ГЛАВА 5. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ И ДИСКРЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ

В результате изучения данной главы студенты должны:

знать

- определения и свойства Марковских процессов с непрерывным временем и дискретным множеством состояний, способы их задания, характеристики, задающие этот класс случайных процессов и свойства этих характеристик;
- предельные теоремы, определяющие поведение Марковских процессов с непрерывным временем;
- основные понятия теории массового обслуживания (ТМО) и методы анализа систем массового обслуживания (СМО);

уметь

- строить Марковские процессы при конкретном описании физической ситуации;
- Применять математические результаты, относящимися к Марковские процессы, при решении конкретных задач;

владеть

- Навыками анализа Марковских процессов;
- методами анализа СМО.

5.1. Определение Марковского процесса

Марковский случайный процесс, как и произвольный случайный процесс, должен задаваться семейством согласованных конечномерных распределений. Однако, в силу того, что он обладает специфическим марковским свойством, его можно задать частными характеристиками - переходными вероятностями.

Переходим к формальному определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. *Случайный процесс $\zeta(t)$ с непрерывным временем $t \in R^+ = [0, \infty)$ и дискретным множеством состояний E (конечным или счетным) называется Марковским, если для любого целого $n > 0$, любого набора моментов $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \infty$ и любого набора состояний $(e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1})$, $e_k \in E$, $k = 1, 2, \dots, n, n+1$ для условных вероятностей справедливо равенство*

$$P\{\zeta(t_{n+1}) = e_{n+1} / \zeta(t_1) = e_1, \zeta(t_2) = e_2, \dots, \zeta(t_n) = e_n\} = P\{\zeta(t_{n+1}) = e_{n+1} / \zeta(t_n) = e_n\}. \quad (5.1)$$

Марковское свойство, выраженное равенством (5.1), позволяет доказать при $k > 0$ равенство

$$\begin{aligned} P\{\zeta(t_{n+k}) = e_{n+k}, \zeta(t_{n+k-1}) = e_{n+k-1}, \dots, \zeta(t_{n+1}) = e_{n+1} / \zeta(t_1) = e_1, \zeta(t_2) = e_2, \dots, \zeta(t_n) = e_n\} = \\ = P\{\zeta(t_{n+k}) = e_{n+k}, \zeta(t_{n+k-1}) = e_{n+k-1}, \dots, \zeta(t_{n+1}) = e_{n+1} / \zeta(t_n) = e_n\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В самом деле, с учетом (5.1) получаем из определения условной вероятности

$$\begin{aligned} P\{\zeta(t_{n+k}) = e_{n+k}, \zeta(t_{n+k-1}) = e_{n+k-1}, \dots, \zeta(t_{n+1}) = e_{n+1} / \zeta(t_1) = e_1, \zeta(t_2) = e_2, \dots, \zeta(t_n) = e_n\} = \\ = P\{\zeta(t_{n+k}) = e_{n+k} / \zeta(t_{n+k-1}) = e_{n+k-1}\} \dots P\{\zeta(t_{n+1}) = e_{n+1} / \zeta(t_n) = e_n\} = \\ = P\{\zeta(t_{n+k}) = e_{n+k}, \zeta(t_{n+k-1}) = e_{n+k-1}, \dots, \zeta(t_{n+1}) = e_{n+1} / \zeta(t_n) = e_n\}. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (5.2) доказано. При $k = 1$ равенства (5.1) и (5.2) совпадают.

Из равенства (5.2) по определению условной вероятности легко получаем при $0 \leq n \leq k$ соотношение

$$\begin{aligned} P\{\zeta(t_k) = e_k, \zeta(t_{k-1}) = e_{k-1}, \dots, \zeta(t_1) = e_1 / \zeta(t_n) = e_n\} = \\ = P\{\zeta(t_k) = e_k, \dots, \zeta(t_{n+1}) = e_{n+1} / \zeta(t_n) = e_n\} P\{\zeta(t_1) = e_1, \dots, \zeta(t_{n-1}) = e_{n-1} / \zeta(t_n) = e_n\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Докажем обратное, что из равенства (5.3) следует равенства (5.2) и (5.1). Из определения условной вероятности получаем при выполнении (5.3)

$$\begin{aligned} P\{\zeta(t_k) = e_k, \dots, \zeta(t_{n+1}) = e_{n+1} / \zeta(t_n) = e_n\} P\{\zeta(t_1) = e_1, \dots, \zeta(t_{n-1}) = e_{n-1} / \zeta(t_n) = e_n\} = \\ = P\{\zeta(t_k) = e_k, \zeta(t_{k-1}) = e_{k-1}, \dots, \zeta(t_1) = e_1 / \zeta(t_n) = e_n\} = \\ = \frac{P\{\zeta(t_k) = e_k, \zeta(t_{k-1}) = e_{k-1}, \dots, \zeta(t_1) = e_1\}}{P\{\zeta(t_n) = e_n\}} = \\ = P\{\zeta(t_k) = e_k, \dots, \zeta(t_{n+1}) = e_{n+1} / \zeta(t_1) = e_1, \dots, \zeta(t_n) = e_n\} P\{\zeta(t_1) = e_1, \dots, \zeta(t_{n-1}) = e_{n-1} / \zeta(t_n) = e_n\}. \end{aligned}$$

Первое равенство выполняется в силу предположения справедливости (5.3), последующие равенства следуют из определения условной вероятности.

Таким образом, получаем равенство

$$\begin{aligned} & P\{\zeta(t_k) = e_k, \dots, \zeta(t_{n+1}) = e_{n+1} / \zeta(t_n) = e_n\} = \\ & = P\{\zeta(t_k) = e_k, \dots, \zeta(t_{n+1}) = e_{n+1} / \zeta(t_1) = e_1, \dots, \zeta(t_n) = e_n\}, \end{aligned}$$

утверждающее, что из соотношения (5.3) следует (5.2).

Получили доказательство эквивалентности равенств (5.1) и (5.3). Другими словами, марковское свойство можно определять, как равенство (5.3).

Если считать момент t_n настоящим моментом, состояние e_n - настоящим значением процесса, то равенство (5.3) можно интерпретировать как *независимость прошлого и будущего течения процесса при известном настоящем*. Это свойство часто считают определением *марковского свойства случайного процесса*. Точный математический смысл его выражает равенство (5.3).

Отметим, что все введенные выше условные вероятности и полученные равенства предполагали, что вероятности условий не равны нулю.

Не ограничивая общности, в дальнейшем множество состояний E будем считать множеством положительных целых чисел.

В правой части равенства (5.1) стоит функция $P\{\zeta(t) = j / \zeta(x) = i\}$, $t \geq x$, которая называется *переходной вероятностью*. Эта функция в общем случае зависит от параметров $t, x \in [0, \infty)$, $i, j \in E$. Обозначим *переходную вероятность* через

$$p_{ij}(x, t) = P\{\zeta(t) = j / \zeta(x) = i\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. *Марковский процесс называется однородным, если переходная вероятность зависит от разности аргументов t и x*

$$p_{ij}(x, t) = P\{\zeta(t) = j / \zeta(x) = i\} = p_{ij}(t - x). \quad (5.4)$$

Из определения переходных вероятностей вытекают их свойства при $0 < t < \infty$:

- $0 \leq p_{ij}(t) \leq 1$;
- $\sum_{j \in E} p_{ij}(t) = 1$.

При конечном множестве состояний E последнее свойство тривиально, при бесконечном множестве состояний E последнее свойство означает, что за конечное время процесс с вероятностью единица перейдет в некоторое конечное состояние.

В дальнейшем будем также предполагать непрерывность вероятностей $p_{ij}(t)$ при $0 < t < \infty$ и равенства

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (5.5)$$

Из марковского свойства и определения переходных вероятностей следует, что для однородных марковских процессов имеет место равенство при $t > 0, x > 0$:

$$p_{ij}(x+t) = \sum_{k \in E} p_{ik}(x) p_{kj}(t). \quad (4.6)$$

Свойство (5.6) называют *уравнениями Колмогорова-Чепмена*.

Если задать распределение вероятностей состояний марковского процесса в начальный (нулевой) момент времени

$$P\{\zeta(0) = j\} = p(j) \geq 0, \quad j \in E, \quad \sum_{j \in E} p(j) = 1, \quad (5.7)$$

то для одномерного распределения по формуле полной вероятности получаем

$$p_i(t) = P\{\zeta(t) = i\} = \sum_{k \in E} p(k) p_{ki}(t).$$

Покажем, что задание начального распределения (5.7) и семейства матриц переходных вероятностей

$$P(t) = \{p_{ij}(t)\} = \{P\{\zeta(t) = j / \zeta(0) = i\}\} \quad (5.8)$$

позволяет построить согласованные конечномерные распределения марковского однородного случайного процесса $\zeta(t)$.

По формуле полной вероятности для любого $n > 0$ и любых наборов $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$, $i_k \in E$, $k = 1, 2, \dots, n$ с учетом марковского свойства и однородности получаем

$$P\{\xi(t_1) = i_1, \xi(t_2) = i_2, \dots, \xi(t_n) = i_n\} = \sum_{i \in E} p(i) p_{ii}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \dots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}). \quad (5.9)$$

Равенство (5.9) доказывает высказанное утверждение и, следовательно, однородный марковский процесс задается начальным распределением (5.7) и семейством матриц переходных вероятностей (5.8).

5.2. Уравнения Колмогорова

Из перечисленных в предыдущем параграфе свойств переходных вероятностей следуют теоремы о существовании *интенсивностей перехода* - пределов, которые будут определены ниже.

Сформулируем теорему без доказательства (доказательство можно найти в [3,5]).

ТЕОРЕМ 5.1. При любом $i \in E$ предел $\Lambda_i = -p'_{ii}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t}$

существует, но может быть бесконечным. При $i, j \in E$, $i \neq j$ предел

$\lambda_{ij} = -p'_{ij}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t}$ существует и конечен.

Для конечного множества состояний E очевидно равенство $\Lambda_i = \sum_{j \in E} \lambda_{ij}$.

Для счетного множества состояний E справедливо неравенство $\Lambda_i \geq \sum_{j \in E} \lambda_{ij}$.

В самом деле, из свойств переходных вероятностей следует равенство

$$\sum_{j \neq i} p_{ij}(t) = 1 - p_{ii}(t)$$

и для любого $N < \infty$ справедливо неравенство

$$\sum_{j \neq i, i=1, \dots, N} p_{ij}(t) \leq 1 - p_{ii}(t).$$

Разделив обе части неравенства на t и устремив t к нулю, получим

$$\Lambda_i \geq \sum_{j \neq i, j=1, \dots, N} \lambda_{ij}.$$

Поскольку $N < \infty$ произвольно, а все слагаемые неотрицательны, получаем требуемое утверждение.

Вывод уравнений Колмогорова. Для конечного множества состояний E уравнения Колмогорова получаются по формулы полной вероятности и свойств переходных вероятностей (разложение в окрестности нуля) при $\Delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} p_{ii}(\Delta) &= 1 - \Lambda_i \Delta + o(\Delta), \\ p_{ij}(\Delta) &= \lambda_{ij} \Delta + o(\Delta), \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Для конечного множества состояний $E = (1, 2, \dots, N)$ из (4.6) получаем

$$p_{ij}(t + \Delta) = \sum_{k \in E} p_{ik}(t) p_{kj}(\Delta) = \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) \lambda_{kj} \Delta + p_{ij}(t) (1 - \Lambda_j \Delta) + o(\Delta) \quad (5.11)$$

или после элементарных преобразований и перехода к пределу при $\Delta \rightarrow 0$

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) \lambda_{kj} - p_{ij}(t) \Lambda_j. \quad (5.12)$$

Система дифференциальных уравнений (5.12) называется *прямыми уравнениями Колмогорова*.

Исходя из (5.6), равенство (5.11) можно записать иначе:

$$p_{ij}(\Delta + x) = \sum_{k \in E} p_{ik}(\Delta) p_{kj}(x) = \sum_{k \neq i} \lambda_{ik} p_{kj}(x) \Delta + p_{ij}(x) (1 - \Lambda_i \Delta) + o(\Delta),$$

и после аналогичных элементарных преобразований получаем систему *обратных уравнений Колмогорова*:

$$p'_{ij}(x) = \sum_{k \neq i} \lambda_{ik} p_{kj}(x) - \Lambda_i p_{ij}(x). \quad (5.13)$$

Для вероятностей состояний (одномерного распределения)

$$p_j(t) = P\{\zeta(t) = j\} = \sum_{k \in E} p(k) p_{kj}(t)$$

по формуле полной вероятности получаем соотношение

$$p_j(t + \Delta) = \sum_{k \neq j} p_k(t) p_{kj}(\Delta) + p_j(t) p_{jj}(\Delta).$$

Если использовать разложение переходных вероятностей в окрестности нуля, то получим

$$p_j(t + \Delta) = \sum_{k \neq j} \lambda_{kj} p_k(t) \Delta + p_j(t) [1 - \Lambda_j \Delta].$$

После элементарных преобразований при $\Delta \rightarrow 0$ получаем систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний процесса Маркова:

$$p_j'(t) = \sum_{k \neq j} \lambda_{kj} p_k(t) - \Lambda_j p_j(t). \quad (5.14)$$

Заметим, решение системы (5.14) при начальном условии $p_i(0) = p(i) = 1$, $p_k(0) = p(k) = 0$, $k \neq i$ совпадает с переходной вероятностью $p_{ij}(t)$, то есть совпадает с решением системы уравнений (5.12).

Для счетного числа состояний необходимым и достаточным условием справедливости *обратных уравнений Колмогорова* (5.13) являются условия

$$\Lambda_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} < \infty \text{ при всех } i \in E. \quad (5.15)$$

Доказательство этого утверждения дано в [3,5].

В дальнейших рассуждениях предполагаем условия (5.15) выполненными.

Относительно *прямых уравнений Колмогорова* ситуация значительно сложнее, поскольку можно построить пример марковского процесса, для которого условия (5.15) выполняются, а равенства (5.12) не выполняются [5]. Поэтому в дальнейшем справедливость прямых уравнений Колмогорова для процесса Маркова со счетным множеством состояний будет постулироваться.

5.3. Вложенная цепь и характеристики на периоде между соседними моментами изменения состояний

В соответствии с выводами предыдущего раздела задаем матрицу интенсивностей перехода λ_{ij} при $i, j \in E$, $i \neq j$ и начальное распределение

вероятностей состояний, т.е. задаем некоторый однородный марковский процесс $\zeta(t)$.

Обозначим через $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < \infty$ неубывающую последовательность случайных соседних моментов изменения состояний марковского процесса (траектории процесса $\zeta(t)$ считаем непрерывными справа).

В дальнейшем постоянно будем придерживаться следующих обозначений:

$$\zeta(t_n) = \zeta_n, \quad t_n - t_{n-1} = \theta_n, \quad n \geq 1, \quad \theta_0 = 0. \quad (5.16)$$

Так как траектории марковского процесса с дискретным множеством состояний есть ступенчатые функции, то в интервале $[t_n, t_{n+1})$ процесс не меняет состояний и принимает одно значение ζ_n , величина $t_n - t_{n-1} = \theta_n$ есть длина этого интервала.

Вычислим для пары $i, j \in E, i \neq j$ и $t > 0$ условную вероятность:

$$Q_{ij}(t) = P\{\zeta_{n+1} = j, \theta_{n+1} < t / \zeta_n = i\} = P\{\zeta_1 = j, \theta_1 < t / \zeta_0 = i\}. \quad (5.17)$$

Равенство (5.17) справедливо в силу однородности исследуемого процесса (независимость от числа изменений состояния) и марковского свойства процесса $\zeta(t)$, так как моменты изменения состояний процесса $t_n, n \geq 0$ являются марковскими моментами.

Для решения этой задачи воспользуемся методом построения поглощающего экрана. Зафиксируем произвольное состояние $i \in E$ и на том же вероятностном пространстве, на котором определен процесс $\zeta(t)$, построим другой однородный марковский процесс $\zeta_1(t)$ с тем же начальным распределением и интенсивностями перехода μ_{kj} , которые определяются при любых $j \in E$ равенствами

$$\mu_{kj} = \begin{cases} \lambda_{ij}, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases} \quad (5.18)$$

Попав в состояние $k \neq i$, процесс $\xi_1(t)$ из него не выйдет (выход может произойти с вероятностью ноль, то есть в состояниях $k \neq i$ построен поглощающий экран). Тогда для подмножеств элементарных событий (траекторий) справедливо равенство

$$\{\omega: \xi_1 = j, \theta_1 < t, \xi_0 = i\} = \{\omega: \xi_1(t) = j, \xi_1(0) = i\},$$

поэтому при $i \neq j$

$$Q_{ij}(t) = P\{\xi_1 = j, \theta_1 < t / \xi_0 = i\} = P\{\xi_1(t) = j / \xi_1(0) = i\}. \quad (5.19)$$

Обозначим переходные вероятности процесса $\xi_1(t)$ через

$$q_{ij}(t) = P\{\xi_1(t) = j / \xi_1(0) = i\}.$$

Для этих переходных вероятностей выписываем прямые уравнения Колмогорова при, $k, j, i \in E$, $\Lambda_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{ij}(t) &= \lambda_{ij} q_{ii}(t), \\ \dot{q}_{ii}(t) &= -\Lambda_i q_{ii}(t), \\ \dot{q}_{kj}(t) &= 0, \quad k \neq i, \end{aligned} \quad (5.20)$$

решение которых при начальных условиях $q_{kk}(0) = 1$, $q_{kj}(0) = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} q_{ij}(t) &= \frac{\lambda_{ij}}{\Lambda_i} (1 - e^{-\Lambda_i t}), \quad i \neq j, \quad q_{ii}(t) = e^{-\Lambda_i t}, \\ q_{kk}(t) &= 1, \quad q_{kj}(t) = 0, \quad k \neq i. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Следовательно, с учетом (5.17) при $i \neq j$ получаем выражение для условной вероятности того, что Марковский процесс $\xi(t)$ перейдет в состояние j и переход этот состоится до момента t при условии старта из состояния i .

Аналогичный результат (равенство (5.21)) получим, если используем обратные уравнения Колмогорова.

Далее напомним одно интересное равенство для независимых экспоненциально распределенных случайных величин, которое часто используется при исследовании Марковских процессов.

Пусть $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ конечная последовательность независимых случайных величин, каждая из которых распределена по экспоненциальному закону с параметром $\{\lambda_k, k = 1, 2, \dots, n\}$. Вычислим вероятность совместного осуществления двух событий - минимум этих случайных величин совпадает с ξ_k и этот минимум меньше $t > 0$. По формуле полной вероятности имеем

$$P\left\{\xi_k = \min_{1 \leq m \leq n} \xi_m < t\right\} = \int_0^t \lambda_k e^{-\Lambda_n x} dx = \frac{\lambda_k}{\Lambda_n} (1 - e^{-\Lambda_n t}), \quad (5.22)$$

где обозначено $\Lambda_n = \sum_{m=1}^n \lambda_m$.

При $t \rightarrow \infty$ получаем равенство

$$P\left\{\xi_k = \min_{1 \leq m \leq n} \xi_m\right\} = \frac{\lambda_k}{\Lambda_n}.$$

В силу несовместности событий $\left\{\xi_k = \min_{1 \leq m \leq n} \xi_m < t\right\}$ для $k = 1, 2, \dots, n$ и любом $t > 0$ получаем

$$P\left\{\min_{1 \leq m \leq n} \xi_m < t\right\} = \sum_{k=1}^n P\left\{\xi_k = \min_{1 \leq m \leq n} \xi_m < t\right\} = (1 - e^{-\Lambda_n t}),$$

то есть *минимум независимых экспоненциально распределенных случайных величин распределен так же по экспоненциальному закону с параметром $\Lambda_n = \sum_{m=1}^n \lambda_m$, равным сумме параметров распределений слагаемых.*

Если сравнить равенство (5.21) с равенством (5.22), то очевидно совпадение. Поэтому, учитывая условия, при которых получена формула (5.22), эволюцию марковского процесса можно трактовать следующим образом: в состоянии i реализуются некоторые «операции» с номерами $j \in E, i \neq j$, длительности которых есть независимые экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами λ_{ij} . Следующий переход осуществится в состояние j , соответствующее номеру «операции» с минимальной длительностью, длительность перехода совпадает с минимумом длительностей этих операций.

Из определения (5.17) и равенства (5.21) следуют равенства при любом $n \geq 0$:

$$P\{\theta_{n+1} < t / \zeta_n = i\} = \sum_{\substack{j \in E \\ j \neq i}} Q_{ij}(t) = 1 - e^{-\Lambda_i t}, \quad t \geq 0, \quad (5.23)$$

$$m_i = M(\theta_{n+1} / \zeta_n = i) = \frac{1}{\Lambda_i}, \quad (5.24)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_{ij}(t) = p_{ij} = P\{\zeta_{n+1} = j / \zeta_n = i\} = \frac{\lambda_{ij}}{\Lambda_i}. \quad (5.25)$$

Равенство (5.23) определяет функцию распределения времени непрерывного пребывания марковского процесса в состоянии i , точнее, распределение при условии, что это состояние равно i . Это условное распределение *экспоненциальное* с параметром Λ_i . Если вспомнить свойство *отсутствия последствия* экспоненциального распределения, то полученный результат естественно вытекает из марковского свойства изучаемых процессов.

Равенство (4.24) определяет условное математическое ожидание времени непрерывного пребывания марковского процесса в состоянии i .

Комментируя равенство (5.25), заметим, что последовательность $\zeta(t_k) = \zeta_k, k \geq 0$ определяет эволюцию (смену) состояний марковского процесса. В силу марковского свойства изучаемого процесса эта последовательность образует цепь Маркова. В самом деле, если ζ_{n-1} характеризует прошлое, ζ_n определяет настоящее, а ζ_{n+1} - будущее течение процесса, то очевидно равенство

$$P\{\zeta_{n-1} = i, \zeta_{n+1} = j / \zeta_n = k\} = P\{\zeta_{n+1} = j / \zeta_n = k\} P\{\zeta_{n-1} = i / \zeta_n = k\}.$$

что и доказывает марковское свойство последовательности $\zeta(t_k) = \zeta_k, k \geq 0$.

Последовательность $\zeta(t_k) = \zeta_k, k \geq 0$ называется *вложенной марковской цепью*.

Тогда равенство (5.25) есть выражение переходных вероятностей для вложенной цепи Маркова через интенсивности перехода марковского

процесса. Эта цепь имеет матрицу переходных вероятностей, у которой диагональные элементы равны нулю.

5.4. Асимптотический анализ марковских процессов

Асимптотический анализ марковских процессов с непрерывным временем и дискретным множеством состояний состоит в исследовании характеристик процесса при $t \rightarrow \infty$. Отметим, что при этом исследовании определяющую роль будут играть свойства вложенной марковской цепи, а доказательства предельных теорем опираются на предельные теоремы теории восстановления.

Зафиксируем $i, j \in E$ и положим $P\{\xi(0) = \xi_0 = i\} = 1$, то есть считаем, что почти все траектории процесса $\xi(t)$ выходят из состояния i . Введем в рассмотрение момент времени τ первого попадания процесса в состояние j

$$\tau_j = \tau_j(\omega) = \inf \{t > 0: \xi(t) = j\},$$

и обозначим $G_{ij}(t) = P\{\tau_j < t / \xi_0 = i\}$ функцию распределения момента первого попадания процесса в состояние j . В силу однородности процесса $\xi(t)$ имеем равенство при $n > 0$

$$G_{ij}(t) = P\{\tau_j < t / \xi_0 = i\} = P\{\tau_j < t / \xi_n = i\} \quad (5.26)$$

Если $i = j$ (процесс стартует из состояния j), то последовательность соседних моментов попадания процесса $\xi(t)$ в состояние j образует простой процесс восстановления. Для этого процесса восстановления обозначим интервалы между соседними моментами восстановления через $\xi_{jj}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, (здесь через k обозначен номер интервала) и заметим, что ранее распределение этих интервалов было обозначено

$$G_{jj}(t) = P\{\xi_{jj}^{(k)} < t\}.$$

Доказательство того факта, что $\xi_{jj}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$ есть независимые случайные величин и их распределение не зависит от номера интервала k ,

следует из однородности исследуемого марковского процесса и равенства (5.3), определяющего независимость прошлого и будущего течения процесса при известном настоящем.

Заметим, что из определения интервалов $\xi_{ij}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$ следует, что каждый из них состоит из двух частей - периода, когда процесс $\xi(t)$ пребывает в состоянии j , и периода, когда он пребывает в других состояниях.

Если $i \neq j$, то последовательность соседних моментов попадания процесса $\xi(t)$ в состояние j образует процесс восстановления с запаздыванием, у которого интервалы между соседними моментами восстановления $\xi_{ij}^{(1)} = \xi_{ij}$, $\xi_{ij}^{(k)}$, $k = 2, 3, \dots$ имеют соответственно распределения

$$G_{ij}(t) = P\{\xi_{ij} < t\}, \quad G_{ji}(t) = P\{\xi_{ji}^{(k)} < t\}. \quad (5.27)$$

Исследуем распределения $G_{ij}(t)$, $i, j \in E$. Прежде всего заметим, что интервалы ξ_{ij} представляют собой сумму случайного числа зависимых (связанных в цепь Маркова) слагаемых, распределенных по экспоненциальному закону с разными параметрами. Поэтому можно утверждать, что распределения $G_{ij}(t)$, $i, j \in E$ непрерывны. Далее по формуле полной вероятности с учетом равенства (5.22) получаем (в тех же обозначениях) систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} G_{ij}(t) &= \int_0^t dQ_{ij}(x) + \sum_{k \neq j} \int_0^t G_{kj}(t-x) dQ_{ik}(x) = \\ &= \frac{\lambda_{ij}}{\Lambda_i} (1 - e^{-\Lambda_i t}) + \sum_{k \neq j} \int_0^t \lambda_{ik} G_{kj}(t-x) e^{-\Lambda_i x} dx. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Отметим, что при $i = j$ первое слагаемое в (5.28) равно нулю, если положить $\lambda_{ii} = 0$ и равенство $Q_{ii}(t) = 0$.

Обозначим $\bar{G}_{ij}(t) = 1 - G_{ij}(t) = P\{\xi_{ij} > t\}$, тогда из (5.28) следует

$$\bar{G}_{ij}(t) = e^{-\Lambda_i t} + \sum_{k \neq j} \int_0^t \lambda_{ik} \bar{G}_{kj}(t-x) e^{-\Lambda_i x} dx. \quad (5.29)$$

Таким образом, получили соотношения для функций распределения, полностью определяющих введенные процессы восстановления.

Обозначим через

$$T_{ij} = M(\theta_1 / \xi_0 = i, \xi_1 = j) = M(\xi_{ij}) = \int_0^{\infty} \bar{G}_{ij}(t) dt$$

математическое ожидание времени перехода марковского процесса из состояния i в состояние j . Интегрированием уравнений (5.29) получаем систему алгебраических уравнений для математических ожиданий T_{ij} :

$$T_{ij} = \frac{1}{\Lambda_i} + \sum_{k \neq j} \frac{\lambda_{ik}}{\Lambda_i} T_{kj},$$

или

$$T_{ij} = m_i + \sum_{k \neq j} p_{ik} T_{kj}, \quad (5.30)$$

если использовать обозначения (5.24) и (5.25). Очевидно равенство (5.30) можно получить, если использовать формулу полного математического ожидания.

Предположим далее, что для вложенной цепи Маркова существует стационарное распределение вероятностей состояний

$$(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \dots), \quad \pi_i \geq 0, \quad \sum_{i \in E} \pi_i = 1.$$

Из определения стационарного распределения следуют равенства

$$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}, \quad j \in E.$$

Умножим равенство (5.30) на π_i и просуммируем по $i \in E$. Получаем

$$\sum_{i \in E} \pi_i T_{ij} = \sum_{i \in E} \pi_i m_i + \sum_{i \in E} \pi_i \left(\sum_{k \in E} p_{ik} T_{kj} - p_{ij} T_{ij} \right)$$

или

$$0 = \sum_{i \in E} \pi_i m_i + \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij} T_{ij} - \sum_{i \in E} \pi_i m_i - \pi_j T_{ij}.$$

Отсюда получаем

$$T_{jj} = \frac{\sum_{i \in E} \pi_i m_i}{\pi_j}. \quad (5.31)$$

Соотношение (5.31) связывает математическое ожидание времени возвращения марковского процесса со стационарными характеристиками вложенной цепи и математическими ожиданиями времен непрерывного пребывания в каждом состоянии.

Далее исследуем свойства этих процессов восстановления в зависимости от свойств вложенных цепей Маркова.

ТЕОРЕМА 5.2. *Если для марковского процесса с конечным или счетным множеством состояний E вложенная цепь Маркова имеет в точности один класс существенных состояний E_0 и это есть класс положительных возвратных состояний, то при $j \in E_0$ и любых $i \in E$ последовательность $\{\xi_{ij}^{(k)} = \zeta_{ij}, \zeta_{ij}^{(k)}, k = 2, 3, \dots\}$ является необрывающимся процессом восстановления, при $j \in E \setminus E_0$ и любых $i \in E$ последовательность $\{\xi_{ij}^{(k)} = \zeta_{ij}, \zeta_{ij}^{(k)}, k = 2, 3, \dots\}$ является обрывающимся процессом восстановления.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться результатами, изложенными в главе 4 «Процессы восстановления», и показать, что распределения (5.27) являются собственными при $j \in E_0$ и любых $i \in E$, и являются несобственными при $j \in E \setminus E_0$ и любых $i \in E$. Продолжая эти рассуждения, то можно утверждать, что свойства процесса восстановления однозначно определяются поведением функции восстановления при $t \rightarrow \infty$. Если этот предел функции восстановления ограничен, то процесс восстановления обрывается, если не ограничен, то процесс восстановления не обрывается.

Воспользуемся этим критерием для доказательства теоремы.

Обозначим через $H_{ij}(t)$ функцию восстановления процесса восстановления $\{\xi_{ij}^{(k)} = \zeta_{ij}, \zeta_{ij}^{(k)}, k = 2, 3, \dots\}$. По определению, функция

восстановления есть математическое ожидание числа восстановлений, произошедших до момента t . Для рассматриваемого процесса восстановления это математическое ожидание числа попаданий марковского процесса в состояние $j \in E$ до момента t при условии, что процесс стартует из состояния $i \in E$.

В дальнейших рассуждениях воспользуемся критериями возвратности [8]. Если состояние j - *невозвратно*, то есть $j \in E \setminus E_0$ и процесс стартует из состояния $j \in E$, то по определению вероятность возвращения меньше единицы, $f_{jj} < 1$, и, если процесс стартует из состояния $i \in E$, то вероятность $f_{ij} \leq 1$, где через f_{ij} обозначена вероятность рано или поздно из состояния i попасть в состояние j . Это следует из определения невозвратности [8]. Тогда математическое ожидание числа восстановлений (возвращений) за бесконечное время ограничено и равно

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_{ij}(t) = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} < \infty, \quad (5.32)$$

так как $0 < f_{jj} < 1$. Таким образом, при $j \in E \setminus E_0$ получаем обрывающийся процесс восстановления.

Если сравнить формулы (5.32) и (5.20) главы 3 и принять обозначения $\bar{G}_{ij}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{G}_{ij}(t)$, то при $i = j$ получим равенство $\bar{G}_{jj}(\infty) = 1 - f_{jj} > 0$ если состояние j - *невозвратно*, $j \in E \setminus E_0$.

Если состояние j - *возвратно*, $j \in E_0$, то вероятность возвращения по определению равна единице, $f_{jj} = 1$. В силу того, что вложенная цепь Маркова имеет один класс существенных состояний и эти состояния возвратные, то для любого $i \in E$ вероятность $f_{ij} = 1$. Поэтому математическое ожидание числа восстановлений за бесконечное время неограниченно, $H_{ij}(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. В этом случае получаем необрывающийся процесс восстановления.

Замечания.

5.1. Не представляет труда обобщить теорему на случай нескольких существенных классов возвратных состояний (по-прежнему, при условии отсутствия существенных невозвратных состояний). Если начальное состояние i и состояние j принадлежат одному классу, то процесс восстановления будет необрывающимся. Если начальное состояние i принадлежит множеству несущественных состояний, а состояние j принадлежат некоторому классу существенных возвратных состояний, то процесс восстановления будет необрывающимся, если вероятность перехода из несущественных состояний в этот класс равна единице. Во всех остальных случаях процесс будет обрываться.

5.2. Если вложенная цепь состоит из несущественных состояний и поглощающих состояний или состоит из множества существенных невозвратных состояний, то в этих случаях вложенные процессы восстановления будут обрывающимися.

ТЕОРЕМА 5.3. Если для марковского процесса с счетным множеством состояний E вложенная цепь Маркова имеет в точности один класс существенных состояний E_0 , если это класс возвратных положительных состояний и существует для вложенной цепи стационарное распределение

($\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \dots$), $\pi_i \geq 0$, $\sum_{i \in E} \pi_i = 1$ вероятностей состояний, то существуют

пределы $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t)$, которые не зависят от стартового состояния $i \in E$ и

для которых справедливы соотношения

$$p_j = \begin{cases} 0, & j \in E \setminus E_0, \\ \frac{m_j \pi_j}{\sum_{k \in E} m_k \pi_k}, & j \in E_0. \end{cases} \quad (5.33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя ранее введенные обозначения, для фиксированных $i, j \in E$ введем в рассмотрение процесс восстановления с запаздыванием $\{\zeta_{ij}^{(1)} = \zeta_{ij}, \zeta_{ij}^{(k)}, k = 2, 3, \dots\}$, функцию восстановления которого обозначим через $H_{ij}(x)$. Функции распределения $G_{ij}(x) = P\{\zeta_{ij} < x\}$ непрерывны

в нуле, поэтому, если учесть вероятностную интерпретацию для функции восстановления, то по формуле полной вероятности можно записать

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \int_0^t e^{-\Lambda_j(t-x)} dH_{ij}(x), & i \neq j, \\ e^{-\Lambda_j t} + \int_0^t e^{-\Lambda_j(t-x)} dH_{ij}(x), & i = j. \end{cases} \quad (5.34)$$

Поскольку для рассматриваемого случая выполняются условия выше доказанной теоремы, то при $j \in E_0$ введенный процесс восстановления не будет обрываться. Поэтому можно воспользоваться узловой теоремой восстановления и получить предельное равенство

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{jj}(t) = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\Lambda_j x} dx}{T_{jj}} = \frac{1}{\Lambda_j T_{jj}}.$$

С учетом равенств (5.24) (5.31) получаем утверждение теоремы при $j \in E_0$.

Если $j \in E \setminus E_0$ в силу выше доказанной теоремы процесс восстановления будет обрывающимся и его функция восстановления $H_{ij}(x)$ будет ограничена, $H_{ij}(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} H_{ij}(x) < \infty$. В этом случае при исследовании пределов функции (4.34) можно воспользоваться следствием предельной теоремы для обрывающегося процесса восстановления, доказательство которого приведено в ПРИЛОЖЕНИИ к главе 4 и которое утверждает о справедливости предельного равенства $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t B(t-x) dH(x) = \frac{B(\infty)F(\infty)}{1-F(\infty)}$, если $B(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} B(x) < \infty$. Для рассматриваемого случая пределы (4.34) равны

нулю, так как $B(t) = e^{-\Lambda_j t}$.

Замечания.

5.3. Для марковской цепи с конечным множеством состояний все существенные состояния положительные и возвратные. Поэтому для такой вложенной цепи условия теоремы сводятся только к наличию одного класса существенных сообщающихся состояний.

5.4. В условиях теоремы нет ограничений на периодичность вложенной цепи Маркова. Цепь может быть периодичной.

Далее заметим, что при любом начальном распределении $p(k) \geq 0, k \in E, \sum_{k \in E} p(k) = 1$, имеем равенство

$$p_j(t) = \sum_{k \in E} p(k) p_{kj}(t).$$

Поэтому из существования пределов для переходных вероятностей $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t)$ следует существование пределов для вероятностей состояний $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t)$.

Теперь, используя уравнения Колмогорова (5.12) или (5.14), получим уравнения для пределов $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t)$. Для этого в (5.12) перейдем к пределу при $t \rightarrow \infty$. Правая часть стремится к константе $\sum_{k \neq j} p_k \lambda_{kj} - \Lambda_j p_j$. Следовательно, левая часть (5.12) также стремится к константе, причем в силу ограниченности вероятности $p_{ij}(t), 0 \leq p_{ij}(t) \leq 1$, при любых $t > 0$, предел производной может быть только нулем. Отсюда получаем систему алгебраических уравнений для предельных вероятностей состояний марковского процесса:

$$\sum_{k \neq j} p_k \lambda_{kj} - \Lambda_j p_j = 0, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i \in E} p_i = 1. \quad (5.35)$$

5.5. Процессы размножения и гибели

Марковские процессы, получившие название процессов размножения и гибели, определяются следующими равенствами для интенсивностей перехода при $k = 0, 1, \dots, n, \dots$:

$$\lambda_{kj} = \begin{cases} \lambda_{k,k+1} = \lambda_k > 0, \\ \lambda_{k,k-1} = \mu_k > 0, \quad \mu_0 = 0, \\ 0, \quad j \neq k+1, \quad j \neq k-1. \end{cases} \quad (5.36)$$

Если множество состояний конечно $E = (0, 1, \dots, N)$, $N < \infty$, то вводится дополнительное условие $\lambda_{N, N+1} = \lambda_N = 0$.

Из определения (5.36) следует, что вложенная цепь Маркова с положительной вероятностью переходит только в соседние состояния и из равенств (5.15) получаем

$$P_{kj} = \begin{cases} \frac{\lambda_k}{\mu_k + \lambda_k}, & j = k + 1, \\ \frac{\mu_k}{\mu_k + \lambda_k}, & j = k - 1, \\ 0, & j \neq k + 1, j \neq k - 1. \end{cases} \quad (5.37)$$

Следовательно, почти все траектории такого марковского процесса имеют одинаковые (единичные) скачки вверх или вниз. Множество состояний образует один сообщающийся класс существенных состояний.

1. Анализ предельных характеристик.

Выясним условия на интенсивности λ_k и μ_k , обеспечивающие *возвратность* и *положительность* состояний процесса размножения и гибели. Для этого воспользуемся результатами, приведенными в [8]. В наших обозначениях:

необходимыми и достаточными условиям положительной возвратности являются условия

$$\sum_{k \in E} \frac{1}{\lambda_k \theta_k} = \infty \quad (\text{расходимость ряда}) \quad (5.38)$$

$$\sum_{k \in E} \theta_k < \infty, \quad (5.39)$$

где обозначено

$$\theta_k = \begin{cases} \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}, & k \geq 1, \\ \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k, & \\ 1, & k = 0. \end{cases} \quad (5.40)$$

Если выполняются условия (5.38) и (5.39), то для процесса размножения и гибели существуют предельные вероятности состояний p_j .

Эти вероятности удовлетворяют системе (5.35), которая в рассматриваемом случае принимает вид:

$$\begin{aligned} p_1 \mu_1 - \lambda_0 p_0 &= 0, \\ p_{k+1} \mu_{k+1} - p_k (\lambda_k + \mu_k) + \lambda_{k-1} p_{k-1} &= 0, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Обозначим $z_k = p_k \mu_k - \lambda_{k-1} p_{k-1}$, $k \geq 1$. Тогда в новых обозначениях последняя система примет следующий вид:

$$z_k = 0, \quad k \geq 1,$$

что в свою очередь позволяет выписать рекуррентно решение:

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} p_{k-1}, \quad k \geq 1, \\ p_k &= \theta_k p_0, \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

если принять во внимание обозначения (5.40). Таким образом, с учетом нормировки получаем выражения для предельных вероятностей состояний марковского процесса размножения и гибели:

$$p_k = \frac{\theta_k}{\sum_{i \in E} \theta_i}, \quad k \geq 0. \quad (5.41)$$

Имея явные выражения предельных вероятностей (5.41), можно для процессов размножения и гибели, не решая систему алгебраических уравнений, получить выражение стационарных вероятностей вложенной цепи Маркова. Объединяя равенства (5.33) и (5.40) и учитывая условие нормировки, получаем после элементарных преобразований

$$\pi_k = \frac{\theta_k}{(\lambda_k + \mu_k)} \frac{1}{\sum_{i \in E} \frac{\theta_i}{(\lambda_i + \mu_i)}}.$$

2. Анализ частных случаев.

В качестве частных случаев рассмотрим процессы чистого размножения и процессы чистой гибели.

Процесс чистого размножения с интенсивностями перехода, не зависящими от состояния, $\lambda_k = \lambda$ и $\mu_k = 0$, подробно исследован в Главе 3. «Ветвящиеся процессы и пуассоновские процессы». Здесь заметим только,

что для процесса чистого размножения множество состояний вложенной цепи Маркова образует класс несущественных состояний и поэтому интерес представляют вероятностные характеристики на конечном интервале времени.

Далее исследуем характеристики процесса чистой гибели $\zeta(t)$ зафиксируем $n > 0$ и положим $P\{\zeta(0) = n\} = 1$ и $\lambda_k = 0$, $\mu_k = k\mu$, $0 \leq k \leq n$. Это значит, что рассматривается случай, когда интенсивности перехода зависят от состояния, когда процесс $\zeta(t)$ стартует из состояния $n > 0$, а состояние 0 является поглощающим.

Вычислим переходные вероятности этого однородного марковского процесса $p_{ks}(t) = P\{\zeta(t) = s / \zeta(0) = k\}$, $n \geq s \geq k \geq 0$, $t \geq 0$. Очевидно, что эти переходные вероятности отличны от нуля только для $s \leq k$. Используя уравнения Колмогорова для переходных вероятностей (5.12), при $0 \leq s \leq k \leq n$ докажем равенство

$$p_{ks}(t) = C_k^s (1 - e^{-\mu t})^{k-s} e^{-s\mu t}. \quad (5.42)$$

Доказательство проведем методом математической индукции. При $s = k$ имеем из (5.12) уравнение

$$p_{kk}'(t) = -k\mu p_{kk}(t),$$

единственным решением которого при начальном условии $p_{kk}(0) = 1$ является функция $p_{kk}(t) = e^{-k\mu t}$, то есть при $s = k$ равенство (5.42) справедливо. Далее предположим, что равенство (5.42) справедливо при $s < k$, и докажем его справедливость при $s - 1$. Из (5.12) получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение:

$$p_{k,s-1}'(t) = -(s-1)\mu p_{k,s-1}(t) + s\mu p_{k,s}(t) = -(s-1)\mu p_{k,s-1}(t) + s\mu C_k^s (1 - e^{-\mu t})^{k-s} e^{-s\mu t} \quad (5.43)$$

при начальном условии $p_{k,s-1}(0) = 0$. Единственным решением этого уравнения является функция

$$p_{k,s-1}(t) = C_k^{s-1} (1 - e^{-\mu t})^{k-s+1} e^{-(s-1)\mu t}, \quad (5.44)$$

что доказывается непосредственной подстановкой функции (5.44) в уравнение (5.43). Таким образом, доказано сформулированное утверждение (5.42).

Если учесть условие $P\{\xi(0) = n\} = 1$, то получим равенство для вероятностей состояний процесса чистой гибели при $0 \leq k \leq n$

$$P\{\xi(t) = k / \xi(0) = n\} = p_{n,k}(t) = C_n^k (1 - e^{-\mu t})^{n-k} e^{-k\mu t} \quad (5.45)$$

Равенству (5.45) можно дать интересную *интерпретацию*. Предположим, что в момент $t=0$ начинаются n операций, длительности которых есть независимые случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону с параметром μ . Тогда равенство (5.45) определяет вероятность того, что к моменту t ровно $n-k$ операций закончатся, а k операций продолжатся.