY)^2 = a^2 - a + \frac{1}{3} - (a^2 - a + 1/2)^2 = \\ = 2a^3 - a^4 - a^2 + 1/12.$$

r_{XY} может равняться нулю, когда $K_{XY} = 0$, т.е. когда

$$2a^3 - a^4 - a^2 + 1/12 = 0.$$

На отрезке $[0; 1]$ единственный корень этого уравнения $a = 1/2$, при этом $\theta_Y = +\sqrt{DY} = 2/8 - 1/16 - 1/4 - 1/12 > 0$, т.е. при $a = 1/2$ СВ X и Y некоррелированы.

Задача 2.37. Проводится серия из n опытов с вероятностью успеха в i -м опыте $p_i = P(A)$, $i = 1, \dots, n$. X — общее число успехов в n опытах. Найти MX и DX в случаях: а) независимых опытов; б) зависимых опытов.

Решение

а) Пусть X_i — число успехов в i -м опыте.

СВ $X_i \sim B(1, p_i)$, $q_i = 1 - p_i$, поэтому СВ X_i имеет ряд распределения

X_i	0	1
P	q_i	p_i

Отсюда получаем

$$MX_i = p_i; \quad MX_i^2 = p_i; \quad DX_i = MX_i^2 - (MX_i)^2 = p_i - p_i^2 = p_i q_i.$$

СВ $X = \sum_{i=1}^n X_i$, где $\{X_i\}$ — независимые СВ, поэтому

$$MX = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n p_i; \quad DX_i = \sum_{i=1}^n p_i X_i = \sum_{i=1}^n p_i q_i.$$

б) Вычислим ряд распределения для СВ $X_i X_j$, где X_i и X_j зависимы:

$X_i X_j$	0	1
P	$1 - p_{ij}$	p_{ij}

Так как СВ $X = \sum_{i=1}^n X_i$, получаем

$$MX = \sum_{i=1}^n MX_i = \sum_{i=1}^n p_i; \quad DX = D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n DX_i + 2 \sum_{i < j} K_{ij};$$

где $K_{ij} = K_{X_i X_j} = MX_i X_j - MX_i MX_j$; $p_{ij} = P(X_i = 1, X_j = 1)$; $MX_i = p_i$; $MX_j = p_j$;

$$K_{ij} = p_{ij} - p_i p_j; \quad DX = \sum_{i=1}^n p_i q_{ii} + \sum_{i < j} (p_{ij} - p_i p_j).$$

В частном случае, когда $p_i = p$, $p_{ij} = P = \text{const}$,

$$MX = np; \quad DX = npq + n(n-1)(P - p^2).$$

Задача 2.38. СВ $X \sim H(N, M, n)$. С использованием результата задачи 2.37 найти MX и DX .

Решение

Пусть для наглядности N — число различных шаров в урне, из них M — белых, а n — число наугад извлеченных шаров из урны (шары из-

влекают из урны сразу n штук или последовательно по одному без возвращения). Пусть X_i — число белых шаров при i -м извлечении. Очевидно, ряд распределения для СВ X_i :

X_i	0	1
P	q_i	p_i

где p — вероятность для каждого шара быть белым, а $q = 1 - p$. Поэтому $p = M/N$; $q = (N - M)/N$. Легко видеть, что СВ $X = \sum_{i=1}^n X_i$, где СВ $\{X_i\}$ независимы. Тогда по результату задачи 6 в частном случае ($p_i = p$) имеем $MX = np = nM/N$, а $DX = npq + n(n-1)(P - p^2)$, где P — вероятность того, что два извлеченных шара i -й и j -й оба белые, т.е. $P = P(X_i = 1, X_j = 1) = \dots$. Поэтому

$$DX = \frac{nM(N-M)}{N^2} + n(n+1) \left(\frac{M(M-1)}{N(N-1)} - \frac{M^2}{N^2} \right) = \frac{nN(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

Эти значения MX и DX совпадают с ранее полученными в задаче параграфа 2.2 результатами более трудоемкого непосредственного вычисления MX и DX для СВ $X \sim H(N, M, n)$.

Контрольные вопросы и задания

1. Как проверить таблицу вида $\begin{array}{c|c|c|c|c} X & x_1 & \dots & x_k & \dots \\ \hline P & p_1 & \dots & p_k & \dots \end{array}$ на ряд распределения? Приведите примеры.
2. Приведите примеры точных и асимптотических связей распределений.
3. Докажите, что функция распределения задает закон распределения СВ.
4. Как восстановить ряд распределения дискретной СВ по ее функции распределения?
5. Покажите, что плотность распределения и функция распределения задают закон распределения непрерывной СВ.
6. Каков смысл условия нормировки и его использования при решении задач?
7. В чем заключается использование таблиц нормального закона, т.е. таблиц для приведенной нормальной плотности функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ и функции Лапласа вида $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(z) dz$ для решения задач исследования нормальных распределений $N(a, \sigma)$?
8. Каковы связи маргинальных распределений с совместными двумерной СВ?
9. Как можно найти дисперсию линейной формы DL , где $L = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b$, $\{X_i\}$ — СВ, a_i и b — const; DX_i заданы, $i = 1, \dots, n$?

Глава 3

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В результате изучения данной главы студенты должны:

знать

- методы производящих и характеристических функций;
- две группы предельных теорем: ЗБЧ и ЦПТ;
- использование ЦПТ в приближениях биномиальной схемы;

уметь

- решать задачи на применение предельных теорем;

владеть

- асимптотическими методами доказательства предельных теорем.
-

Настоящая глава включает в себя вопросы, связанные с понятием предельных теорем и основным аппаратом их доказательства, в качестве которого приведены методы производящих и характеристических функций, состоящие в решении конкретных вероятностных задач путем построений этих функций для заданных распределений и использовании их свойств. Поэтому свойства производящих и характеристических функций подробно изучены в главе с многочисленными примерами.

Под предельными теоремами понимаются группы теорем, устанавливающие условия асимптотических свойств распределений и их числовых характеристик с ростом числа случайных величин.

В главе приведены две наиболее важные группы предельных теорем: связанные с законом больших чисел (ЗБЧ), устанавливающие условия устойчивости большого числа случайных величин относительно среднего арифметического их математических ожиданий, и группа центральных предельных теорем (ЦПТ), устанавливающих условия сходимости распределения нормированных сумм большого числа случайных величин к приведенному нормальному закону, а также их применение к приближениям биномиальной схемы.

3.1. Методы производящих и характеристических функций

Аппарат характеристических и производящих функций оказывается конструктивным и образует методы, состоящие в использовании свойств этих функций для решения конкретных задач теории вероятности:

- МПФ — метод производящих функций;
- МХФ — метод характеристических функций.

3.1.1. Метод производящих функций

Определение 3.1. Пусть СВ $\xi \geq 0$, ξ — целочисленная, $p_k = P(\xi = k)$, где k — целое число; $\sum_k p_k = 1$, тогда **производящей функцией случайной величины** ξ называется функция

$$\varphi_\xi(s) = \varphi(s) = \sum_k p_k s^k = Ms^\xi. \quad (3.1)$$

Свойства производящих функций

1. $\varphi_\xi(s)$ определена в каждой точке отрезка $[-1; 1]$ (так как $\varphi_\xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$).
2. $\varphi_\xi(1) = 1$ (так как $\varphi_\xi(1) = \sum_k p_k = 1$).
3. Производящая функция $\varphi_\xi(s)$ взаимно однозначно соответствует вероятностям $\{p_k = P(\xi = k)\}$.

Доказательство. Утверждение следует из формулы (3.1) и единственности разложения в ряд Тейлора. Напишем ряд разложения функции $\varphi_\xi(s)$ в нуле (ряд Маклорена):

$$\varphi_\xi(s) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} s^2 + \dots + \frac{\varphi^{(t)}(0)}{t!} s^t,$$

откуда из сравнения с определением производящей функции $\varphi(s) = \sum_t p_t s^t$ следует, что $p_t = \frac{\varphi^{(t)}(0)}{t!}$. Эта формула дает возможность пересчитывать из производящей функции ряд распределения. Кроме того, эта формула наряду с определением производящей функции устанавливает взаимно однозначное соответствие между разными формами задания закона распределения рассматриваемых СВ в виде ряда распределения и производящей функции.

4. Если $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $\{\xi_i\}$ — независимые случайные величины, тогда

$$\varphi_\eta(s) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(s).$$

Доказательство. По определению

$$\varphi_\eta(s) = Ms^\eta = Ms^{\sum_{i=1}^n \xi_i} = \prod_{i=1}^n Ms^{\xi_i} = \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(s).$$

5. Если $\xi = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i + b$, $\{\xi_i\}$ — независимые случайные величины,

тогда

$$\varphi_{\xi}(s) = s^b \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(s^{a_i}).$$

Доказательство. По определению

$$\varphi_{\xi}(s) = M s^{\xi} = M s^{\sum_{i=1}^n a_i \xi_i + b} = s^b M \prod_{i=1}^n s^{a_i \xi_i} = s^b \prod_{i=1}^n M(s^{a_i})^{\xi_i} = s^b \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(s^{a_i}).$$

6. Пусть $Z = \sum_{i=1}^Y X_i$, где $\{X_i\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\{X_i\}$ и Y — независимые, целочисленные, для них известны производящие функции: $\varphi_X(s)$ и $\varphi_Y(s)$. Тогда $\varphi_Z(s) = \varphi_Y(\varphi_X(s))$.

Доказательство. Выполняем преобразования:

$$\begin{aligned} \varphi_Z(s) &= \sum_m P(Z=m) s^m = \sum_k \sum_m P(Y=k) P(Z=m/Y=k) s^m = \\ &= \left\{ P(A) = \sum_k P(H_k) P(A/H_k) - \text{ФПВ} \right\} = \sum_k P(Y=k) \sum_m P\left(\sum_{i=1}^k x_i = m\right) s^m = \\ &= \sum_k P(Y=k) \varphi_{\sum_{i=1}^k X_i}(s) = \sum_k P(Y=k) \prod_{i=1}^k \varphi_{X_i}(s) = \\ &= \sum_k P(Y=k) (\varphi_X(s))^k = \varphi_Y(\varphi_X(s)). \end{aligned}$$

7. Связь производящей функции с моментами:

$$\varphi_X^{(t)}(1) = M(X)_t = MX(X-1)\dots(X-t+1).$$

Доказательство. Возьмем производную от $\varphi(s) = \sum_k p_k s^k$ и подставим значение $s = 1$:

$$\varphi^{(t)}(1) = \sum_k k(k-1)\dots(k-t+1) p_k s^{k-t} \Big|_{s=1} = \sum_k k(k-1)\dots(k-t+1) p_k.$$

В то же время $(X)_t = X(X-1)\dots(X-t+1)$, откуда

$$M(X)_t = M(X(X-1)\dots(X-t+1)) = \sum_k k(k-1)\dots(k-t+1) p_k,$$

что совпадает с преобразованием левой части доказываемой формулы.

Выпишем выражения для MX и DX через $\varphi(s)$.

Из равенства $\varphi^{(t)}(1) = M(X)_t$ следует, что $MX = \varphi'(1)$;

$$\varphi''(1) = M(X(X-1)) = MX^2 - MX;$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = MX^2 - MX + MX - (MX)^2 = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2.$$

8. Моменты случайного числа случайных слагаемых. $Z = \sum_{i=1}^Y X_i$,

где $\{X_i\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\{X_i\}$ и Y — независимые, целочисленные и неотрицательные, и для них известны производящие функции $\varphi_X(s)$ и $\varphi_Y(s)$. Выразим моменты MZ и DZ через соответствующие моменты MX , MY , DX , DY , которые при заданных $\varphi_X(s)$ и $\varphi_Y(s)$ легко вычисляются по предыдущему пункту.

Из п. 6 известно, что $\varphi_Z(s) = \varphi_Y(\varphi_X(s))$. Из п. 7 известно, что $MZ = \varphi'_Z(1)$, $DZ = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2$. Поэтому

$$\begin{aligned}MZ &= \varphi'_Z(s)|_{s=1} = \varphi'_Y(\varphi_X(s))\varphi'_X(s)|_{s=1} = \varphi'_Y(\varphi_X(1))\varphi'_X(1) = \\&= \varphi'_Y(1)\varphi'_X(1) = MY \cdot MX; \\ \varphi''_Z(s) &= (\varphi'_Z(s))' = (\varphi'_Y(\varphi_X(s))\varphi'_X(s))' = \\&= \varphi''_Y(\varphi_X(s))(\varphi'_X(s))^2 + \varphi'_Y(\varphi_X(s))\varphi''_X(s); \\ \varphi''_Z(1) &= \varphi''_Y(\varphi_X(1))(\varphi'_X(1))^2 + \varphi'_Y(\varphi_X(1))\varphi''_X(1),\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{cases} \varphi''_X(1) = DX - MX + (MX)^2, \\ \varphi''_Y(1) = DY - MY + (MY)^2, \end{cases}$$

где $DX = \varphi''_X(1) + \varphi'_X(1) - (\varphi'_X(1))^2$; $DY = \varphi''_Y(1) + \varphi'_Y(1) - (\varphi'_Y(1))^2$;

$$\begin{aligned}\varphi''_Z(1) &= \varphi''_Y(1)(MX)^2 + MY\varphi''_X(1) = \\&= (DX - MY + (MY)^2)(MX)^2 + (DX - MX + (MX)^2)MY = \\&= DY(MX)^2 - MY(MX)^2 + (MY \cdot MX)^2 + DX \cdot MY + (MX)^2 MY; \\ DZ &= \varphi''_Z(1) + \varphi'_Z(1) - (\varphi'_Z(1))^2 = DY(MX)^2 - MY(MX)^2 + \\&+ (MY \cdot MX)^2 + DX \cdot MY - MX \cdot MY + MX \cdot MY^2 + MX \cdot MY - \\&- (MX \cdot MY)^2 = DY(MX)^2 + DX \cdot DY.\end{aligned}$$

Производящие функции хвостов

Определение 3.2 (общее определение производящей функции последовательности). Пусть $a_0, a_1, \dots$ — последовательность действительных чисел. Если ряд

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots = \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

сходится в каком-нибудь интервале $s_0 < s < s_1$, то $A(s)$ — **производящая функция последовательности** $\{a_i\}$, или **производящая функция хвостов**.

Пусть $p_j = P\{X = j\}$, $q_j = P\{X > j\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Тогда $\{p_j\}$ — распределение вероятностей, так как $\sum_j p_j = 1$, а $\{q_j\}$ не является распределением вероятностей, так как $\sum_j q_j > 1$.

Для $k \geq 0$ имеем $q_k = p_{k+1} + p_{k+2} + \dots$; при $k = 0$ $q_0 = p_1 + p_2 + \dots = 1 - p_0$. Составим функции $\varphi(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots$; для ряда $Q(s) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots$.

Оба ряда сходятся хотя бы при $|s| < 1$, поэтому $\varphi(s)$ — производящая функция случайной величины X , а $Q(s)$ — производящая функция последовательности чисел $\{q_j\}$.

Теорема 3.1. При $-1 < s < 1$

$$Q(s) = \frac{1 - \varphi(s)}{1 - s}. \quad (3.2)$$

Доказательство. Коэффициент при s^n в разложении по степеням s выражения $(1 - s)Q(s)$ равен $q_n - q_{n-1} = \sum_{i=n+1}^{\infty} p_i - \sum_{i=n}^{\infty} p_i = -p_n$, если $n \geq 1$, и $q_0 = p_1 + p_2 + \dots = 1 - p_0$, если $n = 0$; коэффициент при s^n в разложении по степеням s выражения $(1 - \varphi(s))$ есть $-p_n$ при $n \geq 1$ и $1 - p_0$ при $n = 0$. Таким образом, коэффициенты при s^n совпадают, откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема 3.2. $MX = Q(1)$; $DX = 2Q'(1) + Q(1) - (Q(1))^2$, где MX и DX — соответственно математическое ожидание и дисперсия СВ X .

Доказательство. Известно, что $MX = \varphi'_x(1)$ и $DX = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2$. Тогда по формуле (3.2) $\varphi(s) = 1 - Q(s)(1 - s)$; $\varphi'(s) = Q(s) - Q'(s)(1 - s)$; $\varphi'(1) = Q(1) \Rightarrow$ имеем

$$MX = Q(1);$$

$$\varphi''|_{s=1} = Q'(s) - Q''(s)(1-s) + Q'(s)|_{s=1} = Q'(1) + Q'(1) = 2Q'(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DX = \varphi''(1) + \varphi'(1) - DX = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = \\ = 2Q'(1) + Q(1) - (Q(1))^2, \text{ ч.т.д.}$$

Примеры решения задач на производящие функции

Применение метода производящих функций рассмотрим в задачах.

Задача 3.1. Получить вид производящей функции для следующих распределений: а) $B(1, p)$; б) $B(n, p)$; в) $\pi(\lambda)$; г) $G(p)$; д) $\text{сд}G(p)$; е) $\text{Па}(r, p)$; ж) $OB(r, p)$.

Решение

а) СВ $X_i \sim B(1, p)$; $q = 1 - p$; $\varphi_{X_i}(s) = \sum p_k s^k = qs^0 + ps = q + ps$.

б) СВ $X \sim B(n, p)$.

1-й способ. $X = \sum_{i=1}^n X_i$, где $\{X_i\}$ — независимые одинаково распределенные по $B(1, p)$ случайные величины. Поэтому по свойству 4 $\varphi_X(s) = \varphi_{X_i} = (ps + q)^n$.

2-й способ. Можно $\varphi_X(s)$ вычислить непосредственно:

$$\varphi_X(s) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} s^k = \sum_{k=0}^n C_n^k (ps)^k q^{n-k} = (ps + q)^n$$

в) СВ $X \sim \pi(\lambda)$;

$$\varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}.$$

г) СВ $X \sim G(p)$;

$$\varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} p q^{(k-1)} s^k = ps \sum_{k=0}^{\infty} (qs)^{(k-1)} = \frac{ps}{1 - qs}.$$

Задание 3.1. Получите вид производящей функции для следующих распределений: а) $сдG(p)$; б) $Па(r, p)$; в) $OB(r, p)$.

Указание. Для б) и в) используйте их связи с распределениями г) и д) задачи 3.1 и воспользуйтесь свойством 4.

Определение 3.3. Композицией законов распределения называется закон распределения суммы независимых случайных величин с соответствующими законами распределения. С использованием свойства 4 задачи для композиций решаются просто.

Метод производящих функций состоит в использовании перечисленных свойств производящей функции.

Задача 3.2. Найти композиции и моменты для следующих законов распределения: $X \sim \pi(\lambda_1)$, $Y \sim \pi(\lambda_2)$ (случайные величины X и Y независимы).

Решение

$\varphi_X(s) = e^{\lambda_1(s-1)}$; $\varphi_Y(s) = e^{\lambda_2(s-1)}$; $\varphi_{X+Y}(s) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)} \Rightarrow$ закон распределения СВ $X + Y \sim \pi(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Задание 3.2. Найдите композиции и моменты для следующих законов распределения: $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$ (случайные величины X и Y независимы).

Задача 3.3. Вычислить моменты распределения СВ $X \sim B(n, p)$.

Решение

$$MX = \varphi'(1); \varphi(s) = (ps + q)^n; MX = n(ps + q)^{n-1} p \Big|_{s=1} = np;$$

$$DX = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2; \varphi''(s) = (n(ps + q)^{n-1} p)' = n(n-1)(ps + q)^{n-2} p^2 \Big|_{s=1} = (n^2 - n)p^2 = n^2 - np^2;$$

$$DX = n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2 = np(1 - p) = npq.$$

Задание 3.3. Вычислите моменты распределений: а) $X \sim B(1, p)$; б) $X \sim \pi(\lambda)$; в) $X \sim G(p)$; г) $X \sim \text{сд}G(p)$; д) $X \sim \text{Па}(r, p)$; е) $X \sim \text{OB}(r, p)$.

Задача 3.4. Найти распределение и моменты случайных величин Z структуры свойства 6 для $X \sim \pi(\lambda_1)$, $Y \sim B(n, p)$.

Указание. При решении используйте свойства 6 и 8.

Решение

$Z = \sum_{i=1}^Y X_i$, где $\{X_i\}$ — независимые одинаково распределенные СВ, $\{X_i\}$ и Y — независимы. $\varphi_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$; $\varphi_Y(s) = (ps + q)^n$; $\varphi_Z(s) = \varphi_X(\varphi_Y(s)) = (pe^{\lambda(s-1)} + q)^n$ — производящая функция случайных величин Z , или закона распределения случайных величин Z . Моменты:

$$MZ = MX \cdot MY = \lambda np;$$

$$DZ = DY(MX)^2 + DX \cdot MY = npq\lambda^2 + \lambda np = np\lambda(q\lambda + 1).$$

Задание 3.4. Найдите распределение и моменты случайных величин Z структуры свойства 6 в случаях: а) $X \sim \pi(\lambda_1)$, $Y \sim \pi(\lambda_2)$; б) $X \sim G(p)$, $Y \sim B(n, p)$; в) $X \sim B(n, p)$, $Y \sim \text{Па}(r, p)$; г) $X \sim \text{OB}(r, p)$, $Y \sim B(1, p)$.

Задача 3.5. По заданной производящей функции $\varphi(s)$ найти закон распределения дискретной СВ X .

Решение

Ответ можно получить, разложив ПФ в ряд Маклорена. Получаем

$$p_k = P(X = k) = \varphi^{(k)}(0)/k!.$$

(Это значит, что задание производящей функции эквивалентно заданию закона распределения дискретной СВ.)

3.1.2. Метод характеристических функций

Определение 3.4. *Характеристической функцией случайной величины* ξ называется функция

$$g_{\xi}(t) = g(t) = Me^{it\xi} = \begin{cases} \sum_k e^{it\xi_k} P(\xi = \xi_k) \text{ для дискретной СВ } \xi, \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_{\xi}(x) dx \text{ для непрерывной СВ } \xi. \end{cases}$$

Свойства характеристических функций

1. $g(0) = 1$. Очевидно следует из определения.
2. $|g(t)| \leq 1$, так как

$$|g(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1.$$

3. $g(-t) = \overline{g(t)}$, так как $g(t) = M(\cos t\xi + i \sin t\xi)$.
4. $g(t)$ — равномерно непрерывна.

Доказательство. Действительно,

$$g(t+h) - g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} (e^{ith} - 1) dF(x); \quad |g(t+h) - g(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ith} - 1| dF(x).$$

Пусть ε — любое положительное число. Выберем постоянную A достаточно большой, так чтобы $\int_{|x| > A} dF(x) < \frac{\varepsilon}{4}$. Выберем теперь такое малое h , чтобы $|e^{ith} - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $|x| < A$.

$$\text{Тогда } |g(t+h) - g(t)| \leq \int_{-A}^A |e^{ith} - 1| dF(x) + 2 \int_{|x| \geq A} dF(x) \leq \varepsilon, \text{ ч.т.д.}$$

$$5. g_{Y=ax+b}(t) = e^{itb} g_x(at), \text{ так как } g_Y(t) = M e^{it(ax+b)}.$$

6. Если $x_1, \dots, x_n$ — независимые СВ, тогда

$$g_{\sum_{i=1}^n x_i}(t) = M e^{it \sum_{i=1}^n x_i} = \prod_{i=1}^n g_{x_i}(t).$$

7. Случайная величина $Z = \sum_{i=1}^Y X_i$, Y не зависит от $\{X_i\}$, где $\{X_i\}$ — независимые, одинаково распределенные СВ, Y — целочисленная СВ с производящей функцией $\varphi(s)$, $g(t)$ — характеристическая функция СВ X_i при любом i . Тогда $g_Z = \varphi(g(t))$.

Доказательство. Действительно:

$$\begin{aligned} g_Z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_Z(z) dz = \sum_n P(Y=n) \int_{-\infty}^{\infty} e^{it \sum_{i=1}^n X_i} f_{\sum_{i=1}^n X_i}(z) dz = \\ &= \sum_n P(Y=n) (g(t))^n = \varphi(g(t)), \end{aligned}$$

где x_i, z — возможные значения СВ $X_i, Z, i = 1, \dots, n$.

8. Формула обращения:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} g(t) dt,$$

где $f(x)$ — плотность распределения СВ X ; $g(t)$ — характеристическая функция СВ X .

Связь характеристической функции с производящей функцией для целочисленной случайной величины ξ задается формулой

$$g(t) = M e^{it\xi} = \sum_k (e^{it})^k P(\xi = k) = \varphi(e^{it}). \quad (3.3)$$

Задание 3.5. Зная производящие функции СВ, распределенных по законам $B(n, p)$, $\pi(\lambda)$, $G(p)$, $\text{сд}G(p)$, $\text{Па}(r, p)$, $\text{ОВ}(r, p)$, найдите соответствующие им характеристические функции, используя формулу (3.3).

Важной задачей является нахождение характеристических функций, соответствующих заданным распределениям.

Задача 3.6. Найти характеристическую функцию, соответствующую закону распределения $X \sim R[a; b]$.

Решение

При $X \sim R[a; b]$

$$g(t) = Me^{itx} = \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{itx} dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

В частном случае, при $X \sim R[-a; a]$

$$g(t) = Me^{itx} = \int_{-a}^a \frac{1}{2a} e^{itx} dx = \frac{e^{ita} - e^{-ita}}{2ait} = (\sin at) / at.$$

||| **Задание 3.6.** Найдите характеристические функции, соответствующие заданным распределениям: а) $X \sim N(0, 1)$; б) $X \sim N(a, \sigma)$; в) $X \sim E(\lambda)$; г) X — Коши.

Применение метода характеристических функций для композиции рассмотрим на примере следующей задачи.

Задача 3.7. X и Y — независимые СВ; $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$. Найти закон распределения СВ $Z = X + Y$.

Решение

$$g_Z(t) = g_X(t)g_Y(t) = (pe^{it} + q)^{n_1+n_2} \Rightarrow Z \sim B(n_2, p).$$

||| **Задание 3.7.** Найдите композиции СВ (МХФ) в случаях: а) $X \sim N(a_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(a_2, \sigma_2)$; б) $X \sim \pi(\lambda_1)$, $Y \sim \pi(\lambda_2)$.

Связь характеристических функций с моментами МХ и ДХ задается формулами

$$M\xi = g'(0)/i, D\xi = -g''(0) + ((g'(0))^2).$$

Они выводятся из равенства

$$g^{(k)}(0) = i^k M\xi^k \quad (3.4)$$

(если СВ ξ имеет абсолютный момент n -го порядка, то $g(t)$ дифференцируема k раз, $k \leq n$). Отсюда при $k = 1$ и 2 $M\xi = g'(0)/i$, $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = -g''(0) + (g'(0))^2$, или при $\Psi = \ln g(t)$ $M\xi = \Psi'(0)$, $D\Psi = -\Psi''(0)$.

||| **Задание 3.8.** Получите последние формулы самостоятельно для $M\xi$ и $D\xi$ по формуле (3.4).

Метод характеристических функций состоит в использовании перечисленных свойств характеристической функции.

Теоремы о характеристических функциях

Приводимые формулировки теорем даны без доказательства и предназначены для практического использования при решении задач.

1. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — постоянные, $a_i > 0$, $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, $g_1(t), \dots, g_n(t)$ — характеристические функции. Тогда $g(t) = \sum_{i=1}^n a_i g_i(t)$ — тоже характеристическая функция.

2. Произведение характеристических функций — тоже характеристическая функция.

3. Единственной характеристической функцией, такой что $g(t) = 1 + o(t^2)$ при $t \rightarrow 0$, является $g(t) \equiv 1$.

4. Если $g(t)$ — характеристическая функция и она имеет $g''(0)$, то она везде имеет $g'(t)$ и $g''(t)$.

5. Теорема Пойя. Если $g(t)$ — непрерывна, четна и выпукла книзу при $t \geq 0$, $g(t) \geq 1$, $g(0) = 1$, $g(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, то $g(t)$ — характеристическая функция.

6. Теорема Марцинкевича. Если характеристическая функция $g(t)$ имеет вид $e^{P(t)}$, где $P(t)$ — полином, то его степень меньше либо равна 2.

7. $\text{Reg}(t)$ — характеристическая функция, если $g(t)$ — характеристическая функция.

8. Если $g(t)$ — характеристическая функция невырожденного распределения и $a < 0$, то $(g(t))^a$ не является характеристической функцией.

9. Из свойства 3 следует, что если характеристическая функция действительна, то четна.

10. Если $g(t)$ — характеристическая функция, то $|g(t)|^2$ — тоже характеристическая функция.

Рассмотрим примеры на распознавание характеристических функций по свойствам и теоремам. Определим, являются ли характеристическими функциями следующие функции $g(t)$, и если да, то чему они соответствуют.

Пример 3.1. Функция $f(t)$ задана графиком (рис. 3.1).

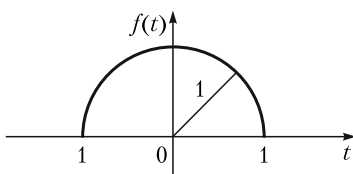


Рис. 3.1. Функция $f(t)$

Ответ: нет (по теореме 4), так как в точках $(-1; 0)$ и $(1; 0)$ нет $g'(t)$ и $g''(t)$.

Пример 3.2. $g(t) = \exp(t^{-\alpha})$, α — целое.

Ответ: нет при $\alpha > 2$ (по теореме 6); да при $\alpha = 2$: $X \sim N(0, \sqrt{2})$; нет при $\alpha = 1$ (по теореме 9).

Пример 3.3. $g(t) = \cos^{2t}$.

Ответ: да, так как $\cos^2(t) = \left(\frac{e^{-it}}{2} + \frac{e^{it}}{2} \right)^2 = \frac{e^{-2it}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{e^{2it}}{4} \Rightarrow \cos^2 t$ — характеристическая функция СВ η , где η задана рядом распределения

η	-2	0	2
P	1/4	1/2	1/4

Пример 3.4. $g(t) = e^{-|t|}$.

Ответ: да (по теореме 5), это закон Коши.

Пример 3.5. $g(t) = e^{2(e^{it} - 1)}$.

Ответ: да, это характеристическая функция СВ $X \sim \pi(2)$.

Пример 3.6. $g(t) = \sin t$.

Ответ: нет (по теореме 9).

Пример 3.7. $g(t) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-t^2/2} \right)^5$.

Ответ: да (по теореме 6): $Y \sim B(5, 2/3)$, $X \sim N(0, 1)$.

Освоение представленной темы требует решения большого числа разных задач на свойства производящей и характеристической функций. Решения большинства задач в основном не представляют трудности, так как объяснены теоретически и на примерах в предыдущих пунктах этого параграфа, поэтому предлагаются для самостоятельного решения. Более сложные приведены с решениями.

Задание 3.9. Найти производящие функции основных распределений дискретного типа и их моменты: а) $X = C - \text{const}$; б) $X \sim B(1, p)$; в) $X \sim B(n, p)$; г) $X_i \sim \pi(L)$; д) $X_i \sim G(p)$; е) $X_i \sim \text{сд}G(p)$; ж) $Z_1 \sim \text{Па}(r, p)$; з) $Z_2 \sim \text{OB}(r, p)$.

Задание 3.10. Найти производящие функции СВ $L = \sum_{i=1}^m a_i X_i + b$, где

$\{X_i\}$ — независимые СВ:

а) $X_i \sim B(n = 5, p = 0,4)$, $m = 1$, $a = 3$, $b = -2$;

б) $X_i \sim \pi(L = 2)$, $m = 3$, $a = -4$, $a = 5$, $a = 1$, $b = -3$;

в) $X_i \sim G[1/(I + 1)]$, $I = 1, 2, 3, 4$; $m = 4$, $a = -1$, $a = 2$, $a = -5$, $a = -3$, $b = -2$.

Задание 3.11. $Z = \sum_{i=1}^Y X_i$, где $Y, X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые СВ, имеющие

производящие функции, $\{X_i\}$ одинаково распределены.

Найти производящие функции и моменты (MX и DX) СВ Z в следующих случаях:

а) $X \sim B(n=3, p_1=0,6)$, $Y \sim G(p_2=0,3)$;

б) $X_i \sim \pi(L_1=5)$, $Y \sim \pi(L_2=4)$;

в) $X_i \sim \pi(L=7)$, $Y \sim \text{сд}G(p=0,4)$;

г) $X_i \sim G(p=0,5)$, $Y \sim \pi(L=2)$;

д) $X_i \sim \text{сд}G(p_1=0,1)$, $Y \sim B(n=2, p_1=0,2)$;

е) $X_i \sim \text{Па}(r=4, p_1=0,3)$, $Y \sim B(n=1, p_2=0,3)$;

ж) X_i заданы рядом распределения

X_i	1	2	3
P	0,3	0,4	0,3

$Y \sim \pi(L)$.

Задание 3.12. Методом производящих функций найти композиции следующих СВ: а) $X \sim \pi(L_1)$, $Y \sim \pi(L_2)$; б) $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$.

Задание 3.13. Используя связь характеристической функции с производящей функцией, найти характеристическую функцию СВ с распределениями, указанными в задании 3.9.

Задание 3.14. Найти характеристические функции следующих распределений: а) $X \sim R[a; b]$; б) $X \sim R[-a; a]$; в) $X \sim E[L]$.

Задание 3.16. Найти характеристическую функцию СВ, если: а) $X \sim \pi(t)$, $Y = 3x - 2$; б) $X \sim N(a, b)$, $Y = X - 1$; в) $X \sim R[0; 1]$, $Y = 1 - 2x$; г) $X \sim B(n, p)$, $Y = 3 - X$.

Задание 3.17. Методом характеристических функций найти моменты (MX и DX) основных распределений задания 3.9, а также для $X \sim N(a, b)$, $X \sim R[a; b]$ и $X \sim E[L]$.

Задание 3.18. $Z = \sum_{i=1}^Y X_i$, где $Y, X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые СВ, СВ Y имеет производящую функцию $\phi(s)$, СВ $\{X_i\}$ одинаково распределены. Методом характеристических функций найти характеристическую функцию СВ Z и ее моменты MZ и DZ в случаях задания 3.9, а также в случаях: а) $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim \pi(L=2)$; б) $X \sim R[-2; 2]$, $Y \sim \pi(L=3)$.

Задание 3.19. Методом характеристических функций найти композиции СВ задания 3.12 и следующих СВ: а) $X \sim N(a_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(a_2, \sigma_2)$; б) $X \sim E[L_1]$, $Y \sim E[L_2]$.

Задача 3.8. $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные СВ и $X_k \sim R[-1; 1]$ для любого $k = 1, \dots, n$. Методом характеристических функций найти предельный закон распределения СВ $S_n^* L(S_n^*)$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} L(S_n^*)$, где $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$; $S_n^* = \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}}$.

Решение

Имеем

$$\begin{aligned} MS_n &= 0, DS_n = \frac{n}{3}; g_{X_k}(t) = \frac{\sin t}{t}, k = 1, 2, \dots; g_{S_n}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n, S_n^* = \frac{S_n \sqrt{3}}{\sqrt{n}}; \\ g_{S_n^*}(t) &= \left(\frac{\sin t(\sqrt{3/n \cdot t})}{\sqrt{3/n \cdot t}}\right)^n = \\ &= \left(1 + \left(\frac{\sin t(\sqrt{3/n \cdot t})}{\sqrt{3/n \cdot t}} - 1\right) \frac{\sqrt{3/n \cdot t}}{\sin t(\sqrt{3/n \cdot t}) - \sqrt{3/n \cdot t}}\right) \times \\ &\times \frac{\sin t(\sqrt{3/n \cdot t}) - \sqrt{3/n \cdot t}}{\sqrt{3/n \cdot t}} \cdot n = \exp \left\{ \frac{\sin t(\sqrt{3/n \cdot t}) - \sqrt{3/n \cdot t}}{\sqrt{3/n \cdot t}} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ &\rightarrow \exp \left\{ \frac{\left(1/(3!)(\sqrt{3/n \cdot t})^3\right)}{\sqrt{3/n \cdot t}} \cdot n \right\} = \exp \left\{ -\frac{3\sqrt{3} \cdot t^2 n \sqrt{n}}{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} t n \sqrt{n}} \right\} = \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} L(S_n^*) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \end{aligned}$$

т.е. распределение СВ S_n^* сходится к $N(0, 1)$.

Более трудными и требующими пояснения являются задачи на распознавание возможности для функции быть производящей или характеристической. Приведем примеры решения таких задач.

Задача 3.9. Какие из данных функций являются производящими функциями, и если являются, то каким распределениям они соответствуют:

- а) $V(s) = 0,5 + 0,4s^2$; б) $V(s) = 0,3 + 0,2s + 0,1s^2 + 0,4s^5$;
 в) $V(s) = 0,5(1 + \exp[3(s-1)])$; г) $V(s) = 0,8(0,4s + 0,6)^3 + 0,2$;
 д) $V(s) = \exp\{2[1 + \exp(3(s-1))]\} - 4$; е) $V(s) = s^2(0,3s^2 + 0,7)^5$;
 ж) $V(s) = s^2 \exp[4(s^3 - 1)]$; з) $V(s) = 0,001s^4/(1 - 0,9s^3)^3$.

Решение

- а) $V(s)$ — не производящая функция, так как $V(1) \neq 1$;
 б) $V(s) = \varphi_X(s)$ — производящая функция СВ X :

X	0	1	2	5
P	0,3	0,2	0,1	0,4

в) $V(s) = \varphi_Z(s) = \varphi_Y(\varphi_X(s))$, где $\varphi_X(s) = \exp[3(s-1)]$, $\varphi_Y(\varphi_X(s)) = 0,5s + 0,5 \Rightarrow X \sim \pi(3)$, $Y \sim B(1, 0,5)$, $Z = \sum_{i=1}^Y X_i$, $\{X_i\}$ — одинаково распределенные СВ, и $Y, X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые СВ и $\varphi_{X_i}(s) = \varphi_X(s)$;

г) $V(s) = \varphi_Z(s) = \varphi_Y(\varphi_X(s))$ — производящая функция СВ $Z = \sum_{i=1}^Y X_i$, $\{X_i\}$ — из свойства 6 производящих функций, где $\varphi_X(s) = (0,4s + 0,6)$; $\varphi_Y(s) = 0,8s + 0,2 \Rightarrow X_i \sim B(3, 0,4)$, $Y \sim B(1, 0,8)$;

д) $V(s) = \varphi_Z(s) = \varphi_Y(\varphi_X(s))$ — производящая функция СВ $Z = \sum_{i=1}^Y X_i$, $\{X_i\}$ — из свойства 6 производящих функций, где $\varphi_X(s) = \exp[3(s-1)]$, $\varphi_Y(s) = \exp[2(s-1)] \Rightarrow X_i \sim \pi(3)$, $Y \sim \pi(2)$;

е) $L = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b$, $\{X_i\}$ — одинаково распределенные и независимые СВ, тогда $V(s) = \varphi_L(s) = s^b \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(s)$ — производящая функция СВ L , где $\varphi_{X_i}(s) = (0,3s + 0,7) \Rightarrow X_i \sim B(5, 0,3)$, $n = 5$, $a = 2$, $b = 2$;

ж) $L = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b$, $\{X_i\}$ — одинаково распределенные и независимые СВ, тогда $V(s) = \varphi_L(s) = s^b \sum_{i=1}^n \varphi_{X_i}(s)$ — производящая функция СВ L , где $\varphi_{X_i}(s) = \exp[4(s-1)] \Rightarrow X_i \sim \pi(4)$, $n = 5$, $a = 3$, $b = 2$;

з) $L = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b$, $\{X_i\}$ — одинаково распределенные и независимые СВ, тогда $V(s) = \varphi_L(s) = s^b \sum_{i=1}^n \varphi_{X_i}(s)$ — производящая функция СВ L , где $\varphi_{X_i}(s) = \frac{0,1}{1 - 0,9s} \Rightarrow X_i \sim \text{сд}G(0,1)$ (сдвинутое геометрическое распределение с параметром $p = 0,1$), $n = 3$, $a = 3$, $b = 4$.

Задача 3.10. Какие из функций являются характеристическими, и если являются, то каким распределениям соответствуют?

а) $g(t) = 0,1 + 0,2\exp(it) + 0,7\exp(8it)$;

б) $g(t) = 0,2[0,3\exp(it) + 0,7] + 0,8\exp(it-1)$;

в) $g(t) = \exp(4it)\cos 3t$;

г) $g(t) = \exp\left\{\frac{it-1}{3} + 5it\right\}$;

д) $g(t) = \exp(-100it)$;

е) $g(t) = \exp[t(2i - nt)]$;

ж) $g(t) = \cos^2 t$;

з) $g(t) = t$;

и) $g(t) = \sin t/t$;

к) $g(t) = \sin t$;

л) $g(t) = \exp(-t^2/4n)$.

Решение

а) $g(t)$ — характеристическая функция СВ X с рядом распределения

X	0	1	8
P	0,1	0,2	0,7

б) $g(t) = g_z(t) = a_1 g_x(t) + a_2 g_y(t)$, где $a_1 = 0,2$; $a_2 = 0,8$; $g_x(t) = 0,3 \exp(it) + 0,7$; $g_y(s) = \exp\{it - 1\} \Rightarrow X \sim B(1; 0,3)$, $Y \sim \pi(1)$;

в) $g(t) = g_z(t) = g_x(t)g_y(t)$, где X и Y — независимые СВ, $g_x(t) = \exp(4it)$; $g_y(t) = \cos 3t = 0,5 \exp(-3it) + 0,5 \exp(3it) \Rightarrow X = 4$

Y	-3	3
P	0,5	0,5

$Z = X + Y$;

г) $g(t) = g_z(t) = \exp[(it - 1)/3] + 5it$; $g_x(t) = \exp[(it - 1)/3] \Rightarrow$ СВ $X \sim \pi(1/3)$; $g_y(t) = 5it \Rightarrow Y = 5$. Тогда $Z = X + Y$, где X и Y — независимые СВ;

д) $g(t)$ — характеристическая функция СВ $X = -100$;

е) $g(t)$ — характеристическая функция СВ $X \sim N(a = 2, b = \sqrt{2n})$;

ж) $g(t) = g_y(t) = \cos t = 0,25[\exp(-it) + \exp(it)] = 0,25 \exp(-2it) + 0,5 + \exp(2it) \Rightarrow$ ряд распределения СВ X

X	-2	2
P	1/4	1/4

з) $g(t) = t$ — не характеристическая функция, так как $|g(t)|$ должен быть меньше 1, что здесь невыполнено;

и) $g(t)$ — характеристическая функция СВ $X \sim R[-1; 1]$;

к) $g(t) = \sin t$ — действительная и нечетная функция, а действительная характеристическая функция обязательно четная;

л) $g(t)$ — характеристическая функция СВ $X \sim N(0; 1/\sqrt{n})$.

Методы производящих и характеристических функций широко применяются при доказательстве предельных теорем теории вероятностей.

Предельные теоремы теории вероятностей — общее название групп теорем теории вероятностей, формулирующих условия возникновения определенных закономерностей, проявляющихся при действии большого числа случайных факторов. Они могут выражаться в установлении соответствия между экспериментальными и теоретическими характеристиками усредненных СВ или предельных законов распределения некоторых функционалов СВ, зависящих от их числа.

3.2. Закон больших чисел

Закон больших чисел (ЗБЧ) отражает устойчивость среднего арифметического большого числа случайных величин относительно среднего арифметического их математических ожиданий.

3.2.1. Определение и суть закона больших чисел

Обозначим $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, где X_i — случайные величины.

Формулировка ЗБЧ:

$$P\left\{\left|\bar{X} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i\right| > \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (3.5)$$

где $\varepsilon > 0$ — const, или соотношение (3.5) можно записать так:

$$\bar{X} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i \xrightarrow{p} 0$$

(сходимость по вероятности, см. параграф 4.7).

Суть ЗБЧ в том, что совместное действие большого числа случайных факторов при некоторых весьма общих условиях приводит к результату, почти не зависящему от случая.

3.2.2. Неравенства группы закона больших чисел

Неравенство Маркова. Пусть СВ $X > 0$, $\varepsilon > 0$ — const, тогда

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}, \quad (3.6a)$$

или

$$P\{X < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{MX}{\varepsilon}. \quad (3.6б)$$

Доказательство. Первый вариант. Очевидно, что неравенства (3.6a) и (3.6б) эквивалентны.

а) Пусть X — дискретная случайная величина с рядом распределения

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

и пусть $\varepsilon > 0$ — const, такая что $x_k < \varepsilon \leq x_{k+1}$.

Тогда

$$MX = x_1 p_1 + \dots + x_k p_k + x_{k+1} p_{k+1} + \dots + x_n p_n + \dots \geq \varepsilon (p_{k+1} + \dots + p_n + \dots) = \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\} \Rightarrow (3.6a).$$

б) Пусть X — непрерывная СВ с плотностью распределения $f(x)$, ε — const. Тогда

$$MX = \int_0^{\infty} x f(x) dx \geq \int_{\varepsilon}^{\infty} x f(x) dx \geq \varepsilon \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x) dx = \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\} \Rightarrow (3.6a).$$

Второй вариант. $P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$, где X — СВ ≥ 0 , $\varepsilon > 0$ — const.

Построим новую СВ $Y = \begin{cases} 0, & X < \varepsilon, \\ \varepsilon, & X \geq \varepsilon. \end{cases}$ Тогда

$$MX \geq MY = 0 \cdot P\{X < \varepsilon\} + \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\} = \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\} \Rightarrow P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}, \text{ ч.т.д.}$$

Неравенство Чебышева. Если случайная величина X имеет дисперсию, то при любом $\varepsilon > 0$

$$P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}, \quad (3.7a)$$

или

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}. \quad (3.7б)$$

Доказательство. Первый вариант. Пусть $Y = X - MX$. Применим к $Y^2 \geq 0$ неравенство Маркова в форме (3.6б), так как $Y^2 \geq 0$. Получим

$$P\{Y^2 < \varepsilon^2\} \geq 1 - \frac{MY^2}{\varepsilon^2},$$

или

$$P\{|X - MX|^2 < \varepsilon^2\} = P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{M|X - MX|^2}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} \Rightarrow (3.7б).$$

Очевидно, что (3.7a) и (3.7б) эквивалентны.

Второй вариант. Докажем неравенство в форме (3.7a).

Построим новую СВ $Y = \begin{cases} 0, & |X - MX| < \varepsilon, \\ \varepsilon^2, & |X - MX| \geq \varepsilon. \end{cases}$ Тогда

$$\begin{aligned} DX &= M(X - MX)^2 \geq MY = 0 \cdot P(|X - MX| < \varepsilon) + \varepsilon^2 P(|X - MX| \geq \varepsilon) = \\ &= \varepsilon^2 P(|X - MX| \geq \varepsilon) \Rightarrow P(|X - MX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

Рассмотрим пример на неравенство Чебышева.

Пример. Пусть СВ $X \sim B(n, p)$. Оценим ее по неравенству Чебышева (3.7б). Так как $MX = np$; $DX = npq$, то имеем

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} &= P\{|X - np| < n\varepsilon\} \underset{n\varepsilon = \varepsilon^*}{=} P\{|X - np| < \varepsilon^*\} \geq 1 - \frac{DX}{(\varepsilon^*)^2} = \\ &= 1 - \frac{npq}{n^2 \varepsilon^2} = 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \Rightarrow P\left\{\left|\frac{x}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow P\left\{\left|\frac{x}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ (теорема Бернулли).} \end{aligned}$$

Замечание 3.1. Неравенства Чебышева и Маркова достаточно грубы, но их значение состоит в возможности получения оценок вероятностей по первым двум моментам, а также в их простоте и универсальности. Кроме того, неравенство Чебышева использу-

ется при доказательстве теорем группы ЗБЧ. Надо иметь в виду грубость неравенств Чебышева и Маркова, которая ниже будет проиллюстрирована примерами.

Обобщенное неравенство Чебышева. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые СВ с математическими ожиданиями $MX_1, MX_2, \dots, MX_n$ и дисперсиями $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ соответственно, тогда

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n MX_i\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{\varepsilon^2}, \quad (3.8a)$$

или

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n MX_i\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{\varepsilon^2}. \quad (3.8б)$$

Доказательство. Очевидно, что неравенства (3.8a) и (3.8б) эквивалентны. Обозначим $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, тогда они получаются соответственно из неравенств (3.7a) и (3.7б) как следствия.

3.2.3. Теоремы группы закона больших чисел

Теперь рассмотрим теоремы группы ЗБЧ, объединенные тем, что все они формулируют условия, при которых данная последовательность СВ подчиняется ЗБЧ. Различия условий в теоремах определяются разными свойствами исходных последовательностей СВ.

Приведем наиболее простые теоремы группы ЗБЧ, дающие достаточные условия выполнимости ЗБЧ для данных последовательностей СВ. Это значит, что на основании этих теорем при выполнении их условий можно утверждать, что к данным последовательностям СВ применим ЗБЧ. Если же условия этих теорем выполняться не будут, то исследования о применимости ЗБЧ нужно продолжить на основании других теорем. Теоремы будут далее представлены в порядке их усиления.

Теорема Хинчина. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — попарно независимые одинаково распределенные СВ с конечным математическим ожиданием MX . Тогда

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX\right| \geq \varepsilon\right\} = P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - MX\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.9)$$

Это ЗБЧ в форме Хинчина.

Доказательство. Частный случай. Приведем сначала доказательство в случае конечности DX . Воспользуемся неравенством Чебышева (3.7a):

$$P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2},$$

где $X > 0$ — СВ, $\varepsilon > 0$ — const.

Положив $X = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, имеем

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX\right| \geq \varepsilon\right\} = P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - MX\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D\bar{X}}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow (3.9),$$

так как $M\bar{X} = MX$; $D\bar{X} = \frac{DX}{n}$.

Общий случай (доказательство методом характеристических функций).

Обозначим $MX_i = m$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Тогда утверждение теоремы Хинчина можно записать в виде $\frac{S_n}{n} - m \xrightarrow{p} 0$, или $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} m$ (сходимость по вероятности).

Введем в рассмотрение характеристические функции случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$; $g_{X_i}(t) = Me^{itX_i}$. Тогда

$$\begin{aligned} g_{S_n/n}(t) &= Me^{itS_n/n} = g_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(g_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \\ &= \left(g(0) + g'(0)\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{imt}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{itm}, \end{aligned}$$

а это характеристическая функция константы m , т.е. доказана сходимость $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} m$, т.е. сходимость по распределению, а так как m — константа, то эта сходимость эквивалентна сходимости по вероятности, что и утверждается в доказываемой теореме.

Теорема Чебышева. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — попарно независимые СВ, имеющие равномерно ограниченные дисперсии, т.е. существует константа C такая, что $DX_i \leq C$ для всех $i = 1, 2, \dots$. Тогда последовательность СВ $\{X_i\}$ подчиняется ЗБЧ в форме (3.5).

Доказательство. По формуле (3.6а) $P(|X - MX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$, где $\varepsilon > 0$ — const. Пусть

$$X = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i; \quad M\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i; \quad D\bar{X} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i.$$

Тогда

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - MX\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D\bar{X}}{\varepsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^n DX_i}{n^2 \varepsilon^2} \leq \frac{nC}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{C}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow (3.5).$$

Теорема Маркова. Пусть СВ $X_1, X_2, \dots, X_n$ — как угодно зависимые СВ и $\frac{D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (или $D\bar{X} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, где $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$). Тогда последовательность СВ $\{X_i\}$ подчиняется ЗБЧ.

Доказательство. По формуле (3.6а) $P(|X - MX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$, где X — СВ, $\varepsilon > 0$ — const. Пусть

$$X = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i; \quad M\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i; \quad D\bar{X} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i.$$

Тогда

$$P\left\{\left|\bar{X} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i\right| \leq \varepsilon\right\} \geq \frac{D\bar{X}}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow (3.5).$$

Теорема Бернулли. Пусть СВ $X \sim B(n, p)$. Тогда

$$P\left\{\left|\frac{x}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

где $\varepsilon > 0$ — const.

Доказательство. Эта теорема является следствием теоремы Хинчина, так как $X = \sum_{i=1}^n X_i$, где $X_i \sim B(1, p)$ и все X_i — независимые СВ; $\frac{X}{n} = \bar{X}$, $M\bar{X} = p$, $DX = p$.

Усиленный закон больших чисел (УЗБЧ).

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i\right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\right\}, \text{ или } \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i\right) \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$$

(это сходимость почти наверное (п.н.), или с вероятностью 1 (о видах сходимости см. гл. 4)).

Теорема Колмогорова. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые СВ и $\sum_{i=1}^n \frac{DX_i}{i^2} < \infty$. Тогда последовательность СВ $\{X_i\}$ подчиняется УЗБЧ (без доказательства).

Рассмотрим задачи на применение ЗБЧ.

Задача 3.11. Средний срок службы мотора — 4 года. Оценить вероятность того, что мотор прослужит менее 20 лет.

Решение

По формуле (3.6б) $P\{X < 20\} \geq 1 - \frac{4}{20} = 0,8$, где СВ X — срок службы мотора.

Задача 3.12. В машину нагроузили 20 т картофеля мешками, а вероятность того, что случайно взятый мешок имеет вес менее 100 кг, равна 0,8. Оценить число n мешков, если их веса одинаково распределены.

Решение

По формуле (3.66) $P\{X < 100\} = 0,8 \geq 1 - \frac{20\,000}{n \cdot 100} \Rightarrow \frac{20\,000}{n \cdot 100} \geq 0,2 \Rightarrow \Rightarrow n \leq 1000$, так как $MX = \frac{20\,000}{n \cdot 100}$, где СВ X — размер случайного вклада.

Задача 3.13. В сети 18 000 ламп. Вероятность быть включенной для каждой лампы — 0,9. Оценить вероятность того, что число включенных ламп отличается от своего среднего X менее чем на 200 ламп.

Решение

Пусть СВ X — число включенных ламп, тогда по формуле (3.76) имеем

$$P(|X - MX| < 200) \geq 1 - \frac{1620}{40\,000} = 0,955,$$

так как СВ $X \sim B(n, p)$, $n = 18\,000$, $p = 0,9$, $MX = np = 16\,200$, $DX = npq = 1620$.

Задача 3.14. Оценить вероятность того, что частота появления герба при 100 бросаниях монеты отклонится от своей вероятности менее чем на $\varepsilon = 0,1$.

Решение

По формуле (3.76) (положив x — число гербов) имеем

$$P\left\{\left|\frac{x}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{0,5 \cdot 0,5}{100 \cdot 0,01} = 0,75,$$

так как $X \sim B(n, p)$, $MX = np$, $DX = npq$, $n = 100$, $p = 0,5$.

Задача 3.15. Распределение СВ X задано рядом распределения

X	2	4	6	8	12
P	0,2	0,3	0,25	0,2	0,05

Вычислить точно и оценить по формуле (3.56) $P(X < 11)$.

Решение

По данному ряду распределения $P\{X < 11\} = 1 - 0,05 = 0,95$. По формуле (3.66)

$$\begin{aligned} P\{X < 11\} &\geq 1 - \frac{MX}{11} = \\ &= 1 - \frac{2 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,3 + 6 \cdot 0,25 + 8 \cdot 0,2 + 12 \cdot 0,05}{11} \approx 1 - 0,48 = 0,52. \end{aligned}$$

Эта задача иллюстрирует грубость оценки по неравенству Маркова по сравнению с точным значением $P(X < 11)$.

Задача 3.16. Оценить вероятность того, что СВ X отклонится от MX менее чем на 3σ , в случаях а) $X \sim R[a; b]$; б) $X \sim N(a, b)$ в сравнении с вероятностями этого события.

Решение

а) $X \sim R[a; b]$. По формуле (3.76) получаем

$$P\{|X - MX| < 3\sigma\} \geq 1 - \frac{DX}{9\sigma^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{8}{9}.$$

В то же время для $X \sim R[a; b]$ имеем

$$\begin{aligned} P\{|X - MX| < 3\sigma\} &= P\{MX - 3\sigma < X < MX + 3\sigma\} = \\ &= F(MX + 3\sigma) - F(MX - 3\sigma); \end{aligned}$$

$$MX = \frac{a+b}{2}, DX = \frac{(b-a)^2}{12}, \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, 3\sigma = \frac{(b-a)\sqrt{3}}{2} > \frac{b-a}{2},$$

поэтому

$$P\{|X - MX| < 3\sigma\} = F\left(\frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)\sqrt{3}}{2}\right) - F\left(\frac{a+b}{2} - \frac{(b-a)\sqrt{3}}{2}\right) = 1,$$

так как

$$\frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)\sqrt{3}}{2} > \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = b,$$

$$\frac{a+b}{2} - \frac{(b-a)\sqrt{3}}{2} < \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} = a.$$

б) $X \sim N(a, b)$. По формуле (3.76) получаем

$$P\{|X - MX| < 3\sigma\} = 0,9973 > \frac{8}{9} = 0,8989.$$

Эта задача иллюстрирует грубость оценки НЧ.

Задача 3.17. Пусть СВ $X \sim G(p)$. Оценить $P\{|X - MX| \geq \varepsilon\}$.

Решение

Имеем $MX = \frac{1}{p}$, $DX = \frac{q}{p^2}$, где $q = 1 - p$. По формуле (3.7а) получаем

$$P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} = \frac{q}{p^2\varepsilon^2}.$$

При $p^2\varepsilon^2 < q$ (что можно сделать за счет выбора ε) мы имеем тривиальную оценку $P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq 1$.

Эта задача иллюстрирует грубость неравенства Чебышева.

Задача 3.18. Пусть $\{X_i\}$ — независимые СВ, заданные рядом распределения

X_i	-2	0	2
P	1/4	1/2	1/4

Применим ли к ним ЗБЧ?

Решение

$MX_n = 0 < C = 1$ и СВ одинаково распределены, следовательно, по теореме Хинчина ЗБЧ применим.

Задача 3.19. Пусть $\{X_i\}$ — независимые СВ, заданные рядом распределения

X_i	$-5n^2$	0	$5n^2$
P	$1/(3n^2)$	$1 - n^2/3$	$1/(3n^2)$

Применим ли к ним ЗБЧ?

Решение

СВ $\{X_i\}$ — независимы, а так как $MX_n = 0$, $DX_n = \frac{50}{3} < C = 100$, имеют равномерно ограниченные дисперсии, поэтому ЗБЧ применим.

Задача 3.20. X — число гербов, выпавших при бросании монеты, Y — число выпавших очков на игральной кости. Оценить вероятность того, что $X + Y < 14$.

Решение

СВ $X \sim B(n, p)$, где $n = 10$, $p = 0,5$, $MX = np = 5$, $MY = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5$.

По неравенству Маркова (3.66)

$$P\{X + Y < 14\} \geq 1 - \frac{M(X + Y)}{14} = 1 - \frac{8,5}{14} = \frac{11}{28}.$$

Задача 3.21. В партии n изделий — с первого станка и m изделий — со второго станка. По неравенству Чебышева оценить вероятность того, что число X первосортных изделий в партии отличается от своего среднего по абсолютной величине менее чем на ε , если вероятности того, что изделие — первого сорта с первого и второго станков, соответственно равны r и s .

Решение

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}, \quad X = X_1 + X_2,$$

где X_1 и X_2 — количество первосортных изделий в партии соответственно с первого и второго станков. СВ $X_1 \sim B(n, r)$, $X_2 \sim B(m, s) \Rightarrow MX_1 = nr$; $MX_2 = ms$; $MX = nr + ms$; $DX_1 = nr(1 - r)$; $DX_2 = ms(1 - s)$; $DX = nr(1 - r) + ms(1 - s)$. Поэтому

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{nr(1 - r) + ms(1 - s)}{\varepsilon^2}.$$

Задача 3.22. Пусть $\{X_i\}$ — независимые СВ, заданные рядом распределения

X_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
P	$1/2\sqrt{k}$	$-1/\sqrt{k}$	$-1/2\sqrt{k}$

Применим ли к ним ЗБЧ?

Решение

$MX_n = 0$; $DX_n = MX_n^2 = \sqrt{n} \Rightarrow$ условие теоремы Чебышева не выполняется. Проверим выполнение условий теоремы Маркова:

$$\frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \approx \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \text{ЗБЧ применим по теореме Маркова.}$$

3.3. Центральная предельная теорема

3.3.1. Теоремы группы центральной предельной теоремы

Группа центральной предельной теоремы (ЦПТ) — группа теорем, формулирующих условия сходимости распределений некоторых сумм СВ к нормальному закону с ростом числа СВ, зависящие от свойств рассматриваемых последовательностей СВ.

Для удобства дальнейшего обсуждения темы введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots — \text{последовательность случайных величин (СВ);} \\ S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k; S_n^* = \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}}; M\xi_k = a_k; D\xi_k = b_k^2; M|\xi_k - a_k|^3 = c_k^3; A_n = \sum_{k=1}^n a_k; \\ B_n^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2; C_n^3 = \sum_{k=1}^n c_k^3; L(x) — \text{закон распределения СВ } X; g_x(t) = Me^{itx}. \end{aligned}$$

Теорема Леви. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые, одинаково распределенные СВ с конечной дисперсией. Тогда

$$P\{S_n^* < x\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad 8; 8 \quad L(S_n^*) \rightarrow N(0, 1).$$

Доказательство. Проводим его методом характеристических функций. Обозначим $M\xi_i = m$; $D\xi_i = \sigma^2$. По свойствам характеристических функций имеем

$$\begin{aligned} g_{\xi_k-m}(t) &= g(t); \\ g(t) &= g(0) + \frac{g'(0)}{1!}t + \frac{g''(0)}{2!}t^2 + o(t^2) = \\ &= 1 + itM(\xi_k - m) - \frac{t^2}{2}M(\xi_k - m)^2 + o(t^2) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + o(t^2); \\ S_n &= \sum_{k=1}^n (\xi_k - m); \quad S_n^* = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i - m}{\sigma\sqrt{n}}; \\ g_{S_n}(t) &= g_{\sum_{i=1}^n (\xi_i - m)}(t) = \left(1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + o(t^2)\right)^n; \\ g_{S_n^*}(t) &= g_{\sum_{i=1}^n (\xi_i - m)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \frac{t^2\sigma^2}{2\sigma^2 n} + o(t^2)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^n \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

Теорема Ляпунова. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые СВ. Тогда, если a_k, b_k, c_k при любом k существуют и $\frac{C_n}{B_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, где $B_n = \sqrt{B_n^2}$,

$C_n = \sqrt[3]{C_n^3}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{S_n^* < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, или $L(S_n^*) \rightarrow N(0, 1)$ (без доказательства).

Рассмотрим задачи на проверку выполнения условий теоремы Ляпунова.

Задача 3.23. $\{\xi_k\}$ — независимые СВ, заданные рядом распределения

ξ_k	$-k$	k
P	0,5	0,5

Проверить, что $L(S_n^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1)$.

Решение

$$M\xi_k = a_k = 0; D\xi_k = b_k^2 = k^2; M|\xi_k|^3 = c_k^3 = k^3; A_n = 0; B_n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 \sim n^3; C_n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 \sim n^4; \frac{C_n}{B_n} \sim \frac{n^{\frac{4}{3}}}{n^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \text{условия теоремы выполнены.}$$

Задача 3.24. $\xi_k \sim R[-k; k]$; $\{\xi_k\}$ — независимые СВ. Определить, выполняются ли условия теоремы Ляпунова для $\{\xi_k\}$.

Решение

$$M\xi_k = a_k = 0; D\xi_k = \frac{(2k)^2}{12} = \frac{k^2}{3} = b_k^2; M|\xi_k|^3 = 2 \int_0^k \frac{x^3}{2k} dx = \frac{k^2}{4} = c_k; A_n = 0; B_n^2 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k^2 \sim n^3; C_n^3 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n k^3 \sim n^4; \frac{C_n}{B_n} \sim \frac{n^{\frac{4}{3}}}{n^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \text{условия теоремы Ляпунова для } \{\xi_k\} \text{ выполнены.}$$

Теорема Пуассона. Пусть выполнены условия

$$n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, np = \lambda < \infty, \quad (3.10)$$

тогда для фиксированного целого $m \sim B(n, p)$ ($0 \leq m \leq n$) и $\lambda > 0 - \text{const}$

$$\lim_{(3.10)} P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad (3.11)$$

где $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$; $q = 1 - p$.

Доказательство. Проводим выкладки:

$$\begin{aligned} \lim_{(3.10)} P_n(m) &= \lim_{(3.10)} C_n^m p^m q^{n-m} = \lim_{(3.10)} \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \\ &= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{(3.10)} \underbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-m+1}{n}}_1 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m}}_1 = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

Обобщенная теорема Пуассона. Пусть $\{\xi_k\}$ — последовательность бернуллиевских СВ, $\xi_k \sim B(1, p_k)$; $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Условия асимптотики:

$$n \rightarrow \infty; \max_{1 \leq k \leq n} p_k \rightarrow 0; \sum_{k=1}^n p_k \rightarrow \lambda; 0 < \lambda < \infty. \quad (3.12)$$

Тогда $\lim_{(3.12)} P(S_n = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ (это слабая сходимость распределения СВ S_n к $\pi(\lambda)$).

Доказательство. Проведем его методом производящих функций:

$$\begin{aligned} \varphi_{S_n}(z) &= \varphi_n(z) = [1 + p_1(z-1)][1 + p_2(z-1)] \cdots [1 + p_n(z-1)] = \\ &= \prod_{k=1}^n [1 + p_k(z-1)]; \\ \ln \varphi_n(z) &= \sum_{k=1}^n \ln(1 + p_k(z-1)) = \left\{ \begin{array}{l} \text{при } x \rightarrow 0 \\ \ln(1+x) = x + o(x) \end{array} \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^n [p_k(z-1) + o(p_k)] \xrightarrow{(3.12)} (z-1) \sum_{k=1}^n p_k \rightarrow (z-1)\lambda \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi_n(z) \xrightarrow{(3.12)} \exp[(z-1)\lambda], \end{aligned}$$

ч.т.д., так как это производящая функция закона Пуассона с параметром λ .

Практическая рекомендация. Применять формулу (3.11) при больших n и $pq < 9$.

3.3.2. Приближения биномиальной схемы

Производится n испытаний Бернулли с вероятностью успеха A в одном опыте $P(A) = p$ ($P(\bar{A}) = 1 - p = q$). Тогда вероятность получить ровно m успехов в n испытаниях есть

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (3.13)$$

(биномиальная вероятность).

При больших n вычисление по (3.13) затруднительно, поэтому используют приближения, сформулированные в виде следующих теорем.

Локальная теорема Муавра — Лапласа (ЛТМЛ). При $n \rightarrow \infty$

$$\frac{P_n(m)}{\frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x')} \rightarrow 1, \quad (3.14)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ — табличная функция, $x' = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ (без доказательства).

Практическая рекомендация. Применять формулу (3.14) при $npq \geq 9$.

Интегральная теорема Муавра — Лапласа (ИТМЛ). Равномерно относительно x' и x'' ($-\infty < x' < x'' < \infty$) при $n \rightarrow \infty$

$$P\left\{x' \leq \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leq x''\right\} \rightarrow \Phi(x'') - \Phi(x'), \quad (3.15)$$

где $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$ — табличная функция, а $\varphi(x)$ см. выше.

Практическая рекомендация. Применять (3.14) и (3.15) при больших n и $npq \geq 9$.

Практический смысл ИТМЛ. Положим в качестве x_1 и x_2 значения:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad \text{которые удовлетворяют условиям ИТМЛ.}$$

Тогда практически при больших n имеем по формуле (3.14) следующее приближенное равенство:

$$P\left\{\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

или

$$P\{m_1 \leq m \leq m_2\} \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right). \quad (3.16)$$

Замечание 3.2. Утверждение ИТМЛ можно представлять в следующих видах:

$$L\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1) \quad \text{или} \quad P\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}} < x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Доказательство ИТМЛ. Оно следует из теоремы Леви, так как СВ $m \sim B(n, p)$, $Mm = p$, $Dm = \sqrt{npq}$, $m = \sum_{i=1}^n X_i$, где $\{X_i\}$ — независимые одинаково распределенные по $B(1, p)$ СВ. Потому в формуле (3.16) $\frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ —

нормированная сумма независимых одинаково распределенных бернуллиевских СВ, распределение которой по теореме Леви при $n \rightarrow \infty$ сходится к $N(0, 1)$, откуда следует ИТМЛ в форме (3.15).

Следствие из ИТМЛ

$$P = P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \quad (3.17)$$

$m \sim B(n, p)$.

Доказательство. $m = \sum_{i=1}^n X_i$, где СВ $X_i \sim B(1, p)$, $\{X_i\}$ — независимые СВ,

$Mm = np$, $Dm = \sqrt{npq}$. Тогда

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} &= P\left\{\left|\frac{m - np}{n}\right| \leq \varepsilon\right\} = P\left\{-\varepsilon \leq \frac{m - np}{n} \leq \varepsilon\right\} = \\ &= P\left\{\underbrace{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}_{x'} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} \xrightarrow[\text{по (3.9)}]{n \rightarrow \infty} \Phi(x'') - \Phi(x') = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \end{aligned}$$

Замечание 3.3. Из формулы (3.17) следует, что для $m \sim B(n, p)$

$$P = P\{|m - Mm| \leq \varepsilon\} = P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \frac{\varepsilon}{n}\right\} \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{n}\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right),$$

а это значит, что с заданной надежностью P можно указать интервал изменения m в пределах $m_1 = np - \varepsilon n$ и $m_2 = np + \varepsilon n$, т.е.

$$P = P\{m_1 \leq m \leq m_2\} \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right). \quad (3.18)$$

Таким образом, по формулам (3.17) и (3.18) с заданной надежностью P (P — доверительная вероятность) легко выписываются доверительные интервалы для относительной частоты $\frac{m}{n}$ и частоты m , где $m \sim B(n, p)$:

$$\begin{cases} P = P\left\{p - \varepsilon \leq \frac{m}{n} \leq p + \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \\ P = P\{np - \varepsilon \leq m \leq np + \varepsilon\} \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right). \end{cases} \quad (3.19)$$

Замечание 3.4. При применении следствия из ИТМЛ возникают следующие задачи: **прямая** — известны n, p, ε , найти P , и **обратная** — известны P и два из параметров n, p, ε , найти неизвестный параметр.

Рассмотрим задачи на применение приближений биномиальной схемы (задачи 3.25–3.32) и ЦПТ (задачи 3.33–3.41).

Задача 3.25. Найти вероятность того, что в $n = 300$ испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $P(A) = 0,25$ событие A наступит: а) 75 раз; б) 100 раз.

Решение

$$\text{а) } P_{300}(75) \underset{\text{по (2)}}{\approx} \frac{1}{\sqrt{300 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \varphi\left(\frac{75 - 300 \cdot 0,25}{\sqrt{300 \cdot 0,25 \cdot 0,75}}\right) = \frac{\varphi(0)}{7,5} \approx \frac{0,4}{7,5};$$

$$\text{б) } P_{300}(75, 100) \underset{\text{по (3.11)}}{\approx} \Phi(x'') - \Phi(x'), \text{ где } x'' = \frac{100 - 300 \cdot 0,25}{\sqrt{300 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = \frac{10}{3}, \text{ да-}$$

лее досчитать самостоятельно с использованием таблиц функции Лапласа $\Phi(x)$.

Задача 3.26. Сколько нужно провести испытаний Бернулли, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что успех ($P(A) = 0,8$) произойдет не менее 75 раз.

Решение

Воспользуемся формулой (3.16), где $p = 0,8$, $q = 0,2$, $m_1 = 75$, $m_2 = n$ – искомое число испытаний.

$$P_n(75, n) = 0,9 \approx \Phi\left(\frac{n - 0,8n}{\sqrt{n \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 0,8n}{\sqrt{n \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right);$$

$$\text{так как } n > 75, \quad x'' = \frac{n - 0,8n}{\sqrt{n \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{\sqrt{n}}{2} > 4 \Rightarrow \Phi(x'') = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{75 - 0,8n}{-0,4\sqrt{n}}\right) = \Phi(x') = -0,4 \Rightarrow x' = 1,28 \Rightarrow n = 100.$$

Задача 3.27. Монету бросают $2N$ раз (N велико). Найти вероятность того, что герб выпадает на $2m$ раз больше, чем решка.

Решение

По формуле (3.14)

$$P_{2N}(N + m) = \sqrt{\frac{2}{N}} \varphi\left(\frac{(N + m - N\sqrt{2})}{\sqrt{N}}\right) = \sqrt{\frac{2}{N}} \varphi\left(m\sqrt{\frac{2}{N}}\right).$$

Задача 3.28. На базу отправлено 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что изделие повредится, равна 0,0002 для каждого независимо от других. Найти вероятности событий: а) повредится два изделия; б) повредится не менее трех изделий.

Решение

По формуле (3.11) имеем:

$$\text{а) } P_{5000}(3) \approx \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} = \frac{1^3 e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \approx 0,6;$$

$$\text{б) } P_{5000}(3) + P_{5000}(4) + \dots + P_{5000}(5000) = 1 - P_{5000}(0) - P_{5000}(1) - P_{5000}(2) \\ (\text{досчитайте самостоятельно}).$$

Задача 3.29. С конвейера сходит в среднем 85% изделий 1-го сорта. Сколько изделий необходимо взять, чтобы с вероятностью 0,9973 отклонение частоты изделий 1-го сорта в них по модулю от своей вероятности не превосходило бы 0,01?

Решение

По формуле (3.17) решаем обратную задачу при $p = 0,85$, $q = 0,15$, $\varepsilon = 0,01$, $P = 0,9973$. Находим n из уравнения

$$P = 2\Phi\left(0,01\sqrt{\frac{n}{0,85 \cdot 0,15}}\right).$$

По таблицам $\Phi(t) = 0,9973 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow 0,01\sqrt{\frac{n}{0,85 \cdot 0,15}} = 3 \Rightarrow n = 11\,475$.

Задача 3.30. Монету бросают 100 раз. Найти интервал, в который с вероятностью 0,9973 будет заключено число выпадений гербов.

Решение

По второй формуле системы (3.15) ($n = 100$, $p = q = 0,5$, $P = 0,9973$) имеем

$$0,9973 \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}}\right) \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\sqrt{25}} = 3 \Rightarrow \varepsilon = 15.$$

Искомый интервал $(np - \varepsilon, np + \varepsilon) = (50 - 15, 50 + 15) = (35, 65)$.

Задача 3.31. Производится 1500 независимых испытаний с вероятностью успеха в одном опыте, равной 0,3. Найти вероятность того, что число успехов отклонится от своего среднего не более чем на 150.

Решение

По формуле (3.18) ($n = 1500$, $p = 0,3$, $q = 0,7$, $\varepsilon = 150$) имеем

$$P\{|m - Mm| \leq 150\} \approx 2\Phi\left(\frac{150}{\sqrt{1500 \cdot 0,3 \cdot 0,7}}\right) \approx 1.$$

Задача 3.32. В сети 180 лампочек. Вероятность быть включенной для каждой лампочки равна 0,9 (независимо от других). Найти вероятность того, что отклонение относительной частоты включенных лампочек от своей вероятности (0,9) по модулю не превышает 0,1.

Решение

По формуле (3.17) ($n = 180$, $p = 0,9$, $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,1$) имеем

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,9\right| \leq 0,1\right) &\approx 2\Phi\left(0,1\sqrt{\frac{180}{0,9 \cdot 0,1}}\right) \approx 2\Phi(0,45) = \\ &= 2 \cdot 0,1736 = 0,3472. \end{aligned}$$

Задача 3.33. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = 0,5$.

Решение (доказательство)

СВ $\xi_k \sim \pi(1)$; $M\xi_k = 1$; $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k \sim \pi(n)$; $MS_n = n$; $DS_n = \sqrt{n}$ по теореме Леви $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P\left\{\eta_n = \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - n}{\sqrt{n}} < x\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\eta_n < 0\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,5.$$

С использованием формулы Стирлинга ($n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$) получаем

$$P\{\eta_n < x\} = P(S_n \leq n) - P(S_n = n) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{n^k e^{-n}}{k!} - \frac{n^n e^{-n}}{\underbrace{n!}_{\downarrow 0}} \rightarrow e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \rightarrow 0,5, \text{ ч.т.д.}$$

Задача 3.34. Зрители приходят в театр парами. Число мест в театре 1000. Зрители равновероятно пользуются двумя входами, около каждого из них имеется гардероб. Сколько мест должно быть в каждом гардеробе, чтобы с вероятностью 0,99 каждый зритель мог воспользоваться ближайшим гардеробом?

Решение

Обозначим X — число мест в каждом гардеробе; m — число пар, вошедших в первый вход; n — общее число пар зрителей ($2n = 1000 \Rightarrow n = 500$).

Тогда $0,99 = P(X \geq 2m; X \geq 2n - 2m)$, т.е.

$$P\left(n - \frac{X}{2} \leq m \leq \frac{X}{2}\right)_{\text{ИТМЛ}} = \Phi\left(\frac{X/2 - n/2}{\sqrt{n}/2}\right) - \Phi\left(\frac{n - X/2 - n/2}{\sqrt{n}/2}\right) =$$

$$\left. \begin{matrix} n=500, \\ 500=10\sqrt{5} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \Phi\left(\frac{n-500}{10\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(\frac{500-x}{10\sqrt{5}}\right) = \Phi\left(\frac{x-500}{10\sqrt{5}}\right) = 0,99 \Rightarrow X \approx 537.$$

Задача 3.35. В таблице случайных чисел каждое целое от 0 до 9 появляется с вероятностью 0,1 (независимо от других). Сколько нужно случайных чисел, чтобы с вероятностью 0,99 среди них появились ≥ 100 нулей?

Решение

СВ X — число нулей; СВ $X \sim B(n, p = 0,1)$.

По ИТМЛ получаем $P_n(100, n) = 0,99 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{n-0,1n}{0,3\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{100-0,1n}{0,3\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \Phi(3\sqrt{n}) - \Phi\left(\frac{100-0,1n}{0,3\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \Phi\left(\frac{100-0,1n}{0,3\sqrt{n}}\right) = -0,49.$$

Так как $n \geq 100 \Rightarrow 3\sqrt{n} \geq 30 \Rightarrow \Phi(3\sqrt{n}) = 0,5$. Отсюда по таблице $\Phi(x)$ получаем $\frac{100-0,1n}{0,3\sqrt{n}} = 2,33 \Rightarrow n \approx 2000$.

Задача 3.36. В страховой компании ($n = 10\,000$ клиентов) страховой взнос каждого равен 500 руб. P — вероятность катастрофы. На какую прибыль с вероятностью 0,95 может рассчитывать компания?

Решение

$S = 10\,000 \cdot 500 = 5\,000\,000$ — страховая сумма; X — случай потери (выплаты) компании; $Y = S - X$ — прибыль. СВ $X \sim B(n, p)$. По ИТМЛ имеем

$$P(|X - MX| \leq \xi) = P\left(\left|\frac{x}{n} - p\right| \leq \frac{\xi}{n}\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\xi}{\sqrt{npq}}\right) = 0,95 = \gamma \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ значение ξ находится из равенства $\frac{\xi}{\sqrt{npq}} = t_\gamma$.

Тогда $0,95 = P(np - \xi \leq X \leq np + \xi) = P(S - np - \xi \leq S - X \leq S - np + \xi) = P(I_1 \leq Y \leq I_2)$. Самостоятельно досчитайте искомые I_1 и I_2 .

Задача 3.37. $\{X_i\}$ — независимы, $g_{x_i}(t) = \frac{\sin t}{t}$; $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $S_n^* = \frac{S_n \sqrt{3}}{\sqrt{n}}$.

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} L(S_n^*)$.

Решение

СВ $X_i \sim R[-1; 1]$; $MX_i = 0$; $DX_i = \frac{4}{13} = \frac{1}{3}$; $MS_n = 0$; $DS_n = \frac{n}{3}$; $\frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} = S_n^*$.

По теореме Леви $L\left(S_n = \frac{S_n \sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1)$.

Задача 3.38. $g_{x_i}(t) = \cos t$; $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} L(S_n^*)$.

Решение

$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \Rightarrow$ ряд распределения

X_i	-1	1
P	0,5	0,5

$MX_i = 0$; $DX_i = 1$; $MS_n = 0$; $DX_n = n$; $S_n^* = \frac{S_n - MS_n^*}{\sqrt{DS_n}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow$ по теореме

Леви $L(S_n^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1)$.

Задача 3.39. $g_{x_i}(t) = \frac{1}{1-t}$; $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} L(S_n^*)$.

Решение

СВ $X_i \sim E(\lambda = 1)$; $MX_i = DX_i = 1$; $MS_n = DS_n = n$; $S_n^* = \frac{S_n - MS_n^*}{\sqrt{DS_n}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теореме Леви $L(S_n^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1)$.

Задача 3.40. При каких значениях α и β к последовательности $\{\xi_k\}$ применима теорема Ляпунова, если дан следующий ряд распределения СВ ξ_k ?

ξ_k	$-k^\alpha$	0	k^α
P	$\frac{1}{2k^\beta}$	$1 - \frac{1}{k^\beta}$	$\frac{1}{2k^\beta}$

Решение

Имеем

$$a_k = M\xi_k = 0; b_k^2 = D\xi_k = k^{2\alpha-\beta}; B_n^2 = \sum_{k=1}^n k^{2\alpha-\beta} \approx n^{2\alpha-\beta+1};$$

$$C_k^3 = M|\xi_k|^3 = k^{3\alpha-\beta}; C_n^3 = \sum_{k=1}^n k^{3\alpha-\beta} \approx n^{3\alpha-\beta+1};$$

$$\frac{C_n}{B_n} \approx \frac{n^{\frac{3\alpha-\beta+1}{3}}}{n^{\frac{2\alpha-\beta+1}{2}}} \rightarrow 0 \text{ при } \frac{2\alpha-\beta+1}{2} - \frac{3\alpha-\beta+1}{3} > 0;$$

$$6\alpha - 3\beta + 3 - 6\alpha + 2\beta - 2 \Rightarrow 1 - \beta > 0 \Rightarrow \beta < 1 \text{ при любых } \alpha.$$

Задача 3.41. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — одинаково распределенные СВ, $X_k \sim R[-1; 1], k = 1, 2, \dots; S_n = \sum_{k=1}^n X_k; S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Найти закон распределения СВ S_n^* при $n \rightarrow \infty$.

Решение

Имеем

$$g_{x_k}(t) = \frac{\sin t}{t}, k = 1, 2, \dots; g_{S_n}(t) = \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n; S_n^* = \frac{S_n - \sqrt{3}}{\sqrt{n}},$$

так как $MS_n = 0, DS_n = \frac{n}{3};$

$$\begin{aligned} g_{S_n^*}(t) &= g_{\sqrt{3/n} \cdot S_n}(t) = \left(\frac{\sin \sqrt{3t/n}}{\sqrt{3t/n}} \right)^n; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} g_{S_n^*}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \sqrt{3t/n}}{\sqrt{3t/n}} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \left(\frac{\sin \sqrt{3t/n}}{\sqrt{3t/n}} - 1 \right) \right)^{\frac{\sqrt{3t/n}}{\sin \sqrt{3t/n} - \sqrt{3t/n}}} \right)^{\frac{\sin \sqrt{3t/n} - \sqrt{3t/n}}{\sqrt{3t/n}}} = \\ &= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \sqrt{3t/n} - \sqrt{3t/n}}{\sqrt{3t/n}} n \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{3!}(\sqrt{3t/n})^3}{\sqrt{3t/n}} n \right\} = \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{\sqrt{3}t^2n}{2n\sqrt{n}}}{\sqrt{3t/n}} \right\} = \\
&= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}t^2\sqrt{nn}}{2n\sqrt{n}\sqrt{3t}} \right\} = e^{-\frac{t^2}{2}} \Rightarrow L(S_n^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1).
\end{aligned}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите примеры нахождения характеристических функций по производящим.
2. Опишите использование методов производящих и характеристических функций для композиций. Приведите примеры.
3. Как определяются распределение и моменты случайного числа независимых случайных слагаемых?
4. Каковы смысл, значение и сфера применения неравенств группы ЗБЧ?
5. Приведите сравнительную характеристику теорем группы ЗБЧ и порядок проверки их условий.
6. Дайте общую характеристику теорем ЦТП.
7. Как осуществляется проверка условий теорем ЦПТ? Приведите примеры.
8. Опишите применение ЦТП для приближения биномиальной схемы.
9. Сформулируйте следствие из интегральной теоремы Муавра — Лапласа и укажите ее применение. Приведите примеры.

Глава 4

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТЕМЫ К ОСНОВНОМУ КУРСУ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В результате изучения данной главы студенты должны:

знать

- условные распределения;
- композиции;
- распределения функций от случайных величин;
- сведения о важных в приложениях вероятностных распределениях;
- виды вероятностных сходимостей;

уметь

- применять дополнительные сведения главы к решению конкретных задач;

владеть

- методами анализа вероятностных распределений функций от случайных величин.
-

Данная глава опирается на знание основного начального курса теории вероятностей (гл. 1—3) и имеет целью изучение более широкого круга вопросов, связанных с распределением случайных величин. Это оказывается необходимым при решении многих теоретических и практических задач как теории вероятностей, так и смежных вероятностных дисциплин, прежде всего математической статистики и статистического моделирования вероятностных процессов. Здесь разобрано много примеров, объясняющих и иллюстрирующих теорию.

Имея в виду различные временные рамки курсов теории вероятностей на разных инженерно-технических факультетах, отдельные темы главы могут включаться в основной курс в зависимости от акцентов специализации в соответствии с их программами.

4.1. Нормальное распределение

Функция распределения и плотность нормального распределения, а также некоторые его свойства приведены в параграфе 2.3. Приведем здесь несколько дополнительных сведений.

1. Вычисление моментов нормальной СВ $X_1 \sim N(a, \sigma)$.

$$MX_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X_0}(x) dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 0$$

в силу нечетности подынтегральной функции;

$$\begin{aligned} DX_0 &= MX_0^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X_0}(x) dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \\ &= -\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) d\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \left\{ \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = x; v = -\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-\sqrt{2\pi}) = 1. \end{aligned}$$

Из параграфа 2.3 известно, что $X_1 = \sigma X_0 + a$, откуда по свойствам математического ожидания и дисперсии получаем, что $MX_1 = \sigma MX_0 + a = a$; $DX_1 = \sigma^2 DX_0 = \sigma^2$.

2. Вычисление характеристической функции $g_{X_1}(t)$ нормальной СВ $X_1 \sim N(a, \sigma)$.

$$\begin{aligned} g(t) &= g_{X_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \{e^{ia} = \cos a + i \sin a\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin tx \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx; \\ g'(t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right)' = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \sin tx \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{aligned} &\int u dv = uv - \int v du; u = \sin tx; du = t \cos tx dx; \\ &dv = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) d\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= d\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right) \Rightarrow v = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned} \right\} = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \sin tx \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = -g(t)t,
\end{aligned}$$

т.е. $g'(t) = -g(t)t$. Решим это дифференциальное уравнение с начальным условием $g(0) = 1$:

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = -t \Rightarrow \int \frac{g'(t)}{g(t)} dt = -\frac{t^2}{2} + C \Rightarrow g(t) = C \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

$$\text{При } t = 0 \quad g(0) = C = 1 \Rightarrow g(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right);$$

$$X_1 = \sigma X_0 + a \Rightarrow g_{X_1}(t) = e^{iat} g_{X_0}(\sigma t) = \exp\left(iat - \frac{t^2 \sigma^2}{2}\right).$$

3. Многомерное нормальное распределение.

Функция распределения

$$F(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{|C|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{ij} (x_i - m_i)(x_j - m_j)\right),$$

где $|C|$ — определитель матрицы $C = \|C_{ij}\|$, обратной корреляционной матрице $K = \|K_{ij}\|$, $|C| = \frac{1}{|K|}$; $C_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{M_{ij}}{|K|}$; $|K| > 0$ — определитель корреляционной матрицы K ; M_{ij} — минор определителя $|K|$, получаемый из него вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sqrt{\sigma_i^2 \sigma_j^2}} = \frac{K_{ij}}{\sqrt{DX_i DX_j}}.$$

$$\text{В частности, при } n = 2 \quad \|K_{ij}\| = \begin{vmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_X \sigma_Y r_{XY} \\ \sigma_X \sigma_Y r_{XY} & \sigma_Y^2 \end{vmatrix}.$$

Обозначим $r_{XY} = r$, $DX = \sigma_X^2$, $DY = \sigma_Y^2$, $MX = m_X$, $MY = m_Y$. Тогда

$$|K| = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 (1-r^2); \quad |C| = \frac{1}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2 (1-r^2)};$$

$$C = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2 (1-r^2)} & -\frac{r}{\sigma_X \sigma_Y (1-r^2)} \\ -\frac{r}{\sigma_X \sigma_Y (1-r^2)} & \frac{1}{\sigma_Y^2 (1-r^2)} \end{vmatrix};$$

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y \sqrt{1-r^2}} \times$$

$$\times \exp \left(-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{2r(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X \sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2} \right] \right).$$

Рассмотрим примеры решения задач.

Задача 4.1. Шарик бракуют, если он проходит в отверстие диаметром d_1 или не проходит в отверстие диаметром d_2 . Найти $P(X)$ — вероятность забраковать шарик, если его диаметр

$$D \sim N \left[m = \frac{d_1 + d_2}{2}, \sigma = \frac{d_2 - d_1}{4} \right].$$

Решение

$$P(X) = 1 - P(d_1 < D < d_2) = 1 - \Phi \left(\frac{d_2 - m}{\sigma} \right) + \Phi \left(\frac{d_1 - m}{\sigma} \right) =$$

$$= 1 - \Phi \left(\frac{d_2 - d_1}{d_2 - d_1} \right) + \Phi \left(\frac{d_1 - d_2}{d_1 - d_2} \right) = 1 - 2\Phi(1) = 1 - 2 \cdot 0,3413 = 0,3174.$$

Задача 4.2. В условиях задачи 4.1, считая теперь, что σ неизвестно, а $P(X) = 0,1$, определить σ .

Решение

$$P(X) = 0,1 = 1 - 2\Phi \left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma} \right) \Rightarrow \Phi \left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma} \right) = 0,45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d_2 - d_1}{2\sigma} = 1,25 \Rightarrow \sigma = \frac{d_2 - d_1}{2,5}.$$

Задача 4.3. СВ $X \sim N(a, \sigma)$. $F_X(x) = 0,5 + \Phi(x - 1)$. Найти $P(1 < X < 2)$ при $a = 1$.

Решение

$$F_X(x) = \Phi \left(\frac{x - a}{\sigma} \right) + 0,5 = 0,5 + \Phi(x - 1) \Rightarrow \Phi \left(\frac{x - a}{\sigma} \right) = \Phi(x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = 1;$$

$$P(1 < X < 2) = \Phi \left(\frac{2 - 1}{1} \right) - \Phi \left(\frac{1 - 1}{1} \right) = \Phi(1).$$

Задача 4.4. СВ X и Y — независимы, $Z = 2X + Y$, $Y \sim N(0, 1)$. Найти $F_Z(x)$ и $P(Z < 0)$, если X задана рядом распределения

X	-1	1
P	0,6	0,4

Решение

$$\begin{aligned}
 F_Z(x) &= P(2X + Y < x) = P(X = -1, Y < x + 2) + P(X = 1, Y < x - 2) = \\
 &= P(X = -1)F_Y(x + 2) + P(X = 1)F_Y(x - 2) = 0,6(\Phi(x + 2) + 0,5) + \\
 &\quad + 0,4(\Phi(x - 2) + 0,5) = 0,5 + 0,6\Phi(x + 2) + 0,4\Phi(x - 2); \\
 P(Z < 0) &= F_Z(0) = 0,5 + 0,6\Phi(2) + 0,4\Phi(-2) = \\
 &= 0,5 + 0,2\Phi(2) = 0,5 + 0,2 \cdot 0,4772 = 0,5954.
 \end{aligned}$$

Задача 4.5. СВ $X \sim N(a = 25, \sigma)$; $P(10 < X < 15) = 0,09$. Найти $P(0 < X < 35)$.

Решение

$$0,09 = \Phi\left(\frac{15 - 25}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 25}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{15}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right).$$

По таблице $\Phi(X)$ найдем аргументы X_1 и X_2 такие, чтобы $\Phi(X_2) - \Phi(X_1) \approx 0,09$ и $X_1 \cdot 1,5 = X_2$, — это значения $X_1 = 0,6$ и $X_2 = 0,9$, так как $\Phi(0,9) - \Phi(0,6) = 0,3159 - 0,2957 \approx 0,09 \Rightarrow 10/\sigma = 0,6 \Rightarrow \sigma \approx 10/0,60 \approx 17 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow P(0 < X < 35) &\approx \Phi\left(\frac{35 - 25}{17}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 25}{17}\right) = 0,6 + \Phi\left(\frac{25}{17}\right) \approx \\
 &\approx 0,237 + \Phi(1,4) \approx 0,237 + 0,42 \approx 0,66.
 \end{aligned}$$

Задача 4.6. СВ $X \sim N(a, \sigma)$. Найти a и σ , если $0,2 = F(20)$; $0,4 = F(35)$.

Решение

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= \Phi\left(\frac{x - a}{\sigma}\right) + 0,5 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} F(20) = 0,2 = \Phi\left(\frac{20 - a}{\sigma}\right) + 0,5, \\ F(35) = 0,4 = \Phi\left(\frac{35 - a}{\sigma}\right) + 0,5 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -0,3 = \Phi\left(\frac{20 - a}{\sigma}\right), \\ -0,1 = \Phi\left(\frac{35 - a}{\sigma}\right) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ находим t_1 и t_2 по таблице $\Phi(x)$:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{20 - a}{\sigma}, \\ t_2 = \frac{35 - a}{\sigma} \end{cases}$$

(досчитайте самостоятельно).

Задача 4.7. Найти все начальные моменты приведенного нормального закона ($X_0 \sim N(0, 1)$).

Решение

$$\text{Обозначим } m_1 = MX_0^1, m_{2k+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k+1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 0,$$

$$m_{2k} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \left\{ \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du; \\ u = x^{2k-1}; du = (2k-1)x^{2k-2}; \\ dv = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx; v = -\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ x^{2k-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + (2k-1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k-2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right\} =$$

$$= (2k-1)m_{2k-2} \Rightarrow m_{2k} = (2k-1)m_{2k-2},$$

$$m_0 = 1 \text{ (из условия нормировки } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 1), m_2 = 1, m_4 =$$

$$= 3 \cdot 1; m_6 = 5 \cdot 3 \cdot 1; m_{2k} = (2k-1)(2k-3) \dots \cdot 3 \cdot 1 = (2k-1)!!.$$

4.2. Условные распределения

4.2.1. Способы задания закона распределения двумерной случайной величины

1. С помощью функции распределения СВ (X, Y) $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$. Она определяется для дискретных и непрерывных составляющих. Свойства $F(x, y)$ указаны в параграфе 2.2.

2. Распределение дискретной СВ (X, Y) можно задать *таблицей распределения*:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}
...	...	...	...	...
x_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}

$$P_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1;$$

$$\begin{cases} p_i^{(1)} = P(X = x_i), \\ p_j^{(2)} = P(Y = y_j). \end{cases}$$

$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^m p_{ij}$ — маргинальное распределение СВ X ;

$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n p_{ij}$ — маргинальное распределение СВ Y .

3. Распределение непрерывной СВ (X, Y) можно задать плотностью распределения $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$; тогда

$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ — маргинальная плотность распределения СВ X ;

$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ — маргинальная плотность распределения СВ Y ;

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv.$$

4.2.2. Условные распределения и условные математические ожидания

1. В дискретном случае

$$P_{ij} = P\{X = x_i / Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_j^{(2)}};$$

$$M(X / Y = y_i) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i / Y = y_i)$$

— условное математическое ожидание (УМО) (при фиксированном условии — это число). Аналогично определяются $P(Y = y_i / X = x_j)$ и $M(Y / X = x_i)$.

2. В непрерывном случае

$$\varphi(x / Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_2(x, y)}, \quad \psi(x / Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_1(x, y)}$$

— условные плотности при фиксированной другой координате.

УМО для непрерывной СВ при фиксированном условии есть

$$M(X / Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(X / Y = y) dx;$$

$$M(Y / X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \psi(Y / X = x) dy$$

(это числа).

Если рассматривать значение y СВ Y как случайное, то $M(X / Y)$ — СВ, зависящая от СВ Y , — и называется УМО.

Простейшие свойства УМО $M(X/Y)$:

- 1) $M(C/Y) = C$;
- 2) $M(CX/Y) = CM(X/Y)$;
- 3) $M(X + Y/Z) = M(X/Z) + M(Y/Z)$.

Определение 4.1. Под **регрессией** будем понимать зависимость среднего значения какой-либо величины от некоторой другой (или других). Вид этой зависимости дает уравнение регрессии.

Если рассматривать значения x и y как возможные текущие значения СВ X и Y , то $M(X/Y = y) = V_1(y)$, $M(Y/X = x) = V_2(x)$, где V_1 и V_2 — некоторые функции одной переменной. Тогда уравнения регрессии соответственно по x и y есть:

- $x = M(X/Y = y)$ — среднее значение СВ X при фиксированном $Y = y$;
- $y = M(Y/X = x)$ — среднее значение СВ Y при фиксированном $X = x$.

Если уравнение регрессии есть уравнение прямой (т.е. описывает линейную зависимость), то регрессия называется *прямолинейной*.

Тема условных распределений имеет важное теоретическое и практическое значение, так как аппарат условных распределений и УМО используется при решении различных статистических задач, а линии регрессии отражают зависимость между компонентами двумерной СВ (X, Y) .

Пусть одна из компонент двумерной СВ (X, Y) недоступна для наблюдений, например компонента Y . Тогда возникает задача прогноза возможных значений СВ Y по наблюдаемым значениям СВ X . Это означает поиск зависимости компонент X и Y : $\varphi(X)$, наилучшим образом приближающей возможные значения СВ Y . Вид зависимости $\varphi(X)$ ищется, исходя из минимизации выбранной меры близости СВ $\varphi(X)$ к Y . Наиболее распространенной является мера близости в среднем квадратическом:

$$\mu = M(Y - \varphi(X))^2.$$

Тогда $\varphi(X)$ ищется из условий

$$\min_{\varphi(X)} \mu = \min_{\varphi(X)} M(Y - \varphi(X))^2.$$

Ниже доказывается, что этот минимум достигается на $\varphi(X) = M(Y/X)$.

Приведем свойства линий регрессии.

1. Если X и Y — независимые СВ, то линии регрессии параллельны координатным осям.

Доказательство. Из независимости X и $Y \Rightarrow$

$x = M(X/Y = y) = MX$ — прямая параллельна оси OY ;

$y = M(Y/X = x) = MY$ — прямая параллельна оси OX .

2. Если $Y = aX + b$ (a и b — const), то линии регрессии совпадают и имеют уравнение $y = ax + b$.

Доказательство. Значения СВ X и Y взаимно однозначно определяют друг друга и не являются случайными при задании одного из них, поэтому уравнения регрессии есть

$$\begin{cases} x = M(X/Y = y) = \frac{y-b}{a}, \\ y = M(Y/X = x) = ax + b, \end{cases}$$

а это уравнение одной и той же прямой: $y = ax + b$.

Приведем некоторые важные теоретические сведения по теме в виде следующих задач.

Задача 4.8. Доказать, что когда X и Y — независимые СВ, то

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y); \quad \varphi(X/Y = y) = f_1(x); \quad \psi(Y/X = x) = f_2(y);$$

$$M(X/Y = y) = MX; \quad M(Y/X = x) = MY.$$

Решение (доказательство)

Имеем

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv = \int_{-\infty}^x f_1(u) du \int_{-\infty}^y f_2(v) dv,$$

откуда следует, что

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y); \quad \varphi(X/Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_2(x, y)} = \frac{f_1(x)f_2(y)}{f_2(y)} = f_1(x).$$

Аналогично $\psi(Y/X = x) = f_2(y)$.

Для независимых СВ X и Y

$$M(X/Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(X/Y = y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx = MX.$$

Аналогично $M(Y/X = x) = MY$.

Задача 4.9. Доказать, что $M(M(X/Y)) = MX$.

Решение (доказательство)

1. Пусть X и Y — дискретные СВ, тогда

$$\begin{aligned} M(M(X/Y = y_j)) &= \sum_j \left(\sum_i x_i P(X = x_i / Y = y_j) \right) P(Y = y_j) = \\ &= \{P(A/B)P(B) = P(AB)\} = \sum_j \sum_i x_i P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j \sum_i x_i p_{ij} = \\ &= \sum_i x_i \sum_j p_{ij} = \sum_i x_i p_i^{(1)} = MX, \end{aligned}$$

где $\{p_i^{(1)}\}$ — маргинальное распределение СВ X ($p_i^{(1)} = P(X = x_i)$).

2. Пусть теперь X и Y — непрерывные СВ, тогда

$$\begin{aligned} M(M(X/Y=y)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(X/Y=y) dx \right) f_2 y dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(xy) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f(xy) dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx = MX. \end{aligned}$$

Задача 4.10. Доказать, что $\min M(Y - \varphi(X))^2$ достигает на $\varphi(X) = M(Y/X) = m_Y(X)$, т.е. все возможные в указанном выше смысле прогнозируемые значения СВ Y лежат на линии регрессии $y = M(Y/X = x)$.

Решение (доказательство)

$$\begin{aligned} M(Y - \varphi(X))^2 &= M(Y - m_Y(X) + m_Y(X) - \varphi(X))^2 = \\ &= M[(Y - m_Y(X)) + (m_Y(X) - \varphi(X))]^2 = M(Y - m_Y(X))^2 + \\ &+ M(m_Y(X) - \varphi(X))^2 + \underbrace{2M(Y - m_Y(X))(m_Y(X) - \varphi(X))}_{(*)}. \end{aligned}$$

Если доказать, что $(*) = 0$, то получаем

$$\begin{aligned} M(Y - \varphi(X))^2 &= M(Y - m_Y(X))^2 + M(m_Y(X) - \varphi(X))^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow M(Y - \varphi(X))^2 \geq M(Y - m_Y(X))^2. \end{aligned}$$

Равенство достигается тогда, когда $\varphi(X) = m_Y(X)$, что и утверждалось. Остается доказать, что $M(Y - m_Y(X))(m_Y(X) - \varphi(X)) = 0$.

Представим по доказанному в задаче 4.9:

$$M(X + m_Y(X))(m_Y(X) - \varphi(X)) = M\{M[Y - m_Y(X)](m_Y(X) - \varphi(X))/X\}.$$

По свойству 2 УМО имеем

$$M[Y - m_Y(X)](m_Y(X) - \varphi(X))/X = (m_Y(X) - \varphi(X))M(Y - m_Y(X))/X.$$

Покажем, что $M(Y - m_Y(X))/X = 0$ по свойствам 1–3 УМО:

$$M(Y - m_Y(X))/X = m_Y(X) - m_Y(X) = 0,$$

что и завершает доказательство утверждения задачи.

4.2.3. Формула полного математического ожидания

Пусть X — дискретная СВ с возможными значениями $x_1, \dots, x_m$; $\{B_k\}$, $k = 1, \dots, n$, — полная группа несовместных событий. Тогда

$$M(X/B_k) = \sum_{i=1}^m x_i P(x_i/B_k);$$

$$MX = \sum_{k=1}^n P(B_k)M(X/B_k)$$

— это формула полного математического ожидания (ФПМО), отсюда следует, что

$$M(X) = M(M(X/B_k)).$$

Задача 4.11. $Z = \sum_{i=1}^y X_i$, где Y — целочисленная СВ; $\{X_i\}$ и Y — независимые СВ, СВ $\{X_i\}$ одинаково распределены. Найти MZ , зная $MX_i = m_x$ и $MY_i = m_y$.

Решение

Положим $B_k = \{Y = k\}$, $k = 1, \dots, n$. Тогда по ФПМО

$$\begin{aligned} MZ &= \sum_{k=1}^m P(Y = k) M\left(\sum_{i=1}^y x_i / Y = k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n P(Y = k) k m_x = m_x \sum_{k=1}^n k P(Y = k) = m_x m_y. \end{aligned}$$

Замечание 4.1. Такой же результат в данной задаче был получен ранее методом производящих функций.

Приведем решение некоторых задач по рассматриваемой теме.

Задача 4.12. Дано совместное распределение СВ X и Y . Найти маргинальные распределения СВ X и Y , MX , MY , условные распределения СВ X при $Y = y_j$, $j = 1, 2$; $M(X/y)$ и $F(x, y)$.

$Y \backslash X$	2	5	8
0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

(Проверка: $0,15 + 0,30 + 0,35 + 0,05 + 0,12 + 0,03 = 1$.)

Решение

По формулам для маргинальных распределений получаем ряды

X	2	5	8
P	0,2	0,42	0,38

Y	0,4	0,8
P	0,8	0,2

Вычисляем:

$$MX = 2 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,42 + 8 \cdot 0,38 = 5,54;$$

$$MY = 0,4 \cdot 0,8 + 5 \cdot 0,8 + 8 \cdot 0,2 = 0,48;$$

$$P(X = 2 / Y = 0,4) = \frac{0,15}{0,8} = \frac{3}{16};$$

$$P(X = 5 / Y = 0,4) = \frac{0,3}{0,8} = \frac{3}{8};$$

$$P(X = 8 / Y = 0,4) = \frac{0,35}{0,8} = \frac{7}{16}.$$

Аналогично получаем:

$$P(X = 2 / Y = 0,8) = 0,25; \quad P(X = 5 / Y = 0,8) = 0,6;$$

$$P(X = 8 / Y = 0,8) = 0,15.$$

Тогда

$$M(X/Y = 0,4) = 2 \cdot \frac{3}{16} + 5 \cdot \frac{3}{8} + 8 \cdot \frac{7}{16} = 5,75;$$

$$M(X/Y = 0,8) = 2 \cdot 0,25 + 5 \cdot 0,6 + 8 \cdot 0,15 = 4,7.$$

Отсюда видно, что $M(X/Y)$ есть СВ с рядом распределения

$M(X/Y)$	4,7	5,75
$P(Y)$	0,2	0,8

Поэтому $M(M(X/Y)) = 4,7 \cdot 0,2 + 5,75 \cdot 0,8 = 5,54$.

Задача 4.13. В счетчик попадает поток космических частиц. Число ξ_1 попавших в счетчик частиц в течение времени t распределено по закону Пуассона $\Pi(\lambda t)$ ($\lambda > 0$). Каждая частица независимо от других может быть зарегистрирована с вероятностью p . ξ_2 — число зарегистрированных частиц за время t . Найти условное распределение СВ ξ_1 при условии, что $\xi_2 = j$, и $M(\xi_1 / \xi_2 = j)$.

Решение

Используем формулу $P(\xi_1 = k / \xi_2 = j) = \frac{P(\xi_1 = k / \xi_2 = j)}{P(\xi_2 = j)}$:

$$\begin{aligned} P(\xi_1 = k, \xi_2 = j) &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} C_k^j p^j q^{k-j} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t q)^k}{j!(k-j)!} \left(\frac{p}{q}\right)^j; \\ P(\xi_2 = j) &= \sum_{i=j}^{\infty} P\{\xi_1 = i, \xi_2 = j\} = e^{-\lambda t} \sum_{i=j}^{\infty} \frac{(\lambda t q)^i}{j!(i-j)!} \left(\frac{p}{q}\right)^j (\lambda t q)^j \sum_{i=j}^{\infty} \frac{(\lambda t q)^{i-j}}{(i-j)!} = \\ &= \frac{e^{-\lambda t(1-q)}}{j!} \frac{p^j (\lambda t)^j q^j}{q^j} = \frac{e^{-\lambda t p} (\lambda t p)^j}{j!} \Rightarrow \xi_2 \sim \Pi(\lambda t p). \\ P(\xi_1 = k / \xi_2 = j) &= \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t q)^k p^j j!}{j!(k-j)! q^j e^{-\lambda t p} (\lambda t)^j p^j} = \frac{e^{-\lambda t q} (\lambda t q)^k}{(k-j)! (\lambda t q)^j} = \frac{e^{-\lambda t q} (\lambda t q)^{k-j}}{(k-j)!} \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ условное распределение СВ ξ_1 (при $\xi_2 = j$) есть $\Pi(\lambda t q)$.

Математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M(\xi_1 / \xi_2 = j) &= \sum_{k=j}^{+\infty} k P(\xi_1 = k / \xi_2 = j) = e^{-\lambda t q} \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t q} (\lambda t q)^{k-j}}{(k-j)!} k = \\ &= \{k = (k-j) + j\} = e^{-\lambda t q} \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{(\lambda t q)^{k-j}}{(k-j-1)!} + e^{-\lambda t q} j \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{(\lambda t q)^{k-j}}{(k-j)!} = \\ &= e^{-\lambda t q} \lambda t q e^{\lambda t q} + e^{-\lambda t q} j e^{\lambda t q} = \lambda t q + j. \end{aligned}$$

Задача 4.14. Случайная точка (X, Y) распределена равномерно в области $D \sim R[D]$. Найти $f(x, y)$, $f_1(x)$, $f_2(y)$, $\phi(x/y)$, $\psi(y/x)$ и уравнения регрессий.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D; \end{cases} \quad f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ 1+x, & -1 < x \leq 0, \\ 1-x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -1, \\ 1+y, & -1 < y \leq 0, \\ 1-y, & 0 < y \leq 1, \\ 0, & y > 1. \end{cases}$$

Изобразим полученную область D на рисунке (рис. 4.1). Это квадрат с указанными уравнениями сторон, выраженными для наглядности дальнейших вычислений как функции x или y .

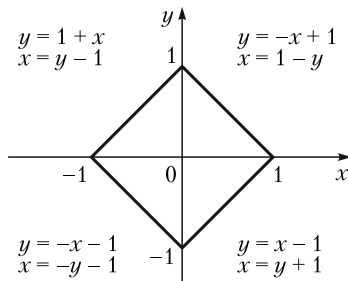


Рис. 4.1. Область D к задаче 4.14

$$\varphi(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} 0, & y \leq -1, \\ \frac{1}{2(1+y)}, & -1 < y \leq 0, \\ \frac{1}{2(1+y)}, & 0 < y \leq 1, \\ 0, & y > 1; \end{cases} \quad \psi(y/x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{1}{2(1+x)}, & -1 < x \leq 0, \\ \frac{1}{2(1+x)}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$x = M(X/y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x/y) dx = \begin{cases} \left. \frac{1}{2(1+y)} \frac{x^2}{2} \right|_{-y-1}^{y+1} = 0, & y \leq 0 \\ \left. \frac{1}{2(1-y)} \frac{x^2}{2} \right|_{y-1}^{1-y} = 0, & y \geq 0 \end{cases} = 0;$$

$$y = M(Y/x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \psi(y/x) dy = \begin{cases} \left. \frac{1}{2(1+x)} \frac{y^2}{2} \right|_{-x-1}^{x+1} = 0, & x \leq 0 \\ \left. \frac{1}{2(1-x)} \frac{y^2}{2} \right|_{x-1}^{1-x} = 0, & x \geq 0 \end{cases} = 0.$$

Уравнения регрессии: $x = 0$, $y = 0$, т.е. линии регрессии — координатные оси.

Задача 4.15. Случайная точка распределена на плоскости с плотностью

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

где r — коэффициент корреляции, $m_1 = MX$, $m_2 = MY$, $\sigma_1^2 = DX$, $\sigma_2^2 = DY$ (это двумерная нормальная плотность). Найти уравнения линий регрессии.

Решение

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \left\{ \frac{x-m_1}{\sigma_1} = u, \frac{y-m_2}{\sigma_2} = v \right\} = \\ &= \frac{\sigma_2}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2 - 2ruv + v^2}{2(1-r^2)}\right) dv = \\ &= \left\{ \frac{1}{1-r^2}(u^2 - 2uv + v^2) = u^2 + \frac{(v-ru)^2}{1-r^2} \right\} = \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\sqrt{2(1-r^2)}}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right). \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$f_2(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right).$$

Тогда

$$\psi(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi(1-r^2)}} \exp\left(-\frac{\left(y-m_2-r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1)\right)^2}{2(1-r^2)\sigma_2^2}\right),$$

что соответствует нормальному распределению

$$N\left(m_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1), \sigma_2^2(1-r^2)\right),$$

откуда следует, что $M(Y/x) = m_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1)$. Аналогично получаем

$$\varphi(x/y) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1-r^2)}} \exp\left(-\frac{\left(x-m_1-r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)\right)^2}{2(1-r^2)\sigma_1^2}\right),$$

откуда $M(X/y) = m_1 + r \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - m_2)$. Таким образом, имеем уравнения линий регрессии $x = m_1 + r \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - m_2)$; $y = m_2 + r \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x - m_1)$.

Задача 4.16. Рабочий обслуживает n однотипных станков, расположенных в ряд на расстоянии a друг от друга. Рабочий приходит к ним в порядке появления неисправностей. X — длина перехода к следующему требующему ремонта станку. Найти MX .

Решение

Пусть событие B_k — рабочий находится у k -го станка, $k = 1, \dots, n$; x_i — возможное значение СВ; X — длина перехода к i -му станку. Имеем

$$P\{B_k\} = \frac{1}{n}; \quad P\{X = x_i / B_k\} = \frac{1}{n}; \quad k = 1, \dots, n;$$

$$\begin{cases} (k-i)a, & k \geq i, \\ (i-k)a, & k < i. \end{cases}$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} M(X / B_k) &= \sum_{i=1}^k (k-i)a \frac{1}{n} + \sum_{i=k+1}^n (i-k)a \frac{1}{n} = \\ &= \frac{a}{n} \left[\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} \right] = \frac{a}{2n} [2k^2 - 2(n+1)k + n(n+1)]; \\ MX &= \frac{a}{2n^2} \sum_{k=1}^n [2k^2 - 2(n+1)k + n(n+1)] = \\ &= \frac{a}{2n^2} \left(\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)^2}{2} + n^2(n+1) \right) = \frac{a(n^2-1)}{3n}. \end{aligned}$$

Задача 4.17. $X \sim R[0; 1]$; при $X = x$ $Y \sim R[x; 1]$. Найти $f_1(x)$, $f_2(y)$, $\varphi(x/y)$, $\psi(y/x)$ и линии регрессии.

Решение

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]; \end{cases} \quad \psi(y/x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq y \leq 1, \\ 0, & y \notin [x, 1]; \end{cases}$$

$$f(x, y) = f_1(x) \psi(y/x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \int_0^y f(x, y) dx = \int_0^y \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-y), \quad y \in [0, 1];$$

$$\varphi(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} -\frac{1}{(1-x) \ln(1-y)}, & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Регрессия СВ X на Y ($x = M(X/y)$):

$$x = - \int_0^y \frac{xdx}{(1-x)\ln(1-y)} = \left\{ 1-x = z, dx = -dz, \right. \\ \left. 0 \leq x \leq y, 1 \geq z \geq 1-y \right\} = \\ = \frac{1}{\ln(1-y)} \int_{1-y}^1 \frac{(1-z)dz}{z} = \frac{1}{\ln(1-y)} (\ln z - z) \Big|_{1-y}^1 = -1 - \frac{y}{\ln(1-y)}.$$

Регрессия СВ Y на X ($y = M(Y/x)$): $y = \int_x^1 \frac{ydy}{1-x} = \frac{1+x}{2}.$

Задача 4.18. $X_1 \sim R[0; 1]$; при $X_1 = x_1$ $X_2 \sim R[x_1; 1]$, ..., при $X_{n-1} = x_{n-1}$ $X_n \sim R[x_{n-1}; 1]$. Найти MX_n .

Решение

$$M(X_n / X_{n-1} = x_{n-1}) = \int_{x_{n-1}}^1 x_n f(x_n / x_{n-1}) dx_n = \\ = \int_{x_{n-1}}^1 \frac{x_n dx_n}{1-x_{n-1}} = \frac{1}{1-x_{n-1}} \frac{x_n^2}{2} \Big|_{x_{n-1}}^1 = \frac{1+x_{n-1}}{2}.$$

Это ясно и сразу, так как $X_n \sim R[x_{n-1}; 1]$ при $X_{n-1} = x_{n-1}$. $MX = M(M(X/B_k))$; X — дискретная СВ с возможными значениями $x_1, \dots, x_m$; $B_k = P(X = x_k)$, $k = 1, \dots, n$. Тогда $\{B_k\}$ — полная группа несовместных событий и

$$M(X/B_k) = \sum_{i=1}^m (x_i / B_k); \quad MX = \sum_{k=1}^n P(B_k) M(X/B_k).$$

Отсюда следует: $MX_n = M(M(X_n / X_{n-1} = x_{n-1}))$, т.е. $MX_n = \frac{1}{2}MX_{n-1} + \frac{1}{2}$ — рекуррентное соотношение. Так как $MX_1 = \frac{1}{2}$, получаем

$$MX_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}MX_{n-2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}MX_{n-2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \\ = \frac{1}{2^3}MX_{n-3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \dots = \frac{1}{2^{n-1}}MX_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

4.3. Дополнительные сведения о распределениях

В общем курсе теории вероятностей рассматривался вопрос о законах распределения наиболее распространенных простейших случайных величин. Здесь будут изучаться некоторые другие более сложные распределения, широко используемые в математичес-

кой статистике. Кроме непосредственных вычислений будем при этом пользоваться методом характеристических функций.

Изложение темы будет представлено в основном в виде задач с решениями с приведением сведений по изучаемым распределениям.

4.3.1. Гамма-распределение

Плотность гамма-распределения имеет вид

$$f(x; \alpha, \lambda) = \begin{cases} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} / \Gamma(\alpha), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где $\alpha, \lambda > 0$ — const и $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

Свойства $\Gamma(\alpha)$:

1) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$; $\Gamma(0) = 1$; $\Gamma(1) = 1$;

2) при целом α $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!$.

Запись $X \sim \Gamma_{\alpha, \lambda}$ означает, что СВ X имеет плотность распределения $f(x; \alpha, \lambda)$.

Задача 4.19. Показать, что $f(x; \alpha, \lambda)$ является плотностью распределения.

Решение

$f(x; \alpha, \lambda) \geq 0$. Остается проверить условие нормировки:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x; \alpha, \lambda) dx &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \left\{ \lambda x = y, \quad dx = \frac{dy}{\lambda} \right\} = \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda} \right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{dy}{\lambda} = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda^\alpha} \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda^\alpha} \Gamma(\alpha) = 1. \end{aligned}$$

Задача 4.20. Найти характеристическую функцию гамма-распределения.

Решение

$$\begin{aligned} g_x(t) = g(t; \alpha, \lambda) &= \frac{\lambda^\alpha}{(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda - it)x} dx = \left\{ \begin{aligned} \lambda - it &= b, \quad bx = y, \\ dx &= \frac{dy}{b} \end{aligned} \right\} = \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{(\alpha) b^\alpha} \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \frac{\lambda^\alpha}{b^\alpha} = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda - it)^\alpha} = \left(1 - \frac{it}{\lambda} \right)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Задача 4.21. Случайные величины X_1 и X_2 независимы; $X_1 \sim \Gamma_{\alpha_1, \lambda}$, $X_2 \sim \Gamma_{\alpha_2, \lambda}$. Найти закон распределения СВ $Z = X_1 + X_2$.

Решение

Решать задачу будем методом характеристических функций:

$$g_z(t) = g_z(t; \alpha, \lambda) = g_{x_1}(t; \alpha_1, \lambda_1) g_{x_2}(t; \alpha_2, \lambda_2) g_{x_1}(t; \alpha_1, \lambda) g_{x_2}(t; \alpha_2, \lambda) = \\ = (1 - it/\lambda)^{(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

откуда следует, что СВ $X_1 + X_2 = Z$ имеет гамма-распределение с плотностью $f(x; \lambda, \alpha_1 + \alpha_2)$ (обозначим это распределение через $\Gamma_{\alpha, \lambda}$, где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$).

Задача 4.22. Доказать, что если СВ X распределена по $\Gamma_{\alpha, \lambda}$, а СВ $Y = \lambda X$, то СВ Y распределена по $\Gamma_{1, \lambda}$.

Решение (доказательство)

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, x \geq 0, \alpha, \lambda > 0; \quad F_Y(x) = \left(X < \frac{x}{\lambda} \right) = F_X\left(\frac{x}{\lambda}\right);$$

$$f_Y(x) = \frac{1}{\lambda} f_X\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{x}{\lambda}; \alpha, \lambda\right) = \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda x}{\lambda}}}{\lambda^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)} = \frac{e^{-x} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

$x \geq 0, \lambda \geq 0$, т.е. $f_Y(x) = f(x; \alpha, 1)$.

Задача 4.23. Показать, что экспоненциальное распределение является частным случаем гамма-распределения, и выписать характеристическую функцию для экспоненциального распределения.

Решение

$$f(x; \alpha = 1, \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(t, 1, \lambda) = \left(\frac{1 - it}{\lambda} \right)^{-1}$$

— характеристическая функция экспоненциального распределения.

Найдем моменты гамма-распределения. Воспользуемся известной связью характеристической функции с моментами СВ X : $i^n MX = g^{(n)}(0)$.

Тогда если СВ $X \sim \Gamma_{\alpha, \lambda}$, то

$$MX = -ig'(0, \alpha, \lambda) = (-i) \left(\left(\frac{1 - it}{\lambda} \right)^{-\alpha} \right)' \Big|_{t=0} = -\alpha \left(\frac{1 - it}{\lambda} \right)^{-\alpha-1} \left(-\frac{i}{\lambda} \right) \Big|_{t=0} = \\ = \frac{\alpha i}{\lambda} (-i) = \frac{\alpha}{\lambda}; \quad g''(0) = \frac{\alpha i}{\lambda} \left(1 - \frac{it}{\lambda} \right)^{-\alpha-2} - (\alpha+1) \left(-\frac{i}{\lambda} \right) = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} = -MX^2; \\ DX = MX^2 - (MX)^2 = -g''(0) - (MX)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

$$\text{Итак, } MX = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad DX = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Для экспоненциального распределения ($X \sim E(\lambda)$) получим отсюда моменты при $\alpha = 1$:

$$MX = \frac{1}{\lambda}; \quad MX^2 = \frac{2}{\alpha^2}; \quad DX = \frac{1}{\alpha^2}.$$

4.3.2. Распределение χ^2

Задача 4.24. Найти распределение СВ $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$, где СВ распределена по нормальному закону $N(0, 1)$ и все X_i независимы, $i = 1, \dots, n$.

Решение

Найдем сначала распределение СВ $\chi_1^2 = X_1^2$, т.е.

$$\begin{aligned} P(X_1^2 < x) &= P(|X_1| < \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} < X_1 < \sqrt{x}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \\ &= \left\{ y = u, \quad dy = \frac{du}{2\sqrt{u}} \right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u}{2}} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{1}{2}-1} du. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что плотность распределения χ_1^2 есть частный вид плотности гамма-распределения, так как

$$f_{\chi_1^2}(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{2\pi}} = f\left(x; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Характеристическая функция СВ χ_1^2 есть $g\left(t; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = (1-2it)^{-\frac{1}{2}}$.

Тогда по свойству характеристической функции имеем

$$\begin{aligned} g_{\chi_n^2}(t) &= \left(1 - \frac{it}{1/2}\right)^{-\frac{1}{2}} = (1-2it)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g_{\chi_n^2}(t) = (g_{\chi_1^2}(t))^n = (1-2it)^{-\frac{n}{2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{СВ } \chi_n^2 \sim \Gamma_{\frac{n}{2}, \frac{1}{2}} \Rightarrow f\left(x, \frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Найдем моменты распределения χ_n^2 :

$$M\chi_n^2 = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{2n}{2} = n; \quad DX_n^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{4n}{2} = 2n.$$

Задача 4.25. Найти предельное распределение для СВ

$$\chi_{0n}^2 = \frac{\chi_n^2 - M\chi_n^2}{\sqrt{D\chi_n^2}}$$

и СВ χ_n^2 определенной в задаче 4.24, при $n \rightarrow \infty$.

Решение

$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$, где X_i распределены по $N(0, 1)$ и все X_i независимы, следовательно, СВ χ_n^2 тоже одинаково распределены, независимы и по

центральной предельной теореме (теорема Леви) распределение СВ

$$\chi_{0n}^2 = \frac{\chi_n^2 - M\chi_n^2}{\sqrt{D\chi_n^2}} \text{ сходится при } n \rightarrow \infty \text{ к нормальному закону } N(0, 1).$$

Имеем $M\chi_n^2 = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{2n}{2} = n$; $DX\chi_n^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{4n}{2} = 2n$, т.е. распределение

СВ $\chi_{0n}^2 = \frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}}$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к $N(0, 1)$.

$$P(\chi_{0n}^2 < x)_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} \right)^x e^{-\frac{u^2}{2}} du;$$

$$\chi_n^2 = \sqrt{2n}\chi_{0n}^2 + n;$$

$$P(\chi_{0n}^2 < x) = P(\sqrt{2n}\chi_{0n}^2 + n < x) = P\left(\chi_{0n}^2 < \frac{x-n}{\sqrt{2n}}\right)_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \left(\frac{1}{2\pi}\right)^x \int_{-\infty}^{\frac{x-n}{\sqrt{2n}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Задача 4.26. СВ X распределена по закону $N(0, \sigma^2)$. Найти распределение СВ $Z = \sum_{i=1}^n X_i^2$, где $\{X_i\}$ — независимые СВ, и ее моменты.

Решение

СВ $\frac{X_i}{\sigma}$ распределена по нормальному закону $N(0, 1)$, СВ $U = \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi_m^2$ тогда $\sum_{i=1}^n X_i^2 = U\sigma^2 = Z$.

Найдем характеристическую функцию СВ $Z = g_Z(t)$ — и ее моменты MZ и DZ :

$$g_Z(t) = g_{\sigma^2 U}(t) = g_{\chi_m^2}(\sigma^2 t) = (1 - 2i\sigma^2 t)^{-\frac{n}{2}} = \left(1 - \frac{it}{1/(2\sigma^2)}\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

Из сравнения с характеристической функцией СВ, распределенной по $\Gamma_{\alpha, \lambda}$, $\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha}$, следует, что СВ $Z \sim \Gamma_{\alpha=n/2, \lambda=1/(2\sigma^2)} \Rightarrow MZ = \frac{\alpha}{\lambda} = n\sigma^2$; $DZ = \frac{\alpha}{\lambda^2} = 2n\sigma^2$.

4.3.3. Распределение Стьюдента

СВ X имеет распределение Стьюдента, если ее плотность распределения имеет вид

$$S_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \left(\frac{1+x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\pi n}}; \quad -\infty < x < +\infty.$$

В параграфе 4.6 будет показано, что СВ $T = U \sqrt{\frac{n}{V}}$ распределена по закону Стюдента, если СВ U распределена по нормальному закону $N(0, 1)$, а СВ V распределена по закону χ^2_n ; $-\infty < V < +\infty$; $-\infty < U < +\infty$; U, V — независимые СВ.

При $n = 1$ закон Стюдента называется законом Коши с плотностью распределения

$$f(x) = \frac{\Gamma(1)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) (1+x^2)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

4.3.4. Распределение Фишера

Плотность распределения Фишера есть

$$f_{mn}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right) t^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) (t+1)^{\frac{m+n}{2}}}, \quad t > 0.$$

Можно показать, что если СВ $X_1, X_2, \dots, X_m$ независимы, $X = \sum_{i=1}^m X_i^2$; $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ независимы, $Y = \sum_{j=1}^n Y_j^2$; X_i, Y_j при всех $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ распределены нормально по закону $N(0, \sigma^2)$, тогда СВ $Z = \frac{X}{Y}$ имеет распределение Фишера.

Найдем моменты СВ Z :

$$\begin{aligned} MZ &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} t^{\frac{m}{2}+1-1} \frac{dt}{(1+t)^{\frac{m+n}{2}}} = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \end{aligned}$$

так как бета-функция

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \text{и} \quad B(x, y) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \frac{dt}{(1+t)^{x+y}}.$$

В частности, при $i = 1$ и $i = 2$ имеем

$$\begin{aligned}
 MZ &= \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\frac{m}{2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} = \frac{m}{n-2}; \\
 MZ^2 &= \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{m}{2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right)} = \\
 &= \frac{\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{m}{2}}{\left(\frac{n}{2}-2\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)} = \frac{(m+2)m}{(n-4)(n-2)}; \\
 DZ &= MZ^2 - (MZ)^2 = \frac{(m+2)m}{(n-4)(n-2)} - \frac{m^2}{(n-2)^2} = \frac{2m(n-m)+4m(m-1)}{(n-4)(n-2)^2}.
 \end{aligned}$$

4.3.5. Бета-распределение

СВ Z имеет бета-распределение с параметрами p и q ($p, q > 0$), если ее плотность распределения представляется в виде

$$f_{\beta}(x; p, q) = \frac{\Gamma(p+q)x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{\Gamma(p)\Gamma(q)}, \quad x \in [0; 1].$$

Задача 4.27. Показать, что бета-распределение при $p = q = 1$ есть равномерное распределение на отрезке $[0; 1]$.

Решение

$$f_{\beta}(x; p, q) \Big|_{p,q=1} = \frac{\Gamma(p+q)x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \Big|_{p,q=1} = 1 \quad \text{— это плотность рав-}$$

номерного распределения на отрезке $[0; 1]$ при $x \in [0; 1]$.

Задача 4.28. Пусть СВ $X_1, X_2, \dots, X_m$ независимы, равномерно распределены на $[0; 1]$, а $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ — упорядоченные в порядке возрастания исходные СВ. Показать, что СВ $X_{(k)}$ имеет бета-распределение ($X_{(k)}$ — k -я порядковая статистика).

Решение

Известно, что плотность распределения k -й порядковой статистики $f_k(x)$ имеет вид $f_k(x) = nC_{n-1}^{k-1}f(x)F^{k-1}(x)(1-F(x))^{n-k}$, где $f(x)$ и $F(x)$ — соответственно плотность и функция распределения СВ X .

В рассматриваемом случае $X \sim R[0; 1]$, поэтому

$$f_k(x) = nC_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} = \frac{\Gamma(n+1)x^{k-1}(1-x)^{n-k}}{\Gamma(k)\Gamma(n-k+1)},$$

т.е. это бета-распределение с параметрами $p = k, q = n - k + 1$ ($p + q = k + n - k + 1 = n + 1$).

Задача 4.29. Найти n -й момент m_n бета-распределения ($m_n = MZ^n$) и дисперсию.

Решение

$$\begin{aligned} m_n &= \int_0^1 x^n f_{\beta}(x; p, q) dx = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 x^{n+p-1} (1-x)^{q-1} dx = \\ &= \frac{\Gamma(p+q)B(n+p, q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = \frac{\Gamma(p+q)\Gamma(n+p)\Gamma(q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(n+p+q)} = \frac{\Gamma(p+q)\Gamma(n+p)}{\Gamma(p)\Gamma(n+p+q)}, \end{aligned}$$

так как $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ ($\text{Re } p > 0, \text{Re } q > 0$); от-

сюда

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\Gamma(p+q)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+1)} = \frac{p}{p+q}; \\ m_2 &= \frac{\Gamma(p+q)\Gamma(p+2)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+2)} = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}; \\ DX &= m_2 - (m_1)^2 = \\ &= \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}. \end{aligned}$$

4.4. Распределения функций от случайных величин

В данном параграфе изучается вопрос о нахождении законов распределения функций от случайных величин. Выводится, например, формула плотности распределения функции от непрерывной случайной величины. Это дает возможность заменять непосредственное решение задачи на пересчет искомого распределения из данного для нахождения случайной величины, что значительно проще.

Используем следующее обозначение: $X \sim L(x)$ означает, что СВ X имеет закон распределения $L(x)$ в виде функции распределения или плотности распределения.

4.4.1. Одномерный случай

Пусть СВ $Y = W(X)$.

1. X — дискретная СВ с данными вероятностями $p_k^{(1)} = P(X = x_k)$, $k = 1, 2, \dots$ и $W(X)$ — взаимно-однозначная функция, тогда $p_k^{(2)} = P(Y = y_k) = p_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \dots$

2. X — непрерывная СВ.

2а. Пусть $W(X)$ — функция монотонная и дифференцируемая на интервале (a, b) , где лежат все возможные значения СВ X . Тогда

обратная функция $x = \Psi(y) = W^{-1}(y)$ существует и является также монотонной непрерывной и дифференцируемой функцией. Интервалу $(y, y + \Delta y)$ соответствует интервал $(x = \Psi(y), x + \Delta x = \Psi(y + \Delta y))$. Тогда события $(y < Y < y + \Delta y)$ и $(x < X < x + \Delta x)$ тождественны. Найдем плотность распределения СВ Y , обозначив ее $g(y)$:

$$\begin{aligned} g(y) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ (\Delta x \rightarrow 0)}} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta y} = \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = f(x)x'_y, \end{aligned}$$

если $W(x)$ — монотонно возрастающая функция.

Если $y = W(x)$ — монотонно убывающая функция, то приращение $\Delta y > 0$ соответствует приращению $\Delta x < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow g(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{|\Delta x|} \left| \frac{\Delta x}{\Delta y} \right| = f(x)|x'_y|.$$

Объединяя формулы, получаем, что если $y = W(x)$ — монотонная дифференцируемая функция, то

$$g(y) = f(\Psi(y))|\Psi'(y)|. \quad (4.1)$$

Задача 4.30. СВ $X \sim N(0, 1)$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. Найти закон рас-

пределения СВ $Y = X^3$.

Решение

$Y = X^3$ — монотонная функция на $(-\infty, \infty) \Rightarrow \Psi(y) = \sqrt[3]{y}$.

$$\Psi'(y) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{y^2} \Rightarrow g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{2}\right) \left| \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \right|.$$

Докажем следующее предложение.

Предложение 4.1. Линейное преобразование СВ не изменяет вида закона распределения.

Доказательство. Пусть $Y = aX + b$, где a и b — const; Y — монотонная функция; $X = \Psi(Y) = \frac{Y-b}{a}$, $\Psi'(Y) = \frac{1}{a} \Rightarrow$ по формуле (4.1)

$$g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right). \quad (4.2)$$

Замечание 4.2. Этот же результат можно получить непосредственно, не используя формулу (4.1):

$$F_Y(y) = P(aX + b < y) = \begin{cases} P\left(X < \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a > 0, \\ P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a < 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Задача 4.31. СВ $X \sim N(m_x, \sigma_x)$; $Y = aX + b$, a, b — const. Найти $f_Y(x)$.

Решение

Имеем

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma_x^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right).$$

По формуле (4.2)

$$f_X(x) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|a| \sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-(b+am_x))^2}{2a^2 \sigma_x^2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow Y \sim N(m_Y = am_x + b, \sigma_Y = |a| \sigma_x).$$

26. Пусть $Y = W(X)$ — немонотонная функция $\Rightarrow$ обратная функция неоднозначна, т.е. существует несколько значений $x_1, \dots, x_n$, таких что $x_i = W^{-1}(y_i)$, $i = 1, \dots, n$, где n — число участков монотонности, тогда событие $(y < Y < y + \Delta y)$ происходит при наступлении хотя бы одного из несовместных событий $x_1 < X < x_1 + \Delta x$, $x_1 < X < x_1 + \Delta x$, ..., $x_n < X < x_n + \Delta x$.

Поэтому плотность распределения СВ $Y = g(y)$ — находим следующим образом:

$$P(y < Y < y + \Delta y) = \sum_{i=1}^n P(x_k < X < x_k + \Delta x_k) \Rightarrow \\ \Rightarrow g(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y < Y < y + \Delta Y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n P(x_k < X < x_k + \Delta x_k)}{\Delta y} = \\ = \sum_{k=1}^n \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{P(x_k < X < x_k + \Delta x_k)}{|\Delta x_k|} \left| \frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} \right| \right) = \sum_{k=1}^n f(x_k) |x'_{ky}| = \\ = \sum_{k=1}^n f(\Psi(y)) |\Psi'_k(y)|.$$

Задача 4.32. $X \sim N(0, 1)$. Найти закон распределения СВ $Y = X^2$, плотность которой обозначим $g(y)$.

Решение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), Y = \Phi(X) = X^2. \text{ Обратная функция } x = \Psi(y)$$

неоднозначна:

$$x_1 = \Psi_1(y) = \sqrt{y}; \quad x_2 = \Psi_2(y) = -\sqrt{y}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} g(y) &= f(\Psi_1(y))|\Psi'_1(y)| + f(\Psi_2(y))|\Psi'_2(y)| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(-y)^2}{2}\right) \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right), y > 0. \end{aligned}$$

Задача 4.33. $f_x(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ — плотность распределения Коши.

Найти плотность распределения СВ $Y = 1 - X^3$.

Решение

$y = \Phi(x) = 1 - x^3$ — монотонная функция при $-\infty < x < \infty$;

$$x = \Psi(y) = \sqrt[3]{1-y}; \quad \Psi'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1-y)^2}}; \quad |\Psi(y)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1-y)^2}};$$

$$g(y) = \frac{1}{3\pi(1+\sqrt[3]{(1-y)^2})\sqrt[3]{(1-y)^2}}.$$

Задача 4.34. СВ $X \sim R\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ Найти закон рас-

пределения СВ $Y = \cos X$.

Решение

В интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $y = \cos x$ — немонотонная функция (рис. 4.2):

$$\begin{cases} x_1 = \Psi_1(y) = -\arccos y, \\ x_2 = \Psi_2(y) = \arccos y. \end{cases}$$

Так как $f_x(x) = \frac{1}{\pi}$ при $x \in [0; 1]$, то

$$g(y) = f_x(-\arccos y) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + f_x(\arccos y) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

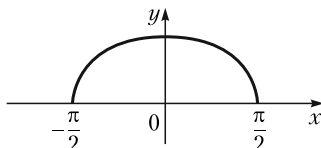


Рис. 4.2. К задаче 4.34

Таким образом, $g(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [0; 1], \\ \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y \in [0; 1]. \end{cases}$

Задача 4.35. СВ $X \sim f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ — плотность распределения Коши. Найти плотность распределения СВ $Y = \frac{1}{X}$.

Решение

График $y = \frac{1}{x}$ (рис. 4.3) терпит разрыв при $x = 0$.

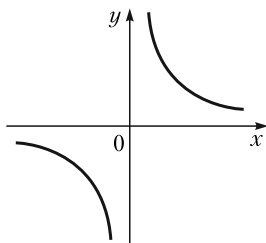


Рис. 4.3. К задаче 4.35

Обратная функция $x = \frac{1}{y}$ однозначна $\Rightarrow g(y) = f(\Psi(y))$,

$$|\Psi'(y)| = \frac{1}{\pi \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)},$$

а это снова тот же закон Коши.

Задача 4.36. Длина радиуса круга X распределена по закону Релея с параметром σ : $f_x(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{y}{2\pi\sigma^2}\right)$, $x \geq 0$. Найти закон распределения СВ Y — площади круга.

Решение

$Y = \pi X^2 = \Phi(X)$ — монотонная функция при $X \geq 0$.

$$\Psi(y) = \sqrt{\frac{y}{\pi}}; \quad |\Psi'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}},$$

откуда

$$g(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{y}{2\pi\sigma^2}\right), \quad y \geq 0,$$

т.е. $Y \sim E\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)$.

Задача 4.37. Пусть $f_X(x)$ — плотность распределения СВ X . Найти плотность распределения СВ $Y = |X|$.

График заданной функции $y = y(x)$ представлен на рис. 4.4.

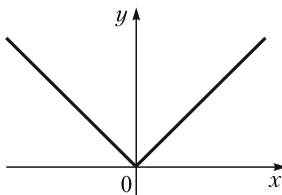


Рис. 4.4. К задаче 4.37

Функция y немонотонна.

Участки монотонности: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$; $\Psi_1(y) = -y$; $\Psi_2(y) = y$;
 $|\Psi'(y)| = 1 \Rightarrow g(y) = 2f(y), y > 0$.

Задача 4.38. СВ $X \sim R\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; СВ $Y = \sin X, \left(-\frac{\pi}{2} < X < \frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность распределения СВ Y .

Решение

В указанном интервале $\left(-\frac{\pi}{2} < X < \frac{\pi}{2}\right)$ $\varphi(x) = \sin x$ монотонна $\Rightarrow g(y) =$
 $= f(\Psi(y))|\Psi'(y)|; y = \sin x; x = \arcsin y = \Psi(y); |\Psi'(y)| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}};$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y \in (-1; 1), \\ 0, & y \notin (-1; 1), \end{cases}$$

$$\text{если } X \sim R\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ т.е. } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Задача 4.39. СВ $X \sim R\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Найти плотность распределения СВ $Y = |\sin X|$.

Решение

Получаем

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \end{cases} \quad g(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, \quad y \in (0, 1)$$

(решается аналогично задаче 4.38).

Задача 4.40. $f_X(x)$ — плотность распределения СВ X . Найти плотность распределения СВ $Y = |1 - X|$.

Решение

$Y = \Phi(x) = |1 - x|$ — немонотонная функция (рис. 4.5):

$$\begin{cases} x_1 = \Psi_1(y) = 1 - y, \\ x_2 = \Psi_2(y) = 1 + y. \end{cases}$$

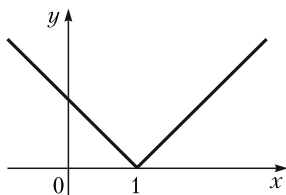


Рис. 4.5. К задаче 4.40

Тогда $|\Psi'_1(y)| = |\Psi'_2(y)| = 1$; $g(y) = f_X(1 - y) + f_X(1 + y)$ при $y \geq 0$.

Задача 4.41. СВ $X \sim R(0; 1)$, $Y = \Phi(X)$ — монотонная функция. Найти плотность $g(y)$ и функцию распределения $G(y)$ СВ Y .

Решение

$f(x) = 1$ при $x \in [0; 1]$, $x = \Psi(y)$; $g(y) = f(1)\Psi'(y) = \Psi'(y) \Rightarrow G(y) = \Psi(y)$, т.е. $G(y)$ — обратная к $\Phi(x)$ функция в области возможных значений СВ Y .

Задача 4.42. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть СВ $X \sim R(0; 1)$, чтобы СВ $Y \sim E(\lambda)$ с плотностью распределения $g(y) = \lambda e^{-\lambda y}$, $y \geq 0$?

Решение

На основании результата задачи 4.41 искомая зависимость $Y = W(X)$ есть обратная к требуемой функции распределения:

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_0^y \lambda e^{-\lambda y} dy = 1 - e^{-\lambda y}, y \geq 0; F_X(x) = x, x \in [0; 1] \Rightarrow 1 - e^{-\lambda y} = x \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \frac{1}{\lambda} \ln(1 - x) = W(x). \end{aligned}$$

Задача 4.43. Пусть $X \sim f_1(x)$, $Y \sim f_2(y)$. $Y = W(X)$ — монотонно возрастающая функция от X . Найти эту функцию.

Решение

Пусть соответственно $F_1(x)$ и $F_2(y)$ — функции распределения СВ X и Y , $X = W^{-1}(Y)$; $F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(u) du$; $f_1(x) = f_2(W(x)) |W'(x)| = f_2(W(x)) W'(x)$;

$$\begin{aligned} y &= W(x); dy = W'(x) dx \Rightarrow W'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow F_1(x) = \int_{-\infty}^{W(x)} f_2(W(u)) \frac{dy}{du} du = \\ &= \int_{-\infty}^x f_2(y) dy = F_2(y) = F_2(W(x)); -\infty < X \leq x; -\infty < Y \leq W(x). \end{aligned}$$

Теперь для нахождения функции $W(x)$ решим относительно нее уравнение $F_1(x) = F(2(W(x)))$: $W(x) = F_2^{-1}(F_1(x))$.

Задача 4.44. СВ $Y \sim f_2 \frac{1}{\pi(1+y^2)}$ (закон Коши); $X \sim E(\lambda)$ с $f(\lambda) = \lambda e^{-\lambda y}$, $x \geq 0$. Каким функциональным преобразованием надо подвергнуть СВ X , чтобы получить Y ?

Решение

По результатам задачи 4.43 искомое функциональное преобразование $\varphi(x) = F_2^{-1}(F_1(x))$, где $F_1(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $F_2(y) = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2} \right)$;

$F_2^{-1}(y)$ — решение относительно y уравнения $\frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2} \right) = u$:

$$y = F_2^{-1}(u) = \operatorname{tg} \left(u\pi - \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{ctg}(\pi u) \Rightarrow y = F_2^{-1}(F_1(x)) = -\operatorname{ctg}(\pi e^{-\lambda x}), x \geq 0.$$

Замечание 4.3. На основании результатов задач 4.41—4.44 можно моделировать распределение СВ Y из СВ X . В частности, если СВ $X \sim R[0; 1]$ с $F(x) = x$ при $x \in [0; 1]$, а распределение СВ $Y \sim F_2(y)$, то возможные значения СВ Y можно получать из значений СВ X по формуле $y = W(x) = F_2^{-1}(x)$ (метод обратных функций).

Задача 4.45. СВ $Y = X^2$, СВ $X \sim N(0, 1)$. Найти плотность распределения СВ Y .

Решение

$$\text{Обратная функция } x = \Psi(y) \text{ неоднозначна: } x_1 = \sqrt{y}; x_2 = -\sqrt{y}; f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right);$$

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2} \right) \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(\sqrt{y})^2}{2} \right) \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, y > 0. \end{aligned}$$

4.4.2. Многомерный случай

Пусть $Z = \varphi(X, Y)$. Тогда закон распределения СВ Z в виде функции распределения есть $G(z) = \iint_D f(x, y) dx dy$, где $f(x, y)$ — плотность распределения СВ (X, Y) ; D — область на плоскости xOy , где $\varphi(x, y) < z$; тогда $g(z) = G'(z)$.

Рассмотрим теперь наиболее важные конкретные виды $\varphi(x, y)$.

1. Закон распределения суммы СВ $Z = X + Y$:

$$G(z) = \iint_{x+y < z} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{z-x}^{+\infty} f(x, y) dy; \quad (4.3)$$

$$g(z) = G'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy.$$

В частности, когда СВ X и Y независимы, формула (4.3) принимает вид

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z-x) dx \quad (4.4)$$

и называется плотностью распределения композиции СВ $X \sim f_1(x)$ и $Y \sim f_2(x)$.

Задача 4.46. Найти сумму двух показательных законов СВ $X \sim E(\lambda_1)$ и $Y \sim E(\lambda_2)$.

Решение

СВ $Z = X + Y$. По формуле (4.4) СВ Z имеет плотность распределения

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 (z-x)} dx =$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{(\lambda_2 - \lambda_1)z} - 1) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z})}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

— это закон Эрланга 1-го порядка.

2. Закон распределения разности СВ: $Z = X - Y$:

$$G(z) = \iint_{x-y < z} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{x-z}^{+\infty} f(x, y) dy;$$

$$g(z) = G'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y, y) dy.$$

В частности, когда X и Y независимы, то

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(x-z) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) f_2(y+z) dy. \quad (4.5)$$

Задача 4.47. Найти разность двух показательных законов СВ $X \sim E(\lambda_1)$ и $Y \sim E(\lambda_2)$, если СВ X и Y независимы.

Решение

$Z = X - Y$; по формуле (4.5) получаем

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 (z+x)} dx = \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z}}{-(\lambda_1 + \lambda_2)} (e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z} - 1).$$

3. Закон распределения произведения СВ $Z = XY$:

$$G(z) = \iint_{xy < z} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^0 dx \int_{\frac{z}{x}}^{+\infty} f(x, y) dy + \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f(x, y) dy,$$

$xy < z$ (рис. 4.6 — заштрихованная область D);

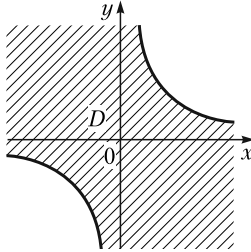


Рис. 4.6. К закону распределения произведения СВ

$$\begin{aligned} g(z) = G'(z) &= - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dy. \end{aligned}$$

В частности, при независимых X и Y

$$g(z) = - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x} f_1(x) f_2\left(\frac{z}{x}\right) dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} f_1(x) f_2\left(\frac{z}{x}\right) dx.$$

Задача 4.48. Случайная точка (X, Y) распределена равномерно ($\sim R(D)$). Найти закон распределения площади области D : $Z = XY$.

Решение

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D; \end{cases} \quad G(z) = 1 - \int_{\frac{z}{x}}^1 \int_x^1 dx dy = z(1 - \ln z); \\ g(z) &= G'(z) = -\ln z, \quad 0 < z < 1. \end{aligned}$$

4. Закон распределения частного $Z = Y/X$:

$$\begin{aligned} G(z) &= \iint_{\frac{y}{x} < z} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^0 dx \int_{zx}^{+\infty} f(x, y) dy + \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{zx} f(x, y) dy; \\ g(z) &= G'(z) = - \int_{-\infty}^0 x f(x, zx) dx + \int_0^{+\infty} x f(x, zx) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, zx) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{z^2} f\left(y, \frac{y}{z}\right) dy. \end{aligned}$$

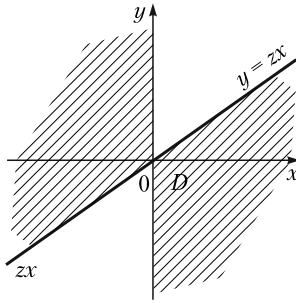


Рис. 4.7. К закону распределения частного СВ

Область, где $\frac{y}{x} < z$ (или $y < zx$), указана на рис. 4.7 заштрихованной областью D .

В частности, при независимых X и Y

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_1(x) f_2(zx) dx = - \int_{-\infty}^0 x f_1(x) f_2(zx) dx + \int_0^{\infty} x f_1(x) f_2(zx) dx.$$

Задача 4.49. СВ $X \sim N(0, 1)$ и $Y \sim N(0, 1)$ — независимы. Найти закон распределения СВ $Z = Y/X$.

Решение

$$\begin{aligned} G(z) &= - \int_{-\infty}^0 x \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + z^2 x^2)\right) dx + \int_0^{\infty} x \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + z^2 x^2)\right) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}(1 + z^2)\right) dx = \frac{1}{\pi(1 + z^2)} \end{aligned}$$

— это полностью закон Коши.

4.4.3. Закон распределения функционала от случайных величин

Пусть задано взаимно однозначное функциональное преобразование системы СВ

$$\begin{cases} U = U(X, Y), \\ V = V(X, Y) \end{cases}$$

и известно обратное преобразование

$$\begin{cases} X = X(U, V), \\ Y = Y(U, V). \end{cases}$$

Требуется найти плотность распределения $g(U, V)$ системы СВ (U, V) , если известна плотность распределения $f(x, y)$ системы СВ (X, Y) . В силу взаимнооднозначности преобразования каждой точке M_1 на плоскости xOy соответствует точка M_2 на плоскости uOv ,

поэтому события $\{(x, y) \in \Delta_1\}$ и $\{(u, v) \in \Delta_2\}$ эквивалентны и их вероятности равны. Поэтому

$$\begin{aligned} g(u, v) &= \lim_{\substack{\Delta_1 \rightarrow M_1 \\ \Delta_2 \rightarrow M_2}} \left\{ \frac{p\{x, y\} \subset \Delta_1}{\Delta_1} \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right\} = f(x, y) \lim_{\Delta_2 \rightarrow M_2} \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \\ &= f(x, y) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = f(x, y) |J|, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $|J|$ — якобиан преобразования в точке M_1 .

Пример 4.1. Пусть

$$\begin{cases} u = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ v = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u \cos \alpha - v \sin \alpha, \\ y = u \sin \alpha + v \cos \alpha \end{cases}$$

— это преобразование прямоугольных координат, состоящее в повороте осей координат на угол α :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(u, v) = f(u \cos \alpha - v \sin \alpha, u \sin \alpha + v \cos \alpha).$$

Это значит, что плотность распределения в точке (U, V) совпадает с плотностью распределения в соответствующей точке (X, Y) .

В частности, если $Z = \varphi(X, Y)$ и $f(x, y)$ — плотность распределения СВ (X, Y) , введем СВ $Z_1 = X$ и рассмотрим преобразования

$$\begin{cases} z = \varphi(x, y), \\ z_1 = x. \end{cases}$$

Пусть обратное преобразование, однозначно ему соответствующее, есть

$$\begin{cases} x = z_1, \\ y = \psi(z, z_1) \end{cases}$$

и оно дифференцируемо. Тогда по формуле (4.6) получим $g(z, z_1)$:

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{dx}{dz_1} & \frac{dx}{dz} \\ \frac{dy}{dz_1} & \frac{dy}{dz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{dy}{dz_1} & \frac{dy}{dz} \end{vmatrix} = \frac{dy}{dz} = \frac{d\psi(z, z_1)}{dz}; \\ g(z, z_1) &= f(x, \psi(z, x)) \left| \frac{d\psi(z, x)}{dz} \right|. \end{aligned}$$

Интегрируя это выражение по $z_1 = x$ в бесконечных пределах, получим искомую плотность $g_1(z)$ СВ Z :

$$g_1(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z, x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \psi(z, x)) \left| \frac{d\psi(z, x)}{dz} \right| dx. \quad (4.7)$$

Теперь из формулы (4.7) можно снова получить формулы плотностей конкретных форм функций $\phi(X, Y)$.

1. Закон распределения суммы СВ $Z = X + Y$.

$$\begin{cases} x = z - y \\ y = z - x \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dz} = \frac{dy}{dz} = 1.$$

Тогда по формуле (4.7)

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y, z - y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x) dx.$$

В случае независимых СВ X и Y

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) f_2(z - y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z - x) dx.$$

2. Закон распределения разности $Z = X - Y$.

$$\begin{cases} x = z + y \\ y = x - z \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dz} = 1, \quad \frac{dy}{dz} = -1.$$

Тогда по формуле (4.7)

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y, z + y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x - z) dx.$$

В случае независимых СВ X и Y

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) f_1(z + y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(x - z) dx.$$

3. Закон распределения произведения $Z = XY$.

$$\begin{cases} x = \frac{z}{y} \\ y = \frac{z}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dz} = \frac{1}{y}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{x}.$$

Тогда по формуле (4.7)

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, \frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(y, \frac{z}{y}\right) \frac{1}{|y|} dy.$$

В частности, при независимых СВ X и Y

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) f_1\left(\frac{z}{y}\right) \frac{1}{|y|} dy.$$

4. Закон распределения частного $Z = \frac{Y}{X}$.

$$\begin{cases} x = \frac{y}{z} \\ y = zx \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dz} = -\frac{y}{z^2}, \quad \frac{dy}{dz} = x.$$

Тогда по формуле (4.7)

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, zx) |x| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(y, \frac{y}{z}\right) \left|\frac{y}{z^2}\right| dy.$$

В частности, при независимых СВ X и Y

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_1(x) f_2(zx) dx.$$

4.4.4. Смеси распределений

Определение 4.2. Если $F_\xi(x)$ — функция распределения дискретной случайной величины ξ , а $F_\eta(x)$ — функция распределения непрерывной СВ η , $C_1 \geq 0$ и $C_2 \geq 0$ — постоянные, такие что $C_1 + C_2 = 1$, то $F(x) = C_1 F_\xi(x) + C_2 F_\eta(x)$ называется **функцией распределения смеси распределений** СВ ξ и η .

Задача 4.50 (прямая задача 1). СВ $\xi = 0$ СВ $\eta \sim R[0; 1]$, $C_1 = \frac{1}{3}$, $C_2 = \frac{2}{3}$. Найти функцию распределения смеси $F(x) = C_1 F_\xi(x) + C_2 F_\eta(x)$ и построить график $F(x)$.

Решение

Последовательно определяем слагаемые исходя из графиков (рис. 4.8).

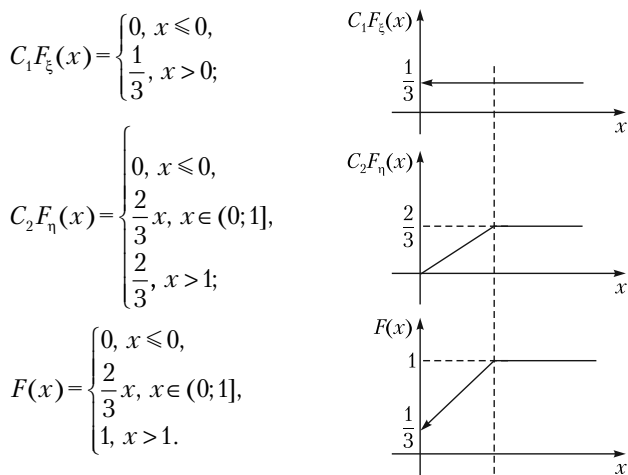


Рис. 4.8. Определение функции распределения смеси

Задача 4.51 (обратная задача). Дана функция распределения смеси распределений $F(x)$. Найти $F_{\xi}(x)$, $F_{\eta}(x)$, C_1 , C_2 (дать графическое и аналитическое решение).

Общие соображения к решению обратной задачи

- а) число точек разрыва и их абсциссы совпадают у $F(x)$ и $F_{\xi}(x)$;
- б) сумма размеров скачков $F(x) = C_1 \Rightarrow C_2 = 1 - C_1$;
- в) если размеры скачков $F(x)$ разделить на C_1 , то получим соответствующие (при тех же x) размеры скачков $F_{\xi}(x)$;

$$\text{г) } F_{\eta}(x) = \frac{F(x) - C_1 F_{\xi}(x)}{C_2}.$$

Решение

Решение обратной задачи проводим в порядке перечисления общих соображений:

- а) $F_{\xi}(x)$ имеет один скачок при $x = 0$;

$$\text{б) } C_1 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{2}{3};$$

$$\text{в) } C_1 F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{3}, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } F_{\eta}(x) = \frac{F(x) - C_1 F_{\xi}(x)}{C_2} = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x \in (0; 1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Графическое решение можно наблюдать, рассматривая рис. 4.8 в обратном порядке.

Задание 4.1. Решить прямую и обратную задачи:

$$\text{а) } \text{CB } \xi \sim B(1, 0, 5), C_1 = \frac{2}{5}, C_2 = \frac{3}{5}, \eta \sim R(0; 1);$$

$$\text{б) } \text{CB } \xi = 0,5; F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0; 1], \\ 2, & x \in [0; 1]; \end{cases} C_1 = C_2 = 1/2.$$

4.5. Композиции

При изучении вопроса о законе распределения функций от случайных величин наиболее теоретически и практически важным является нахождение распределения сумм случайных величин. Это связано с тем, что во многих реальных процессах различные факторы оказывают суммарное действие. В случае, когда эти факторы не связаны или крайне слабо связаны между собой, их практически можно считать независимыми, что существенно упрощает исследование процесса.

Одним из универсальных методов нахождения законов распределения сумм независимых случайных величин, т.е. композиций, являются методы производящих и характеристических функций. Результат тогда получается в форме производных или характерис-

тических функций сумм случайных величин, что взаимно однозначно соответствует искомому распределению, и может быть пересчитан к требуемой традиционной форме закона распределения (ряда распределения, плотности распределения, функции распределения). Оказывается, что этот пересчет может приводить к техническим сложностям. В частности, это относится к случаю суммирования независимых равномерно распределенных случайных величин. Поэтому представляет интерес прямое нахождение композиций в терминах привычных форм законов распределения.

В данном параграфе приведены основные формулы и примеры решения таких задач.

4.5.1. Основные формулы для композиций

Напомним, что композицией (сверткой) называется закон распределения суммы независимых СВ.

Пусть СВ X и Y — независимы, $СВ Z = X + Y$.

1. X, Y — непрерывные СВ; $X \sim f_1(x), Y \sim f_2(y); f_1(x), f_2(x), f(x, y)$ — соответственно плотности распределения СВ X, Y и (X, Y) . Тогда (рис. 4.9, на котором заштрихована область D)

$$\begin{aligned} F_z(z) &= P(Z < z) = P(X + Y < z) = \iint_D f(u, v) du dv = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f(u, v) du dv \stackrel{\text{из}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_1(u) f_2(v) du dv \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_z(z) = F'_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z-x) dx. \end{aligned} \quad (4.8)$$

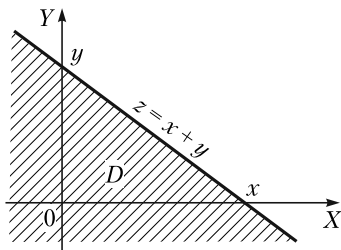


Рис. 4.9. К формуле для суммы независимых СВ

2. X, Y — целочисленные дискретные СВ; $p_k^{(1)} = P(X = k); p_l^{(2)} = P(Y = l), k$ и l — целые числа. Тогда

$$\begin{aligned} p_n^{(3)} &= P(Z = n) = P(X + Y = n) = \\ &= \sum_{k=0}^n P(X = k) P(X + Y = n / X = k) = \sum_{k=0}^n p_k^{(1)} p_{n-k}^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

3. СВ X — дискретная целочисленная СВ; $p_k = P(X = k)$, k — целое число, СВ Y — непрерывная СВ с плотностью распределения $f_Y(x)$ и функцией распределения $F_Y(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(X + Y < x) = \sum_k P(X = k)P(Y < x - k) = \\ &= \sum_k p_k F_Y(x - k) \Rightarrow f_Z(x) = \sum_k p_k f_Y(x - k). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Замечание 4.4. С использованием формул (4.8)–(4.10) в соответствующих случаях можно находить законы распределения линейных форм от независимых СВ X и Y на основании связи закона распределения СВ и ее линейной формы, т.е. распределений СВ ξ и $\eta = a\xi + b$, где a и b — const.

Если ξ — дискретная целочисленная СВ и $p_k = P(\xi = k)$, то

$$P(\eta = a\xi + b = ak + b = l) = P\left(\xi = \frac{l-b}{a} = k\right) = p_k.$$

Если ξ — непрерывная СВ с плотностью и функцией распределения соответственно $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$, то

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= P(a\xi + b < x) = \\ &= \left\{ \begin{aligned} P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) &= F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) \Rightarrow f_\eta(x) = \frac{1}{a} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) \text{ при } a > 0, \\ 1 - P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) &= 1 - F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) \Rightarrow f_\eta(x) = -\frac{1}{a} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) \text{ при } a < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right). \end{aligned}$$

4.5.2. Задачи по композиции

Рассмотрим задачи на использование приведенных формул (задачи 4.52–4.55 — на формулу (4.8), 4.56–4.58 — на формулу (4.9), 4.59 — на формулу (4.10)).

Задача 4.52. СВ X и Y независимы, $X \sim E(\lambda_1)$, $Y \sim E(\lambda_2)$, т.е.

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda_i e^{-\lambda_i x}, & x \geq 0, \end{cases} \quad i = 1, 2;$$

$f_1(x)$ и $f_2(x)$ — соответственно плотности распределения СВ X и Y . Найти плотность распределения $g(z)$ СВ $Z = X + Y$.

Решение

По формуле (4.8) $g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx$; в нашем случае имеем

$$g(z) = \int_0^y \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2(z-x)} dx = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \int_0^z e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} dx =$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z}), \quad z > 0.$$

При $\lambda_1 = \lambda_2$ это обобщенный закон Эрланга второго порядка с плотностью

$$g(z) = \lambda^2 y^{-\lambda z}, \quad z > 0.$$

Задача 4.53. СВ X и Y независимы, СВ $X \sim N(a_1, \sigma_1^2)$, СВ $Y \sim N(a_2, \sigma_2^2)$. Найти $f_Z(z)$ — плотность распределения СВ $Z = X + Y$.

Решение

По формуле (4.8)

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(z-x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)\right) dx;$$

$$\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(z-x-a_2)^2}{\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2(x-a_1)^2 + (z-x-a_2)^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} =$$

$$= \frac{x^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - 2(a_1\sigma_2^2 + \sigma_1^2(z-a_2))x + a_1^2\sigma_2^2 + (z-a_2)^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2};$$

$$f_z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-Ax^2 + 2Bx - C) dx,$$

$$\text{где } A = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}; \quad B = \frac{a_1^2\sigma_2^2 + (z-a_2)^2\sigma_1^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}; \quad C = \frac{a_1^2\sigma_2^2 + (z-a_2)^2\sigma_1^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}.$$

Используем формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-Ax^2 + 2Bx - C) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(-\frac{AC - B^2}{A}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-(a_1+a_2))^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right).$$

Тогда СВ $Z \sim N(a = a_1 + a_2, \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Задача 4.54. Найти плотность суммы двух независимых СВ X и Y , имеющих χ^2 -распределение с параметрами k и l (степенями свободы) соответственно: $X \sim \chi_k^2$, $Y \sim \chi_l^2$.

Решение

Определим индикаторную функцию $I(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z \geq 0. \end{cases}$

Тогда плотности распределения СВ X и Y $g_1(x)$ и $g_2(y)$ есть соответственно

$$g_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$\text{т.е. } g_1(x) = \frac{x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} I(x) \text{ и } g_2(y) = \frac{y^{\frac{l}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{l}{2}} \Gamma\left(\frac{l}{2}\right)} I(y).$$

В дальнейшем будет использована бета-функция $B(p, q)$:

$$B(p, q) = \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Для $Z = X + Y$ по формуле (4.8)

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f(z) = \frac{x(z)}{2^{\frac{k+l}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l}{2}\right)} \int_0^z x^{\frac{k}{2}-1} (z-x)^{\frac{l}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}-\frac{z-x}{2}} dx = \\ &= \frac{x(z)}{2^{\frac{k+l}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l}{2}\right)} z^{\frac{k+l}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} \underbrace{\int_0^1 u^{\frac{k}{2}-1} (1-u)^{\frac{l}{2}-1} du}_{B\left(\frac{k}{2}, \frac{l}{2}\right)} = \frac{x(z)}{2^{\frac{k+l}{2}} \Gamma\left(\frac{k+l}{2}\right)} z^{\frac{k+l}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{СВ } Z \sim \chi_{k+l}^2.$$

Замечание 4.5. По индукции легко установить, что сумма независимых СВ, распределенных по χ^2 , имеет χ^2 -распределение с числом степеней свободы, равным сумме чисел степеней свободы слагаемых СВ.

Задача 4.55. СВ X и Y — независимы и имеют гамма-распределение: $X \sim \Gamma_{\alpha, \lambda}$, $Y \sim \Gamma_{\beta, \lambda}$. Найти плотность распределения $g(z)$ СВ $Z = X + Y$.

Решение

$$\text{По формуле (4.8) } g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z-x) dx, \text{ где}$$

$$f_1(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0; \quad f_2(y) = \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\lambda y}, \quad y \geq 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^z f_1(x) f_2(z-x) dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^z x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} (z-x)^{\beta-1} e^{-(z-x)\lambda} dx = \\ &= \frac{e^{-\lambda z}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^z (z-x)^{\beta-1} x^{\alpha-1} dx = \left\{ x = zt, dx = zdt, \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-\lambda z}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (z-zt)^{\beta-1} (zt)^{\alpha-1} z dt = \frac{e^{-\lambda z}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 z^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1} z^{\alpha-1} t^{\alpha-1} z dt = \\
&= \frac{e^{-\lambda z} z^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{e^{-\lambda z} z^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha, \beta) = \frac{e^{-\lambda z} z^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(2+\beta)} = \\
&= \frac{e^{-\lambda z} z^{(\alpha+\beta)-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad z > 0,
\end{aligned}$$

а это плотность гамма-распределения $\Gamma_{\alpha+\beta, \lambda}$.

Замечание 4.6. По индукции очевидно, что если СВ $X_1, \dots, X_n$ независимы и имеют соответственно гамма-распределения $\Gamma_{\alpha_1, \lambda}, \Gamma_{\alpha_2, \lambda}, \dots, \Gamma_{\alpha_n, \lambda}$, то $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ имеет гамма-распределение $\Gamma_{\sum_{i=1}^n \alpha_i, \lambda}$.

Задача 4.56. Пусть X и Y — соответственно моменты первого и второго успехов в серии испытаний Бернулли $B(1, p)$. Найти распределение СВ Y при фиксированном значении СВ X .

Решение

Введем СВ $Z = Y - X \Rightarrow Y = X + Z$, где СВ X и Z независимы и одинаково распределены. Тогда

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= p_k = pq^{k-1} = P(Z = k)nP(Y = n) = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} P(Z = k)P(X = n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} pq^{k-1} pq^{n-k-1} = p^2 \sum_{k=1}^{n-1} q^{n-2} = (n-1)p^2 q^{n-2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \text{СВ } Y \sim \text{Па}(r = 2, p).
\end{aligned}$$

Замечание 4.7. Этот результат сразу следует из смысла распределения Паскаля.

Задача 4.57. СВ X, Y независимы, $X \sim \Pi(\lambda_1), Y \sim \Pi(\lambda_2), Z = X + Y$. Найти $P(Z = n)$.

Решение

$$\begin{aligned}
P(Z = n) &= \sum_{k=0}^n P(X = k)P(Y = n-k) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^k l^{-\lambda_1}}{k!} \frac{\lambda_2^{n-k} e^{-\lambda_2}}{(n-k)!} = \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \text{СВ } Z \sim \Pi(\lambda_1 + \lambda_2).
\end{aligned}$$

бином
Ньютона

Замечание 4.8. По индукции легко установить, что если $X_1, \dots, X_m$ — независимые СВ, $X_i \sim \Pi(\lambda_i), i = 1, \dots, m$, то $L\left(Z = \sum_{i=1}^m X_i\right) \sim \Pi\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i\right)$.

Задача 4.58. СВ $X \sim B(n_1, p), Y \sim B(n_2, p)$, X и Y — независимые. Найти распределение СВ $Z = X + Y$.

Решение

1-й способ. Представим СВ X и Y как суммы: $X = \sum_{i=1}^{n_1} X_i$, $Y = \sum_{j=1}^{n_2} Y_j$, где $\{X_i\}$, $\{Y_j\}$ — независимые СВ $\sim B(1, p)$. Тогда СВ $Z = X + Y = \sum_{k=1}^{n_1+n_2} V_k$, где $\{V_k\}$ — независимые СВ, имеющие распределение $B(1, p)$, $\Rightarrow$ СВ $Z \sim B(n_1 + n_2, p)$.

2-й способ. Используем равенство Вандермонда $C_N^n = \sum_{k=0}^n C_M^k C_{N-M}^{n-k}$.

$$\begin{aligned} P(Z=r) &= \sum_{k=0}^r P(X=k)P(Y=r-k) = \sum_{k=0}^r C_{n_1}^k p^k q^{n_1-k} C_{n_2}^{r-k} p^{r-k} q^{n_2-r+k} = \\ &= p^r q^{n_1+n_2-r} \sum_{k=0}^r C_{n_1}^k C_{n_2}^{r-k} \stackrel{\text{равенство Вандермонда}}{=} C_{n_1+n_2}^r p^r q^{n_1+n_2-r} \Rightarrow Z \sim B(n_1 + n_2, p). \end{aligned}$$

Замечание 4.9. По индукции легко установить, что если $X_1, \dots, X_n$ — независимые СВ, где $X_i \sim B(n_i, p)$, $i = 1, \dots, n$, $Z = \sum_{i=1}^n X_i$, то СВ $Z \sim B\left(\sum_{i=1}^n n_i, p\right)$.

Задача 4.59. СВ X и Y независимы; X задана рядом распределения

X	-1	1
P	0,6	0,4

$Y \sim N(0, 1)$; $Z = 2X + Y$. Найти $F_z(X)$ — функцию распределения СВ Z .

Решение

Строим ряд распределения СВ $X_1 = 2X$:

X_1	-2	2
P	0,6	0,4

Тогда $Z = X_1 + Y$;

$$\begin{aligned} F_z(X) &= P(X_1 + Y) = P(X_1 = -2, Y < x + 2) + P(X_1 = 2, Y < x - 2) = \\ &= P(X_1 = -2)F_Y(x + 2) + P(X_1 = 2)F_Y(x - 2) = \\ &= 0,6(\Phi(x + 2) + 0,5) + 0,4(\Phi(x - 2) + 0,5) = \\ &= 0,5 + 0,6\Phi(x + 2) + 0,4\Phi(x - 2), \end{aligned}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ — табличная функция Лапласа.

4.5.3. Композиции равномерного закона

Рассмотрим задачи, связанные с равномерным законом распределения.

Задача 4.60. СВ X и Y — независимые, $X, Y \sim R[0; 1]$. Найти закон распределения СВ $Z = X + Y$.

Решение

$g(z)$ — искомая плотность СВ Z .

По формуле (4.8) $g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx$;

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \in [0; 1], \\ 0, & x > 1 \end{cases} \quad \text{— маргинальные плотности распределения СВ } X \text{ и } Y; \text{ тогда}$$

$$f_2(z-x) = \begin{cases} 0, & z-x < 0, \\ 1, & 0 \leq z-x \leq 1, \\ 0, & z-x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x > z, \\ 1, & z-1 \leq x \leq z, \\ 0, & x < z-1 \end{cases}$$

поэтому:

а) при $z < 0$ $g(z) = 0$ (рис. 4.10, а);

б) при $0 \leq z < 1$ $g(z) = \int_0^z dx = z$ (рис. 4.10, б);

в) при $1 \leq z \leq 2$ $g(z) = \int_{z-1}^1 dx = 2 - z$ (рис. 4.10, в);

г) при $z > 2$ $g(z) = 0$ (рис. 4.10, г).

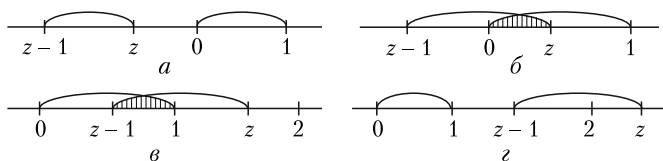


Рис. 4.10. К задаче 4.60

$$\text{Окончательно имеем } g(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z, & 0 \leq z < 1, \\ 2 - z, & 1 \leq z \leq 2, \\ 0, & z > 2. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 4.11.

Это **закон Симпсона** на участке $[0; 2]$, или **закон равнобедренного треугольника**.

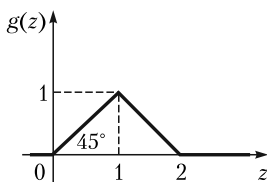


Рис. 4.11. График $g(z)$

Задача 4.61. СВ X и Y независимы, $X, Y \sim R[a; b]$. Найти закон распределения СВ $Z = X + Y$.

Решение

Введем СВ $X_0, Y_0 \sim R(0; 1)$, X_0 и Y_0 независимые, $Z_0 = X_0 + Y_0$. Тогда

$$X = (b-a)X_0 + a; \quad Y = (b-a)Y_0 + a;$$

$$Z = (b-a)(X_0 + Y_0) + 2a = A(X_0 + Y_0) + B = AZ_0 + B,$$

где $A = b - a > 0$; $B = 2a$. Имеем

$$G_z(z) = P(Z < z) = P(AZ_0 + B < z) = P\left(Z_0 < \frac{z-B}{A}\right) = G_{z_0}\left(\frac{z-B}{A}\right);$$

$$g_z(z) = G_z(z) = \frac{1}{A} g_{z_0}\left(\frac{z-B}{A}\right),$$

а вид $g_{z_0}(z)$ найден раньше в задаче 9, откуда получаем:

$$g_z\left(\frac{z-B}{A}\right) = \begin{cases} 0, & \frac{z-B}{A} < 0, \\ \frac{z-B}{2A^2}, & 0 < \frac{z-B}{A} < 1, \\ \left(2 - \frac{z-B}{A}\right) \frac{1}{A}, & 1 < \frac{z-B}{A} < 2, \\ 0, & \frac{z-B}{A} > 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \frac{z-2a}{b-a} < 0, \\ \left(2 - \frac{z-2a}{b-a}\right) \frac{1}{b-a}, & 0 < \frac{z-2a}{b-a} < 1, \\ \frac{2b-z}{(b-a)^2}, & \frac{z-2a}{b-a} < 2, \\ 0, & \frac{z-2a}{b-a} > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & z < 2a, \\ \frac{z-2a}{(b-a)^2}, & 2a < z < a+b, \\ \frac{2b-z}{(b-a)^2}, & a+b < z < 2b, \\ 0, & z > 2b. \end{cases}$$

В частности, при $a = -k, b = k; X, Y \sim R[-k; k]$ имеем (рис. 4.12)

$$g(z) = \begin{cases} 0, & z < -2k, \\ \frac{z+2k}{4k^2}, & -2k < z < 0, \\ \frac{2k-z}{4k^2}, & 0 < z < 2k, \\ 0, & z > 2k \end{cases} = \begin{cases} 0, & |z| > 2k, \\ \frac{2k-|z|}{4k^2}, & |z| \leq 2k. \end{cases}$$

Это **закон Симпсона** на участке $[-2k; 2k]$.

Задача 4.62. СВ X_0, Y_0, Z_0 независимы; $X_0, Y_0, Z_0 \sim R[0; 1]$, $W_0 = X_0 + Y_0 + Z_0$. Найти закон распределения СВ W_0 в виде ее плотности распределения $f_{W_0}(x)$.

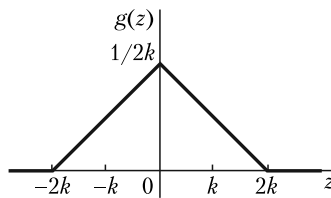


Рис. 4.12. К задаче 4.61

Решение

По формуле (4.8)

$$f_{w_0}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x_0}(x) f_{y_0+z_0}(v-x) dx = \int_0^1 f_{y_0+z_0}(v-x) dx;$$

$f_{x_0}(x) = f_{y_0}(x) = f_{z_0}(x)$ — маргинальные плотности соответственно СВ X_0, Y_0, Z_0 ;

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0; 1], \\ 1, & x \in [0; 1], \end{cases}$$

а СВ $Y_0 + Z_0$ распределена по закону Симпсона на отрезке $[0; 2]$ (см. задачу 9):

$$f_{y_0+z_0}(v-x) = \begin{cases} 0, & v-x < 0, \\ v-x, & 0 < v-x < 1, \\ 2-v+x, & 1 < v-x < 2, \\ 0, & v-x > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x > v, \\ v-x, & v-1 \leq x < v, \\ 2-v+x, & v-2 \leq x \leq v-1, \\ 0, & x < v-2. \end{cases}$$

Функцию $f_{w_0}(v)$ находим по указанной выше формуле в соответствии с рис. 4.13 как площади соответствующих заштрихованных областей:

а) $v < 0$ $f_{w_0}(v) = 0$ (рис. 4.13, а);

б) $0 < v < 1$ $f_{w_0}(v) = \frac{v^2}{2}$ (рис. 4.13, б);

в) $1 < v < 2$ $f_{w_0}(v) = 1 - \frac{(v-1)^2}{2} - \frac{(v-2)^2}{2}$ (рис. 4.13, в);

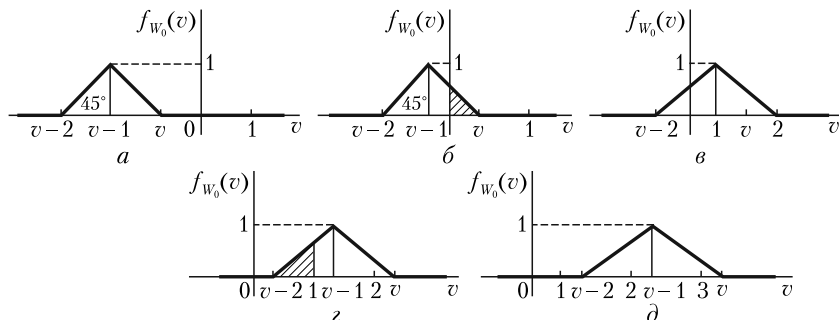


Рис. 4.13. К задаче 4.62

г) $2 < v < 3$ $f_{W_0}(v) = 1 - \frac{(3-v)^2}{2}$ (рис. 4.13, з);

д) $v > 3$ $f_{W_0}(v) = 0$ (рис. 4.13, д).

Окончательно получаем (рис. 4.14)

$$f_{W_0}(v) = \begin{cases} 0, & v < 0, \\ \frac{v^2}{2}, & 0 \leq v \leq 1, \\ 1 - \frac{(v-1)^2}{2} - \frac{(v-2)}{2}, & 1 < v \leq 2, \\ \frac{(3-v)^2}{2}, & 2 < v \leq 3, \\ 0, & v > 3. \end{cases}$$

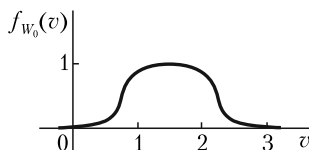


Рис. 4.14. Вид плотности распределения

Задание 4.2. СВ X, Y, Z независимы; $X, Y, Z \sim R[a; b]$, $W = X + Y + Z$. Найти закон распределения СВ W , т.е. $f_W(x)$.

Указание. Ввести независимые СВ X_0, Y_0, Z_0 ; $X_0, Y_0, Z_0 \sim R[0; 1]$. Пусть $W_0 = X_0 + Y_0 + Z_0$, тогда $W = (b-a)W_0 + 3a = BW_0 + A$, где $B = b-a > 0$; $A = 3a$.

$f_W(v) = \frac{1}{A} f_{W_0}\left(\frac{v-B}{A}\right)$, где $f_{W_0}(v)$ получена в задаче 10. Остается подставить этот вид $f_{W_0}(v)$ в формулу для $f_W(v)$. В частности, при $a = -k$, $b = k$ приведем ответ:

$$f_W(v) = \begin{cases} 0, & |v| > 3k, \\ \frac{(3k-|v|)^2}{16k^3}, & k < |v| \leq 3k, \\ \frac{(3k^2-v^2)}{8k^3}, & |v| \leq k. \end{cases}$$

Задача 4.63. Пусть X и Y — независимые СВ, $Z = X + Y$, X — непрерывная СВ с плотностью распределения $f_X(x)$ и функцией распределения $F_X(x)$, а $Y \sim R[0; 1]$. Доказать, что $f_Z(z) = F_X(z) - F_X(z-1)$.

Решение (доказательство)

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0; 1], \\ 1, & x \in [0; 1] \end{cases} \Rightarrow F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \in [0; 1], \\ 1, & x > 1; \end{cases}$$

так как X и Y независимы, то по формуле (4.8)

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dF_X(x) = \\ &= \left| f_Y(z-x) = \begin{cases} 1 & \text{при } z-x \in [0; 1] \\ 0 & \text{при } z-x \notin [0; 1] \end{cases} \right| = \int_{z-1}^z dF_X(x) = F_X(z) - F_X(z-1), \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

Задача 4.64. Пусть в предыдущей задаче $X \sim R[0; 1]$. Найти $f_{X+Y}(z) = f_Z(z)$ и $F_{X+Y} = F_Z(z)$.

Решение

По результату задачи 4.63 имеем $f_Z(z) = F(z) - F(z-1)$, где

$$\begin{aligned} F(z) &= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z, & 0 \leq z \leq 1, \\ 1, & z > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z, & 0 \leq z < 1, \\ 1, & 1 \leq z < 2, \\ 1, & z > 2; \end{cases} \\ F(z-1) &= \begin{cases} 0, & z-1 < 0 \\ z-1, & 0 \leq z-1 \leq 1, \\ 1, & z-1 > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 0, & 0 \leq z < 1, \\ z-1, & 1 \leq z \leq 2, \\ 1, & z > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда по результату задачи 4.63 получаем

$$f_{X+Y}(z) = F(z) - F(z-1) = f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z, & 0 \leq z \leq 1, \\ 2-z, & 1 < z \leq 2, \\ 0, & z > 2. \end{cases}$$

Этот же результат можно получить графически (рис. 4.15).

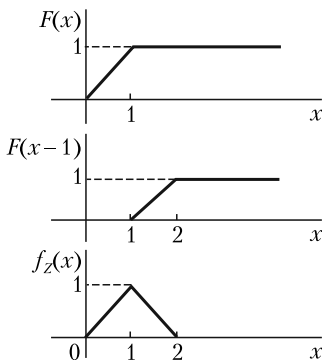


Рис. 4.15. К задаче 4.64

Найдем $F_Z(z) = F_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^z f_z(x) dx$:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \int_0^z x dx = \frac{z^2}{2}, & 0 \leq z \leq 1, \\ \int_0^1 x dx + \int_1^z (2-x) dx = \frac{1}{2}(z^2 + 4z - 2), & 1 \leq z \leq 2, \\ \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x) dx = \frac{1}{2}(1+1) = 1, & z > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{z^2}{2}, & 0 \leq z \leq 1, \\ \frac{1}{2}(z^2 - 4z - 2), & 1 \leq z \leq 2, \\ 0, & z > 2. \end{cases}$$

Задача 4.65 (композиция конечного числа n равномерно распределенных СВ на отрезке $[0; 1]$). Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые, одинаково распределенные СВ $\sim R[0; 1]$. Обозначим $f_n(z) = f_{\sum_{i=1}^n X_i}(z)$; $F_n(z) = F_{\sum_{i=1}^n X_i}(z)$.

Доказать, что

$$f_n(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \text{ или } z > n, \\ \frac{1}{(n-1)!} [z^{n-1} - C_n^1(z-1)^{n-1} + C_n^2(z-2)^{n-1} - \dots \\ \dots + (-1)^k C_n^k(z-k)^{n-1}], & k \leq z \leq k+1; k=0, 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (4.11)$$

Решение (доказательство)

Доказательство проводим методом математической индукции с использованием утверждения задачи 4.63.

Проверим формулу (4.11) для первых шагов индукции:

1) $n = 2$ ($f_2(z)$ получена раньше):

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z, & 0 \leq z \leq 1, \\ 2-z, & 1 \leq z \leq 2, \\ 0, & z > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{1}{1!}[z], & 0 \leq z \leq 1, \\ \frac{1}{1!}[z - C_2^1(z-1)], & 1 \leq z \leq 2, \\ 0, & z > 2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, & z < 0 \text{ или } z > 2, \\ \frac{1}{1!}[z - C_2^1(z-1) + \dots + (-1)^k C_2^k(z-k)], & k \leq z \leq k+1, k=0, 1, \end{cases} \end{aligned}$$

т.е. записали $f_2(z)$ в форме (4.11);

2) $n = 3$ ($f_3(z)$ получена раньше):

$$f_3(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{z^2}{2}, & 0 \leq z \leq 1, \\ \frac{1}{2}(-2z^2 + 6z - 3), & 1 \leq z \leq 2, \\ \frac{1}{2}(z^2 - 3z + 9), & 2 \leq z \leq 3, \\ 0, & z > 3 \end{cases} = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{1}{2!}z^2, & 0 \leq z \leq 1, \\ \frac{1}{2!}[z^2 - C_3^1(z-1)^2], & 1 \leq z \leq 2, \\ \frac{1}{2!}[z^2 - C_3^1(z-1)^2 + C_3^2(z-2)^2], & 2 \leq z \leq 3 \\ 0, & z > 3 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & z < 0 \text{ или } z > 3, \\ \frac{1}{2!} [z^2 - C_3^1(z-1)^2 + \dots + (-1)^k C_3^k(z-k)^2], & k \leq z \leq k+1, \quad k=0, 1, 2, \end{cases}$$

т.е. записали $f_3(z)$ в форме (4.11).

Пусть теперь формула (4.11) есть предположение индукции. Покажем, что $f_{n+1}(z)$ записывается аналогично по логике формулы (4.11). Для этого воспользуемся результатом задачи 4.63: $f_{n+1}(z) = F_n(z) - F_n(z-1)$, найдя $F_n(z)$ и $F_n(z-1)$.

Для $0 \leq z \leq n$ имеем:

$$\begin{aligned} F_n(z) &= \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{z^n}{n} - \frac{n(z-1)^n}{n} + \frac{C_n^2(z-2)^n}{n} - \dots + (-1)^k \frac{C_n^k(z-k)^n}{n} \right], \\ &\quad k \leq z \leq k+1, \quad k=0, 1, \dots, n-1; \quad 0 \leq z \leq n; \\ F_n(z-1) &= \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{(z-1)^n}{n} - \frac{n(z-2)^n}{n} + \frac{C_n^2(z-3)^n}{n} - \dots + (-1)^k \frac{C_n^k(z-k-1)^n}{n} \right], \\ &\quad k \leq z-1 \leq k+1, \quad k=0, 1, \dots, n-1, \quad 0 \leq z-1 \leq n; \\ f_{n+1}(z) &= \frac{1}{n!} \left[z^n - (C_n^1 + C_n^0)(z-1)^n + (C_n^2 + C_n^1)(z-2)^n - \dots + (-1)^k (C_n^k + C_n^{k-1}) \right], \\ &\quad k \leq z \leq k+1, \quad k=0, 1, \dots, n, \quad 0 \leq z \leq n+1. \end{aligned}$$

Упростим выражение, воспользовавшись формулой $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$, которая доказывается простыми преобразованиями:

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} f_{n+1}(z) &= \begin{cases} 0, & z < 0, \quad z > n+1, \\ \frac{1}{n!} [z^n - C_{n+1}^1(z-1)^n + \dots + (-1)^k C_{n+1}^k(z-k)^n], & \end{cases} \\ &\quad 0 \leq z \leq n; \quad k \leq z \leq k+1, \quad k=0, 1, \dots, n+1, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

Задача 4.66. Пусть $Y_1, \dots, Y_n$ — независимые, одинаково распределенные СВ, $Y_i \sim R[a; b]$. Найти $f_{\sum_{i=1}^n Y_i}(z)$.

Решение

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n Y_i &= (b-a) \sum_{i=1}^n X_i + an; \\ F_{\sum_{i=1}^n Y_i}(z) &= F_n \left(\frac{z-an}{b-a} \right) \Rightarrow f_{\sum_{i=1}^n Y_i}(z) = \frac{1}{b-a} f_n \left(\frac{z-an}{b-a} \right). \end{aligned}$$

Выпишите самостоятельно $F_{\sum_{i=1}^n Y_i}(z)$ и $f_{\sum_{i=1}^n Y_i}(z)$ в явном виде.

4.6. Связи распределений

Установление связей между распределениями имеет большое теоретическое и практическое, конструктивное значение при изучении и моделировании распределений. Этот аспект обычно упоминается в курсах теории вероятности вскользь. В данном параграфе делается попытка систематического изложения вопроса в форме установления интересующих нас связей между конкретными распределениями. Изложение материала проводится в форме отдельных утверждений с доказательствами (кроме тех, которые доказаны ранее в основном курсе вероятности).

Утверждение 4.1. Из независимости СВ $X_i \sim B(1, p) \Rightarrow$ СВ $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$ (доказано в гл. 2).

Утверждение 4.2. Пусть независимые СВ $X_i \sim G(p)$; $Y_i \sim \text{сд}G(p)$; $Z_1 \sim \text{Па}(r, p)$, $Z_2 \sim \text{ОВ}(r, p)$. Тогда верны равенства $X_i = Y_i + 1$; $Z_1 = Z_2 + r$; $Z_1 = \sum_{i=1}^n X_i$; $Z_2 = \sum_{i=1}^n Y_i$ (доказано в гл. 2).

Утверждение 4.3. СВ $X \sim H(N, M, n)$; СВ $Y \sim B(n, p)$; условия асимптотики:

$$\begin{aligned} N, M \rightarrow \infty, \frac{M}{N} \rightarrow p, 0 \leq p \leq 1 &\Rightarrow \\ \Rightarrow L(X) &\xrightarrow{(*)} L(Y). \end{aligned} \quad (*)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \lim_{(*)} P(X=k) &= \lim_{(*)} \left(\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \right) = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \lim_{(*)} \left(\frac{M(M-1)\cdots(M-k+1)(N-M)\cdots(N-M-n+k+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} \right) = \\ &= C_n^k p^k q^{n-k} \Rightarrow L(X) \xrightarrow{(*)} L(Y). \end{aligned}$$

Утверждение 4.4. СВ $X \sim B(n, p)$, СВ $Y \sim P(\lambda)$. Условия асимптотики:

$$\begin{aligned} n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, np \rightarrow \lambda, 0 \leq \lambda = \text{const} &\Rightarrow \\ \Rightarrow L(X) &\xrightarrow{(**)} L(Y). \end{aligned} \quad (**)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \lim_{(**)} P(X=k) &= \lim_{(**)} C_n^k p^k q^{n-k} = \\ &= \lim_{(**)} \left(\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n} \right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{-k} \right) = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{(**)} \left(\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{-k} \right) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \Rightarrow L(X) \xrightarrow{(**)} L(Y). \end{aligned}$$

Утверждение 4.5. Пусть r неразличимых шаров размещают по n ящикам без ограничений на число шаров в ящике. Условия асимптотики:

$$n, r \rightarrow \infty, \frac{r}{n} \rightarrow \lambda, 0 \leq \lambda = \text{const.} \quad (***)$$

Пусть X — число шаров в фиксированном ящике, $Y \sim \text{сд}G\left[p = \frac{1}{1+\lambda}\right]$. Тогда

$$L(X) \xrightarrow{(***)} L(Y).$$

Доказательство

$$\begin{aligned} P_k &= P(X=k) = \frac{C_{n+(r-k)-2}^{r-k}}{C_{n+r-1}^r}, k=0,1,2,\dots \\ \lim_{(***)} P(X=k) &= \lim_{(***)} \frac{C_{n+r-k-2}^k}{C_{n+r-1}^r} = \lim_{(***)} \frac{(n+r-k-2)!r!(n-1)!}{(r-k)!(n-2)!(n+r-1)!} = \\ &= \lim_{(***)} \left(\frac{\frac{r}{n} \frac{r-1}{n} \dots \frac{r-k+1}{n} \frac{n-1}{n}}{\frac{n+r-1}{n} \frac{n+r-2}{n} \dots \frac{n+r-k-1}{n}} \right) = \frac{\lambda^k}{(1+\lambda)^{k+1}} = \frac{1}{1+\lambda} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^k = pq^k, \end{aligned}$$

где $p+q=1, p = \frac{1}{1+\lambda} \Rightarrow L(X) \xrightarrow{(***)} L(Y)$.

Утверждение 4.6. Из N элементов, среди которых M первого типа, производится выборка без возвращения до появления в выборке впервые элемента первого типа; X — число выбранных элементов;

$$\begin{aligned} P_k &= P(X=k) = \\ &= \frac{N-M}{N} \frac{N-M-1}{N-1} \dots \frac{N-M-k+2}{N-k+2} \frac{M}{N-k+1} = \frac{C_{N-M}^{k-1}}{C_N^{k-1}} \frac{M}{N-k+1}. \end{aligned}$$

Условия асимптотики:

$$\begin{aligned} N, M \rightarrow \infty, \frac{M}{N} \rightarrow p, 0 < p < 1; q = 1-p \Rightarrow \\ \Rightarrow L(X) \xrightarrow{****} G(p). \end{aligned} \quad (****)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \lim_{(****)} P_k &= \lim_{(****)} \left(\frac{C_{N-M}^{k-1}}{C_N^{k-1}} \frac{M}{N-k+1} \right) = \\ &= \lim_{(****)} \left(\frac{(N-M)(N-M-k+2)}{N(N-k+2)} \frac{M}{N-k+1} \right) = q^{k-1}p \\ &\Rightarrow L(X) \xrightarrow{****} G(Y). \end{aligned}$$

Замечание 4.10. Аналогично доказывается, что если выборка производится до появления в выборке r элементов первого типа в условиях асимптотики (****) и СВ Z_1 — число выбранных элементов, Z_2 — число элементов второго типа среди выбранных, а $Y = Z_2$ при $r = 1$, то имеем: $L(Y) \xrightarrow{****} \text{сд}G(Y); L(Z_1) \xrightarrow{****} \text{Па}(r, p); L(Z_2) \xrightarrow{****} \text{OB}(r, p)$.

Утверждение 4.7. СВ $X_0 \sim R[0; 1]$; СВ $X \sim R[a; b]$; тогда СВ $X = X_0(b - a) + a$ (доказано в гл. 2).

Утверждение 4.8. СВ $X_0 \sim N(0, 1)$; СВ $X \sim N(a, \sigma)$; тогда СВ $X = \sigma X_0 + a$ (доказано в гл. 2).

Утверждение 4.9. СВ $X \sim E(\lambda)$; $Y \sim \Gamma_{\alpha, \lambda} \Rightarrow E(\lambda) = \Gamma_{\alpha=1, \lambda}$ (доказано в гл. 2).

Утверждение 4.10. Пусть СВ $X \sim B(n, p)$; $Y \sim P_0(n, m_1, m_2, \dots, m_k; p_1, p_2, \dots, p_k)$; $\sum_{i=1}^k p_i = 1$; $\sum_{i=1}^k m_i = n$. Тогда при $k = 2$, $L(X) = L(Y)$.

Доказательство. Очевидно, что при $k = 2$, $p_1 = p$, $m_1 + m_2 = n$ из вида $L(Y)$.

Утверждение 4.11. СВ $Y \sim R\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ — угол вращения луча вокруг точки с координатами $(0; 1)$; СВ X — точка пересечения этого луча с осью Ox (рис. 4.16). Тогда СВ X имеет распределение Коши с плотностью распределения $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$ (доказано в гл. 2).

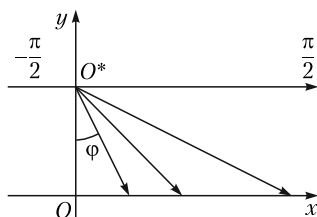


Рис. 4.16. К утверждению 4.11

Утверждение 4.12.

$$\text{СВ } X \sim Sn(x) \sim f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$

— плотность распределения Стюдента. СВ $Y \sim \text{Коши} \sim f_Y(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$. Тогда при $k = 1$ имеем $L(X) = L(Y)$ (доказано в параграфе 4.3).

Утверждение 4.13. СВ $X \sim N(0, \sigma_x)$, СВ $Y \sim N(0, \sigma_y)$, X и Y — независимы, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. Тогда СВ $Z = \frac{Y}{X}$ распределена по закону Коши с плотностью распределения $g_z(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Доказательство

$G_z(z) = \iint_D f(x, y) dx dy = P\left(\frac{Y}{X} < z\right)$, D — заштрихованная область на рис. 4.17.

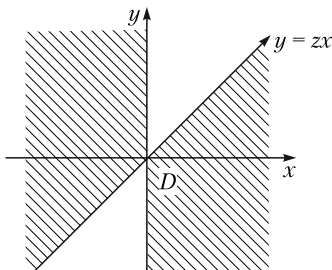


Рис. 4.17. К утверждению 4.13

Рассмотрим следующие случаи:

а) $x > 0$, тогда $\frac{y}{x} < z, y < zx$;

б) $x < 0$, тогда $\frac{y}{x} > z, y > zx$.

$$\text{Тогда } G_z(z) = \int_{-\infty}^0 dx \int_{zx}^{+\infty} f(xy) dy + \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{zx} f(x, y) dy.$$

Если X и Y независимы, то

$$G_z(z) = \int_{-\infty}^0 dx f_1(x) \int_{zx}^{+\infty} f_2(y) dy + \int_0^{+\infty} f_x f_1(x) \int_{-\infty}^{zx} f_2(y) dy;$$

$$g(z) = g_z(z) = - \int_{-\infty}^0 x f_1(x) f_2(zx) dx + \int_0^{+\infty} x f_1(x) f_2(zx) dx,$$

тогда при $X, Y \sim N(0, \sigma = 1)$

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \left(- \int_{-\infty}^0 x \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + z^2 x^2)\right) dx + \int_0^{+\infty} x \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + z^2 x^2)\right) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}(1 + z^2)\right) d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{\pi(1 + z^2)}$$

— а это плотность распределения закона Коши.

При $\sigma_x = \sigma_y = \sigma \neq 1$ имеем $Z = \frac{Y}{X} = \frac{\sigma_y Y_1}{\sigma_x X_1}$, где $X_1 = \frac{X}{\sigma_x}$; $Y_1 = \frac{Y}{\sigma_y}$; $\sigma_{X_1} = \sigma_{Y_1} = 1 \Rightarrow g(z) = \frac{1}{\pi(1 + z^2)}$.

В общем случае $\sigma_X \neq \sigma_Y$ и тогда $g_Z(z) = \frac{1}{\pi \left(1 + \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} z\right)^2} \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$.

Утверждение 4.14. СВ X имеет бета-распределение с плотностью $f(x; p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, $x \in [0; 1]$. При $p = q = 1$ СВ $X \sim B(1, 1)$ имеет распределение $R[0; 1]$.

Доказательство. Пусть $p = q = 1$, тогда

$$f(x; p=1, q=1) = \frac{(2)}{(1)(1)} x^{1-1}(1-x)^{1-1} = 1,$$

а это плотность распределения СВ $X \sim R[0; 1]$.

Утверждение 4.15. СВ $X \sim B(n, p)$, $n \rightarrow \infty$, $npq \geq 9$. Тогда

$$\frac{P(X=m)}{\frac{1}{\sqrt{npq}} \Phi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1; \quad \sum_{l=m_1}^{m_2} \frac{P(X=l)}{\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Доказательство. Первое утверждение следует из ЛТМЛ, а второе — из ИТМЛ.

Утверждение 4.16. СВ $X \sim R[0; 1]$; $X(k)$ — k -я порядковая статистика; $f_k(x)$ — ее плотность распределения ($X(k)$ — k -е наблюдение над СВ X по возрастанию). Тогда $L(X(k)) = B(k, n - k + 1)$.

Доказательство. $f(x) = 1$, $F(x) = x$ при $x \in [0; 1]$.

В математической статистике будет получено распределение СВ $X(k)$ в виде

$$\begin{aligned} f_k(x) &= n C_{n-1}^{k-1} f(x) (F(x))^{k-1} (1-F(x))^{n-k} = n C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k+1)} x^k (1-x)^{n-k}, \end{aligned}$$

а это плотность бета-распределения с $p = k$; $q = n - k + 1$ (так как $p + q = n + 1$) с плотностью распределения вида

$$f(x; p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}, \quad x \in [0; 1].$$

Утверждение 4.17. Пусть СВ $Y \sim N(0, 1)$. Тогда СВ $Z = Y^2 \sim \chi_1^2$, т.е. имеет распределение хи-квадрат с параметром (числом степеней свободы), равным 1, и в то же время $Z \sim \Gamma_{1/2, 1/2}$. Кроме того, имеется эквивалентность распределений: $\chi_n^2 \sim \Gamma_{n/2, 1/2}$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
 P(\chi_1^2 < x) &= P(|\xi_1| < \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} < \xi_1 < \sqrt{x}) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \\
 &= \left\{ y^2 = u; dy = \frac{du}{2\sqrt{u}}; \right. \left. 0 < y < \sqrt{x}; 0 < u < x \right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u}{2}} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u}{2}} u^{-\frac{1}{2}} du \Rightarrow \\
 \Rightarrow \text{плотность распределения}
 \end{aligned}$$

$$f_{\chi_1^2}(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = f\left(x; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim \Gamma_{\alpha, \lambda}, \text{ так как } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Выпишем полученную в параграфе 4.3 характеристическую функцию для СВ $X \sim \Gamma_{\alpha, \lambda}$:

$$g(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha}.$$

Тогда характеристическая функция χ_1^2 есть $g_{\chi_1^2}(t) = (1 - 2it)^{-\frac{1}{2}}$, а для χ_n^2 получаем $g_{\chi_n^2}(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$, откуда

$$f_{\chi_n^2}(x) = f\left(x; \alpha = \frac{n}{2}, \lambda = \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}, \quad x \geq 0,$$

т.е. $\chi_n^2 \sim \Gamma_{\alpha, \lambda}$, где $\alpha = \frac{n}{2}, \lambda = \frac{1}{2}$.

Утверждение 4.18. СВ $T = U \sqrt{\frac{n}{V}}$, где $U \sim N(0, 1)$; $V \sim \chi_n^2, -\infty < x < \infty$, имеет распределение Стьюдента.

Доказательство. Обозначим через $G(t)$ функцию распределения СВ T :

$$G(t) = P(T < t) = P\left(\frac{U\sqrt{n}}{\sqrt{v}} < t\right) = P\left(U < \frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{v}\right).$$

Найдем совместную плотность распределения СВ U и V :

$$\begin{aligned}
 f(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \exp\left(-\frac{u^2}{2} - \frac{v}{2}\right) v^{\frac{n}{2}-1}; \\
 G(t) &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \iint_{U < \frac{t\sqrt{n}}{v}} \exp\left(-\frac{u^2}{2} - \frac{v}{2}\right) v^{\frac{n}{2}-1} du dv =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ x = \frac{u}{\sqrt{v}}; x\sqrt{v} = u; dx\sqrt{v} = du; -\infty < u < \frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{v}; \right. \\
&\quad \left. a = \frac{t}{\sqrt{n}}; -\infty < x < a; A = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right\} = \\
&= A \int_0^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{a\sqrt{v}} \exp\left(-\frac{u^2+v}{2}\right) v^{\frac{n-1}{2}} du = A \int_0^{+\infty} dv \int_{-\infty}^a \exp\left(\frac{x^2+1}{2}v\right) v^{\frac{n-1}{2}} dx = \\
&= A \int_{-\infty}^a dx \int_0^{+\infty} v^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2+1}{2}v\right) dv = \left\{ \begin{aligned} &\frac{x^2+1}{2}v = y; dv = \frac{2dy}{x^2+1}; \\ &v = \frac{2y}{x^2+1}; \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \end{aligned} \right\} = \\
&= A \int_{-\infty}^a dx \int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2+1} e^{-y} \frac{2^{\frac{n-1}{2}} y^{\frac{n-1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} dy = A \int_{-\infty}^a dx \int_0^{+\infty} \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-y} dy = \\
&= A 2^{\frac{n+1}{2}} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{+\infty} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-y} dy = A 2^{\frac{n+1}{2}} \int_{-\infty}^a \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \\
&= \frac{2^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2^{\frac{n}{2}} \sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^a \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\frac{t}{\sqrt{n}}} \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} = \\
&= \left\{ \begin{aligned} &x = \frac{y}{\sqrt{n}}; -\infty < x < \frac{t}{\sqrt{n}}; \\ &dx = \frac{dy}{\sqrt{n}}; -\infty < y < t; \\ &y = x\sqrt{n} \end{aligned} \right\} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^t \frac{dy}{\left(\frac{y^2}{n} + 1\right)^{\frac{n+1}{2}}} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{плотность распределения СВ } T, \text{ т.е. } S_n(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \text{ ч.т.д.}$$

Утверждение 4.19. Пусть СВ $\xi_1, \dots, \xi_m$ — независимы, $\xi = \sum_{i=1}^m \xi_i^2$;

СВ $\eta_1, \dots, \eta_n$ — независимы, $\eta = \sum_{j=1}^n \eta_j^2$; $\xi_i, \eta_j \sim N(0, \sigma^2)$; $i = 1, \dots, m$; $j =$

$= 1, \dots, n$; $X = \frac{\xi}{\eta}$; тогда СВ X имеет распределение Фишера с плот-

ностью

$$f_{mn}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{t^{\frac{m}{2}-1}}{(t+1)^{\frac{m+n}{2}}}, \quad t > 0.$$

Доказательство. СВ ξ и η независимы $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_{\xi,\eta}(x, y) &= f_{\xi}(x)f_{\eta}(y) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) y^{\frac{m}{2}-1} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)}{2^{\frac{n}{2}} \sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{m}{2}} \sigma^m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}, \\ F_{mn}(t) &= P(X < t) = \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}} \sigma^{m+n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \iint_{\substack{y>0 \\ 0 < x < ty}} x^{\frac{m}{2}-1} y^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x+y}{2\sigma^2}\right) dx dy = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{y} = u; \quad y = v; \quad x = vu; \\ dx = y du; \quad dy = dv; \\ 0 < x < ty; \quad 0 < u < t \end{array} \right\} = a_{mn} \int_0^{+\infty} \int_0^{ty} x^{\frac{m}{2}-1} y^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x+y}{2\sigma^2}\right) dx dy = \\ &= a_{mn} \int_0^{+\infty} \int_0^t u^{\frac{m}{2}-1} v^{\frac{m}{2}-1} v^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{uv+v}{2\sigma^2}\right) v du dv = \\ &= a_{mn} \int_0^t u^{\frac{m}{2}-1} du \int_0^{+\infty} v^{\frac{m+n}{2}-1} \exp\left(-\frac{u+1}{2\sigma^2} v\right) dv = \\ &= a_{mn} \int_0^t u^{\frac{m}{2}-1} du \int_0^{+\infty} \left(\frac{u+1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{m+n}{2}-1} \left(\frac{2\sigma^2}{u+1}\right)^{\frac{m+n}{2}-1} = \\ &= v^{\frac{m+n}{2}-1} \exp\left(-\frac{u+1}{2\sigma^2} v\right) \frac{2\sigma^2}{u+1} \frac{u+1}{2\sigma^2} dv = \\ &= a_{mn} \int_0^t u^{\frac{m}{2}-1} \left(\frac{2\sigma^2}{u+1}\right)^{\frac{m+n}{2}-1} \frac{2\sigma^2}{u+1} du \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) = \\ &= \frac{2^{\frac{m+n}{2}} \sigma^{m+n} \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{2^{\frac{m+n}{2}} \sigma^{m+n} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^t \frac{u^{\frac{m}{2}-1}}{(u+1)^{\frac{m+n}{2}}} du = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^t \frac{u^{\frac{m}{2}-1}}{(u+1)^{\frac{m+n}{2}}} du. \end{aligned}$$

Дифференцируем $F_{mn}(t)$ по t , получим $f_{mn}(t)$ — плотность распределения Фишера.

Утверждение 4.20. Закон распределения Фишера F_{mn} в точке $\frac{t}{1-t}$ совпадает с бета-распределением с плотностью распределения $f_\beta(x; p, q)$ при $p = \frac{m}{2}, q = \frac{n}{2}$.

Доказательство. Проверим это утверждение непосредственным вычислением:

$$\begin{aligned} F_{mn}^1\left(\frac{t}{1-t}\right) &= \frac{1}{(1-t)^2} f_{mn}\left(\frac{t}{1-t}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{t^{\frac{m}{2}-1}}{(1-t)^{\frac{m}{2}-1}(1-t)^2 \left(\frac{t}{1-t} + 1\right)^{\frac{m+n}{2}}} = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{t^{\frac{m}{2}-1} (1-t)^{\frac{m}{2} + \frac{n}{2}}}{(1-t)^{\frac{m}{2}+1}} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{\frac{m}{2}-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1}. \end{aligned}$$

При $p = \frac{m}{2}, q = \frac{n}{2}$ имеем

$$f_\beta(t; p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} t^{p-1} (1-t)^{q-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{\frac{m}{2}-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1},$$

т.е. $f_\beta(t; p, q)$ совпадает с плотностью распределения Фишера в точке $\frac{t}{1-t}$, ч.т.д.

Утверждение 4.21 (связь геометрического и показательного распределений). Показательное распределение возникает как предельное для геометрического распределения $G(p)$ в следующей схеме: в моменты времени $0, h, 2h, \dots$ ($h \rightarrow 0$) производятся независимые испытания с вероятностью успеха, равной $P_h = \lambda h$ ($\lambda = \text{const} > 0$); X_h — момент первого успеха. Тогда число испытаний до первого успеха $Y = \frac{X_h}{h} \sim \Gamma(p = \lambda h)$.

Доказательство

$$P\{X_h \geq x\} = P\left\{\frac{X_h}{h} \geq \frac{x}{h}\right\} \approx P\left\{\frac{X_h}{h} \geq m\right\} = (1 - P_h)^m = (1 - \lambda h)^{\frac{x}{h}} \approx e^{-\lambda x}$$

(m — число испытаний, $m = \left[\frac{x}{h}\right]$, где операция $[\]$ — взятие целой части числа) $\Rightarrow F_y = 1 - P(X_h \geq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Утверждение 4.22. Пусть $\xi \sim P(\lambda)$, $P(x = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$;

тогда $L(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} N(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Доказательство. Имеем

$$\ln P(\xi = k) = k \ln \lambda - \lambda - \ln k!. \quad (*)$$

Пусть известно, что $\Gamma(k+1) = \lambda^{\lambda + \frac{1}{2}} e^{-\lambda} \sqrt{2\pi} \left(1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right)$; кроме того, $\Gamma(k+1) = k!$, так как k — целое; поэтому

$$\begin{aligned} \ln k! &= \ln \Gamma(k+1) = \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln k - k + \ln \sqrt{2\pi} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = \\ &= \left\{ u = \frac{k - \lambda}{\sqrt{\lambda}}; k = \lambda + u\sqrt{\lambda} = \lambda \left(1 + \frac{u}{\sqrt{\lambda}} \right) \right\} = \\ &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln \lambda + (\lambda + u\sqrt{\lambda}) \ln \left(1 + \frac{u}{\sqrt{\lambda}} \right) - k + \ln \sqrt{2\pi} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = \\ &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln \lambda + (\lambda + u\sqrt{\lambda}) \left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}} - \frac{u^2}{2\lambda} \right) - k + \ln \sqrt{2\pi} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = \\ &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln \lambda + u\sqrt{\lambda} - \frac{u^2}{2} + u^2 - \frac{u^3}{2\sqrt{\lambda}} - k + \ln \sqrt{2\pi} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = \\ &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln \lambda + u\sqrt{\lambda} + \frac{u^2}{2} - k + \ln \sqrt{2\pi} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \end{aligned}$$

Подставив полученное выражение в формулу (*), получим

$$\begin{aligned} \ln P(\xi = k) &= k \ln \lambda - \lambda - \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln \lambda - u\sqrt{\lambda} - \frac{u^2}{2} + \lambda + u\sqrt{\lambda} - \ln \sqrt{2\pi} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = \\ &= -\frac{u^2}{2} - \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \ln \lambda + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(\xi = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \left(1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right), \end{aligned}$$

что соответствует $N(\lambda, \sqrt{\lambda})$, ч.т.д.

Для следующего утверждения нам понадобится определение пуассоновского потока. Пуассоновским потоком называется поток событий, таких что:

1) числа наступлений событий в непересекающихся интервалах независимы (независимость приращений);

2) $\xi(t + t_0) - \xi(t_0) = \xi(\gamma) - \xi(0) = \xi(t)$ (однородность, или стационарность);

$$3) P(x(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}; k = 0, 1, 2, \dots$$

Утверждение 4.23. Связь распределений $E(\lambda)$ и $\pi(\lambda t)$. Пусть в пуассоновском потоке $\xi(t)$ — количество событий ξ за время t . Тогда $\xi(t) \sim \pi(\lambda t)$, т.е. $P(x(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$, а интервалы времени между событиями $T_i \sim E(\lambda)$.

Доказательство. Обозначим T_i — время между соседними событиями пуассоновского потока. Тогда

$$G(t) = P(T_i < t) = P(\xi(t) \geq 1) = 1 - P(x(t) = 0) = 1 - \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}$$

при $t \geq 0$ и $G(t) = 0$ при $t < 0$, т.е. $G(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \end{cases}$ ч.т.д.

Утверждение 4.24 (связь распределений $\Gamma_{\alpha, \lambda}$ и $\pi(\lambda)$). Пусть $\xi \sim \Gamma_{\alpha, \lambda}$, $\eta \sim \pi(\lambda x)$. Если брать α — натуральные числа и $\lambda = 1$, то при указанных частных значениях параметров α и λ в целых точках гамма-распределение совпадает с пуассоновским и является при этих значениях параметров непрерывным аналогом распределения Пуассона.

Доказательство. Имеем $P(\eta = k) = \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$;

$$f_{\xi}(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \quad \alpha - \text{целое} = \lambda \frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\lambda x};$$

$$F_{\eta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x};$$

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \frac{\lambda}{(\alpha-1)!} \int_0^x (\lambda t)^{\alpha-1} e^{-\lambda t} d\lambda t.$$

При $\lambda = 1$, α — целое $f_{\xi}(x; \alpha - \text{целое}, \lambda = 1) = \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-x}$ и при $\alpha = 1, 2, \dots$ совпадает с $P(\eta = \alpha - 1) = \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-x}$, ч.т.д.

4.7. Виды вероятностных сходимостей

При доказательстве предельных результатов теории вероятностей используются различные виды сходимости случайных величин. Поэтому для понимания этих результатов необходимо четко определить виды вероятностной сходимости с установлением связей между ними.

Пусть $\{\Omega, A, P\}$ — вероятностное пространство, на котором заданы случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ и последовательность случайных величин $\{\xi_n\} = \{\xi_n(\omega)\}$.

1. Сходимость по вероятности (п.в.).

Последовательность СВ $\{\xi_n\}$ сходится к СВ ξ по вероятности, если для любого $\varepsilon > 0$ $P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Обозначается $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \xi$ или $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{п.в.} \xi$.

2. Сходимость с вероятностью 1, или почти наверное, или почти всюду (п.н.).

Последовательность $\{\xi_n\}$ сходится к ξ почти наверное относительно меры Φ , если $P\{\xi_n \rightarrow \xi\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, т.е. $\xi_n \rightarrow \xi$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $\omega \in \Omega$, кроме, может быть, принадлежащих множеству меры нуль ($\omega \in R, P(R) = 0$), или (доказательство см. ниже) $P\left(\sup_{k \leq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Обозначается $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{п.н.} \xi$.

3. Сходимость в среднем r -го порядка (с.п.р) (в среднеквадратическом при $r = 2$ (с.к.)).

Последовательность СВ $\{\xi_n\}$ сходится к СВ ξ в с.п.р, если $M|\xi_n - \xi|^r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Обозначается $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(r)} \xi$ или $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^r} \xi$.

4. Слабая сходимость (с.с.), или сходимость по распределению или в основном (п.р.).

Последовательность функций распределения $\{F_n\} = \{F_n(x)\}$ слабо сходится к функции распределения $F = F(x)$, если для любой непрерывной ограниченной функции $g(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x),$$

или (без доказательства) $F_n(x) \rightarrow F(x)$ в каждой точке непрерывности $F(x)$. Обозначается $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \xi$, или $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{с.с.} \xi$, или $F_n \Rightarrow F$.

Приведем в виде схемы связи определенных видов вероятностных сходимостей (рис. 4.18).

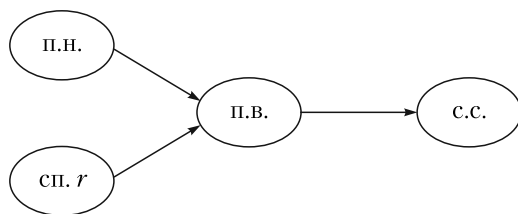


Рис. 4.18. Связи сходимостей

Изображение означает следование сходимостей в направлении стрелок. Приведем доказательство этой схемы в виде доказательств отдельных утверждений.

Утверждение 4.25. п.н. $\Rightarrow$ п.в.

Доказательство. Пусть $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$. Это значит, что $P(|\xi_m - \xi| > \varepsilon \text{ хотя бы при одном } m \geq n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Пусть $A = \{|\xi_m - \xi| > \varepsilon \text{ хотя бы при одном } m \geq n\}$, $B = \{|\xi_m - \xi| > \varepsilon\}$. Тогда

$$B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A),$$

откуда и следует утверждение, так как при $P(B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ имеем сходимость по вероятности.

Утверждение 4.26. $L^r \Rightarrow$ п.в.

Доказательство. Пусть $X = \xi_n - \xi$. Тогда запись $P(|X| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ означает сходимость по вероятности, и при любом $\varepsilon > 0$.

$$P(|X| \geq \varepsilon) = \begin{cases} \sum_{|X| \geq \varepsilon} p_k \leq \frac{1}{\varepsilon^r}, \sum_{i=k+1} |x_i|^r p_i \leq \frac{1}{\varepsilon^r}, \sum_{i=1} |x_i|^r p_i = \frac{1}{\varepsilon^r} M|X|^r, & \text{если } x_k < \varepsilon \leq x_{k+1}; \\ \int_{|X| \geq \varepsilon} f(x) dx \leq \frac{1}{\varepsilon^r}, \int |x|^r f(x) dx \leq \frac{1}{\varepsilon^r}, \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^r} M|X|^r, \end{cases}$$

откуда и следует утверждение.

Утверждение 4.27. п.в. $\Rightarrow$ с.с.

Доказательство. Пусть $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, т.е. $P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, или СВ $\eta_n = (\xi_n - \xi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Тогда

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(\xi_n < x) = P(\xi_n < x, |\eta_n| < \varepsilon) + P(\xi_n < x, |\eta_n| \geq \varepsilon) = \\ &= P(\xi_n < \varepsilon, |\xi_n - \xi| < \varepsilon) + P(\xi_n < x, |\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq P(\xi < x + \varepsilon) + P(|\eta_n| \geq \varepsilon) = \\ &= F(x + \varepsilon) + \underbrace{P(|\eta_n| \geq \varepsilon)}_{\rightarrow 0} \Rightarrow F_n(x) \leq F(x), \end{aligned}$$

так как $\{\xi_n - \varepsilon < \xi < \xi_n + \varepsilon, \xi_n < x\} \subset \{\xi < x + \varepsilon\}$.

Поменяв местами в предшествующем соотношении ξ и ξ_n , аналогично получим $F(x) \leq F_n(x)$, откуда следует, что $F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x)$ в каждой точке непрерывности $F(x)$, что и означает слабую сходимость.

Таким образом, все следования доказаны. Для обоснования неследований схемы необходимо привести соответствующие примеры.

Пример 1. Покажем на примере, что п.в. $\nRightarrow$ п.н. Пусть дана СВ с рядом распределения

ξ_n	0	1
p	$1 - \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

Пусть $\{\xi_n\}$ — независимые СВ,

$$P(|\xi_n| > \varepsilon) = P(\xi_n = 1) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} 0;$$

$$P(\xi_n \rightarrow 0) = P(|\xi_m| < \varepsilon, \forall m \geq n) \leq P(|\xi_m| < \varepsilon, \forall n \leq m \leq N) =$$

$$= \prod_{i=m}^N P(\xi_m = 0) = \frac{n-1}{n} \frac{n}{n+1} \dots \frac{N-2}{N-1} \frac{N-1}{N} = \frac{n-1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

так как N можно брать как угодно большим, $\Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0$.

Пример 2. Покажем на примере, что п.в. $\nrightarrow$ с.п. $r = 2$. Пусть дана СВ ξ с рядом распределения

ξ_n	0	n
p	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$

$$P(\xi_n \geq \varepsilon) = P(\xi_n = n) = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} 0. \quad M|\xi_n|^2 = 1 \nrightarrow 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{с.п.}}^2 0.$$

Пример 3. Покажем на примере, что п.н. $\nrightarrow$ с.п. $r = 2$. Пусть дана СВ ξ с рядом распределения

ξ_n	0	n
p	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$

$$P(\xi_n \nrightarrow 0) = P(|\xi_m| \geq \varepsilon \text{ хотя бы при одном } m \geq n) \leq \sum_{m=n}^{\infty} P(\xi_m = n) =$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0. \quad M|\xi_n|^2 = 1 \nrightarrow 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{с.п.}}^{r=2} 0.$$

Пример 4. Покажем на примере, что с.п. $r = 2 \neq$ п.н. Пусть дана СВ ξ с рядом распределения

ξ_n	0	1
p	$1 - \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

$\{\xi_n\}$ — независимые. Тогда (см. пример 1) $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0$;

$$M|\xi_n|^2 = \frac{1}{n} \nrightarrow 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{с.п.}}^{r=2} 0.$$

Пример 5. Покажем на примере, что с.с. $\nrightarrow$ п.в. Пусть дана СВ ξ с рядом распределения

$X = X_n$	-1	1
p	0,5	0,5

$Y = Y_n$	-1	1
p	0,5	0,5

$Y_n = -X_n$. Тогда $X_n \xrightarrow{d} Y$, но $P(|X_n - Y| < \varepsilon) = 0$, если $\varepsilon < 2 \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} Y$.

Пример 6. Покажем на примере возможность одновременной сходимости п.в., п.н., с.п. $r = 2$. Пусть дана СВ ξ с рядом распределения

ξ_n	0	n
p	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$

В примерах 2 и 3 показано, что при $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} 0$, $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0$. Кроме того,

$$M|\xi_n|^2 = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{с.п.}, r=2} 0.$$

Схема связей сходимостей распределений в общем случае полностью доказана. Однако в отдельных частных случаях оказывается, что приведенные виды сходимостей могут быть совпадающими, т.е. эквивалентными. Сформулируем эти и некоторые другие ньюансы в виде утверждений с доказательством более простых из них.

Утверждение 4.28. Если $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} \xi$ и $\{\xi_n\}$ монотонно возрастает или убывает, то $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.п.}} \xi$.

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим, что $\xi = 0$ (иначе возьмем вместо ξ_n случайную величину $\eta_n = \xi_n - \xi$), $\xi_n > 0$, $\xi_n \downarrow$ — монотонно убывает. Тогда факт $P(\xi_n \not\rightarrow 0)$ означал бы, что существует $\varepsilon > 0$ и множество A такое, что $P(A) > \delta > 0$ и $\sup_{k \geq n} \xi_k > \varepsilon$ при $\omega \in A$ и при всех n . Но так как $\xi_n \downarrow$, то $\sup_{k \geq n} \xi_k = \xi_n$, и это значит, что $P(\xi_n > \varepsilon) \leq P(A) > \delta > 0$, что противоречит сходимости по вероятности: $P(\xi_n > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Утверждение 4.29. Если $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} a$, где $a = \text{const}$, то $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} a$.

Доказательство. Не нарушая общности, положим $a = 0$ (иначе рассмотрим случайную величину $\eta_n = \xi_n - a$). Пусть $F_n(x)$ — функция распределения случайной величины ξ_n . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ $F_n(\varepsilon) \rightarrow 1$, $F_n(-\varepsilon) \rightarrow 0$, следовательно,

$$P(|\xi_n| \geq \varepsilon) = P(\xi_n \leq -\varepsilon, \xi_n \geq \varepsilon) = 1 - F_n(\varepsilon) + F_n(-\varepsilon) \rightarrow 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} a = 0, \text{ ч.т.д.}$$

Утверждение 4.30. Из $\xi_n \xrightarrow{\text{с.п.}} \xi$ не следует сходимость моментов.

Доказательство. Для доказательства утверждения используем тот же пример, что рассматривался выше. Пусть дана СВ ξ с рядом распределения

ξ_n	0	1
p	$1 - \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

$$P(|\xi_n| > \varepsilon) = P(\xi_n = n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{с.с.}} 0;$$

$$M\xi_n = 1; \quad \xi_n \rightarrow \xi = 0 \Rightarrow M\xi = 0 \Rightarrow M\xi_n \not\rightarrow M\xi.$$

Сходимости моментов нет, так как в первом определении слабой сходимости для любой непрерывной ограниченной функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_n(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x),$$

а для сходимости моментов $g(x)$ имеет вид x^n и не является ограниченной.

Утверждение 4.31. Для сходимости $\xi_n \rightarrow \xi$ в среднеквадратическом необходимо и достаточно следующее:

- 1) сходимость последовательности $M\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M\xi$;
- 2) сходимость дисперсии $D(\xi_n - \xi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Доказательство

$$M|\xi_n - \xi|^2 = D(\xi_n - \xi) + (M\xi_n - M\xi)^2.$$

Утверждение 4.32. Если рассматривается сходимость неслучайных величин, то сходимости п.в., п.н. и с.п.р совпадают (очевидно).

Утверждение 4.33. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.п.}} \xi$ тогда и только тогда, когда $\eta_n = \sup_{k \geq n} |\xi_n - \xi| \rightarrow 0$.

Доказательство. Очевидно, что $\xi_n \xrightarrow{\text{п.п.}} \xi \equiv \eta_n \xrightarrow{\text{п.п.}} 0$. Но последовательность $\eta_n \downarrow$ (монотонно убывающая). Тогда по утверждению 1 $\eta_n \xrightarrow{\text{п.п.}} 0$, ч.т.д.

Утверждение 4.34. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$ сходится, то $\xi_n \xrightarrow{\text{п.п.}} \xi$.

Доказательство. Утверждение следует из очевидного неравенства

$$P\left(\sum_{k \leq n} \{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\}\right) = \sum_{k=n}^{\infty} P(|\xi_k - \xi| > \varepsilon).$$

Утверждение 4.35. Если $\xi_n \xrightarrow{\text{п.в.}} \xi$, то существует подпоследовательность $\{n_k\}$ такая, что $\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$.

Доказательство. Утверждение следует из того, что достаточно взять $\{n_k\}$ такие, чтобы $P(|\xi_{n_k} - \xi| > \varepsilon) \leq \frac{1}{k^2}$, и воспользоваться утверждением 4.28.

Утверждение 4.36 (без доказательства). Если $\xi_n = \sum_{k=1}^n \eta_k$, $\{\eta_k\}$ — независимые СВ, то сходимость $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} \xi$ влечет за собой сходимость $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \xi$.

Утверждение 4.37. При доказательстве теоремы Хинчина методом характеристических функций из соответствия сходимости функций распределения и характеристических функций следует, что $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} m = \text{const}$, а это на основании утверждения 4.29 приводит к $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} m$, что и утверждается теоремой Хинчина.

Рассмотрим задачи на исследование сходимости.

Задача 4.67. СВ ξ_n заданы рядом распределения

ξ_n	0	$\sqrt{n}$
p	$1 - \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

Проверить сходимость п.в. и с.п.р СВ ξ_n к 0.

Решение

$$P(|\xi_n| > \varepsilon) = P(\xi_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} 0;$$

$$M\xi_n^2 = 1 \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ при } r > 2, M\xi_n^r = n^{\frac{r}{2}-1}; M\xi_n^r \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow \xi_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{с.п.р.}} 0.$$

Задача 4.68. СВ ξ_n заданы рядом распределения

ξ_n	0	1
p	$1 - p_n$	p_n

Исследовать сходимость ξ_n к 0 п.в., п.н. и с.п.р.

Решение

$$P(|\xi_n| > \varepsilon) = p_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} 0.$$

$$\begin{aligned} P(\xi_n \not\xrightarrow{} 0) &= P(|\xi_m| \geq \xi \text{ хотя бы при одном } m \geq n) = \sum_{m=n}^{\infty} P(\xi_m = 1) = \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} p_m \rightarrow 0, \text{ если } \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty \text{ (сходится), и тогда } \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0. \end{aligned}$$

$$M|\xi_n|^r = p_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ тогда } \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{с.п.р.}} 0.$$

Задача 4.69. Независимые СВ ξ_n заданы рядом распределения

ξ_n	0	$\sqrt{\ln n}$
p	$1 - \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

Исследовать сходимость ξ_n к 0.

Решение

$$P(\xi_n > \varepsilon) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} 0;$$

$$\begin{aligned} P(\xi_m > \varepsilon \text{ при всех } m \geq n) &\leq P(\xi_m < \xi \text{ при всех } n \leq m \leq N) = \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{n}{n+1} \dots \frac{N-1}{N} = \frac{n-1}{N} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

за счет выбора большого $N \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0$.

Задача 4.70. СВ ξ_n заданы рядом распределения

ξ_n	0	$\frac{1}{n}$
p	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$

Исследовать сходимость СВ ξ_n к 0.

Решение

$$P(\xi_n > \varepsilon) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} 0;$$

$$\begin{aligned} P(\xi_n \rightarrow 0) &= P(\xi_m < \varepsilon \text{ при всех } m \geq n) \leq P(\xi_m < \varepsilon \text{ при всех } n \leq m \leq N) = \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{n}{n+1} \dots \frac{N-1}{N} = \frac{n-1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

за счет выбора большого $N \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0; M|\xi_n|^2 = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{с.п.}, r=2} 0$.

Задача 4.71. СВ ξ_n заданы рядом распределения

ξ_n	0	$\sqrt{n}$
p	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$

Исследовать сходимость СВ ξ_n к 0.

Решение

$$P(\xi_n > \varepsilon) = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} 0;$$

$$\begin{aligned} P(\xi_n \not\rightarrow 0) &= P(|\xi_m| \geq \varepsilon \text{ хотя бы при одном } m \geq n) = \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0; \end{aligned}$$

$$M|\xi_n|^2 = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{с.п.}, r=2} 0.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Как выглядят характеристические функции для СВ $X \sim N(a, \sigma)$ и СВ $Z = \sum_{i=1}^n X_i$, где $\{X_i\}$ — независимые СВ, $X_i \sim N(a_i, \sigma_i)$, $i = 1, \dots, n$?
2. Докажите, что наилучшим приближением в среднеквадратичном для ненаблюдаемой компоненты по наблюдаемой компоненте X является условное математическое ожидание $M(Y/X)$.
3. Докажите линейность нормальных регрессий.
4. Как распределение χ_n^2 (хи-квадрат) связано с гамма-распределением?
5. Чему равна плотность распределения закона Симпсона — закона распределения суммы двух независимых СВ с равномерным распределением $R[0; 1]$?
6. Покажите связь законов распределения Стюдента и Коши.
7. Приведите пример последовательности СВ, для которой есть сходимость к предельной по вероятности, но нет сходимости в среднеквадратическом.
8. Докажите схему связей вероятностных сходимостей.
9. В случае $m = \text{const}$ покажите эквивалентность сходимостей $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} 0$ и $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$.

Литература

Основная

1. *Большев, Л. Н.* Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. — М., 1983.
2. *Боровков, А. А.* Теория вероятностей / А. А. Боровков. — М. : Наука, 1976.
3. *Вентцель, Е. С.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — М. : Наука, 1970.
4. *Вентцель, Е. С.* Теория вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — М. : Наука, 1973.
5. *Дейвид, Г.* Порядковые статистики / Г. Дейвид. — М. : Наука, 1979.
6. *Емельянов, Г. В.* Задачник по теории вероятности и математической статистике / Г. В. Емельянов, В. П. Скитович. — Л. : Изд-во Ленинградского ун-та, 1967.
7. *Ивченко, Г. И.* Задачи с решениями по математической статистике / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев, В. П. Чистяков. — М., 2007.
8. *Ивченко, Г. И.* Математическая статистика / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев. — М. : URSS, 2014.
9. *Ивченко, Г. И.* Основные вероятности распределения / Г. И. Ивченко, Н. Ю. Энатская. — М. : МИЭМ, 2008.
10. *Козлов, М. В.* Введение в математическую статистику / М. В. Козлов, А. В. Прохоров. — М. : Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 1987.
11. *Крамер, Г.* Математические методы статистики / Г. Крамер. — М. : Мир, 1975.
12. *Козлов, М. В.* Электронные теории вероятности в примерах и задачах / М. В. Козлов. — М. : Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 1990.
13. *Леман, Э.* Проверка статистических гипотез / Э. Леман. — М., 1974.
14. *Прохоров, А. В.* Задачи по теории вероятностей / А. В. Прохоров, В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков. — М. : Наука, 1986.
15. *Розанов, Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика / Ю. А. Розанов. — М. : Наука, 1985.
16. *Свешников, А. А.* Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / А. А. Свешников [и др.]. — 5-е изд. — М. : URSS, 2013.
17. *Севастьянов, Б. А.* Сборник задач по теории вероятностей / Б. А. Севастьянов, А. Н. Зубков, В. П. Чистяков. — М. : Наука, 1980.
18. *Смирнов, Н. В.* Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н. В. Смирнов, И. В. Дунин-Барковский. — М. : Наука, 1965.
19. *Уилкс, С.* Математическая статистика / С. Уилкс. — М. : Наука, 1967.
20. *Феллер, В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1 / В. Феллер. — М., 1984.

**Новые издания по дисциплине «Теория вероятностей»
и смежным дисциплинам**

1. *Андрухаев, Х. М.* Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник задач : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / Х. М. Андрухаев. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

2. *Гмурман, В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

3. *Гмурман, В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

4. *Далингер, В. А.* Теория вероятностей и математическая статистика с применением Mathcad : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков, Б. С. Галюкшов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

5. *Ивашев-Мусатов, О. С.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для академического бакалавриата / О. С. Ивашев-Мусатов. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

6. *Калинина, В. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для академического бакалавриата / В. Н. Калинина. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2015.

7. *Кацман, Ю. Я.* Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры с решениями : учебник для прикладного бакалавриата / Ю. Я. Кацман. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

8. *Кремер, Н. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

9. *Кремер, Н. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика : в 2 ч. Часть 1. Теория вероятностей : учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

10. *Кремер, Н. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика : в 2 ч. Часть 2. Математическая статистика : учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

11. *Попов, А. М.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для бакалавров / А. М. Попов, В. Н. Согников. — М. : Издательство Юрайт, 2015.

12. *Сидняев, Н. И.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для бакалавров / Н. И. Сидняев. — М. : Издательство Юрайт, 2015.

13. *Энатская, Н. Ю.* Теория вероятностей и математическая статистика для инженерно-технических направлений : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / Н. Ю. Энатская, Е. Р. Хакимуллин. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

Задачи для самостоятельного решения

Раздел I

Глава 1

1. Доказать, что если $A \neq \Omega$, $A \neq \emptyset$ и $P(B/A) = P(B/\bar{A})$, то события A и B независимы.
2. Доказать, что если события A и B_1 , A и B_2 независимы, то события A и $B_1 B_2$ независимы тогда, когда независимы события A и $B_1 + B_2$.
3. Пусть $AB \subset C$. Доказать, что тогда $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$.
4. $ABC \subset D$. Доказать, что тогда $P(D) \geq P(A) + P(B) + P(C) - 2$.
5. Доказать, что из независимости событий A , B и C следует независимость событий $\bar{A}$, $\bar{B}$ и C .
6. События A , B и C имеют одинаковые вероятности, попарно независимые и все три произойти не могут. Найти максимально возможное значение вероятностей этих событий.
7. Имеется N предметов разного качества. С какой вероятностью при выборе из них наугад по одному без возвращения r предметов каждый следующий будет лучше предыдущего?
8. На шахматную доску размером $N \times N$ случайным образом ставят N ладей. С какой вероятностью они не побьют друг друга?
9. С какой вероятностью при случайной расстановке k черных и n красных различных только цветом шаров ($n \geq k$) никакие два красные шара не окажутся рядом?
10. Имеется n_1 букв «а» и n_2 букв «б». Найти вероятность того, что n -й букве «а» при случайном упорядочивании всех букв предшествует ровно m букв «б» ($n < n_1$, $m < n_2$).
11. Имеется k пар различных перчаток. Из них случайным образом выбрано s штук. С какой вероятностью среди них окажется ровно m пар ($2m < s < 2k$).
12. m_1 красных и m_2 черных пронумерованных шаров случайным образом размещают по $2n$ ящикам ($m_1 \leq n$, $m_2 \leq n$). С какой вероятностью красные шары окажутся в m_1 ящиках с четными номерами, а черные — в m_2 ящиках с нечетными номерами?

13. В коробке 10 пар перчаток разного цвета. С какой вероятностью среди 10 наугад выбранных перчаток найдется хотя бы одна пара, если перчатки в паре различимы.

14. k_n различных шаров наугад размещают по n различным ящикам. С какой вероятностью во всех ящиках окажется поровну шаров?

15. n неразличимых шаров наугад размещают по n различным ящикам. С какой вероятностью при этом ровно один ящик окажется пустым?

16. Из 10 карточек с номерами от 0 до 9 наугад выбирают четыре карточки с возвращением. Найти вероятность того, что в полученном четырехзначном номере будет три одинаковых цифры.

17. Колода карт (52) раздается поровну игрокам A , B , C и D . Найти вероятность того, что игроки A и B получают по два туза.

18. В партии 25 деталей, из них пять — с дефектами. Из партии наугад выбрано четыре детали. С какой вероятностью среди них хотя бы одна без дефекта?

19. 10 мальчиков и 10 девочек в случайном порядке садятся на 20 расположенных в ряд стульев. Найти вероятность того, что мальчики займут стулья с четными номерами.

20. M человек садятся в поезд, состоящий из N вагонов. Каждый выбирает вагон наугад, независимо от других. Какова вероятность того, что все они сядут в разные вагоны, при $M \leq N$.

21. 20 спортсменов, из которых шесть — мастера спорта, случайным образом делят на две группы по 10 человек. С какой вероятностью обе группы будут иметь одинаковое число мастеров спорта?

22. Из колоды карт (52) наугад выбрано 13 карт. С какой вероятностью среди них будет три короля, два туза и не будет дам?

23. Деталь проходит последовательную независимую обработку на n станках с вероятностью брака p_i на i -м станке, $i = 1, \dots, n$. Найти вероятность получения дефектной детали.

24. Бросают две различные игральные кости. С какой вероятностью выпадет две шестерки, если известно, что на обеих гранях выпало число, большее 3?

25. Стрелок имеет пять патронов и стреляет до первого попадания с вероятностью попадания при каждом выстреле, равной 0,7. С какой вероятностью не все патроны будут израсходованы?

26. Бросают три различные игральные кости. С какой вероятностью выпали три шестерки, если известно, что среди выпавших чисел есть шестерки?

27. Найти надежность работы электрической цепи, если надежность каждого элемента равна p (рис. П.1).

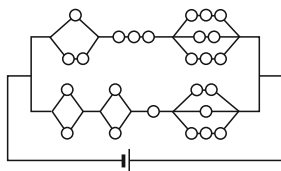


Рис. П.1. Электрическая цепь (элементы цепи изображены кружками)

28. В урне 30 пронумерованных шаров по 10 каждого цвета: красный, желтый, зеленый. С какой вероятностью три наугад выбранных шара окажутся разных цветов?

29. В партии из N различных деталей M бракованных. Проверят n наугад взятых деталей ($n \leq N$). Найти вероятность того, что среди них окажется не более m бракованных.

30. Двое поочередно стреляют по цели до первого попадания с вероятностями попадания для стрелков A и B соответственно равными 0,3 и 0,5. Для какого стрелка вероятнее попасть в цель, если они имеют вместе пять патронов и первым стреляет стрелок A ?

31. По самолету производится три независимых выстрела с вероятностями попаданий, соответственно равными 0,1; 0,2 и 0,3. При трех попаданиях самолет всегда выходит из строя, при двух — с вероятностью 0,5, а при одном — с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что самолет выйдет из строя.

32. Определить вероятность того, что 100 лампочек, взятых наугад из 1000, окажутся исправными, если известно, что число испорченных лампочек равновозможно от нуля до пяти штук.

33. В первой спортивной команде 5 мастеров спорта и 10 перво-разрядников, во второй — соответственно 6 и 9. Случайным образом формируют новую команду, в которую вошли наугад взятые 7 спортсменов из первой команды и 8 — из второй. Наугад выбранный спортсмен новой команды оказался мастером спорта. С какой вероятностью он — из первой команды?

34. Имеется три урны: в первой все шары белые, во второй — a белых и b черных, в третьей — c белых и d черных. Найти вероятность того, что среди двух наугад выбранных шаров из произвольно взятой урны есть хотя бы один черный шар. Шары различимы.

35. В урне N различных шаров, из них M белых. Потеряно два шара. Найти вероятность того, что потерял один белый шар, если вынутый после этого шар оказался белым.

36. Имеется две партии различных деталей. В первой — 10 деталей, из них одна дефектная, во второй — 12 деталей, из них две дефектных. Одну наугад взятую деталь из второй партии положили в первую партию. С какой вероятностью взятая наугад деталь из первой партии после того окажется дефектной?

37. Из всех фишек домино наугад последовательно извлекают две фишки. С какой вероятностью вторую фишку можно приставить к первой?

38. Производят 10 независимых бросаний двух различных игральных костей. Найти вероятность того, что выпадение шестерки на одной из двух костей произойдет хотя бы дважды.

39. Опыт состоит в проведении n независимых испытаний с вероятностью успеха $P(A) = \frac{k}{n}$. Опыт считается удачным, если в нем число появлений события A наивероятнейшее (исход опыта называется наивероятнейшим, если он имеет наибольшую вероятность среди всех возможных исходов). Найти вероятность того, что среди N опытов будет M удачных.

40. Два стрелка стреляют пять раз каждый по своей мишени. Вероятности их попаданий соответственно равны 0,4 и 0,3. Найти вероятность того, что первый стрелок попадет на k раз больше, чем второй.

41. Мишень состоит из яблока и двух колец. Вероятности попадания в них соответственно равны p_1, p_2, p_3 , причем $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Найти вероятность того, что при пяти выстрелах произойдет два попадания в яблоко и одно во второе кольцо.

42. Найти вероятность того, что в $2n$ испытаниях Бернулли в первых n опытах будет m успехов, а в последних n опытах — k успехов ($m, k < n$), причем каждые n опытов начнутся и закончатся успехами. Вероятность успеха в каждом опыте равна p .

43. Два стрелка производят 20 залпов по мишени с вероятностями попаданий, соответственно равными 0,5 и 0,4. Найти вероятность наивероятнейшего числа залпов, при которых будет хотя бы одно попадание в мишень.

44. Испытывают N приборов, каждый из которых состоит из n последовательно соединенных элементов. Найти вероятность того, что за время испытания из строя выйдет M приборов, если вероятность отказа каждого элемента равна p .

Глава 2

45. Четыре различных шара случайным образом размещают по четырем различным ящикам. Случайная величина X — число шаров в первом ящике. Построить ряд распределения случайной величины X и ее функцию распределения.

46. Четыре неразличимых шара случайным образом размещают по четырем различным ящикам. Найти ряд распределения и функцию распределения числа пустых ящиков.

47. Стреляют по цели до двух попаданий, имея пять патронов, с вероятностью попадания в каждом выстреле, равной 0,3. Найти ряд распределения числа выстрелов.

48. Три билета из шести — выигрышные. Выбирают билеты по одному наугад без возвращения до появления двух выигрышных. Найти ряд распределения числа выбранных билетов.

49. Из трех белых и двух черных различимых шаров наугад выбирают четыре. Построить ряд распределения числа X белых шаров среди выбранных. Найти MX и DX .

50. Три из семи ключей подходят к двери. Ключи опробуют по одному без возвращения до открытия двери. Построить ряд распределения числа X опробований ключей и функцию его распределения, MX и DX .

51. Двое поочередно стреляют по одной цели, имея по три патрона, до первого попадания. Построить ряд распределения числа выстрелов по цели.

52. Станок производит X деталей в час, где СВ X имеет распределение Пуассона $\Pi(\lambda)$. Из этих X деталей каждая может быть дефектной независимо от других с вероятностью p . Доказать, что числа дефектных и доброкачественных деталей из X независимы.

$$53. \text{Плотность распределения СВ } X f(x) = \begin{cases} 0, x \notin \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right], \\ A \sin 3x, x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]. \end{cases}$$

Найти A , $F(x)$, $P(X < \pi/4)$, MX и DX .

$$54. \text{Плотность распределения СВ } X f(x) = \begin{cases} A, x \in [1; 8], \\ 0, x \notin [1; 8]. \end{cases} \text{Найти } A, F(x), P(1 < X < 2), MX \text{ и } DX.$$

55. СВ X имеет нормальное распределение $N(a = 5; \sigma = 3)$, СВ $Y = 2X - 1$. Выписать плотность распределения СВ Y .

56. Число отказов элемента распределено по пуассоновскому закону с параметром λ . При отказе элемент сразу заменяют новым. Найти вероятность того, что за время t произойдет не менее трех отказов.

57. График плотности $f(x)$ СВ X изображен на рис. П.2. Выписать плотность распределения и найти функцию распределения СВ X .

58. Случайные величины X и Y независимы и принимают значения из множества натуральных чисел. Доказать, что

$$M \min(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) P(Y \geq n).$$

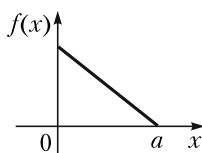


Рис. П.2. График плотности $f(x)$ СВ X

59. Случайные величины X и Y независимы и принимают значения из множества натуральных чисел. Доказать, что $M \max(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 - P(X < n)P(Y < n)$.

60. В колоде n карт. Найти среднее число совпадающих на одинаковых местах карт в двух одинаковых хорошо перемешанных колодах.

61. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)$. $Y = \min(X, 1)$. Найти MY и DY .

62. Доказать, что если СВ X принимает значения $0, 1, 2, \dots$, то $MX = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$.

63. Доказать, что для независимых СВ X и Y $DXY = DX \cdot DY + (MY)^2 DX + (MX)^2 DY$.

64. Система СВ (X_1, Y) имеет плотность распределения $f(x, y)$. Найти функцию распределения $g(z)$ СВ $Z = \max(X, Y)$.

65. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x) = e^{-x^2/4\pi}$. Без вычислений найти MX и DX .

66. СВ X распределена по $R[0; 1]$, $0 < a < 1$, $a - \text{const}$, СВ Y — расстояние от СВ X до a , т. е. $Y = |a - X|$. Найти r_{XY} . Могут ли СВ X и Y быть некоррелированы?

67. СВ $X \sim E(1, 2)$, $Y = 5 - 2X$. Найти MY , DY , K_{XY} , r_{XY} .

68. СВ $X \sim \pi(2)$; $Y \sim N(0, \sigma^2 = 5)$, $r_{XY} = 0,1$, $U = 3X^2 + Y - 2XY + 1$. Найти MU .

69. СВ $U \sim N(0, 1)$, $V \sim R[-3; 3]$; $X = U + V$; $Y = U - V$, $r_{UV} = 0,1$. Найти k_{XY} , r_{XY} .

70. СВ $Y = 3 - 4X$, где ряд распределения СВ X :

X	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

Найти MY , DY , k_{XY} , r_{XY} .

71. СВ $X \sim B(8, 1/2)$, $Y \sim R[0; 1]$; $Z \sim B(3, 1/2)$, $U = 2X + Y - 3Z + 1$;

$\|r_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 & 0,2 \\ & 1 & 0,3 \\ & & 1 \end{pmatrix}$. Найти MU , DU .

72. СВ $X \sim \pi(3)$, $Y \sim N(1, \sigma^2 = 4)$, $Z \sim R[0; 4]$; $\|k_{ij}\| = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ & 4 & 1 \\ & & 4/3 \end{pmatrix}$,

$U = -2X + Y - 3Z + 3$. Найти MU , DU .

73. Является ли характеристической функция $g(t) = \frac{0,3}{1 - 0,7e^{-5t^2/2}}$?

Если да, то какой СВ она соответствует?

74. Является ли характеристической функция

$$g(t) = \exp[2(e^{3i-1}\cos^2 5t - 1)]?$$

Если да, то какой СВ она соответствует?

75. $\{\xi_i\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с рядом распределения

ξ_k	-1	1
P	1/2	1/2

$a_k = 1/2^k$. Найти предельное распределение СВ η_n при $n \rightarrow \infty$ методом характеристических функций.

76. Доказать, что для всякой вещественной характеристической функции $g(t)$ верно, что $|g(t)| \leq \sqrt{\frac{1+g(2t)}{2}}$.

77. Доказать, что для всякой вещественной характеристической функции $g(t)$ верно, что $1 - g(t) \leq 4(1 - g(2t))$.

78. СВ $X \sim N(0, 1)$; СВ $Y = e^X$. Без прямых вычислений найти MY и DY .

79. СВ $\{X_k\}$ — независимые и $X_k \sim R[-(1+k); 1+k]$. Удовлетворяют ли СВ $\{X_k\}$ теореме Ляпунова?

80. СВ $\{X_k\}$ попарно независимы и X_k имеет ряд распределения

X_k	-2	0	2
P	$2^{-(2k+1)}$	$1 - 2^{-2k}$	$2^{-(2k+1)}$

Подчиняются ли $\{X_k\}$ ЗБЧ?

81. Вероятность отказа каждого из 20 независимо работающих элементов равна 0,2. Оценить вероятность уклонения числа отказавших элементов от своего среднего на величину более 3.

82. Производится 800 испытаний Бернулли с вероятностью успеха, равной $1/4$. Оценить вероятность того, что число успехов лежит в пределах от 150 до 250.

83. 8000 кг картофеля укладывают в мешки. Вероятность того, что в мешке меньше 20 кг, есть 0,1. Оценить число мешков картофеля.

84. СВ $\{X_k\}$ независимы и $X_k \sim R[-k^2; k^2]$. Применима ли к СВ $\{X_k\}$ теорема Ляпунова?

85. Оценить вероятность того, что частота выпадения шестерки при 600 бросаниях игральной кости отклонится от своей частоты менее чем на 0,1.

86. Игральную кость бросают 80 раз. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9973 будет заключено число выпадений шестерок.

87. Какова вероятность брака, если при проверке 200 деталей вероятность отклонения числа брака от своего среднего меньше чем на 14 оказалась равной 0,9973.

88. Монету бросают 100 раз. Найти границы интервала, который с вероятностью 0,79 будет заключать число выпавших «гербов».

89. Найти число испытаний Бернулли (с вероятностью успеха в каждом, равной 0,5), при котором можно ожидать, что отклонение относительной частоты от 0,5 (по модулю) менее 0,2 имеет вероятность 0,79.

90. ОТК могут пропустить брак с вероятностью 0,001. С какой вероятностью в партии из 1000 проверенных ОТК деталей окажется не менее трех дефектных.

91. Производится 1500 независимых испытаний с вероятностью успеха в каждом, равной 0,3. Найти вероятность того, что число успехов отклонится от своего среднего не более чем на 150.

92. Производится 1000 независимых выстрелов с вероятностью попадания при каждом, равной 0,7. Какое отклонение относительно частоты попадания от его вероятности можно ожидать с вероятностью 0,9973?

Глава 4

93. Найти характеристическую функцию СВ $X \sim N(5, \sigma = 3)$.

94. СВ $X \sim N(a, \sigma)$, $i = 1, \dots, n$. Найти закон распределения СВ $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ методом характеристических функций.

95. СВ $X \sim N(a, \sigma)$. Задан интервал $(\alpha; \beta)$, не включающий начало координат. При каком значении σ вероятность попадания СВ X в интервале $(\alpha; \beta)$ достигает максимума?

96. Завод изготавливает шарик для подшипников с номинальным диаметром $d_0 = 5$ мм. Вследствие неточности фактический диаметр шарика представляет СВ $X \sim N(d_0, \sigma_d = 0,05 \text{ мм})$. Шарики бракуются, если отличие их диаметров от d_0 больше 0,1 мм. Найти вероятность брака.

97. Плотность распределения системы СВ (X, Y) задана формулой $f(x, y) = \frac{1}{1,6\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{1,28} [(x-2)^2 - 1,2(x-2)(y+3) + (y+3)^2] \right\}$. Найти коэффициент корреляции r_{XY} .

98. СВ $X \sim N(a, \sigma)$. Вероятность $P(-a < X < a) = 0,5$. Найти σ и выписать плотность нормального закона СВ X .

99. СВ X имеет плотность распределения $f(x)$. СВ $Y = \min(X, 1)$. Найти закон распределения СВ Y , ее математическое ожидание и дисперсию.

100. СВ X имеет плотность распределения $f(x)$. СВ $Y = \max(X, 1)$. Найти закон распределения СВ Y , ее математическое ожидание и дисперсию.

101. Пусть СВ $Y_1, \dots, Y_n$ — независимые одинаково распределенные, $Y_i \sim R[a; b]$. Выписать функцию распределения и плотность распределения СВ $S = \sum_{i=1}^n Y_i$.

102. Исследовать характер сходимости СВ X_n к 0, если ряд распределения СВ X_n

X_n	0	n
P	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$

103. Доказать, что СВ $\begin{cases} X_1 = \sqrt{2 \lg R_1} \sin 2\pi R_2, \\ X_2 = \sqrt{2 \lg R_1} \cos 2\pi R_2 \end{cases}$ распределены по $N(0, 1)$, если СВ R_1 и R_2 распределены по равномерному закону $R[0; 1]$ и независимы.

104. Доказать, что $f_Z = F_X(z) - F_X(z - 1)$, где $Z = X + Y$, X и Y — независимые непрерывные СВ, F_X — функция распределения СВ X , $Y \sim R[0; 1]$.

105. Доказать, что если СВ $X \sim \pi(\lambda)$, то $L(X) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} N(a = \lambda, \sigma = \sqrt{\lambda})$.

Наши книги можно приобрести:

Учебным заведениям и библиотекам:

в отделе по работе с вузами
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: vuz@urait.ru

Частным лицам:

список магазинов смотрите на сайте urait.ru
в разделе «Частным лицам»

Магазинам и корпоративным клиентам:

в отделе продаж
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru

Отзывы об издании присылайте в редакцию

e-mail: red@urait.ru

**Новые издания и дополнительные материалы доступны
в электронной библиотечной системе «Юрайт»
biblio-online.ru**

Учебное издание

Энатская Наталия Юрьевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие для прикладного бакалавриата

Формат 60×90¹/₁₆.

Гарнитура «PetersburgC». Печать цифровая.

Усл. печ. л. 00,00. Заказ №

ООО «Издательство Юрайт»

111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.

Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru